

Universidade Federal de Alfenas-UNIFAL

**Álvaro Luiz Mafra Florencio**

PRECIFICAÇÃO DE CONTRATOS DE RESSEGURO NÃO  
PROPORCIONAIS DE EXCESSO DE DANOS

Varginha/MG  
2019

Álvaro Luiz Mafra Florencio

PRECIFICAÇÃO DE CONTRATOS DE RESSEGURO NÃO  
PROPORCIONAIS DE EXCESSO DE DANOS

Trabalho apresentado ao curso de Ciências Atuariais, como requisito parcial para a obtenção do Título de bacharel pelo Instituto de Ciências Sociais Aplicadas (ICSA) da Universidade Federal de Alfenas.

Varginha/MG  
2019

## RESUMO

O resseguro é um mecanismo fundamental na garantia do compromisso fixado entre seguradora e segurado. Suas especificidades não são amplamente difundidas no Brasil por conta do monopólio setorial que chegou ao fim em 2007. O objetivo deste trabalho é demonstrar mecanismos de precificação de contratos não proporcionais de resseguros. Para tanto, o método utilizado foi a revisão de publicações acerca dessa temática, buscando exemplificar alguns mecanismos de precificação de contratos não proporcionais. Além disso, foi possível concluir que a precificação via curva de exposição será a ferramenta ideal para precificar resseguros não proporcionais quando não se possui dados de sinistralidades passadas. Enquanto que, quando se possui base de dados é possível precificar por intermédio dos métodos *Burning Cost*.

**Palavras-chave:** *Resseguro, curva de exposição, precificação, dinâmica contratual.*

## ABSTRACT

Reinsurance is a key mechanism in ensuring the commitment between the insurer and the insured. Its specificities are not widespread in Brazil due to the sectoral monopoly that ended in 2007. The objective of this paper is to demonstrate pricing mechanisms for non-proportional reinsurance contracts. Therefore, the method used was the review of publications on this theme, seeking to exemplify some pricing mechanisms of non-proportional contracts. In addition, it was possible to conclude that exposure curve pricing will be the ideal tool for pricing non-proportional reinsurance when past loss data is not available. Whereas when you have a database you can price using the *Burning Cost* methods.

**Key Words:** *Reinsurance, exposure curve, pricing, contract dynamics.*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>O Resseguro</b>	<b>3</b>
2.1	Os contratos proporcionais . . . . .	3
2.2	Os contratos não proporcionais . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Métodos de precificação dos contratos excesso de danos por risco</b>	<b>8</b>
3.1	Método determinístico . . . . .	8
3.2	Métodos estocásticos . . . . .	11
3.3	MBBEFD-Parametrização da Curva de Exposição . . . . .	15
3.4	Processo de precificação no resseguro . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>30</b>

# 1 Introdução

Construir um patrimônio, adquirir o carro próprio e zelar pela integridade pessoal ou familiar são exemplos de ambições que circundam o ideal de diversos indivíduos. No entanto, a dificuldade em cumprir esses objetivos é sentida pela ampla maioria dos cidadãos brasileiros, mas, mais do que possuir essas conquistas, é igualmente preocupante mantê-las, protegê-las, garantir que elas perpetuem cada qual pelo seu tempo usual de duração. Enfim, essas preocupações são, abstratamente, alguns dos componentes do mercado de seguros. Portanto, garantir que o portador da apólice tenha seu patrimônio segurado garantido é o pilar da dinâmica securitária.

No Brasil o resseguro era monopolizado pela empresa IRB Resseguros S.A até o ano de 2007, quando teve seu fim concretizado pela Lei Complementar 126/07. Desde então, o IRB continua como a principal resseguradora local, mas no entanto, não como a única. Partindo desse ponto, outras resseguradoras adentraram no mercado, tornando-o competitivo. Embora não tenha sido comprovada neste trabalho, a ausência de materiais sobre resseguro em linguagem vernácula pode sofrer influência desta recente abertura de mercado.

Para fins de compreensão deste trabalho, resseguro pode ser considerado como uma ferramenta que compõe os mecanismos de liquidação do risco e garantia da solvência. Embora esta não seja a definição formal de resseguro, para fins práticos pode ser assim interpretada. Na primeira seção deste trabalho, será esclarecido o que é o resseguro, sua utilidade e algumas possíveis disposições presentes nos seus contratos, sendo eles proporcionais ou não. Enquanto, na segunda seção serão abordados os métodos de cotação de prêmios de resseguro: partindo dos métodos determinísticos, passando pelos estocásticos; e, por fim, abordando uma função de distribuição demasiadamente utilizada neste cenário de precificação de contratos, a função de distribuição *MBEFD*.

Este trabalho foi escrito com base em revisão literária de materiais majoritariamente internacionais que visam esclarecer as minúcias dos contratos de resseguro. Seu objetivo é demonstrar alguns mecanismos para precificação de contratos de resseguros não proporcionais de excesso de danos, subdividindo eles em métodos determinísticos e estocásticos. De modo que o primeiro será realizado por intermédio dos métodos *Burning Cost*, enquanto o segundo poderá ser feito tanto pelo método que utiliza as funções de distribuição, quanto pelo que utiliza as curvas de exposição.

## 2 O Resseguro

### 2.1 Os contratos proporcionais

Os contratos de resseguro podem se distinguir por diversos critérios, e dentre esses, existem os proporcionais e os não proporcionais. Essas distinções são observadas tanto pela cedente (seguradora) quanto pela cessionária (resseguradora), conforme os riscos que se quer subscrever. Como existe uma gama de modalidades contratuais, para se ter uma

política ressecuritária bem ajustada, pode haver a combinação de dois, ou mais, tipos de contratos de resseguro (PARODI, 2014).

A notação  $X_k$  representa o valor de uma determinada perda individual dado um risco  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), de modo que, considerando a teoria do risco, existirá somente uma perda para cada risco correspondente. Sendo assim, considerando essa propriedade, a equação 2.1 mostra como uma perda individual pode ser demonstrada, se considerado os contratos de resseguro proporcional

$$X_k = X_k^{ret} + X_k^{ced}. \quad (2.1)$$

A variável  $X_k^{ret}$  da equação 2.1 representa a parte que a seguradora retém e  $X_k^{ced}$  é a parcela cedida à resseguradora. Portanto,  $X_k^{ret}$  e  $X_k^{ced}$  são funções de  $X_k$ , sendo assim,  $X_k^{ret} = \alpha X_k$ , e  $X_k^{ced} = (1 - \alpha)X_k$ , em que  $\alpha$  é a taxa de rateio do valor dos danos causados pela materialização individual do risco assumido  $X_k$ .

A esperança da perda individual retida será igual a

$$E[X_k^{ret}] = \alpha E[X_k], \quad (2.2)$$

e sua variância

$$Var[X_k^{ret}] = \alpha^2 Var[X_k]. \quad (2.3)$$

A equação 2.1 se refere à proporcionalidade de riscos individuais. No caso de perdas agregadas, elas seriam como

$$S = \sum_{k=1}^N X_k = X_1 + \dots + X_N. \quad (2.4)$$

Ao observar as variáveis que compoem a equação 2.4, pode-se dizer que  $N$  é a variável aleatória número de sinistros da carteira,  $X_k$  é a  $k$ -ésima indenização paga pela seguradora mediante o risco  $k$  de ocorrência (HINOJOSA; MILANÉS, 2010).

Caso fosse necessário que esse contrato atuasse por diversos anos, considerando o mesmo  $N$  e a perda igualmente distribuída. A esperança da perda agregada poderia ser obtida relacionando o número esperado de perdas em um dado ano ou período e a quantidade esperada de uma dada perda. De modo que

$$E(S) = E(N)E(X). \quad (2.5)$$

Conforme Parodi (2014) a variância dessa perda agregada, durante o decorrer dos anos, pode ser expressada como

$$Var(S) = Var(X)E(N) + E(X)^2 Var(N). \quad (2.6)$$

Observando o que foi exposto nesta subseção, é possível associar as funções 2.4 e 2.1 com as propriedade relacionadas à parcela de risco cedido  $X_k^{ced} = (1 - \alpha)X_k$  e retido

$X_k^{ret} = \alpha X_k$ , relações essas que podem ser demonstradas como

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^N X_k \\
&= \sum_{k=1}^N (X_k^{ret} + X_k^{ced}) \\
&= \sum_{k=1}^N [\alpha X_k + (1 - \alpha) X_k] \\
&= \alpha \sum_{k=1}^N X_k + (1 - \alpha) \sum_{k=1}^N X_k.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

### Resseguro cota-parte - *Quote Share*

O resseguro de cota-parte é a modalidade mais simples de se compreender quando se pensa em contratos de resseguro. No caso, a seguradora cede uma proporção fixa de todos seus riscos e prêmios subscritos para uma determinada resseguradora. O cota-parte é mais usual em seguradoras que estão em desenvolvimento, pois essas podem avaliar os riscos assumidos de maneira equivocada, possuindo assim, elevado risco de subscrição. No entanto, esta modalidade contratual é pouco usual no mercado por conta das suas limitações técnicas (HINOJOSA; MILANÉS, 2010).

Para exemplificar essas definições, suponha que a seguradora esteja cobrindo uma propriedade de valor muito elevado e que ocorra um evento de baixa probabilidade de ocorrência, no qual toda propriedade será destruída. Tal evento acarretaria numa perda individual ( $X_k$ ) exorbitante para a seguradora, mesmo que ela tenha cedido uma parcela à resseguradora. Sendo assim, os contratos de resseguro cota-parte não observam o peso dos riscos que estão subscritos, considerando somente uma proporção para rateio. Enfim, é válido denotar que a indenização agregada retida pela seguradora é dada por

$$\begin{aligned}
(S)_\alpha^{ret} &= \sum_{k=1}^N (X_k)_\alpha^{ret} \\
&= \sum_{k=1}^N \alpha X_k \\
&= \alpha \sum_{k=1}^N X_k \\
&= \alpha S.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

### Resseguro excedente de responsabilidade - *Surplus Share*

O resseguro excedente de responsabilidade observa o peso do risco subscrito, em vez de denotar uma igual proporção fixa para todos os riscos, como no cota-parte (DE-

ELSTRA; PLANTIN, 2014). Tal tipo de resseguro é um sistema mais complexo do que o cota-parte, e portanto, possui gastos administrativos superiores.

Nessa modalidade, a resseguradora não participa de todos os riscos, pois, caso ele seja de peso pequeno não há necessidade de cessão. Por outro lado, se o peso do risco for grande e extrapole o limite de retenção (limite técnico) da seguradora, ela irá ceder múltiplos (pleno) da sua quantia subscrita à resseguradora, enquanto a resseguradora poderá limitar sua aceitação de responsabilidades através do chamado excedente, que é o somatório de alguns plenos (HINOJOSA; MILANÉS, 2010).

Neste tipo de resseguro, os prêmios e benefícios são pagos em conformidade com os excedentes distribuídos (MAPFRE, 2011). Contudo, vale observar que caso o risco subscrito seja grande, a parcela que será cedida também irá ser. No entanto, o oposto também ocorre, caso o risco seja pequeno a parcela cedida será pequena ou igual a zero. Entretanto, a desvantagem do contrato excedente de responsabilidade é a dificuldade administrativa e de aplicação (HINOJOSA; MILANÉS, 2010).

## 2.2 Os contratos não proporcionais

O resseguro não proporcional é estabelecido sobre os sinistros ocorridos e não sobre a importância segurada. Nesta dinâmica contratual o evento que causou o sinistro deve ser devidamente observado, para que sua cobertura seja subscrita de maneira coerente. Além disso, o ressegurador irá indenizar a seguradora caso o valor do sinistro ocorrido ultrapasse o dedutível,  $d$ , e seja limitado pelo limite máximo coberto pela resseguradora (BUGMANN, 1997).

Os contratos não proporcionais atuam protegendo carteiras homogêneas, sejam elas de veículos, propriedades, entre outros. Caso um evento catastrófico ocorra, diversas apólices poderão ser acionadas, independente desses eventos serem naturais, como furacões, terremotos ou tempestades, ou não naturais, como algum ato terrorista. Em vista disso, os eventos que causarão os sinistros são responsáveis pela escolha da modalidade contratual não proporcional que será aderida (BUGMANN, 1997).

### Resseguro excesso de danos por risco - *XL per risk*

Conforme Parodi (2014), resseguro excesso de dano por risco (*excess of loss* ou *XL*) é um dos tratados não proporcionais que atua cobrindo a seguradora primária caso o sinistro ocorrido acarrete perdas que superem o dedutível,  $d$ . Portanto, a parcela cedida fica sob responsabilidade da resseguradora será igual a

$$\begin{aligned}(X)_{ced} &= 0, X \leq d; \\ &= X - d, d < X < d + L; \\ &= L, X > d + L.\end{aligned}$$

O *XL* utiliza faixas de retenção para fracionar as parcelas de riscos que os distintos agentes securitários serão responsáveis. Essas faixas podem ser vistas pela notação  $L \text{ x } s \text{ d}$

( $L$  em excesso de  $d$ ), ou simplesmente pelo intervalo  $[d, d + L]$ . Caso o valor do sinistro ultrapasse  $L$  deverá ser utilizada a reintegração para pulverizar o risco subscrito. Contudo, na prática, o  $XL$  pode ser dividido em diversas faixas, como por exemplo, um tratado de 100  $xs$  40 pode ser dividido em duas faixas: 50  $xs$  40 e 50  $xs$  90 (DEELSTRA; PLANTIN, 2014).

Para ilustrar a reintegração, assumamos uma faixa inicial  $R\$3000,00$   $xs$   $R\$2000,00$  (a resseguradora é responsável pelos  $R\$3000,00$  enquanto a seguradora retém  $R\$2000,00$ ). Sendo assim, pode-se dizer que essa faixa sofreu uma reintegração, seria dizer que até  $R\$6000,00$  seria pago pela resseguradora ( $R\$3000,00 \times 2$ ). Caso sofra mais uma reintegração essa retenção se tornaria  $R\$9000,00$  ( $R\$3000,00 \times 3$ ). Por fim, se ocorrer  $p$  reintegrações a notação seria  $R\$3000,00 \times p$ . Essa reintegração máxima pode ser chamada de responsabilidade máxima anual (DEELSTRA; PLANTIN, 2014).

Os procedimentos de reintegração são utilizados pelas seguradoras geralmente quando possuem contratos fixados com indústrias, pois elas têm maior capacidade financeira para arcar com possíveis prêmios de reintegração. Estes prêmios de reintegração usualmente são automáticos e em sua maioria não necessitam de aprovação. Por fim, deve se deixar claro que reintegrações gratuitas também existem, no entanto são mais comuns em faixas menores (DEELSTRA; PLANTIN, 2014, PARODI, 2014).

O mercado ressegurador deve se atentar para a inflação, pois o contrato é firmado em condições nominais, mas com o decorrer dos anos esse valor fica em desconformidade com o valor real. Portanto, a resseguradora deve reajustar os valores presentes nas faixas fazendo-os garantir a solvência e suas obrigações contábeis (MAPFRE, 2011). A cláusula de estabilização ou cláusula-índice, caso não sejam utilizadas de maneira ótima, podem ocasionar reintegrações indevidas ou que diversas faixas sejam utilizadas equivocadamente. Para que essa situação adversa não ocorra, no momento da reclamação, a cláusula-índice deverá ser calculada pela resseguradora, transformando, por exemplo, a faixa  $R\$4000,00$   $xs$   $R\$2000,00$  em  $R\$4800,00$   $xs$   $R\$2400,00$ , dado uma cláusula índice de 1,2 (MAPFRE, 2011, PARODI, 2014).

### **Excesso de danos catástrofe - *Cat XL***

O resseguro *Cat XL* atua com nível de retenção muito superior aos demais tipos contratuais pois seu evento gerador é um evento catastrófico. Tal evento pode acionar diversos apólices ao mesmo tempo. Além disso, esse tipo contratual é geralmente aplicado para danos em propriedades (PARODI, 2014).

Este tipo contratual, além de observar o evento gerador, também observa o momento em que ocorreu o sinistro proveniente desse evento catastrófico. Ele o faz por meio de uma cláusula, a qual estabelece que para validar o aviso de sinistro, este deverá ser feito pela resseguradora em tempo hábil que geralmente é um múltiplo de 24 horas. Por exemplo, a resseguradora irá cobrir os sinistros provenientes de um furacão desde que a seguradora os informe em até 8 dias após o evento em questão (PARODI, 2014).

## Resseguro *Stop-Loss*

O *stop-loss* anual, ou resseguro *stop-loss* é outro produto atuarial de caráter ressegurador, que visa limitar as perdas anuais da cedente desconsiderando a natureza dos eventos ou as causas que ocasionaram os sinistros utilizando uma taxa de perda. Este produto atuarial não será mais evidenciado durante o trabalho pois, como será demonstrado na seção seguinte, ele não pode ser precificado via o artifício da curva de exposição, por conta da sua não observação da natureza do evento que ocasionou o sinistro (DEELSTRA; PLANTIN, 2014).

## 3 Métodos de precificação dos contratos excesso de danos por risco

O escopo desta seção é demonstrar metodologias utilizadas para calcular o valor esperado dos prêmios de uma faixa de resseguro, conforme o tipo de contrato de resseguro em questão. Neste trabalho será apresentado somente metodologias para os resseguros não proporcionais de excesso de danos por risco (*XL per Risk*), de modo que ele será cotado de duas maneira distintas. A primeira utilizará um método determinístico, enquanto que a segunda seguirá por um método estocástico, o qual utilizará as funções de distribuição e os métodos por exposição como mecanismos de cálculo (MAPFREE, 2011).

### 3.1 Método determinístico

Os modelos determinísticos são compostos por variáveis não aleatórias, portanto, valores observáveis. Esses modelos têm seus resultados como ferramentas analíticas, exceto quando seus resultados são complexos e tem-se a necessidade de realizar simulações como mecanismos capazes de reduzir essa complexidade. Sendo assim, em se tratando de resseguro, os cálculos de cotação determinísticos serão realizados com o artifício das técnicas de *Burning Cost*, que serão demonstradas adiante (PARODI, 2014).

#### *Burning Cost*

Os métodos de cálculo de cotação *Burning Cost (BC)*, apesar de suas limitações técnicas, são os mecanismos de precificação mais utilizados quando se tem dados históricos. Exemplos dessas informações podem ser os sinistros que ocorreram e foram ou não reclamados, as variações dos perfis de risco, a exposição ao risco de seus segurados, as provisões para grandes riscos (*Large Losses*), entre outros fatores. Por conseguinte, caso a resseguradora tenha observado essas informações, ela corrige esses dados coletados por algum índice inflacionário. Sendo assim, pode-se considerar este método de cotação como uma estimativa das perdas para uma dada apólice ou carteira, com o intuito de comparação entre os prêmios e sinistros (PARODI, 2014).

Segundo Parodi (2014), a análise de *Burning Cost* é o máximo que se pode fazer

quando se considera o risco e sua volatilidade, sem que seja necessário utilizar métodos estocásticos. Sendo assim, Parodi (2014) expõe que ao obter os resultados provenientes dessa análise, pode-se utilizá-los como uma etapa intermediária entre as estatísticas descritivas iniciais dos dados e os resultados de frequência/severidade modelados.

Os métodos de cotação de *Burning Cost* são plurais, por tanto, existem mais de uma forma de realizar suas projeções. O presente trabalho irá demonstrá-las superficialmente, com exceção do *Burning Cost* Puro Triangulado, o qual será exemplificado adiante para sintetizar algumas definições pré-estabelecidas.

O cálculo do *Burning Cost* Puro (BCP) é o prêmio recebido pela seguradora no ramo que se quer aplicar a cobertura de resseguro comparados com o valor dos sinistros cobertos pelo ressegurador, desde que esses dados de resseguro sejam análogos aos quais se quer estimar. Para realizar seu cálculo anual, deve-se dividir a soma dos sinistros individuais anuais por faixa de risco ( $X$ ) pelo prêmio agregado ( $P$ ) de todos os anos em questão (MAPFREE, 2011).

$$BCP = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{\sum_{i=1}^k P_i} \quad (3.1)$$

Outro método é o de *Burning Cost* Indexado (BCI) que observa as mesmas variáveis do BCP (os sinistros individuais e o desenvolvimento dos prêmios nos anos de interesse) acrescidas por um índice inflacionário. Isto é, como as variáveis do cálculo do BCP considera dados de anos anteriores para projetá-los para uma data futura, o BCI é a correção dessa estimação por intermédio de um índice de ajuste (MAPFREE, 2011).

O *Burning Cost* Puro Triangulado é muito utilizado no cálculo de provisões de sinistros ocorridos mas não avisados (*Incurred But Not Reported-IBNR*), pois podem ocorrer sinistros que irão demorar mais de dez anos (*Long Tail*) para serem liquidados, como os casos judiciais, por exemplo. Fato esse que pode gerar dificuldade para calcular o valor do sinistro. Sendo assim, o procedimento para calcular as faixas de resseguro irá depender das informações disponibilizadas pela cedente, para que a cessionária possa calcular os sinistros individuais dentro das faixas; soma-los, observando o ano de subscrição e de desenvolvimento e, por fim, utilizar o método “*Chain Ladder*” para estimar os últimos valores dos anos que estão sendo estimados. Além disso, é possível efetuar o mesmo procedimento considerando uma taxa de juros que irá manter a capacidade financeira durante os anos projetados, conhecida como *Burning Cost Indexado Triangulado* (MAPFREE, 2011).

### Aplicação prática - *Burning Cost*

Os exemplos adiante ilustram as propriedades explicitadas a pouco acerca do mecanismo de precificação de contratos de resseguros excesso de danos: *Burning Cost*. O presente trabalho o tratará como o método *Chain Ladder*, também conhecido como Triângulo de *Run-off*.

A Tabela 1 trata dos valores de sinistros acumulados durante os anos de desenvolvimento, de modo que, por exemplo o valor 10400 é o valor acumulado dos sinistros ocorrido em 2011 e 2012; 21700 é o valor acumulado de 2011 até 2013.

Tabela 1: Somatórios acumulados do sinistros

Soma Acumulada	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	Ano 6
Soma de 2011:2012	10400	28000	31300	33400	35200	36000	
Soma de 2011:2013	21700	60600	66100	70600	74100		
Soma de 2011:2014	38400	109500	120200	128300			
Soma de 2011:2015	60100	174000	190900				
Soma de 2011:2016	86400	236000					
Soma de 2011:2017	110100						

Fonte: (SAMPAIO, 2018).

Com base nos valores dos sinistros acumulados, serão calculados os fatores de desenvolvimento presentes da Tabela 2, os quais são taxas obtidas a partir da divisão dos valores acumulados de 2011 a 2016 no ano 1 pelo valor acumulado no mesmo período, porém no ano de desenvolvimento inicial, ano 0  $236000/86400 = 2,7314$ . Seguindo essa mesma linha, obtem-se o fator de desenvolvimento relativo ao desenvolvimento do ano 2 em função do ano 1 como  $190900/174000 = 1,0971$  e conforme esse procedimento, será preenchido os dados da Tabela 2 relativos à coluna “de ano a ano”.

O cálculo para preenchimento da coluna “Acumulada” é obtido pelo produto ‘de baixo para cima da coluna “de ano a ano”:  $1,07332 = 1,0495 \times 1,0227 \times 1,00$ . Sendo assim, o último valor será relativo ao produtório de toda a coluna “de ano a ano”. Por outro lado, a coluna “% Desenvolvimento” é obtida pela expressão:  $100 \times (1/Acumulado_{ano: i, i+1})$ . No ano 2 em função do ano 1, tem-se que  $100 \times (1/3,4328) = 29,13\%$  e assim sucessivamente.

Ano	de ano a ano	Acumulada	% Desenvolvimento
0 a 1	2,7314	3,4328	29,13%
1 a 2	1,0971	1,25679	79,56%
2 a 3	1,0637	1,1455	87,29%
3 a 4	1,0495	1,0733	93,16%
4 a 5	1,0227	1,0227	97,78%
5 a 6	1,00	1,00	100%

Fonte: (SAMPAIO, 2018).

A Tabela 3 foi preenchida pelas informações encontradas nas Tabelas 1 e 2. O objetivo desse preenchimento é projetar o quanto de sinistros serão pagos no ano  $n$  dado

seu ano de origem. Tal situação pode ser interpretada como: suponha o ano 2016 como o ano de subscrição do contrato, dado que ocorreu um sinistro neste ano que ainda não foi liquidado pela resseguradora. Com o advento deste mecanismo, é possível estimá-lo com base nas experiências passadas e, deste modo, o ressegurador saberá em média o quanto de indenização deverá garantir nesta operação para cada faixa de resseguro adotada.

O cálculo de estimação se dá pelo produto do último valor de cada ano de desenvolvimento com o fator de desenvolvimento respectivo a este mesmo período. Como exemplo, para encontra o valor que deverá ser liquidado no ano de 2018 dado que o sinistro ocorreu no ano de 2017, deverá efetuar o produto de  $23700 \times 2,7314 = 64736$ ; para o ano de 2019, dado que o sinistro ocorreu em 2017, será de  $64736 \times 1,0971 = 71024$  e assim sucessivamente, até que se estime para todo o período proposto. No entanto, uma advertência deve ser levada em conta, em relação a este mecanismo, pois, como existe a projeção de valores que foram projetados a eficácia desse procedimento vai se reduzindo conforme o passar dos anos de projeção.

Tabela 3: Valores acumulados

Període de Subscrição de Contrato	Desenvolvimento do Aviso em Anos						
	0	1	2	3	4	5	6
<b>2011</b>	4900	12200	13400	14500	15200	15500	15500
<b>2012</b>	5500	15800	17900	18900	20000	20500	<b>20500</b>
<b>2013</b>	11300	32600	34800	37200	38900	<b>39784</b>	<b>39784</b>
<b>2014</b>	16700	48900	54100	57700	<b>60560</b>	<b>61937</b>	<b>61937</b>
<b>2015</b>	21700	64500	70700	<b>75464</b>	<b>79205</b>	<b>81006</b>	<b>81006</b>
<b>2016</b>	26300	62000	<b>68022</b>	<b>72606</b>	<b>76205</b>	<b>77937</b>	<b>77937</b>
<b>2017</b>	23700	<b>64736</b>	<b>71024</b>	<b>75810</b>	<b>79568</b>	<b>81376</b>	<b>81376</b>

Fonte: (SAMPAIO, 2018).

## 3.2 Métodos estocásticos

Um processo estocástico pode ser compreendido basicamente como o estudo de vetores aleatórios que possuem estrutura de dependência gerenciada por um conjunto de indexação. Com base nisso, esta seção irá considerar as variáveis aleatórias que irão compor a base de cálculo do prêmio de resseguro. Sendo assim, serão abordadas duas frentes temáticas: a primeira visando estudar algumas funções de distribuição, enquanto a segunda irá adotar o método por exposição.

### Método das funções de distribuição

O método de precificação de resseguro por meio do ajuste de uma função de distribuição de probabilidade é uma estimação. Sendo assim, é necessário que existam dados sobre sinistros anteriores para serem úteis na estimação do prêmio de resseguro da faixa.

Conforme publicação da Fundação Mapfree (2011), para realizar a estimação do prêmio de risco de uma faixa, pode utilizar a expressão a seguir

$$\text{Prêmio} = (\text{Valor Estimado de Sinistro}) \times (\text{Quantidade de Sinistro Estimado}) \quad (3.2)$$

As variáveis da equação são estocásticas, além disso, as distribuições dos termos da equação se diferem. Deste modo, a variável “Valor Estimado de Sinistro” diz respeito sobre a avaliação do sinistro esperado acima da prioridade,  $d$ , e será modelada por um modelo de severidade. Sendo assim, ela pode ser demonstrada pelas distribuições de caldas pesadas, como a *Pareto*, as distribuições de valores extremos, a distribuição *Log Normal*, entre outras. No caso do segundo termo da equação (“Quantidade de Sinistro Estimado”), é observado a frequência esperada dos sinistros, considerando que a prioridade,  $d$ , tenha sido extrapolada por alguma ocorrência de sinistro. A utilização da distribuição *Poisson* (comum em riscos coletivos) é mais usual. No entanto, outras distribuições de frequência podem ser utilizadas, como por exemplo a *Binomial* (comum em riscos individuais) e a *Binomial Negativa*, comum em risco coletivo (MAPFREE, 2011).

Parodi (2014) demonstra que para calcular a frequência esperada dos sinistros, deve-se usar como artifício a Provisão de Sinistros Ocorridos mas não Avisado (*PEONA* ou *IBNR*). É necessário utilizar esse método, porque é preciso saber a contagem final de reclamações de sinistros ocorridos para cada ano. No entanto, a informação mais comum de se ter é o número de reclamações relatadas durante um ano em particular. Para encontrar a contagem de reclamações relatadas e a contagem final de reclamações, é preciso calcular a provisão *IBNR* que irá estimar o resultado desejado.

Conforme a equação 3.2, para estimar o valor do “Prêmio de Risco” de resseguro, é necessário realizar o produto do “Valor Estimado do Sinistro” e “Quantidade de Sinistro Estimado”. No entanto, para realizar essa operação, é necessário utilizar algum algoritmo ou simulação (a simulação de Monte Carlo pode ser uma opção). Por conseguinte, o resultado desse produto será o “Prêmio de Risco” de resseguro estimado (MAPFREE, 2011).

## As funções de distribuição do método por exposição

O método por exposição é utilizado quando a base de dados referente a danos passados é insuficiente para uma possível estimação. Sendo assim, com o advento dessa ferramenta, observa-se somente a exposição ao risco que determinado bem segurado está inserido (BERNEGGER, 1997). Além disso, esse método também pode ser utilizado quando a subscrição apresentada anteriormente sofre demasiada transformação. Contudo, deve-se observar que seu escopo é para os contratos de resseguro não proporcionais de excesso de danos (PARODI, 2014).

O método de classificação por exposição é calculado com base nos perfis de risco e na distribuição do valor (grau) do dano da carteira ressegurada. Baseado nesses perfis, pode-se sumarizar aqueles com características semelhantes (seja *Soma Segurada*, *Dano Máximo Possível* ou *Dano Máximo Estimado*) em faixas. Contudo, após essa sumarização, a tarefa de modelar esses riscos homogêneos se torna factível somente com o intermédio de

uma função de distribuição de dano (BERNEGGER, 1997). Conforme algumas literaturas, o perfil de risco demonstra quais as linhas de negócios estão sendo resseguradas, o valor (grau) dos riscos individuais ( $V_i$ ), os prêmios puro por faixa ( $P^h$ ) e o número de risco em cada faixa ( $N_{risco}^h$ ). Sendo assim, haverá uma curva de exposição para cada perfil de risco homogêneo (HREVUŠ, 2019).

Considere a função de distribuição  $F(X')$  definida no intervalo  $[0, 1]$ , onde  $X'$  é o grau de dano individual,  $X' = X/M$ , sendo  $X$ , variável aleatória normalizada que representa o valor individual do sinistro antes do resseguro, e  $M$  o *Dano Máximo Possível* ou cobertura máxima. Além disso, segundo Bernegger (1997),  $X'$  pode ser considerado como o “dano normalizado”. Além disso, a função de valor esperado limitado da função acumulado  $F(X')$  pode ser representada por

$$L(d) = E[\min(X', d)]. \quad (3.3)$$

Baseado na função 3.3 e nas propriedades anteriormente demonstradas,  $M \times L(d) = M \times E[\min(X', d)] = E[X_{ret}]$  é o valor esperado das perdas retido pela seguradora. Enquanto,  $M \times (L(1) - L(d)) = M \times (E[X'] - E[\min(d, X')]) = E[X_{ced}]$  será o valor esperado dos danos agregados cedidos à resseguradora. Deste modo, o percentual do premio puro de risco retido pela seguradora é dado pela função do valor esperado limitado relativo  $G(d) = L(d)/L(1)$  (BERNEGGER, 1997).

$$\begin{aligned} G(d) &= \frac{L(d)}{L(1)} \\ &= \frac{\int_0^d (1 - F(y)) dy}{\int_0^1 (1 - F(y)) dy} \\ &= \frac{1}{E[x]} \int_0^d (1 - F(y)) dy. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Com base nisso,  $1 - F(X') \geq 0$  e  $F'(X') = f(X') \geq 0$ . Deste modo,  $G(d)$  é uma função côncava e crescente no intervalo  $[0, 1]$ , de modo que por definição  $G(0) = 0$  e  $G(1) = 1$  (BERNEGGER, 1997).

Parodi (2014) define curva de exposição como o percentual de risco retido pelo ressegurador após estabelecido um determinado dedutível,  $d$ , (para ele a curva é uma função do dedutível  $G(d)$ ). Sendo assim, a curva de exposição demonstra que estabelecido um dedutível  $d$  como um percentual ( $d\%$ ) ou da *Soma Segurada* ou do *Dano Máximo Possível*, a indenização que a seguradora deverá arcar será reduzida em  $(1 - G(d))$  do “Prêmio de Risco” de resseguro.

Bernegger (1997) introduziu uma família de funções analíticas capazes de auxiliar na modelagem de curvas de exposição e modelos de dano. As propriedades e conclusões demonstradas pelo autor são reconhecidas como a base teórica mais difundida quando se trata de precificação e subscrição de contratos de resseguro não proporcionais (HREVUŠ,

2019). Com base em Bernegger (1997), sabe-se que existem uma quatia finita de curvas de exposição à disposição dos subscritores, sendo elas capazes de serem utilizadas tanto em formato de gráficos quanto de tabelas. Para cada faixa de risco homogêneo será considerada uma curva de exposição diferente.

Caso se tenha em posse a curva de exposição  $G(x)$ , Bernegger (1997) afirma que é possível encontrar sua função de distribuição acumulada  $F(x)$  derivando essa curva de exposição no ponto  $d$

$$G'(d) = \frac{1 - F(d)}{E(X')}. \quad (3.5)$$

Caso assuma que  $X' = 0$ ;  $F(0) = 0$  e a derivada a função da Curva de Exposição será igual a  $G'(0) = 1/E[X']$ . Portanto, conforme Bernegger (1997)

$$F(X') = \begin{cases} 1 - \frac{G'(X')}{G'(0)} & \text{se } 0 \leq X' < 1 \\ 1 & \text{se } X' = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Deste modo, Bernegger (1997) diz que  $F(X')$  e  $G(X')$  são representações de funções de distribuição de danos.

Caso a curva de exposição tenha forte concavidade e um pequeno dedutível  $d$  fixado, o risco cedido ( $X_{ced}$ ) ao ressegurador será fortemente reduzido e a probabilidade de perda total,  $M$ , será insignificante. No entanto, caso a curva de exposição não possua concavidade, ela será a bissetriz do primeiro quadrante. Então todas as possíveis perdas seriam perdas totais, de modo que um  $d\%$  causaria uma redução nos danos de exatamente  $d\%$ , mostrando baixa eficiência do modelo adotado. E, por fim, uma situação que não é tão extrema quanto a anterior: uma curva de exposição próxima da bissetriz do primeiro quadrante, com baixa concavidade, tem seu dedutível  $d\%$  com menor efetividade e, portanto, possui significativa probabilidade de uma perda total ocorrer (PARODI, 2014).

Sobre a probabilidade de dano total e seu valor esperado, Parodi (2014) diz que é importante demonstrar suas relações, pois os gráficos das curvas de exposição estão no intervalo  $[0, 1]$ , no qual  $X' = 1$  é justamente  $M$  e, por definição de probabilidade tem-se que:

$$\Pr(X' = 1) = \Pr(X' \leq 1) - \Pr(X' < 1) = 1 - \lim_{X' \rightarrow 1^-} F(X'). \quad (3.7)$$

Bernegger (1997) afirma que a probabilidade  $p$  de perda total é igual a  $1 - F(1^-)$  e o valor do dano esperado ou a média do dano esperado  $\mu$  é igual a  $E[X']$ . Sendo assim, essas funções são baseadas na função de distribuição acumulada  $F(X')$ , a qual pode ser derivada a partir da função da curva de exposição,  $G(X')$ , assumida no ponto  $X' = 0$  e também no ponto  $X' = 1$ . Por conseguinte, tem-se

$$\mu = E[X'] = \frac{1}{G'(0)}; \quad (3.8)$$

enquanto a probabilidade de perda total

$$p = M = 1 - F(1^-) = \frac{G'(1)}{G'(0)}. \quad (3.9)$$

Como  $G(X')$  é uma função côncava e crescente em  $[0, 1]$ , deve-se deixar claro a inequação de seus valores pontuais

$$G'(0) \geq 1 \geq G'(1) \geq 0 \quad (3.10)$$

A curva de exposição assumida,  $G(X')$ , e sua respectiva função de distribuição acumulada,  $F(X')$ , foram apresentadas até o momento contidas no intervalo  $[0, 1]$ . No entanto, se o intervalo for diferente desse, ainda assim, pode-se expor propriedades acerca dessa função. Sendo assim, considerando o intervalo  $[0, \infty]$  a função de distribuição acumulada  $F(X')$  ainda pode ser definida. Porém, não existirá dano máximo ( $M$  ou  $p$ ). Além disso, a normalização das variáveis aleatórias  $X$  e  $D$  podem também ser dadas respectivamente por  $X' = X/X_0$  e  $d = D/X_0$ , onde  $X_0$  será o dano referencial. Ademais, a função da curva de exposição  $G(d)$  segue côncava, crescente, com  $G(0) = 0$  e  $\lim_{d \rightarrow \infty} G(d) = 1$ . Por fim, o valor esperado respeita a igualdade  $\mu = E[X'] = \frac{1}{G'(0)}$  (BERNEGGER, 1997).

### 3.3 MBBEFD-Parametrização da Curva de Exposição

Existem disponíveis no mercado um número limitado de curvas de exposição, e isso pode ser visto como uma situação problemática. Além deste problema, elas podem ser demonstradas como funções lineares e podem ter baixa alteração quando se muda o programa de resseguro. No entanto, parte desses problemas podem ser solucionados com a adesão no modelo de uma nova função de distribuição, a qual irá reestabelecer os valores presentes da tabela de exposição, de modo que curvas que anteriormente eram influenciadas por parcelas de funções lineares serão reajustadas tornando-se funções contínuas (HREVUŠ, 2019).

#### Base teórica da função de distribuição MBBEFD

A função de distribuição *MBBEFD* tem seu nome proveniente da abreviação das letras iniciais dos nomes dos físicos *Maxwell-Boltzmann*, *Bose-Einstein*, *Fermi-Dirac*, que buscavam discreditar a dispersão de moléculas de gases em um determinado experimento científico. No entanto, outro físico a inseriu no ramo da Estatística e Ciências Atuárias: *Stefan Bernegger* (BERNEGGER, 1997). Ele a ajustou para ser utilizada como parte de um modelo probabilístico que explicasse a distribuição de danos em propriedades seguradas (HREVUŠ, 2019).

A função de distribuição *MBBEFD* pode ser vista como uma possível parametrização da curva de exposição, permitindo até, que por seu intermédio outras curvas de exposição possam ser calculadas. Essa distribuição é modelada pelos parâmetros  $b$  ( $b \geq 0$ ) e  $g$  ( $g \geq 1$ ). No entanto, em um caso especial pode ser reajustada para que deixe de ser bi-paramétrica e se torne uni-paramétrica,  $c$ . Este parâmetro descreve os riscos assumidos, por meio da concavidade da curva reajustada (HREVUŠ, 2019; PARODI, 2014).

## Curva de exposição MBBEFD

A equação 3.7 representa a função de distribuição acumulada do grau de dano, e segundo Bernegger (1997), ela pode ser reescrita conforme os parâmetros  $a$  e  $b$ .

$$F(X') = \begin{cases} 1 - \frac{(a+1)b^{X'}}{a+b^{X'}} & \text{se } 0 \leq X' < 1 \\ 1 & \text{se } X' = 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

A curva de exposição denotada pela equação 3.4 pode ser reformulada

$$G_{a,b}(X') = \frac{\ln(a+b^{X'}) - \ln(a+1)}{\ln(a+b) - \ln(a+1)}. \quad (3.12)$$

Em que, o denominador e o termo  $-\ln(a+1)$  presente no numerador assegura que as condições de limite  $G(0) = 0$  e  $G(1) = 1$  sejam cumpridas. No entanto, para os casos em que  $a$  assumam os valores  $\{-1, 0, \infty\}$  e  $b$  os valores  $\{0, 1, \infty\}$  devem ser tratados separadamente (BERNEGGER, 1997).

## Nova parametrização

Os parâmetros ( $a$  e  $b$ ) das funções 3.11 e 3.12 são responsáveis por tornar a função 3.12 real, crescente e concava no intervalo  $[0, 1]$ . Para tanto, Bernegger (1997), preenche essa condição utilizando como artifício a inversa da função de probabilidade total, descrita pela equação 3.9, para que ela sirva como parâmetro da curva

$$g = \frac{a+b}{(a+1)b} \Leftrightarrow a = \frac{(g-1)b}{1-gb}. \quad (3.13)$$

As variáveis  $g$  ( $g \geq 1$ ) e  $b$  ( $b > 0$ ) garantem que  $\frac{a+b}{(a+1)b} \in [0, 1]$ . E o suporte dos parâmetros é  $\Omega_{g,b} = \{(g, b) \in \mathbb{R}^2, b > 0, g \geq 1\}$  (DUTANG et al., 2017).

Como é evidente, a probabilidade de perda total  $p$  (equação 3.9) está contida no intervalo  $0 \leq p \leq 1$ . No entanto, ela ocorre somente por  $g \geq 1$ . Outra condição é em relação a  $G_{a,b}(X')$ , a qual é uma função real, mas somente se  $b \geq 0$ . Porém, caso  $b = 1$  (o que tornaria  $a = -1$ ),  $b = 0$ ,  $g = 1$  (portanto  $a = 0$ ) e  $bg = 1$  (isto é  $a \rightarrow \infty$ ) devem ser tratados como casos especiais. Ao considerar os casos especiais  $b = 1$ ,  $g = 1$  e  $bg = 1$  separadamente, toda função  $G_{a,b}(X')$ , na qual  $G(0) = 0$  e  $G(1) = 1$ , pertencerão à distribuição *MBBEFD*, de modo que, conforme Bernegger (1997), serão representadas como

$$G_{b,g}(X') = \begin{cases} X' & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{\ln(1 + (g-1)X')}{\ln(g)} & b = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{1 - b^{X'}}{1 - b} & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln\left(\frac{(g-1)b + (1-gb)b^{X'}}{1-b}\right)}{\ln(gb)} & b > 0, b \neq 1, bg \neq 1 \text{ e } g > 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

## Derivadas

A derivada da curva de exposição 3.14, conforme Bernegger (1997)

$$G'(X') = \begin{cases} 1 & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{g-1}{\ln(g)(1+(g-1)X')} & b = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(b)b^{X'}}{b-1} & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(b)(1-gb)}{\ln(gb)((g-1)b^{1-X'} + (1-gb))} & b > 0, b \neq 1, bg \neq 1 \text{ e } g > 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Sendo que no ponto  $X' = 0$

$$G'(0) = \begin{cases} 1 & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{g-1}{\ln(g)} & b = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(g)g}{b-1} = \frac{\ln(g)}{g-1} & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(b)(1-gb)}{\ln(gb)(1-b)} & b > 0, b \neq 1, bg \neq 1 \text{ e } g > 1, \end{cases} \quad (3.16)$$

e no ponto em que  $X' = 1$

$$G'(1) = \begin{cases} 1 & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{g-1}{\ln(g)g} & b = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(g)}{b-1} = \frac{g-1}{\ln(b)(1-gb)} & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(b)(1-gb)}{\ln(gb)g(1-b)} & b > 0, b \neq 1, bg \neq 1 \text{ e } g > 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

A probabilidade de perda total  $p$ , (3.9), é dada pelo quociente entre as expressões 3.17 e 3.16 (BERNEGGER, 1997).

## Valor esperado

A perda esperada foi demonstrada pela função 3.8, e em conformidade com a distribuição *MBBEFD* (função 3.14), pode ser exposta como

$$E[X'] = \mu = \frac{1}{G'(0)} = \begin{cases} 1 & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{\ln(g)}{b-1} & b = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{g-1}{\ln(b)} = \frac{g-1}{\ln(g)g} & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(gb)(1-b)}{\ln(b)(1-gb)} & b > 0, b \neq 1, bg \neq 1 \text{ e } g > 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

## Função de distribuição

Conforme a função 3.11 a função de distribuição acumulada pertencente à curva de exposição  $G_{b,g}(X')$  é dada por

$$F(X') = \begin{cases} 1 & X' = 1 \\ 0 & X' < 1, (g = 1 \text{ ou } b = 0) \\ 1 - \frac{1}{1 + (g-1)X'} & X' < 1, b = 1 \text{ e } g > 1 \\ 1 - b^{X'} & X' < 1, bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ 1 - \frac{1-b}{(g-1)b^{1-X'} + (1-gb)} & X' < 1, b > 0, b \neq 1, bg \neq 1 \text{ e } g > 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

## Função densidade de probabilidade

Como a probabilidade de perda total é finita no intervalo  $0 \leq p \leq 1$ , a função de densidade  $f(X') = F'(X')$  é definida somente no intervalo  $[0, 1)$ , sendo essa demonstrada a seguir

$$f(X') = \begin{cases} 0 & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{g-1}{(1 + (g-1)X')^2} & b = 1 \text{ e } g > 1 \\ -\ln(b)b^{X'} & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(b)b^{1-X'}(b-1)(g-1)}{((g-1)b^{1-X'} + (1-gb))^2} & b > 0, b \neq 1, bg \neq 1 \text{ e } g > 1. \end{cases} \quad (3.20)$$

Conforme observado, o valor  $\mu$  é uma função com os parâmetros  $b$  e  $g$  sendo, portanto,  $\mu = \mu(b, g)$ . Enfim, tendo em vista essa condição, existe uma relação entre o valor de  $\mu$  e os valores extremos dos parâmetros  $g$  e  $b$ , segundo Bernegger (1997), sendo

essa dada por

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0} \mu_g(b) &= 1; & \lim_{b \rightarrow \infty} \mu_g(b) &= 1/g = p \\ \lim_{g \rightarrow 1} \mu_b(g) &= 1; & \lim_{g \rightarrow \infty} \mu_b(g) &= 0. \end{aligned}$$

Esta relação indica que existem exatamente uma distribuição pertencente à classe *MBBEFD* para cada dado par de funções  $p$  e  $\mu$ , de modo que esses parâmetros satisfaçam a condição intervalar  $0 \leq p \leq \mu \leq 1$ . Além disso, existem duas situações antagônicas em relação ao cálculo de  $g$  e  $b$ , em que o primeiro é calculado de maneira direta:  $g = 1/p$ , enquanto que o segundo pode ser calculado com o auxílio da função 3.18 (BERNEGGER, 1997).

### Distribuições ilimitadas

As funções apresentadas trataram sobre a distribuição *MBBEFD* no intervalo  $[0, 1]$ . Contudo, pode ser definida tanto no intervalo  $[-\infty, \infty]$  quanto em  $[0, \infty]$ . Além disso, pode ser utilizada para modelar distribuições de perda. Enfim, caso as perdas agregadas ( $X$ ) e o dedutível ( $D$ ) sejam normalizadas em relação a uma perda de referência  $X_0$ , então  $X' = X/X_0$  e  $D' = D/X_0$ . Dessa maneira, as distribuição *MBBEFD*  $[0, 1]$  podem ser reformuladas como a seguir

$$G_{b,g}(X') = \begin{cases} 1 - b^x & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln\left(\frac{(g-1)b + (1-gb)b^{X'}}{1-b}\right)}{\ln\left(\frac{(g-1)b}{1-b}\right)} & 0 < b < 1, bg \neq 1 \text{ e } g > 1 \end{cases}$$

$$G'(X') = \begin{cases} -\ln(b)b^{X'} & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(b)(1-gb)}{\ln\left(\frac{(g-1)b}{1-b}\right) ((g-1)b^{1-X'} + (1-gb))} & 0 < b < 1, bg \neq 1 \text{ e } g > 1 \end{cases}$$

$$G'(0) = \begin{cases} -\ln(b) & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(b)(1-gb)}{\ln\left(\frac{(g-1)b}{1-b}\right) (1-b)} & 0 < b < 1 \text{ e } bg \neq 1 \text{ e } g > 1 \end{cases}$$

$$G'(1) = \begin{cases} -\ln(b)b & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ \frac{\ln(b)(1-gb)}{\ln\left(\frac{(g-1)b}{1-b}\right) g(1-b)} & 0 < b < 1, bg \neq 1 \text{ e } g > 1 \end{cases}$$

$$G'(\infty) = 0$$

$$F(X') = \begin{cases} 1 - b^{X'} & bg = 1 \text{ e } g > 1 \\ 1 - \frac{1 - b}{(g - 1)b^{1-X'} + (1 - gb)} & 0 < b < 1, \text{ } bg \neq 1 \text{ e } g > 1 \end{cases}$$

Além das maneiras mencionadas para calcular uma distribuição *MBBEFD*, é possível assumir que os dois primeiros momentos são conhecidos (por exemplo  $\mu$  e  $\sigma^2$ ), mas desde que eles correspondam às condições

$$\begin{aligned} \mu^2 &\leq E[X'^2] \leq \mu \\ p &\leq E[X'^2]. \end{aligned}$$

Esses dois primeiros momentos da função de distribuição com probabilidade de perda total,  $p$ , são dados por

$$\begin{aligned} \mu &= E[X'] = p + \int_0^{1^-} x f(x) dx; \\ \mu^2 + \sigma^2 &= E[X'^2] = p + \int_0^{1^-} x^2 f(x) dx \leq \mu. \end{aligned}$$

### Obtendo $b$ e $g$

Bernegger (1997) propõe a utilização do método dos momentos para a estimação dos parâmetros  $b$  e  $g$ , pois é um método não paramétrico. No entanto, é possível realizar tal estimação tanto utilizando o método de máxima verossimilhança, quanto o dos mínimos quadrados (HREVUŠ, 2019).

Conforme Bernegger (1997)  $0 \leq p \leq E[x] \leq 1$

Então o primeiro momento de  $x$  será:

$$E[x] = \frac{\ln(gb)(1 - b)}{\ln(b)(1 - gb)} \quad (3.21)$$

O parâmetro  $c$  é responsável pela concavidade da curva de exposição. Mas para obtê-lo existe a dependência de  $g$  e  $b$ . Portanto, o que o físico Bernegger (1997) fez em seu artigo, foi facilitar o cálculo da curva de exposição  $G_{b,g}(x)$ , pois, em vez de fazê-lo utilizando dois parâmetros ( $b$  e  $g$ ), será calculado utilizando somente um  $G_c(x)$  (BERNEGGER, 1997; PARODI, 2014).

O par de parâmetros  $b$  e  $g$  são avaliados cada qual para uma curva de exposição da *Swiss Re*  $Y_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) e ao traçar os pontos dessas funções no plano cartesiano, descobre-se que eles estão sobre uma curva. Feito isso, ela é remodelada como uma função

de um único parâmetro  $c$  de curva. Então com base em uma subclasse da distribuição *MBBEFD* pode se aproximar as curvas de exposição sendo elas definidas da seguinte maneira

$$G_c(x) = G_{b_c g_c}(x),$$

de modo que

$$b_c = b(c) = e^{\alpha + c\beta(1+c)}, \quad (3.22)$$

$$g_c = g(c) = e^{c(\gamma + c\delta)}. \quad (3.23)$$

Existem valores de  $c$  que quando observados possibilita a tomada de conclusões mais simplificadas. Sendo assim, caso  $c = 1.5, 2.0, 3.0, 4.0$  esses valores serão concidentes com as curvas de exposição da *Swiss Re*:  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ . As quais são utilizadas na prática em conformidade com os riscos em questão. No entanto, existem valores de  $c$  que caso sejam alcançados deverão ser observados de maneira minuciosa, como é o caso de  $c = 0$ . Valor este, que é a bissetriz do primeiro quadrante, que será responsável por afirmar que caso ocorra uma perda esta irá ser uma perda total ( $x = M$ ). Esta relação pode ser observada com auxílio da função 3.22 no ponto em que  $c = 0$   $g(c)$  irá ser igual a 1 (BERNEGGER, 1997; PARODI, 2014).

### ***MBBEFD Package***

A classe de função de distribuição *MBBEFD* é popularmente utilizada quando se deseja compreender e precificar risco que se tem interesse de ressegurar ou segurar. Além de, poder ser utilizada para classificação de exposição. Ademais, caso se queira inferir com base em riscos homogêneos esta classe de função de distribuição também poderá ser indicada (BERNEGGER, 1997). Sendo assim, essa função pode ser utilizadas desde para realização de análises descritivas até métodos para estimação de parâmetros ( $b$  e  $g$ , por exemplo), ou ainda geração de gráficos de curvas de exposição.

A seguir será implementada a função *MBBEFD* na linguagem de programação *R*. Função esta que trabalha como um método de ajuste (*fitDR function*). Para realizar esse ajuste o *mbbefd package* utiliza dois métodos: o de estimação máximo verossimilhança e o de estimação via método de momentos. Onde no primeiro método consiste em maximizar a função densidade; e o segundo consiste em igualar a perda total e o primeiro momento da distribuição (DUNTANG et al., p.09, 2016).

Este exemplo irá ajustar duas distribuições misturadas (Beta Regular e *MBBEFD*) com um conjunto de dados simulados *MBBEFD* (DUNTANG et al., p.09, 2016).

```
library(mbbefd)
x <- c(rbeta(50, 3, 1/2), rmbbefd(50, 1/2, 1/10))
```

O vetor  $x$  possui 100 valores aleatórios simulados, enquanto a variável  $f1$  é uma função que ajusta a função *MBBEFD* em relação a esses valores simulados. Os parâmetros  $a$  e  $b$  da função *MBBEFD* ajustada, foram estimados pelo método de máxima verossimilhança. Além disso, observou-se os critérios de escolha de modelo de Akaike ( $AIC = 83,3829$ ) e Bayesiano ( $BIC = 88,59324$ ) para este modelo.

```
f1 <- fitDR(x, "mbbefd", method="mle")
summary(f1)
```

```
## Fitting of the distribution "mbbefd" by maximum likelihood
## Parameters :
## estimate Std. Error
## a 0,035909278 NA
## b 0,009872438 NA
## Loglikelihood: -39,69145 AIC: 83,3829 BIC: 88,59324
```

A variável  $b1$  é uma função que desenha simulações, dado que o primeiro argumento é a variável  $f1$  que ajustou a função *MBBEFD* em relação aos dados simulados ( $x$ ), enquanto o segundo argumento é o número de amostras que se quer gerar. Sendo assim, para uma amostra de tamanho 20 a um nível de significância de 95% os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  estimados apresentam o seguinte comportamento estatístico

```
b1 <- bootDR(f1, niter=20)
summary(b1)
```

```
## Parametric bootstrap medians and 95% percentile CI
##      Median      2,5%      97,5%
## a 0,03603436 0,012784198 0,06813441
## b 0,00930872 0,002569712 0,02273344
```

Conforme Duntang (2016), com o advento do *mbbefd package* é possível comparar múltiplos ajustes no mesmo gráfico ou com as mesmas estatísticas. De modo que com essas curvas ajustadas ( $f1$ ,  $f2$  e  $f3$ ) aos dados simulados ( $x$ ) foram realizados testes de adequação para poder escolher o modelo que melhor se adequa aos dados em questão. Deste modo, ao observar o resultado dos testes, foi possível concluir que a função que melhor se adequa aos dados foi a *MBBEFD*.

```
f2 <- fitDR(x, "oibeta", method="mle")
f3 <- fitDR(x, "oiunif", method="mle")
gofstat(list(f1, f2, f3))
```

```
## Goodness-of-fit statistics
```

```

###
### 1-mle-mbbefd 2-mle-oibeta 3-mle-oiunif
## Kolmogorov-Smirnov statistic 0,1400000 0,1400000 0,2154661
## Cramer-von Mises statistic 0,2715687 0,1414871 1,7856663
## Anderson-Darling statistic Inf Inf Inf
##
## Goodness-of-fit criteria
##
## 1-mle-mbbefd 2-mle-oibeta 3-mle-oiunif
## Aikake's Information Criterion 83,38290 NaN 82,99270
## Bayesian Information Criterion 88,59324 NaN 85,59787

```

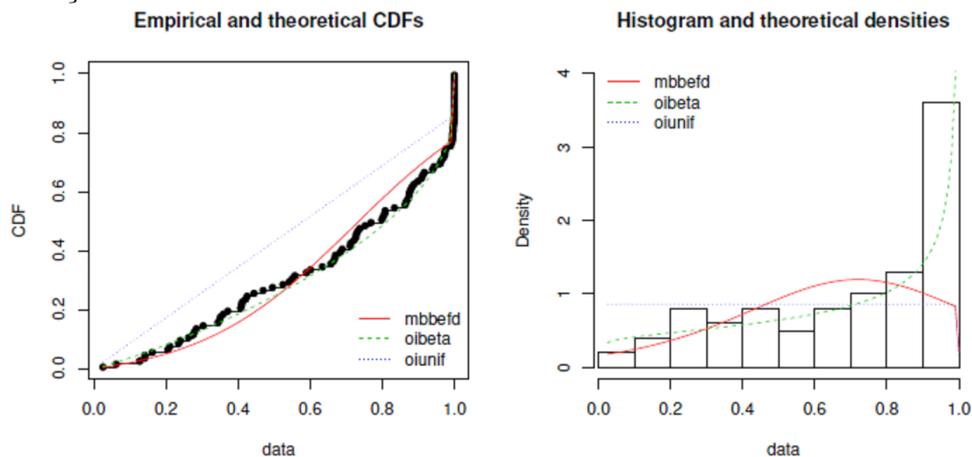
Com atifício dos comandos a seguir foi gerado o gráfico das três funções de ajuste sobrepostas, ficando, assim, evidente na análise exploratória que a curva que mais se adequa aos dados simulados é a função de densidade *MBBEFD*. Os gráficos são respectivamente a função de densidade das funções *MBBEFD*, *one-inflated Beta* e *one-inflated Uniforme* sobrepostos em relações aos dados simulados e o histograma das mesmas, também em relação aos dados simulados.

```

par(mfrow=c(1, 2))
cdfcomp(list(f1, f2, f3), leg=c("mbbefd", "oibeta", "oiunif"))
denscomp(list(f1, f2, f3), leg=c("mbbefd", "oibeta", "oiunif"), ylim=c(0,4), xleg="topleft")

```

Figura 1: Gráfico da função de densidade empírica e teórica sobreposto aos dados simulados e Histograma dos dados simulados sobreposto pela função de densidade teórica das três distribuições



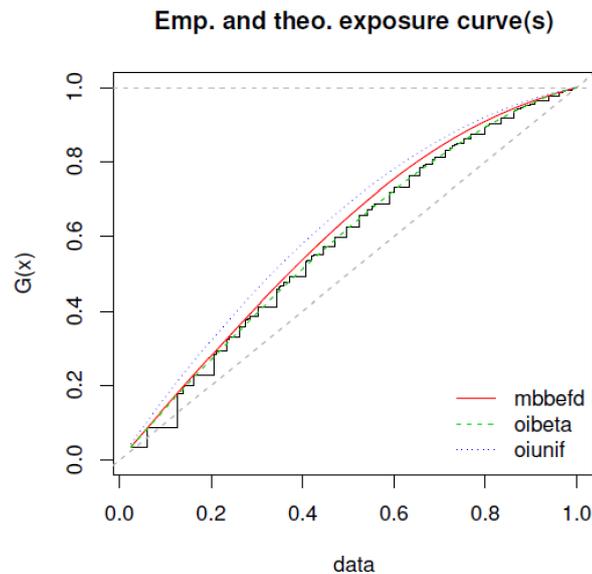
Fonte: (DUNTANG et al., 2016).

Por fim, para gerar o gráfico sobreposto das diferentes variáveis de ajuste, e assim comparar qual a curva de exposição que se ajusta mais aos dados simulados, deve-se uti-

lizar o comando “`ecomp()`”. Observando a Figura 2, pode-se observar que a distribuição uniforme quando ajustada aos dados  $x$  simulados está basicamente sobreposta como a bissetriz do primeiro quadrante, mostrando que não é uma curva bem ajustada, pois com sua utilização, dado que ocorresse algum sinistro ele teria demasiada probabilidade de ser total, acarretando problemas na gestão dos riscos.

```
ecomp(list(f1, f2, f3), leg=c(“mbbefd”, “oibeta”, “oiunif”), do.points=FALSE)
```

Figura 2: Curva de exposição teórica e empírica com as distribuições one-inflated beta, one-inflated uniforme e mbbefd



Fonte: (DUNTANG et al., 2016).

### 3.4 Processo de precificação no resseguro

#### Desenvolvendo uma curva de exposição

Caso seja necessário desenvolver uma curva de exposição diferente das existentes no mercado, deve-se possuir alguns pré requisitos. Como, a necessidade de grande quantidade de dados de reclamação de sinistro de uma carteira e o Dano Máximo Possível ( $M$ ) de cada ativo desta. Dado que essas informações estejam em posse, Parodi (2014) divide o valor de cada reclamação individual de sinistro ( $x$ ) pelo seu referido Dano Máximo Possível ( $x/M$ ), gerando a taxa de perda relativa ( $x/M \in [0, 1]$ ). Com base nessa taxa, uma curva de severidade empírica será calculada. Sendo esta ajustada a uma outra curva de severidade por intermédio do método de estimação de máxima verossimilhança. Com o intuito de melhorar os valores dos parâmetros  $b$  e  $g$  pré-determinados por Bernegger (1997).

## Processo de classificação de exposição

Para precificar os contratos de excesso de danos, deve-se antes classificá-los conforme seu portfólio de riscos homogêneos. Em seguida, estabelecer a Curva de Exposição  $G(d)$  para cada uma dessas faixas homogêneas; e determinar o Dano Máximo Possível ( $M$ ) dos bens segurados. Sendo assim, Parodi (2014) afirma que observando um portfólio homogêneo de propriedades pode-se obter o valor esperado da perda ( $E[S_{D,L}]$ ) para esta faixa  $L$  vs  $D$  conforme a função 3.24. Nela  $E[S]$  representa a perda esperada agregada que está sendo multiplicada pela diferença entre a Curva de Exposição no ponto  $d + l$  (limite máximo da faixa retido pela resseguradora) e  $d$  (valor mínimo da faixa retido pela resseguradora)

$$E[S_{D,L}] = [G(d + l) - G(d)]E[S]. \quad (3.24)$$

Assumindo que a curva de exposição seja conhecida, é trivial calcular a diferença  $G(d + l) - G(d)$ . No entanto, a perda esperada agregada  $E[S]$  da função 3.24 deve ser observado com mais cautela. É válido ressaltar que como está sendo utilizada a curva de exposição, pressupõe que não existem abundância de dados de sinistralidades passadas em relação ao risco subscrito. Deste modo, calcular a perda esperada agregada  $E[S]$  deverá ser feita utilizando outros artifícios. Sendo assim, Parodi (2014) propõe como solução o uso da função de esperança da taxa de perda  $E[LR]$  (onde “ $LR$ ” é *Loss Ratio*-Taxa de Perda)

$$E[LR] = \frac{E[S]}{P}. \quad (3.25)$$

Ao utilizar manobras algébricas, tem-se

$$E[S] = E[LR]P. \quad (3.26)$$

Voltando na equação 3.24 e substituindo-a pela 3.25, obtém-se

$$E[S_{D,L}] = [G(d + l) - G(d)](E[LR]P). \quad (3.27)$$

Caso exista a necessidade de generalizar a função 3.27 para um portfólio com  $K$  propriedades, deve-se

$$\begin{aligned} E[S_{D,L}] &= \sum_{k=1}^K E[S_k^{D,L}] \\ &= \sum_{k=1}^K [G_k(d_k + l_k) - G(d_k)](E[S_k]) \\ &= \sum_{k=1}^K [G_k(d_k + l_k) - G(d_k)](E[LR_k]P_k). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para Parodi (2014) a taxa de perda esperada  $E[LR]$  será diferente para propriedades com diferentes Dano Máximo Possível  $M$  ou Soma Segurada - SS. Então, considerando

a taxa de perda esperada  $E[LR]$  uniforme para um portfólio homogêneo de  $k$  propriedades e independente, pode-se assumir uma mesma curva de exposição para a faixa ( $D$  *x*  $L$ )

$$E[S_{D,L}] = E[LR_k] \sum_{k=1}^K [G_k(d_k + l_k) - G(d_k)] (P_k). \quad (3.29)$$

A Tabela 4 representa os dados disponibilizados pelas seguradoras em resposta à solicitação da resseguradora. Nela os dados estão agregados conforme suas especificidades, formando faixas de cobertura com as propriedades homogêneas. As faixas, representadas na tabela, estão fixadas em relação ao limite inferior ( $d$ ) e superior ( $d + l$ ) da *Soma Segurada*, de modo que, em cada faixa foi demonstrada seu *Prêmio Total*, sua *Taxa de Perda Original - LR* relacionada com a experiência da cedente, e, por fim, a quantidade de unidades de risco que estão em cada faixa (PARODI, 2014).

Tabela 4: Exemplo de Perfil de risco

<b>Soma Segurada Lim. Inferior</b>	<b>Soma Segurada Lim. Superior</b>	<b>Pêmio Total</b>	<b>LR*</b>	<b>Número de Riscos</b>
0	500000	166891508	45%	528008
500001	1000000	30758545	45%	30864
1000001	1500000	11412224	45%	6325
1500001	2000000	6632123	45%	2939
2000001	2500000	3814369	45%	1329
2500001	3000000	4115279	45%	1188
3000001	3500000	2742529	45%	789
3500001	4000000	2007070	45%	484
4000001	4500000	2038237	45%	485
4500001	5000000	1090990	45%	279
5000001	6000000	2432686	45%	554
6000001	7000000	2368648	45%	463

Fonte: (HREVUŠ, 2019).

Utilizar o perfil de risco (Tabela 4) proporciona ganhos operacionais à resseguradora. Ao utilizá-lo, a resseguradora não irá efetuar correções inflacionárias; e poderá trabalhar com dados determinísticos, tornando-os distribuições de frequência e severidade estocásticos. No entanto, por outro lado, ao utilizar estes perfis, surge a necessidade de confiar nos dados enviados pela seguradora ( $LR$ , por exemplo), e a possibilidade de não se conseguir estabelecer curvas de exposição ( $G(d)$ ) para períodos desejados. Por fim, outras duas limitações destes perfis seriam a impossibilidade de utiliza-los na modelagem de catástrofes naturais (*Cat XL*) e interrupções de linhas de negócios das seguradoras (PARODI, 2014).

Partindo do princípio de que a resseguradora possui acesso ao perfil de risco (Tabela 4). A produção da classificação de exposição pode ser realizada seguindo alguns passos (HREVUŠ, 2019):

1) Calcular o valor médio do risco assumido por faixa

$$\bar{V}^k = \sum_{i=1}^{N_{risco}^f} V_i^f (N_{risco}^k)^{-1}. \quad (3.30)$$

2) Normalizar a média calculada para cada faixa

$$\bar{m}^f = \min\left(\frac{M}{\bar{V}^f}; 1\right). \quad (3.31)$$

3) Escolher a curva de exposição mais apropriada para os riscos homogêneos de cada faixa.

4) Observando a curva escolhida calculá-la para o valor médio normalizado de cada faixa  $G(\bar{m}^f)$ .

5) Estimar o valor esperado da perda agregada por faixa. Pois, como o perfil de risco geralmente fornece somente o prêmio agregado por faixa. Seu valor médio por faixa será calculado pela função 3.32. Onde  $\hat{q}^f$  representa a taxa de perda agregada estimada por faixa. Portanto  $\hat{q}^f = LR$

$$\hat{E}[Z^f] = P^f \hat{q}^f. \quad (3.32)$$

6) Estimar a perda cedida ao ressegurador por faixa

$$\hat{E}[Z_{resse}^f] = [1 - G(\bar{m}^f)] \hat{E}[Z^f]. \quad (3.33)$$

7) Considere somente uma faixa com retenção  $R$  e capacidade ilimitada. Então, o valor médio da perda total na faixa cedido ao ressegurador será expresso conforme a função 3.34

$$\hat{E}[Z_{resse}] = \sum_{f=1}^F \hat{E}[Z_{resse}^f]. \quad (3.34)$$

A Tabela 5 é uma aplicação numérica dos procedimentos estabelecidos anteriormente em relação ao perfil de risco exemplificado pela Tabela 4. É, portanto, a classificação de exposição. A qual teve sua formulação explicitada pelos 7 passos anteriores. Nela foi adotada uma taxa estimada de perda agregada por faixa de 45% ( $\hat{q}^f = LR = 45\%$ ) e uma curva de exposição que fosse ajustável ao portfólio adotado. Como resultado foi observado para todas as faixas agregadas o valor de prêmio de aproximadamente 236 milhões de Euros ( $P = 236 \times 10^6$ ), enquanto que a estimativa de perda agregada foi igual a aproximadamente 106 milhões de Euros. A média da perda cedida à resseguradora foi próxima de 2,9 milhões de Euros, valor este que representa algo próximo de 1,23% do prêmio agregado (HREVUŠ, 2019).

Tabela 5: Exemplo de Classificação por exposição

Faixa ( $f$ )	<i>Risco <math>V</math> dividido em faixas</i>		$\hat{E}(Z)$	$\bar{m}^f$	$G(\bar{m}^f)$	$\hat{E}(Z_{resse}^k)$
1	0	500000	75101179	1.00	1.00	0
2	500001	1000000	13841345	1.00	1.00	0
3	1000001	1500000	5135501	0.80	0.95	231553
4	1500001	2000000	2984455	0.57	0.89	336341
5	2000001	2500000	1716466	0.44	0.84	281016
6	2500001	3000000	1851875	0.36	0.80	375824
7	3000001	3500000	1234138	0.31	0.77	286311
8	3500001	4000000	903181	0.27	0.74	233651
9	4000001	4500000	917207	0.24	0.72	258066
10	4500001	5000000	490946	0.21	0.69	150688
11	5000001	6000000	1094709	0.18	0.66	368139
12	6000001	7000000	1065892	0.15	0.63	395192
Soma	-	-	106336894	-	-	2916780

Fonte: (HREVUŠ, 2019).

Com base nas informações presentes na Tabela 5 pode-se realizar o cálculo aproximado da função (3.24), e assim ter em posse a perda esperada da carteira homogênea de  $k$  propriedades (aqui no exemplo  $k$  é o *Número de Riscos*) (PARODI, 2014). Deste modo, cada termo do somatório da função 3.29 representa a perda esperada da faixa ( $d$  *vs*  $l$ ) e o somatório dessas perdas esperadas,  $E[S^{d,l}]$ , levará à perda esperada total da carteira homogeneizada,  $E[S^{D,L}]$ .

### Fontes de incerteza

Deve-se tomar os devidos cuidados com algumas fontes de incerteza provenientes da utilização do perfil de risco (Tabela 4) que é fornecido pela seguradora. Como exemplo dessas incertezas, existe a possibilidade de flutuação da *Taxa de Perda - LR* em relação às oscilações do exercício anterior da seguradora, sofrendo distorções pela ocorrência de possíveis perdas vultosas. Além dessa, existe a possibilidade de oscilação do valor da propriedade segurada no tempo, que deverá ser mantida utilizando correções inflacionárias. No entanto, como o perfil de risco (Tabela 4) utiliza os valores de forma agregada (*Perda Máxima Possível* ou *Soma Segurada*), estes deverão ser corrigidos para que o nível de risco seja mantido (PARODI, 2014).

### Calculando uma distribuição de perda agregada

Utilizando os dados de uma tabela de classificação de exposição (Tabela 5), é possível calcular a perda esperada para cada faixa ( $E[S^{d,l}]$ ), a volatilidade em torno deste ponto esperado e a distribuição de perda agregada. Isto é, a probabilidade de que a perda

total será menor do que uma determinada quantia. A partir disto, tendo em posse a distribuição de perda agregada pode-se calcular o ponto estimado e sua volatilidade como sendo subprodutos da nova distribuição encontrada (PARODI, 2014).

Para obtenção da distribuição de perda agregada, Parodi (2014) utiliza algumas funções demonstradas neste trabalho associadas às informações da classificação de exposição (5). Sendo assim, o método utilizado por Parodi (2014) considera a curva de exposição adotada anteriormente como modelo de severidade e, baseado nela, calcula-se o dano individual esperado para cada faixa ( $E[X'_f]$ ). Com advento da função 3.26 pode-se encontrar o valor da perda esperada de cada faixa no modelo coletivo  $E[S_f]$  e, portanto, calcular para cada faixa  $f$  o número esperado de reclamações de sinistro

$$E[N] = \frac{E[S]}{E[X']}. \quad (3.35)$$

A equação 3.35 não é o modelo de frequência de sinistros, mas por seu intermédio é possível alcançá-lo. Desde que se assuma alguma distribuição de probabilidade para os dados de frequência. Sendo assim, assumamos que  $N$  seguirá uma distribuição de *Poisson* de parâmetro  $\lambda_f$ , e com valor esperado igual ao seu parâmetro  $E[N_f] = \lambda_f$  (PARODI, 2014).

Baseado na classificação por exposição, Parodi (2014) propõe uma outra possibilidade para calcular um modelo de severidade para cada faixa  $f$ . E com base nisso, produzir um modelo de perda agregada que explique todas as faixas da carteira. Sendo assim, para cada faixa  $f$ , é denotada igualdade entre a soma segurada e o Dano Máximo Possível ( $SS_f = M_f$ ). Deste modo, com base na curva de exposição adotada na classificação por exposição, e na equação 3.6 será possível alcançar a *curva de severidade de dano relativo*  $F_{X'}(x)'$ , e o valor absoluto da *Curva de Severidade*  $F_X(x) = F_{X'}(x/M_f)$ . Enfim, esta última função será o modelo de severidade  $F_X(x)$  para as perdas na faixa  $f$ , e com base nela, pode-se assumir que  $E[X_f]$  será a estimativa da quantidade de perdas individuais da faixa  $f$  (PARODI, 2014).

Conforme Parodi (2014), para obter o modelo de perda agregada para todas as  $k$  faixas assumidas, deve-se partir dos modelos de frequência e severidade. No entanto, é necessário utilizar o método de Monte Carlo para simular uma amostra aleatória com o número de perdas para todas as  $k$  faixas  $f$  ( $N_f^k$ ), de modo que essas perdas sejam baseadas nas curvas de exposição observadas para cada faixa de riscos homogêneos:  $X_{f,1}^k, X_{f,2}^k, \dots, X_{f,N_f^k}^k$ . Por fim, o resultado final dessa simulação será a soma de todas as perdas individuais das  $k$  faixas  $f$  ( $D, D + L$ ) alcançando, assim, um modelo de perda agregado.

$$S^k = \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_f^k} X_{b,j}^k \quad (3.36)$$

O referido processo de simulação explicado anteriormente é equivalente à simular cada faixa de risco  $k$  separadamente ( $S^k$ ) e então somar seus resultados por intermédio de um mecanismo de simulação  $S_f^k$  (PARODI, P., 2014).

Caso se queira a perda total por cada faixa individual  $(d, d + l)$ , deve-se proceder o cálculo da seguinte forma

$$S_f^k = \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_f^k} \min(\max(X_{b,j}^k - D, 0)L). \quad (3.37)$$

## 4 Considerações Finais

A abordagem inicial deste trabalho atuou na demonstração didática das variações existentes no que tange a tipologia dos contratos de resseguro, e em quais condições esses poderiam ser utilizados. Após isso, foi demonstrada que para contratos proporcionais, ou não, existem distintas maneiras de se precificar. E, ainda sobre os contratos não proporcionais, foi explicitado que existe uma relação entre sua precificação e a condição de seus dados serem determinísticos (*burning cost*) ou estocásticos (curvas de exposição).

O trabalho foi capaz de inserir uma função de distribuição de utilização demasiadamente europeia que visa modelar a sinistralidade (distribuição *MBBEFD*). Enquanto, por outro lado, para modelar a frequência de sinistros foi utilizada a função de distribuição *Poisson*. Com o advento dessas distribuições, pode-se influenciar na produção da classificação da exposição; no cálculo das curvas de exposição e, conseqüentemente, na precificação dos contratos de resseguro.

Dado o exposto, a última conclusão acerca deste trabalho gira em torno da sua relevância no cenário nacional. Pois, materiais acadêmicos sobre a dinâmica ressecuritária que abranjam mecanismos de cálculo de prêmio, como as curvas de exposição e os métodos de *burning cost*, que busquem exemplificá-los, não são facilmente encontrados. Portanto, a abordagem adotada neste trabalho é relevante para as ciências atuariais no advento de novas abordagens.

## Referências

- BERNEGGER, S. The Swiss Re Exposure Curves and the MBBEFD Distribution Class, *Astin Bulletin*, Cambridge University Press, 1997, vol. 27, p.102-110. BUGMANN, C. **Proportional and non-proportional reinsurance**, Swiss Re Insurance Company, Zurich Switzerland, p.06-08, 1997. DEELSTRA, G.; PLANTIN, G. et al. (European Actuarial Academy). **Risk theory and reinsurance**. [S.I]. London: Springer, 2014. DUTANG, C.; GESMANN, M.; SPEDICATO, G. **Exposure rating, destruction rate models and the mbbefd package**, p.03-14, 2017. ESCOLA NACIONAL DE SEGUROS. **Resseguro: Princípios e Aplicação**. 5. ed. Rio de Janeiro, p.11-16, 2017. ESCOLA NACIONAL DE SEGUROS, Pedro Sampaio;. **Subscrição e Precificação de Resseguro**. 14-15 de aug de 2018. Notas de Aula. FUNDACION MAPFRE. **Introdução ao resseguro**.

Tradução de Ricardo Tavares. Madri: Espanha, 2011. HINOJOSA, A.; MILANÉS, A. **Introdução aos Resseguros**. Departamento de Estatística ICEX UFMG: Belo Horizonte, 2010. HREVUŠ, J. et al. **Exposure Modelling in Property Reinsurance**. Prague Economic Papers, v. 2019, n. 2, p. 129-154, 2019. PARODI, P. **Pricing in general insurance**, CCR Press, [S.I.], p.50-59; p.331-341, 2014.