

Karoline Sanchez Fernandes

**MODELAGEM *FUZZY* PARA O  
CRESCIMENTO POPULACIONAL DO  
ESTADO DE MINAS GERAIS**

Varginha

Dezembro de 2019

Karoline Sanchez Fernandes

**MODELAGEM *FUZZY* PARA O CRESCIMENTO  
POPULACIONAL DO ESTADO DE MINAS GERAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
como parte dos requisitos para obtenção do  
grau de Bacharel em Ciências Atuariais pela  
Universidade Federal de Alfenas.

Universidade Federal de Alfenas – UNIFAL

Instituto de Ciências Sociais Aplicadas – ICSA

Orientador: Danilo Machado Pires

Varginha

Dezembro de 2019

# Resumo

A modelagem matemática busca cada descrever acontecimentos reais através de modelos determinísticos, nessa busca acaba surgindo modelagens mais sofisticadas. Neste caso o estudo trás formas diferentes de modelar a dinâmica populacional, desenvolvida através do modelo clássico de Malthus. Em um primeiro momento se considera a taxa de crescimento como um número *fuzzy*. E os resultados são obtidos através do Princípio de Extensão de Zadeh. E uma outra modelagem realizada no trabalho foi considerar a População Inicial incerta.

**Palavras-chave:** *Modelo Malthusiano, Derivada de Hukuhara, Princípio de Extensão.*

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	5
2	REFERENCIAL TEÓRICO . . . . .	7
2.1	Crescimento Populacional – Modelo Clássico de Malthus . . . . .	8
2.2	Conjunto <i>Fuzzy</i> . . . . .	9
2.3	Equação Diferencial Ordinária <i>Fuzzy</i> via Derivada de Hukuhara . . . . .	12
3	MATÉRIAS E MÉTODOS . . . . .	15
3.1	Modelagem . . . . .	16
4	RESULTADOS . . . . .	17
4.1	Modelo Clássico de Malthus . . . . .	17
4.2	Solução do Modelo de Malthus via Princípio de Extensão . . . . .	17
4.3	Modelo obtido pela a Equação Diferencial <i>Fuzzy</i> via derivada de Hukuhara . . . . .	22
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	27
6	REFERÊNCIAS . . . . .	28

## Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação gráfica da solução <i>fuzzy</i> considerando a equação de crescimento populacional de Malthus, com o parâmetro $k$ fuzzy e a tripla $(0,0027208143; 0,0127208143; 0,0227208143)$ . . . . .	18
Figura 2 – Representação gráfica da solução <i>fuzzy</i> considerando a equação de crescimento populacional de Malthus, com o parâmetro $k$ fuzzy e a tripla $(0,0127208143; 0,0127208143; 0,0227208143)$ . . . . .	18
Figura 3 – Representação gráfica da solução <i>fuzzy</i> considerando a equação de crescimento populacional de Malthus, com o parâmetro $k$ fuzzy e a tripla $(0,0027208143; 0,0127208143; 0,0127208143)$ . . . . .	19
Figura 4 – Apresentação do modelo clássico e os modelos <i>fuzzy</i> , via princípio de extensão, defuzificado. . . . .	20
Figura 5 – Diferença dos modelos em relação aos dados reais. . . . .	20
Figura 6 – Representação gráfica da solução fuzzy, da equação de crescimento populacional de Malthus, considerando a população inicial fuzzy . . . .	23
Figura 7 – Representação gráfica a solução fuzzy da equação de crescimento populacional de Malthus, considerando a população inicial fuzzy . . . . .	23
Figura 8 – Representação gráfica a solução fuzzy da equação de crescimento populacional de Malthus, considerando a população inicial fuzzy. . . . .	24
Figura 9 – Apresentação gráfica entre o modelo clássico e os modelos fuzzy defuzificado, via derivada de Hukuhara. . . . .	24
Figura 10 – Diferença dos modelos em relação aos dados reais. . . . .	25

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultado obtidos através dos modelos . . . . .	21
Tabela 2 – Matriz de Correlações . . . . .	22
Tabela 3 – Resultado obtidos através dos modelos . . . . .	26

# 1 Introdução

A modelagem matemática surgiu como um mecanismo de descrição ou previsão futura de um certo evento natural da sociedade através de estudos de certos padrões. Porém, os modelos matemáticos determinísticos partem de premissas de situações ideais que no mundo real dificilmente acontecem, ou seja, o resultado encontrado pode não retratar a realidade de forma contundente. Este fato levou a busca de modelagens mais sofisticadas, já que os parâmetros são obtidos através dos estudos de eventos passados.

Uma parte fundamental dos estudos de modelagem matemática é a dinâmica do crescimento populacional. É de grande importância entender o crescimento populacional de uma localidade, podendo prever como será a população futura, para que possa desenvolver políticas econômicas e sociais adequadas e se possível até melhorar a infraestrutura do lugar para melhor atender a população futura.

O primeiro modelo matemático, referente ao crescimento populacional foi desenvolvido por Thomas Robert Malthus, no século XVIII. Posteriormente, no século XX, os neomalthusianistas surgiram trazendo novas premissas para a modelagem do crescimento populacional. Em contrapartida, os Marxistas ou Reformistas, surgem com o contraponto as teorias de Malthus e dos neomalthusianos (DAMIANI, 1991).

Porém, o objetivo principal dos modelos matemáticos é apresentar uma visão aproximada da realidade. Sendo assim, o presente trabalho utiliza o modelo de crescimento exponencial desenvolvido por Malthus, em um primeiro momento, levando em consideração uma incerteza/imprecisão sobre a taxa de crescimento ( $k$ ), uma vez que podem ocorrer mudanças na taxa de crescimento populacional ao longo do tempo. E posteriormente considerando que a população inicial seja incerta.

A lógica *fuzzy* foi baseada na teoria de conjuntos *fuzzy*, apresentada por Zadeh em 1965, é uma generalização da lógica clássica que busca quantificar as expressões linguísticas imprecisas e/ou ambíguas, como em torno de. Sendo assim, pode-se considerar a lógica *fuzzy* como uma ferramenta que lida com a incerteza.

Portanto, percebe-se uma potencial aplicação da lógica *fuzzy*, nos modelos de crescimento populacional. Uma vez que tem imprecisão na taxa de crescimento e na

---

população inicial, com o intuito de diminuir a incerteza que a taxa de crescimento e a população inicial carregam, para que se possa melhorar o modelo e deixar ele mais próximo da realidade.

## 2 Referencial Teórico

A modelagem matemática surgiu da necessidade do homem em compreender fenômenos reais que ocorrem ao seu redor, sendo muito útil para diversas situações. Desde então existe um vasto campo de ferramentas que tem sido desenvolvida como modelos matemáticos em estudos de problemas reais. Considere o conceito de modelagem matemática por Chevallard (2001):

Um aspecto essencial da atividade matemática consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar, trabalhar com tal modelo e interpretar os resultados obtidos nesse trabalho, para responder as questões inicialmente apresentadas. Grande parte da atividade matemática pode ser identificada, portanto com uma atividade de Modelagem Matemática. (CHEVALLARD,2001, p. 50).

Quando se usa modelagem para descrever o comportamento de um certo sistema, sua solução passa a ser uma aproximação da realidade. Ou seja, através da modelagem matemática, é possível criar um problema aproximado e encontrar soluções reais. A modelagem trabalha fornecendo faixas de variações aproximadas, considerando as interpretações do modelador.

Um problema real não pode ser representado de maneira exata, em toda sua complexidade, por uma equação matemática ou um sistema de equações. No entanto, se trabalharmos com variáveis essenciais do fenômeno observado, o modelo matemático que simula tal fenômeno poderá levar a soluções bastante próximas daquelas observadas na realidade. (COLEÇÃO, BCT.-UFABC, p.14).

A modelagem matemática permite o estudo de um vasto campo de situações cotidianas, com o objetivo de descrever as características dos fenômenos naturais, ligado aos interesses da sociedade. Sendo assim alguns exemplos de modelos matemáticos famosos são: a Lei de resfriamento de Newton, Leis de Newton, modelos de decaimentos radioativos, modelos de crescimento populacional, entre outros.

A criação de um modelo matemático ocorre em um processo dinâmico de substituir a linguagem usual de um problema, por uma linguagem de símbolos e números matemáticos apropriados. Ao solucionar determinado modelo e constatar sua validação por meio de eventos passados da situação, ele se torna como modelo ‘padrão’ para prever.

Nesse processo dinâmico com o objetivo de construir modelos, compõe-se etapas que se completam, como por exemplo: experimentação, abstração, formulação do modelo, resolução, validação e modificação.

Bassanezi e Biembengut (1995), sugerem as seguintes etapas para a introdução do trabalho com Modelagem:

1. Escolher um conteúdo a ser estudado;
2. Obter dados experimentais ou empíricos para a estruturação de hipóteses;
3. Elaborar problemas conforme o interesse de quem estuda;
4. Selecionar variáveis essenciais para serem formuladas as hipóteses;
5. Metodizar os conceitos que serão necessários para a resolução dos modelos;
6. Examinar a resposta (por análise e/ou gráficos);
7. Validar os modelos.

Portanto abordaremos o conceito de modelagem e modelos matemáticos para entender melhor a dinâmica de crescimento populacional.

## 2.1 Crescimento Populacional – Modelo Clássico de Malthus

O crescimento populacional é uma preocupação de cientistas de diversas áreas, que há tempos, buscam ferramentas matemáticas para entender sua dinâmica, e poder planejar o uso correto de recursos públicos. O pioneiro na tentativa de estimar o crescimento populacional mundial foi o economista e demógrafo Thomas Robert Malthus.

O trabalho de Malthus foi publicado anonimamente em 1798, “*An Essay on the Principle of Population*”. Em seu modelo considerou que a população crescia de acordo com uma progressão geométrica, se não fosse controlada, enquanto os meios de sobrevivência tinham um crescimento em progressão aritmética.

O modelo de crescimento populacional de Malthus consiste em uma equação diferencial ordinária (EDO), que considera que o crescimento de uma população depende do coeficiente de crescimento ( $k$ ) e da população inicial:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

em que:

$P(t)$  → a população no instante  $t$

$P_0$  → População inicial ( $t=0$ )

A solução do problema (21) é dada por

$$P(t) = P_0 e^{kt} \quad (2.2)$$

o que mostra que o crescimento populacional é dado de forma exponencial, dependendo da população inicial e da taxa de crescimento. Porém, em uma retrospectiva o modelo não se mostra eficiente em países de primeiro mundo. Sua estimativa se torna eficiente para países em desenvolvimento e em um curto espaço de tempo.

A dinâmica de crescimento de Malthus falha pelo fato de estimar crescimentos populacionais cada vez maiores, o que não representa a realidade, uma vez que existe fatores que limitam o crescimento de uma população.

## 2.2 Conjunto *Fuzzy*

Lógica *fuzzy*, também conhecida como difusa ou nebulosa, foi desenvolvida por Lofti A. Zadeh da Universidade da Califórnia em Berkeley na década de 60. Sua ideia era estender a lógica clássica na qual um elemento pode pertencer a um conjunto com grau de pertinência no intervalo  $[0,1]$ .

O objetivo da lógica *fuzzy* é tentar refletir o pensamento humano subjetivo, tentando modelar o nosso senso de palavras, tomada de decisão ou senso comum. Deste modo, tentando traduzir, para uma máquina, expressões do cotidiano das pessoas como: a maioria, mais ou menos, talvez, etc.

**Definição 1** (Barros et al., 2017) Seja  $U$  um espaço topológico. Um subconjunto *fuzzy*  $A$  de  $U$  é caracterizado por uma função de pertinência  $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ . Denotaremos  $\mu_A(x) = A(x)$ , em que  $A(x)$  denota o grau em que o elemento  $x$  pertence ao subconjunto *fuzzy*  $A$ .

**Definição 2** Os  $\alpha$ -níveis de um subconjunto *fuzzy*  $A$  são denidos por

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in U; A(x) > \alpha\}, & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ \overline{\{x \in U; A(x) > 0\}}, & \text{se } \alpha = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

em que  $\bar{X}$  denota o fecho do subconjunto  $X$  de  $U$ .

**Definição 3** (Barros et al., 2017) Um subconjunto *fuzzy*  $A$  de  $\mathbb{R}$  é um número *fuzzy* quando satisfaz as propriedades:

- Todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são não vazios;
- Todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos fechados de  $\mathbb{R}$ ;
- $\text{supp } A = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$  é limitado.

Os números *fuzzy* mais comuns são os triangulares, trapezoidais e em forma de sino (gaussianos). Como exemplo, um número *fuzzy* será dito triangular se sua função de pertinência apresenta a forma de um triângulo e é escrita como:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x \leq b; \\ \frac{x-c}{b-c} & \text{se } b < x \leq c; \\ 0 & \text{se } x \geq c. \end{cases} \quad (2.4)$$

Os  $\alpha$ -níveis de um número triangular *fuzzy* é representado da por:

$$[A]^\alpha = [\alpha(b-a) + a, \alpha(b-c) + c] \quad (2.5)$$

O símbolo  $\mathcal{F}(x)$  será utilizado para representar os subconjuntos *fuzzy* de  $X$ , e  $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  para denotar o conjunto de todos os números *fuzzy*.

Com a intenção de conhecer a imagem de um subconjunto *fuzzy*  $A$  de  $X$ , Zadeh [1965], desenvolveu o princípio de extensão, que estende um número *fuzzy* através de uma função.

**Definição 4** (Barros et al., 2017) Sejam  $f$  uma função tal que  $f : X \rightarrow Z$  e  $A$  um subconjunto *fuzzy* de  $X$ . A extensão de Zadeh de  $f$  e a função  $\hat{f}$  que, aplicada a  $A$ , fornece um subconjunto *fuzzy*  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é dada como:

$$\hat{f}_A(z) = \begin{cases} \sup_{x \in \hat{f}^{-1}(z)} A(x), & \text{se } \hat{f}^{-1}(z) \neq \phi \\ 0, & \text{se } \hat{f}^{-1}(z) = \phi \end{cases} \quad (2.6)$$

em que  $\hat{f}^{-1}(z) = \{x : f(x) = z\}$  denomina-se a pré-imagem de  $Z$ .

Para o caso bivariado temos:

**Definição 5** (Barros et al., 2017) Sejam  $f : X \times Y \rightarrow Z$  e  $(A, B) \in \mathcal{F}(x) \times \mathcal{F}(y)$ . O princípio de extensão de Zadeh  $\hat{f}$  de  $f$  aplicado em  $(A, B)$ , é subconjunto *fuzzy*  $\hat{f}(A, B)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é definida como:

$$\hat{f}(A, B)(z) = \begin{cases} \sup_{(A, B) \in \hat{f}^{-1}(z)} \min\{A(x), B(y)\}, & \text{se } \hat{f}^{-1}(z) \neq \phi \\ 0, & \text{se } \hat{f}^{-1}(z) = \phi \end{cases} \quad (2.7)$$

Como estamos tratando de conjunto *fuzzy*, as operações da lógica clássica podem ser estendidas para o caso *fuzzy*, considerando se como casos particulares do princípio de extensão de Zadeh.

**Definição 6** (Barros et. al, 2017) Sejam  $A$  e  $B$  dois números fuzzy. Se  $\otimes$  denota um operador binário em  $\mathbb{R}$ , então

$$(A \otimes B)(z) = \begin{cases} \sup_{(x, y) \in \theta(z)} \min\{A(x), B(y)\}, & \text{se } \theta(z) \neq \phi \\ 0, & \text{se } \theta(z) = \phi \end{cases} \quad (2.8)$$

em que  $\theta(z) = \{(x, y) : x \otimes y = z\}$

**Teorema 1** (Barros et al., 2017) Sejam  $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ . Os  $\alpha$ -níveis do conjunto *fuzzy*  $A \otimes B$ , para qualquer  $\alpha \in [0, 1]$ , em que  $\otimes$  denota qualquer operação aritmética clássica

para intervalos, são dados por

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha \quad (2.9)$$

**Proposições:** Sejam A e B números *fuzzy* com  $\alpha$ -níveis dados por  $[A]^\alpha = [a_-^\alpha, a_+^\alpha]$  e  $[B]^\alpha = [b_-^\alpha, b_+^\alpha]$

Então, tem-se as seguintes propriedades:

- A soma entre A e B é um número *fuzzy*  $A \oplus B$  em que os  $\alpha$ -níveis são:

$$[A \oplus B]^\alpha = [A]^\alpha \oplus [B]^\alpha = [a_-^\alpha + b_-^\alpha, a_+^\alpha + b_+^\alpha]$$

- A diferença entre A e B é um número *fuzzy*  $A \ominus B$  em que os  $\alpha$ -níveis são:

$$[A \ominus B]^\alpha = [A]^\alpha \ominus [B]^\alpha = [a_-^\alpha - b_+^\alpha, a_+^\alpha - b_-^\alpha]$$

- A multiplicação entre um número real k e um número *fuzzy* A, denotada por  $k \odot A$  são os  $\alpha$ -níveis:

$$[k \odot A]^\alpha = k \odot [A]^\alpha = [ka_-^\alpha, ka_+^\alpha] \text{ para } k > 0$$

$$[k \odot A]^\alpha = k \odot [A]^\alpha = [ka_+^\alpha, ka_-^\alpha] \text{ para } k < 0$$

## 2.3 Equação Diferencial Ordinária *Fuzzy* via Derivada de Hukuhara

Dada uma EDO de primeira ordem, que apresenta um valor inicial, temos

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = F(t, P(t)) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

em que  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada e  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$   $I$  um intervalo, é a função incógnita. Considerando a incerteza no valor inicial teremos o problema do valor inicial *fuzzy* (PVIF)

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = F(t, P(t)) \\ P(0) = P_0, P_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (2.11)$$

Em que  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  é conhecida e  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  é a função incógnita. Sendo assim, ao se considerar a condição inicial fuzzy, e a noção de diferenciabilidade adotada para a variável de estado  $x$  é a de Hukuhara, que irá ser, apresentada a seguir. Questões de existência e unicidade de solução para o problema podem ser encontradas.

**Definição 7** (Salgado et al., 2019) Sejam  $A, B \in \mathbb{R}_f$ . Se existir  $C \in \mathbb{R}_f$  tal que  $A = B \oplus C$ , então  $C$  é chamado de *H-diferença*, ou *diferença de Hukuhara* de  $A$  e  $B$ , denotada por  $A \ominus_H B$ .

**Observação 1:** Em geral:  $A \ominus_H B \neq A \oplus (-1) \odot B$

**Observação 2:** Para a *H-diferença* existir é necessário:  $Diam(A) \geq Diam(B)$

**Proposição 1:** Dados  $A, B \in \mathbb{R}_f$  temos:

$$[A \ominus_H B]^\alpha = [a_-^\alpha - b_-^\alpha, a_+^\alpha - b_+^\alpha] \quad (2.12)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$

**Definição 8** Uma função  $F$  a valores *fuzzy* é uma regra que associa a cada elemento de um espaço vetorial  $X$  um único elemento em  $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ , isto é

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

Para cada  $x \in X$ , temos que  $[F(x)]^\alpha = [f_-^\alpha(x), f_+^\alpha(x)]$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Pode-se observar que  $f_-^\alpha, f_+^\alpha$  são funções de uma variável real a valores reais.

**Definição 9** (Salgado et al., 2019) Uma função  $F : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_f$  é dita *H diferenciável* no ponto  $x_0 \in X$  se os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) \ominus_H F(x)}{h} \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x) \ominus_H F(x-h)}{h}$$

existirem e forem iguais. Nesse caso, denotaremos o limite acima de  $D_H F(x_0)$  ou simplesmente  $F'(x_0)$ , chamada de *H derivada* de  $F$  no ponto  $x_0$ .

**Proposição 2:** Se  $F : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_f$  é uma função *H diferenciável* no ponto  $x_0 \in X$ , então as funções  $f_-^\alpha$  e  $f_+^\alpha$  são diferenciáveis em  $x_0$  e vale

$$[D_H F(x_0)]^\alpha = [(f_-^\alpha)'(x_0), (f_+^\alpha)'(x_0)] \quad (2.13)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$

A defuzzificação se trata de um processo que permite representar um conjunto *fuzzy* por um valor crisp (número real). Existem alguns métodos de defuzzificação. Porém, os mais utilizados são: Centroíde, Centro de máximos, Média dos Máximos e Menor dos Máximos, entre outros. O presente trabalho utilizou do método de Centroíde para defuzzificação dos dados.

**Definição 10:** (Bede e Gal, 2004) O centroíde do subconjunto *fuzzy*  $A \in \mathcal{F}(u)$  é o número real

$$x_0 = \frac{\int_W x \cdot A(x) dx}{\int_W A(x) dx} \quad (2.14)$$

em que  $W = \text{supp}(A)$ .

### 3 Matérias e Métodos

Para a realização do presente trabalho foram utilizados dados referente a população de Minas Gerais do período de 1980 até 2012, proveniente do site DATASUS acessado em 15 de outubro de 2019. Tendo como base as informações fornecidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o banco de dados foi elaborado da seguinte forma:

- 1980, 1991, 2000 e 2010: IBGE – Censos Demográficos;
- 1996: IBGE – Contagem Populacional;
- 1981 – 1990, 1992 – 1999, 2001 – 2006: IBGE - Estimativas preliminares para os anos intercensitários dos totais populacionais, estratificadas por idade e sexo pelo MS/SGEP/Datasus.
- 2007 – 2009: IBGE - Estimativas elaboradas no âmbito do Projeto UNFPA/IBGE (BRA/4/P31A) - População e Desenvolvimento. Coordenação de População e Indicadores Sociais.
- 2011 – 2012: IBGE - Estimativas populacionais enviadas para o TCU, estratificadas por idade e sexo pelo MS/SGEP/Datasus.

A projeção da população é encontrada a partir das informações dos Censos Demográficos (que se trata de uma pesquisa domiciliar). E a projeção é elaborada com base nas informações sobre os componentes da dinâmica demográfica (fecundidade, mortalidade e migração). Para realizar a projeção, sempre busca-se usar os dados mais recentes sobre tais componentes (PROJEÇÃO DA POPULAÇÃO DO BRASIL POR IDADE E SEXO – NOTA TÉCNICA)

Nesse trabalho foi utilizado o *software* R Core Team (2019). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria (URL <https://www.R-project.org/>). Para encontrar a função de pertinência de um número triangular fuzzy. E o programa GNUPLOT para fazer os gráficos apresentados.

### 3.1 Modelagem

Com base no modelo clássico de Malthus, apresentado no referencial teórico, tem-se a EDO de Crescimento Populacional, considerada pelo modelo, em que a população cresce de forma exponencialmente a uma taxa crescente ( $k$ ), e sua população no tempo  $t$  depende da população inicial, como pode ser representada na equação a baixo:

$$P(t) = P_0 e^{kt} \quad (3.1)$$

Tendo em vista que o modelo de Malthus considera que a taxa de crescimento ( $k$ ) constate, porém, é sensato supor incerteza nos valores das taxas, já que na realidade uma população está em constante mudança, e nem sempre cresce com a mesma proporção de anos anteriores.

Com base na premissa que a taxa de crescimento ( $k$ ) pode não ser constante, o modelo considerará ela sendo um número triangular *fuzzy*, em um intervalo de  $[a,c]$  e o vértice do triângulo o ponto  $(b, 1)$ , ou seja, o valor clássico ao redor do que ocorrerá a incerteza. Será considerando o número triangular *fuzzy* como a tripla  $(a;b;c)$ ,

Dessa maneira o modelo utilizará do princípio de extensão de Zadeh será aplicado na solução encontrada no modelo clássico, equação 3.1, onde o parâmetro  $k$  carregará uma incerteza.

Nesse modelo consideraremos que a população inicial é incerta, ou seja,  $P_0$  será um número *fuzzy*, e como no decorrer dos anos a população de Minas Gerais só expandiu considera-se  $k > 0$ , tendo o seguinte modelo:

## 4 Resultados

### 4.1 Modelo Clássico de Malthus

Para obtermos o parâmetro  $k$  do modelo de crescimento populacional de Malthus do estado de Minas Gerais, foi utilizado o ano de 1980 como ano inicial. Nesse ano a população era de 13380105 habitantes, e no ano de 2010 19597330 habitantes. Foram escolhidos esses anos por se tratar de dados provenientes do senso demográfico, sendo assim seus valores tem uma maior confiabilidade, portanto o intervalo de tempo  $t$  será igual a 30. Dessa forma temos, que  $k = 0,0127208143$

Sendo assim, pelo modelo clássico pode-se constatar que a população de Minas Gerais cresce de forma exponencialmente a uma taxa constante de 0,0127208143 ao ano, considerando a linha temporal usada.

### 4.2 Solução do Modelo de Malthus via Princípio de Extensão

Ao incluir a incerteza na taxa de crescimento se estende também para uma incerteza na população, em outras palavras pode-se dizer que a taxa de crescimento se modifica ao passar dos anos, não sendo constante, visto que a população cresce de forma diferente ao passar dos anos.

Nessa seção considerou-se que o parâmetro  $k$ , encontrado no modelo clássico, um número triangular *fuzzy*, através do princípio de extensão de Zadeh, a função a ser estendida e:

$$P(t) = 13380105e^{0,0127208143t}$$

A Figura (1) apresenta a solução fuzzy do Problema considerando a tripla  $(0,0027208143; 0,0127208143; 0,0227208143)$ .

Pode-se observar na Figura (1) a pertinência da população ao longo do tempo, resultante de se considerar o  $k$  como um número triangular *fuzzy* simétrica, que grada-

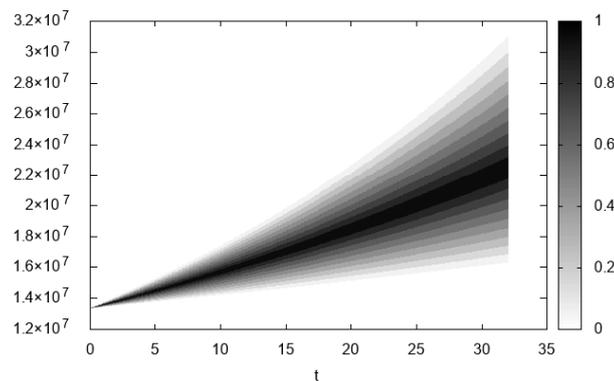


Figura 1: Representação gráfica da solução *fuzzy* considerando a equação de crescimento populacional de Malthus, com o parâmetro  $k$  fuzzy e a tripla  $(0,0027208143; 0,0127208143; 0,0227208143)$

tivamente aumenta sua amplitude ao longo do tempo, variando entre o intervalo de 0 a 1. Na escala representativa do gráfico mostra que quanto mais claro for menor será a pertinência em contrapartida quanto mais escuro estiver mais próximo de 1, quando ocorrer da pertinência de um número *fuzzy* ser igual 1 isso representa um número crisp.

E assim como na Figura (1) a Figura (2) também traz a solução fuzzificada ao se considerar  $k$  número triangular *fuzzy* não simétrico, onde sua tripla é de  $(0,0127208143; 0,0127208143; 0,0227208143)$ .

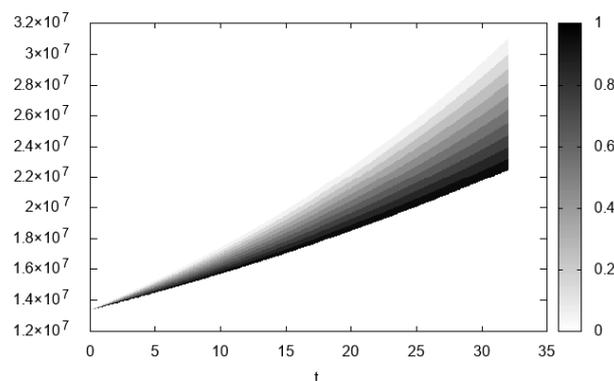


Figura 2: Representação gráfica da solução *fuzzy* considerando a equação de crescimento populacional de Malthus, com o parâmetro  $k$  fuzzy e a tripla  $(0,0127208143; 0,0127208143; 0,0227208143)$ .

Percebe-se que ao se utilizar uma função de pertinência assimétrica acima do valor clássico diminui o diâmetro da pertinência. E a Figura (3) também trará um número *fuzzy*

resultante do  $k$  sendo um triangular com um triângulo não simétrico do valor clássico, porém sua tripla será  $(0,0127208143; 0,0127208143; 0,0127208143)$ .

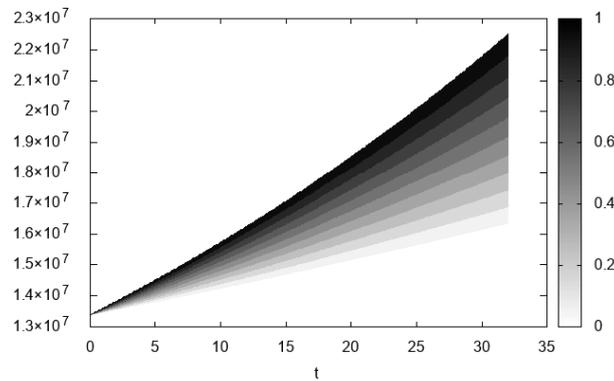


Figura 3: Representação gráfica da solução *fuzzy* considerando a equação de crescimento populacional de Malthus, com o parâmetro  $k$  fuzzy e a tripla  $(0,0027208143; 0,0127208143; 0,0127208143)$ .

A Figura (3) assim como as Figuras (1) e (2) trazem soluções fuzzificadas do problema proposto, e nos três gráficos pode-se perceber a influência na incerteza da população ao se considerar  $k$  um número *fuzzy*.

E com o intuito de encontrar uma solução que permite apresentar o conjunto encontrado nas figuras (1), (2) e (3) por um número real (número crisp) foi utilizado o método defuzzificação centroide, para a realização da defuzzificação do conjunto, o que será mostrado na Figura (4), que apresenta todos os modelos defuzificados. Vale a pena ressaltar que há outros métodos defuzzificação.

Na Figura (4) pode-se perceber como o comportamento no modelo clássico e dos modelos *fuzzy* mostrados nos gráficos das Figuras (1), (2) e (3) e os dados observados. Onde os dados observados são representado pelos pontos, o modelo clássico é representado pela curva vermelha, a curva azul traz a defuzzificação do gráfico da Figura (1), que representa um número *fuzzy* simétrico, enquanto o verde representa a defuzzificação do gráfico apresentado na Figura (2), que representa o número *fuzzy* triangular não simétrico e por fim a curva laranja mostra a defuzzificação do modelo apresentado na Figura (3), que se trata de um número *fuzzy* quando se considera o  $k$  um número triangular *fuzzy* não simétrico. Visualmente os modelos que mais se aproximou dos dados reais foram as curvas do modelo clássico e o modelo 1 (curvas vermelha e azul), isso será apresentado na Figura

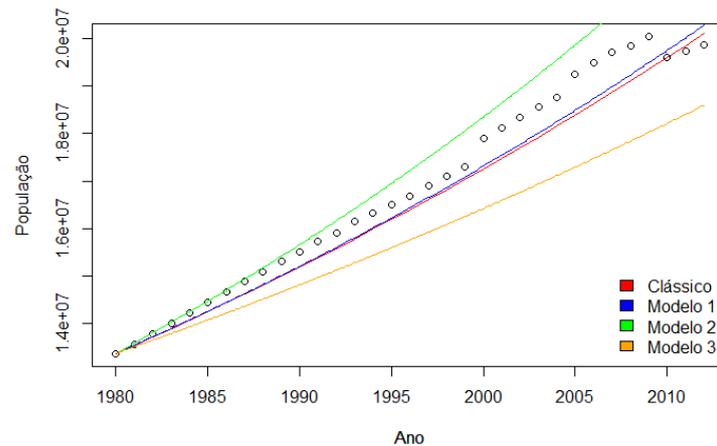


Figura 4: Apresentação do modelo clássico e os modelos *fuzzy*, via princípio de extensão, defuzificado.

(5), que mostra as diferenças que cada modelo teve em relação aos dados reais.

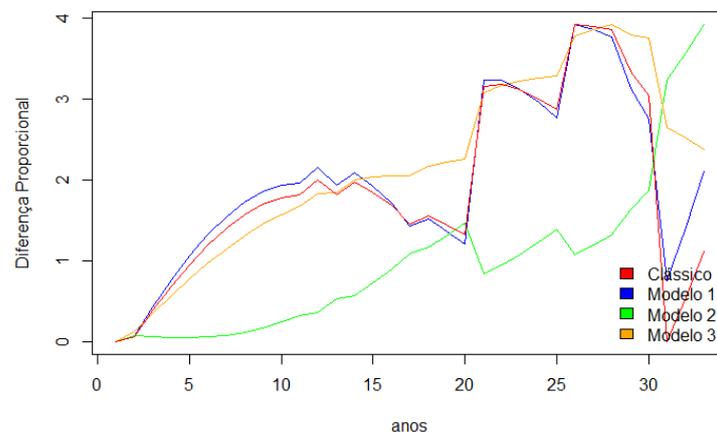


Figura 5: Diferença dos modelos em relação aos dados reais.

A Figura (5) mostra o percentual proporcional de diferença dos modelos estudados aos dados observados, a curva vermelha representa diferença do modelo clássico e dos dados observados, a curva azul do número *fuzzy* apresentado no primeiro modelo, a curva amarelo representa a diferença do número *fuzzy* do segundo caso, a curva laranja representa a diferença do número *fuzzy* do terceiro modelo. Como na Figura (4) mostrou o modelo clássico e o modelo 1 ficaram bem parecidos, então pelo gráfico de diferença percebe-se que a diferença entre os dois são próximas.

A Tabela (1) trará os resultados obtidos através da desfuzzificação de cada modelo,

onde se considerou a taxa de crescimento um número triangular *fuzzy*, e o modelo clássico de Malthus, também será apresentado os dados observados para a realização do estudo. E a tabela 2 mostra a correlação que os dados têm, pode se perceber que há uma correlação positiva e alta em relação a todos os dados, o que pode concluir que apesar dos dados serem obtidos por modelos distintos há uma relação entre eles.

Tabela 1: Resultado obtidos através dos modelos

Ano	População	Clássico	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
1980	13380105	13380195	13380195	13380195	13380195
1981	13561400	13599585	13599697	13640486	13565149
1982	13784075	13822572	13823029	13905924	13752746
1983	14007518	14049216	14281461	14176613	13943024
1984	14230376	14279576	14516707	14452658	14136022
1985	14452508	14513713	14756071	14734167	14331780
1986	14672561	14751689	14756071	15021250	14530340
1987	14889471	14993567	14999629	15314019	14731741
1988	15101890	15239411	15247459	15612589	14936026
1989	15308819	15489286	15499639	15917077	15143237
1990	15510734	15743258	15756250	16227602	15353417
1991	15743152	16001394	16017374	16544285	15566610
1992	15911713	16263763	16283094	16867251	15782859
1993	16144803	16530434	16553494	17196626	16002210
1994	16327334	16801478	16828663	17532541	16224709
1995	16505371	17076965	17108688	17875126	16450402
1996	16672613	17356970	17393659	18224518	16679335
1997	16904908	17641566	17683668	18580852	16911557
1998	17100267	17930828	17978808	18944270	17147115
1999	17296065	18224833	18279176	19314915	17386060
2000	17891494	18523659	18584867	19692933	17628440
2001	18127024	18827385	18895983	20078472	17874307
2002	18343518	19136090	19212622	20471686	18123712
2003	18553335	19449858	19534889	20872730	18376707
2004	18762405	19768770	19862889	21281761	18633345
2005	19237434	20092911	20196728	21698943	18893679
2006	19479262	20422367	20536516	22124440	19157765
2007	19719285	20757225	20882363	22558420	19425657
2008	19850072	21097574	21234384	23001057	19697412
2009	20034068	21443503	21592694	23452524	19973087
2010	19597330	21795104	21957411	23913002	20252740
2011	19728701	22152470	22328656	24382674	20536429
2012	19855332	22515696	22706549	24861725	20824215

Tabela 2: Matriz de Correlações

	Observado	Clássico	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
Observados	1	0.9912575	0.9907814	0.9899344	0.9919231
Clássico	0.9912575	1	0.9999855	0.9998960	0.9999643
Modelo 1	0.9907814	0.9999855	1	0.9999591	0.9999045
Modelo 2	0.9899344	0.9998960	0.9999591	1	0.9997386
Modelo 3	0.9919231	0.9999643	0.9999045	0.9997386	1

### 4.3 Modelo obtido pela a Equação Diferencial *Fuzzy* via derivada de Hukuhara

Nessa seção é considerando o Problema do Valor Inicial *Fuzzy* (PVIF), desta maneira a incerteza está na população inicial do modelo clássico de Malthus, para realizar a modelagem, deste novo modelo proposto, será preciso a utilização da derivada de Hukuhara. Portanto agora o  $P_0$  será um número *fuzzy*, de forma análoga o que foi feito no modelo Princípio de Extensão, foram utilizados três números triangulares *fuzzy*, para modelar o problema um simétrico, outro assimétrico a direita e o assimétrico a esquerda.

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \\ P(t) = P_0, P_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (4.1)$$

em que  $P_0 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  Denotemos por  $[P(t)]^\alpha = [P_-^\alpha(t), P_+^\alpha(t)]$  e  $[P_0]^\alpha = [P_-^\alpha(0), P_+^\alpha(0)] = [P_{01}^\alpha, P_{02}^\alpha]$  para cada  $\alpha \in [0, 1]$ . De acordo com a proposição 2. Temos:

$$\begin{cases} (P_-^\alpha)'(t) = kP_-^\alpha(t), P_-^\alpha(0) = P_{01}^\alpha \\ (P_+^\alpha)'(t) = kP_+^\alpha(t), P_+^\alpha(0) = P_{02}^\alpha \end{cases} \quad (4.2)$$

Portanto a solução do sistema (4,2) é dada por:

$$\begin{cases} P_-^\alpha(t) = P_{01}^\alpha e^{kt} \\ P_+^\alpha(t) = P_{02}^\alpha e^{kt} \end{cases} \quad (4.3)$$

No primeiro caso foi considerado a solução fuzzificada de um número *fuzzy*, a onde foi utilizado um número triangular *fuzzy* para  $P_0$  com um triangulo simétrico representado pela tripla (12042175, 5; 13380105; 14718214, 5).

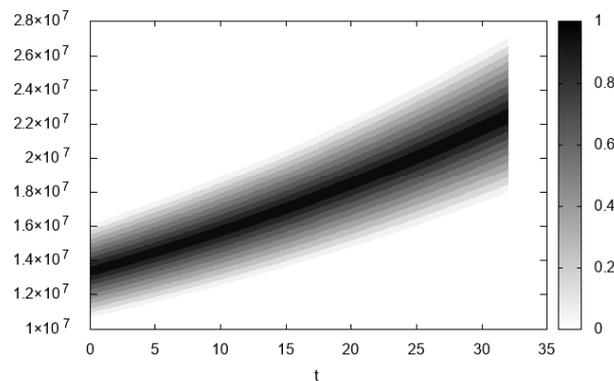


Figura 6: Representação gráfica da solução fuzzy, da equação de crescimento populacional de Malthus, considerando a população inicial fuzzy

No segundo caso consideremos a solução fuzzificada de um número *fuzzy*, a onde se considerou o  $P_0$  como número *fuzzy* triangular assimétrico a cima representado pela tripla  $(13380105; 13380105; 14718214, 5)$

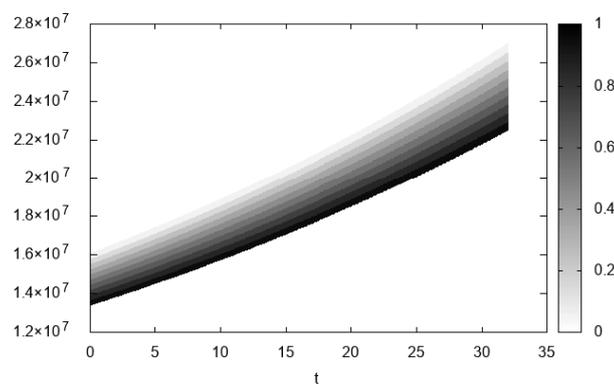


Figura 7: Representação gráfica a solução fuzzy da equação de crescimento populacional de Malthus, considerando a população inicial fuzzy

No terceiro caso consideremos a solução fuzzificada de um número *fuzzy*, a onde se considerou o  $P_0$  como número *fuzzy* triangular assimétrico a baixo representado pela tripla  $(12042175, 5; 13380105; 13380105)$

As Figuras (6), (7) e (8) representa a solução dos casos através da diferença de Hukuhara, considerando o  $P_0$  um número triangular *fuzzy*.

Na Figura (9) é mostrada a solução defuzificada do problema, considerando a população inicial *fuzzy* e utilizando a derivada de Hukuhara. Foi utilizado o centroide como método de defuzificação.

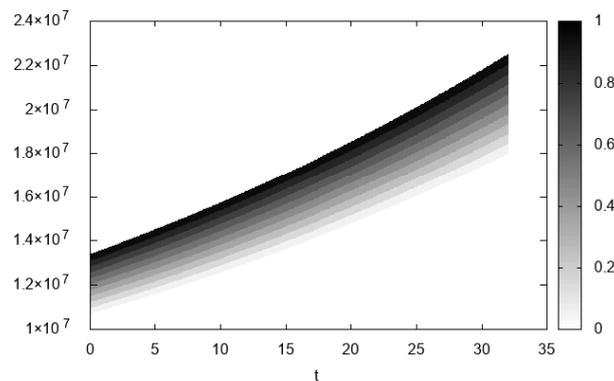


Figura 8: Representação gráfica a solução fuzzy da equação de crescimento populacional de Malthus, considerando a população inicial fuzzy.

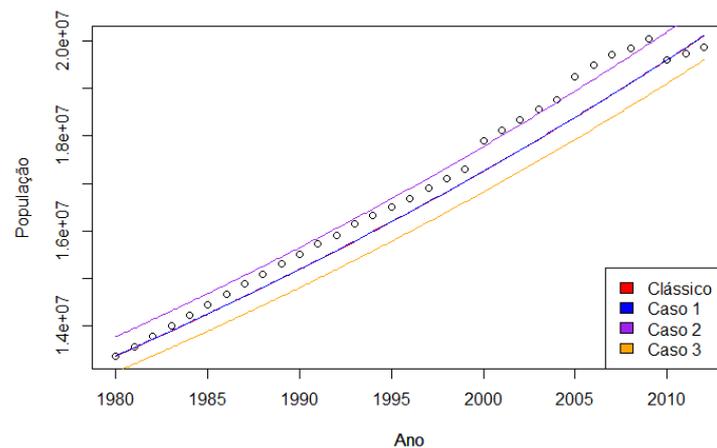


Figura 9: Apresentação gráfica entre o modelo clássico e os modelos fuzzy defuzificado, via derivada de Hukuhara.

Na Figura (9) podemos perceber como é o comportamento no modelo clássico e dos modelos *fuzzy*, via derivada de Hukuhara, mostrados nos gráficos das Figuras (6), (7) e (8) e os dados observados. Onde os dados observados são representados pelos pontos, o modelo clássico é representado pelo curva vermelha, a curva azul traz a defuzificação do gráfico da Figura (6), enquanto o roxo representa a solução defuzificada do gráfico apresentado na Figura (7) e por fim o eixo laranja mostra a solução defuzificada do modelo apresentado na Figura (8).

A Figura (10), trará a diferença que os modelos tiveram em relação aos dados extraídos do Datasus.

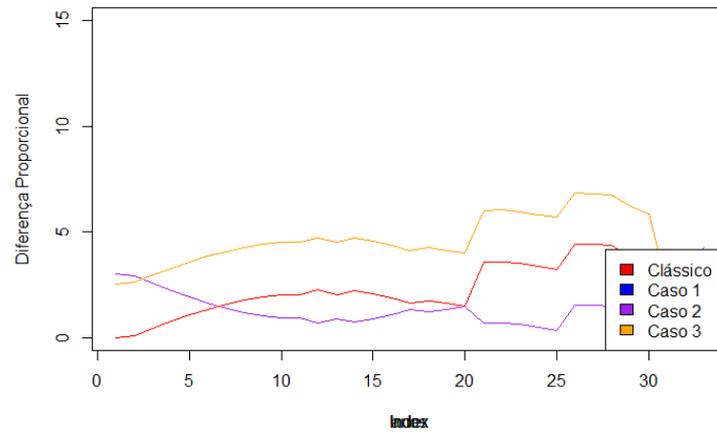


Figura 10: Diferença dos modelos em relação aos dados reais.

A Tabela (3) trás os dados observados, para a realização do trabalho e extraído do Datasus, os resultados obtidos pelo modelo clássico de Malthus e os resultados obtidos pela a desfuzzificação dos modelos proveniente da derivada de Hukuhara ao se considerar a população inicial um número *fuzzy*. E a Tabela (4) mostra a matriz de correlação dos dados, onde há uma correlação alta entre eles, a maioria deles deu uma correlação 1, mostrando que apesar dos resultados serem distintos e obtidos de forma diferentes eles têm uma alta relação entre si.

Tabela 3: Resultado obtidos através dos modelos

Ano	População	Clássico	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
1980	13380105	13380195	13380195	13781601	13040544
1981	13561400	13599585	13599585	14007573	13254365
1982	13784075	13822572	13822572	14237250	13471692
1983	14007518	14049216	14049216	14470693	13692582
1984	14230376	14279576	14279576	14707963	13917094
1985	14452508	14513713	14513713	14949124	14145288
1986	14672561	14751689	14751689	15194239	14377223
1987	14889471	14993567	14993567	15443374	14612961
1988	15101890	15239411	15239411	15696593	14852564
1989	15308819	15489286	15489286	15953964	15096096
1990	15510734	15743258	15743258	16215556	15343621
1991	15743152	16001394	16001394	16481436	15595205
1992	15911713	16263763	16263763	16751676	15850914
1993	16144803	16530434	16530434	17026347	16110815
1994	16327334	16801478	16801478	17305522	16374979
1995	16505371	17076965	17076965	17589274	16643473
1996	16672613	17356970	17356970	17877679	16916370
1997	16904908	17641566	17930828	18170813	17193741
1998	17100267	17930828	17930828	18468753	17475661
1999	17296065	18224833	18224833	18771578	17762203
2000	17891494	18523659	18523659	19079369	18053443
2001	18127024	18827385	18827385	19392206	18349459
2002	18343518	19136090	19136090	19710173	18650328
2003	18553335	19449858	19449858	20033353	18956130
2004	18762405	19768770	19768770	20361833	19266947
2005	19237434	20092911	20092911	20695698	19582860
2006	19479262	20422367	20422367	21035038	19903953
2007	19719285	20757225	20757225	21379942	20230311
2008	19850072	21097574	21097574	21730501	20562020
2009	20034068	21443503	21443503	22086808	20899168
2010	19597330	21795104	21795104	22448957	21241844
2011	19728701	22152470	22152470	22817044	21590138
2012	19855332	22515696	22515696	23191167	21944144

## 5 Considerações Finais

Neste trabalho estudamos a dinâmica de crescimento populacional, desenvolvida por Malthus, considerando a taxa de crescimento e a população inicial números *fuzzy*, por considerar que há incertezas neles.

As modelagens *fuzzy* via princípio de extensão e diferença de Hukuhara representaram indício de melhora na modelagem em relação ao modelo clássico de Malthus, porém ainda é necessário uma melhor maneira de como definir o número *fuzzy* utilizado.

Como trabalhos futuros propõe-se modelos mais sofisticados, por exemplo o modelo de Verhulst, que é uma modificação do modelo proposto por Malthus, levando em conta fatores inibidores. E com a utilização, nem todos os valores eram precisos, já que haviam dados estimados no meio, para alcançar maior precisão nos resultados seria preciso usar o método de processo estocástico *fuzzy*.

## 6 Referências

- BARROS, L. C. BASSANEZI, R. C. A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics. Campinas: UNICAMP/IMECC, 2010.
- BASSANEZI, R. C. JUNIOR, W. C. F. (1988). Equações Diferenciais: com aplicações. Harbra, 2002.
- CHEVALLARD, Yves. "BOSCH, M. GASCÓN, J. Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed (2001).
- COLEÇÃO, BCT.-UFABC; DIDÁTICOS, Textos. Equações Diferenciais Ordinárias.
- DAMIANI, A. L. População e geografia. Editora Contexto, 1991.
- SALGADO, S. A. B.; BARROS, L. C., ESMI E. Minicurso, Uma Introdução as Equações Diferenciais Fuzzy. II WMAP (2019)
- ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. Journal Information and Control. n. 8, p. 338-353, 1965.