

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
Instituto de Ciências Sociais Aplicadas - ICSA

WALEF MACHADO DE MENDONÇA

SISTEMA BASEADO EM REGRAS *FUZZY* INTEGRADO A UM
MODELO PROBABILÍSTICO NO ESTUDO DA PROBABILIDADE DE
RUÍNA.

VARGINHA/MG
2018

WALEF MACHADO DE MENDONÇA

SISTEMA BASEADO EM REGRAS *FUZZY* INTEGRADO A UM
MODELO PROBABILÍSTICO NO ESTUDO DA PROBABILIDADE DE
RUÍNA.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal de Alfenas, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Ciências Atuariais

Orientador: Leandro Ferreira

VARGINHA/MG
2018

RESUMO

O risco de uma seguradora ficar com reserva insuficiente para pagar suas indenizações, comumente denominado como probabilidade de ruína, além de indispensável, se apresenta como um grande desafio para os profissionais do mercado segurador, uma vez que sua obtenção pode envolver processos complexos, e não existe uma expressão que possa ser aceita como ideal na comunidade atuarial. Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é construir um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) integrado ao modelo probabilístico de Cramér-Lundberg para determinar a probabilidade de ruína de uma seguradora. A variável valor da indenização foi utilizada como variável de entrada no modelo e foi gerada através do Método de Monte Carlo. A variável de saída foi a probabilidade da ruína. Foram definidos dois cenários, um para o caso em que as indenizações têm distribuição exponencial e outro para o caso em que as indenizações possuem distribuição gama. Em ambos os cenários foram criados SBRF's utilizando a função de pertinência gaussiana, o método de inferência de Mandani e o método defuzzificação centro de gravidade, além disso, foram feitos modelos com 5, 10 e 15 conjuntos *fuzzy*. Para teste dos modelos os dados simulados foram divididos em dois conjuntos, um para treinamento e outro para teste e foram calculados o coeficiente de determinação e o erro quadrado médio. Em todos os cenários foram obtidos coeficientes de determinação acima de 90% tanto para o conjunto de treinamento quanto para o de teste nos modelos com 5, 10 e 15 conjuntos *fuzzy* o que indica que os SBRFs foram bem ajustados e têm boa capacidade para a estimação da probabilidade da ruína.

Palavras-chave: Teoria da Ruína, Sistemas Fuzzy, Método de Monte Carlo, Seguros .

SUMÁRIO

1	Introdução	4
2	Revisão de literatura	5
2.1	Teoria da ruína	5
2.1.1	Modelo clássico de Cramér-Lundberg	5
2.1.2	Probabilidade de ruína	7
2.1.3	Coefficiente de ajustamento e desigualdade de Lundberg	7
2.2	Lógica <i>fuzzy</i>	10
2.2.1	Sistemas baseados em regras <i>fuzzy</i>	11
2.2.2	O método de inferência de Mandani	12
2.2.3	Métodos de defuzzificação	12
3	Metodologia	13
3.1	Indenizações com distribuição exponencial	13
3.2	Indenizações com distribuição gama	14
3.3	Recursos computacionais	14
3.4	Sistema baseado em regras <i>fuzzy</i>	14
3.4.1	O pacote <i>FRBS</i>	15
3.5	Simulações	16
4	Resultados	17
4.1	Indenizações com distribuição exponencial	17
4.2	Indenizações com distribuição gama	19
5	Considerações finais	26
6	Referências	27

1 Introdução

Para atuar no mercado brasileiro, uma seguradora deve obedecer alguns requisitos. Entre eles destacam-se um capital mínimo e uma margem de solvência. A margem de solvência expressa a relação entre as apólices de seguro vendidas e a capacidade da seguradora de honrar suas obrigações (LEMOS, 2008). Os estudos de solvência implicam a análise de vários componentes de risco, tais como; o risco legal, operacional, de crédito, das operações financeiras e o risco de subscrição. Adicionalmente, há o risco de uma seguradora ficar com reserva insuficiente para pagar suas indenizações, comumente denominado como probabilidade de ruína. Além de indispensável, esse risco se apresenta como um grande desafio para os profissionais do mercado segurador, uma vez que sua obtenção pode envolver processos complexos, e não existe, entretanto, nenhuma expressão que possa ser aceita como ideal na comunidade atuarial (FERREIRA, 2005).

Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo fazer uma breve introdução à teoria da ruína, mais especificamente, apresentar o modelo desenvolvido por Crámer-Lundberg e sua estimativa para a probabilidade de ruína de uma seguradora. Além disso, objetiva-se construir um modelo baseado em regras *fuzzy* integrado ao modelo de Crámer-Lundberg para determinar a probabilidade de ruína, ou seja, a probabilidade de uma seguradora ficar com reserva insuficiente para pagar as indenizações resultantes de um sinistro. Para a obtenção das estimativas das probabilidades de ruína foram utilizadas aproximações para situações em que as indenizações têm distribuição exponencial e gama. Os valores das indenizações foram gerados a partir de simulações de Monte Carlo.

A presente pesquisa foi estruturada em seis seções, incluindo essa introdução. Na próxima seção é apresentada uma revisão de literatura sobre teoria da ruína e lógica *fuzzy*. Em seguida, é apresentada a metodologia utilizada, incluindo o cálculo do coeficiente de ajustamento para os casos em que as indenizações têm distribuição exponencial e gama, os recursos computacionais, o sistema baseado em regras *fuzzy* criado para a obtenção das estimativas das probabilidades de ruína e as simulações de Monte Carlo. Na quarta seção são apresentados os resultados alcançados pelo sistema baseado em regras *fuzzy* para os casos em que as indenizações têm distribuição exponencial e gama. A quinta seção apresenta as considerações finais, onde são reunidos os resultados alcançados. A última seção apresenta as referências bibliográficas.

2 Revisão de literatura

2.1 Teoria da ruína

A teoria da ruína trata do estudo do nível da reserva de uma seguradora para uma carteira de apólices de seguro ao longo do tempo, levando em conta os momentos em que as indenizações ocorrem, bem como seus valores (DICKSON, 2016). Uma seguradora entra em processo de ruína quando a quantidade do seu capital na forma de reserva não é capaz de arcar com os sinistros dos seus segurados. É importante ressaltar que, entrar em processo de ruína não significa entrar em falência (LEMOS, 2008). Várias estratégias podem ser utilizadas para reduzir o risco de entrar em processo de ruína. Entre elas se destaca o resseguro, que tem como objetivo diminuir os riscos assumidos pela seguradora direta e, conseqüentemente, a probabilidade de ruína. Além disso, intervenções no processo, como o pagamento de dividendos ou o aumento do prêmio por riscos com incidência de sinistros desfavoráveis, não são considerados na definição da probabilidade de ruína. Para mais, os efeitos da inflação e do retorno sobre o capital não são considerados no cálculo, e a probabilidade de ruína só responde pelo risco de seguro, não por uma possível má administração (KAAS et al 2008).

Nesse trabalho, probabilidade de ruína significa a probabilidade da reserva de uma seguradora ficar negativa em algum instante do tempo, dado um capital inicial, ou seja, qual a possibilidade de uma companhia de seguro não ter reserva suficiente para pagar as indenizações resultantes de algum sinistro.

Alguns trabalhos sobre probabilidade de ruína são: Eade (1983), Beekman (1985), Gerber (1987), De Vylder (1988), Hipp (1989), Seah (1990), Dickson e Waters (1992) e Asmussen (2010).

2.1.1 Modelo clássico de Cramér-Lundberg

O modelo de Cramér-Lundberg ou modelo clássico de risco coletivo foi inicialmente apresentado em 1903 por Filip Oskar Lundberg. Porém, devido à sua terminologia de difícil entendimento e ao baixo desenvolvimento da teoria de processos estocásticos na época, o trabalho foi pouco utilizado pelos atuários. Mais tarde, em 1930, a teoria de Lundberg foi retomada por Harald Cramér que a desenvolve e a torna mais acessível (LEMOS, 2008).

A partir daí, iniciam-se os primeiros estudos acerca de probabilidade de ruína e seu comportamento no tempo infinito ou no tempo finito, que constituem o campo de estudo da Teoria da Ruína.

O modelo de Cramér-Lundberg é um processo estocástico e pode ser apresentado da seguinte forma

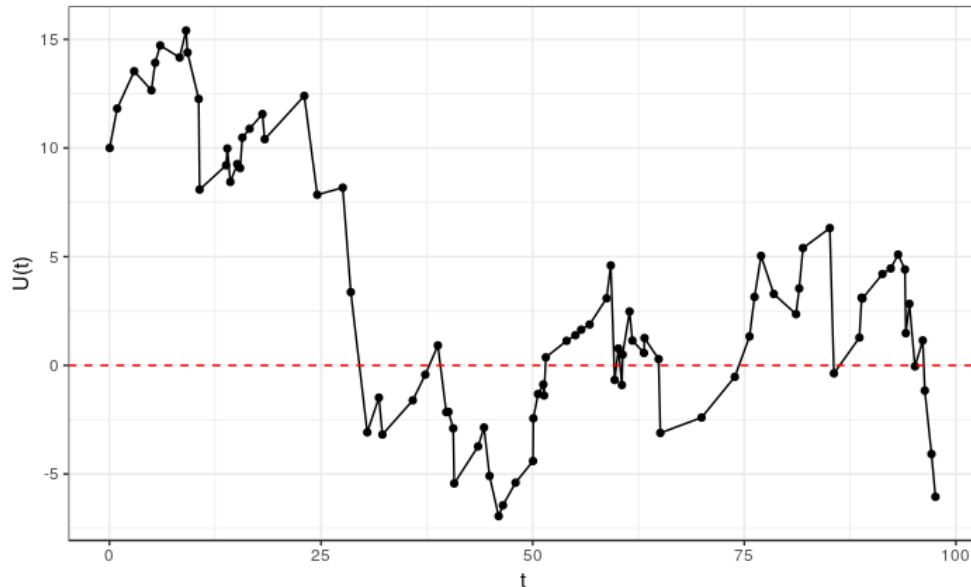
$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

em que $U(t)$ representa a reserva de uma seguradora até o instante de tempo t . As indenizações agregadas relativas ao intervalo $(0, t]$ são representadas por $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, $N(t)$ é o número de indenizações ocorridas no intervalo de tempo $(0, t]$ e ocorre segundo um processo de Poisson(λt), com $\lambda > 0$. Assume-se que X_i são variáveis aleatórias, identicamente distribuídas e não negativas e representam os valores das indenizações individuais (LEMOS, 2008). Para esse modelo, assume-se que a reserva inicial $U(0) = u$ e os prêmios são recebidos pela seguradora a uma taxa constante $c > 0$. Também assume-se que os prêmios recebidos são superiores ao valor esperado das indenizações agregadas, ou seja, $c > \lambda p_1$, onde p_1 é a esperança de X_i .

É importante destacar que o modelo de Cramér-Lundberg não leva em consideração despesas administrativas com os contratos de seguro, rendimentos de investimentos ou taxas de juros.

A Figura 1 apresenta a trajetória da reserva de uma seguradora segundo o modelo de Cramér-Lundberg, em que a reserva inicial é igual a 10 ($U(0) = 10$), a taxa de recebimento dos prêmios é igual a 2 ($c = 2$) e o parâmetro da distribuição do número de indenizações é 1 ($\lambda = 1$).

Figura 1: Uma trajetória do processo de reserva de uma seguradora.



Fonte: Elaboração própria

Os valores da esperança e variância da variável $U(t)$ são dados respectivamente por

$$\begin{aligned}
E(U(t)) &= u + ct - E(S(t)) \\
&= u + ct - \lambda t p_1 \\
&= u + t(c - \lambda p_1)
\end{aligned}$$

$$Var(U(t)) = \lambda t p_2$$

2.1.2 Probabilidade de ruína

A probabilidade de ruína, dada por $\psi(u)$, decorrente de uma reserva inicial (u) em um horizonte temporal infinito, é dada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= P(T < \infty | U(0) = u) = P(U(t) < 0 \text{ para um determinado valor fixo } x > 0 | U(0) = u) \\
&= P(u + ct - S(t) < 0 | U(0) = u) = P(S(t) > u + ct | U(0) = u) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i > u + ct | U(0) = u\right) = \int_{u+ct}^{\infty} p_s(x) dx,
\end{aligned}$$

em que $p_s(x)$ é a função de densidade das indenizações agregadas e a variável aleatória $T = \inf\{t > 0 \text{ e } U(t) < 0\}$ é o momento de ocorrência da ruína para uma dada reserva inicial $U(0) = u$ (LEMOS, 2008).

É importante destacar que, como u é a reserva da seguradora, a probabilidade de ruína é inversamente proporcional a u . Ou seja, a probabilidade de ruína é alta para valores baixos de u , o que pode ser visualizado na Figura 2.

2.1.3 Coeficiente de ajustamento e desigualdade de Lundberg

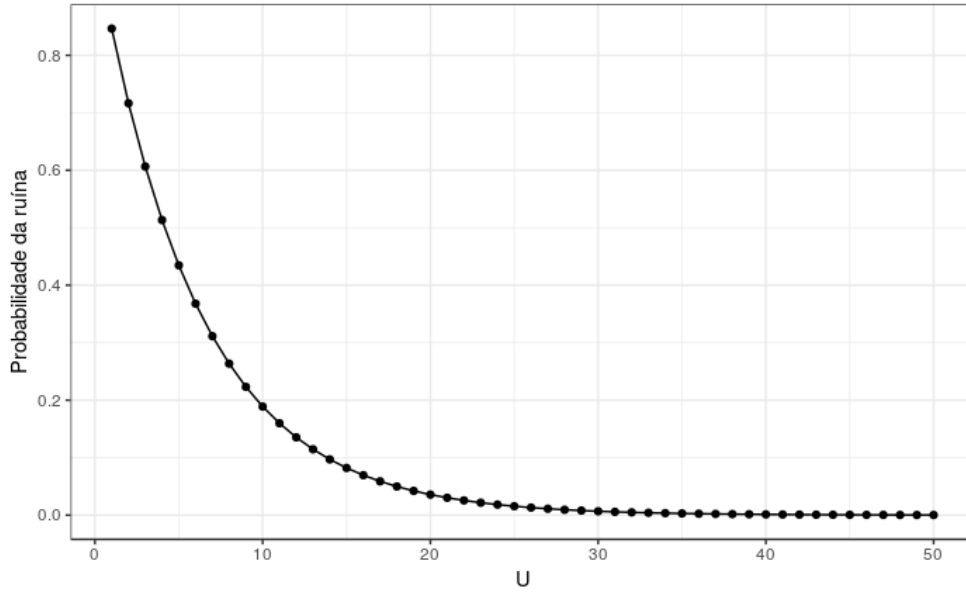
Nessa seção serão apresentadas algumas definições e alguns resultados necessários para descrever o coeficiente de ajustamento e a desigualdade de Lundberg.

Ramos (2014) define o coeficiente de segurança associado ao modelo clássico de risco como o número $\theta > 0$ tal que o prêmio é $c = (1 + \theta)\lambda p_1$, onde θ é um carregamento de segurança. Portanto, o coeficiente de ajustamento é definido como a única raiz positiva $r = R$ da equação

$$1 + (1 + \theta)p_1 r = M_X(r). \quad (2)$$

Utilizando a definição de Ramos (2014), a igualdade apresentada na Equação 2 pode ser reescrita da seguinte forma $rc = \lambda[M_X(r) - 1]$, isto é, $e^{rc} = M_S(r)$, onde $S = \sum_{i=1}^N X_i$, com $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Sendo assim, o coeficiente de ajustamento, comumente denotado como R , representa o equilíbrio ou ajustamento entre os valores que

Figura 2: Probabilidade da ruína para sinistros com distribuição Exponencial(0.5).



Fonte: Elaboração própria

a seguradora recebe como prêmio dos seguros (rc) e os valores que ela gasta com as indenizações ($M_S(r)$) (RAMOS, 2014).

A Equação 2 tem apenas uma solução positiva que é equivalente a

$$M_X(r) = 1 + \frac{c}{\lambda}r.$$

A desigualdade de Lundberg pode ser demonstrada através do seguinte teorema apresentado por Lemos (2008).

Teorema 1. Admitindo a existência do coeficiente de ajustamento R , a desigualdade de Lundberg é dada por

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad (3)$$

Demonstração. Considerando que a ruína ocorre na primeira indenização ($n = 1$), por definição, o tempo decorrente até a primeira indenização tem função de densidade $k(t)$. Então,

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= P([0 < T < \infty] \cap [U(t) < 0]) = P([0 < T < \infty] \cap [u + ct - S(t) < 0]) \\ &= P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct]) = \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt. \end{aligned}$$

Já que por definição R é positivo e $x > u + ct$, logo, $u + ct - x < 0$, e isso implica que $e^{-R(u+ct-x)}$ seja uma valor maior que 1. Portanto,

$$\psi_1(u) \leq \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt$$

Aumentando o limite de integração, obtém-se

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &\leq \int_0^\infty k(t) \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^\infty k(t) e^{-Rct} \int_0^\infty p(x) dx dt \\ &= e^{-Ru} E(e^{-cRT_i}) E(e^{RX_i}) = e^{-Ru}; \end{aligned}$$

esse resultado se deve ao fato de que o produto destes dois valores esperados é igual a 1.

Para o caso de $n = 2$, usando raciocínio análogo, onde a ruína pode acontecer na primeira ou na segunda indenização, temos:

$$\psi_2(u) = P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u+ct]) + P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u+ct] \cap (X_2 \text{ ocorre ruína}))$$

Consequentemente, se a ruína ocorreu na primeira indenização, a segunda indenização ocorrerá com o sistema em ruína com probabilidade igual a 1.

$$\psi_2(u) = \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \psi_1(u+ct-x) dx dt$$

$$\begin{aligned} \psi_2(u) &\leq \int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt + \int_0^\infty \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \\ &= \int_0^\infty k(t) \left[\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \right] \\ &= \int_0^\infty k(t) \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt = e^{-Ru} \int_0^\infty e^{-Rct} k(t) dt \int_0^\infty e^{rx} p(x) dx \\ &= e^{-Ru} E(e^{-cRT_i}) E(e^{RX_i}) = e^{-Ru}, \end{aligned}$$

assim como observado em $\psi_1(u)$. Admitindo válido para n , é necessário provar para $n + 1$. De forma análoga e, considerando que a ruína acontece da primeira ou nas n indenizações seguintes, segue

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \psi_n(u+ct-x) dx dt \\
&\leq \int_0^\infty k(t) \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt + \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \\
&= \int_0^\infty k(t) \left[\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \right] \\
&= \int_0^\infty k(t) \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt = e^{-Ru} \int_0^\infty k(t) e^{-Rct} dt \int_0^\infty e^{Rx} p(x) dx \\
&= e^{-Ru} E(e^{-cRT_i}) E(e^{RX_i}) = e^{-Ru}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$. □

2.2 Lógica fuzzy

Apresentada por Zadeh (1965), a teoria dos conjuntos *fuzzy* é uma extensão da teoria dos conjuntos clássicos e seu principal objetivo é dar tratamento matemático para conjuntos cujos elementos possuem graus de associação ou níveis de pertinência (BERGMEIR, BEN, 2015). O nível de pertinência de um elemento quando igual a 1, significa que o elemento é membro do conjunto, se o valor for 0 o elemento não pertence ao conjunto e valores nesse intervalo mostram um grau parcial de pertencimento ao conjunto. O nível de pertinência de um dado elemento é definido pela chamada função de pertinência, caracterizando um conjunto *fuzzy* (BERGMEIR, BEN, 2015).

A teoria proposta por Zadeh (1965) apresenta este novo conceito de conjunto que generaliza o conceito clássico e, consequentemente, as definições para as operações com conjuntos, ou seja, união e intersecção, complementares e assim por diante. Isso, por sua vez, levou à extensão de muitos outros conceitos, como número, intervalo, equação etc (RIZA et al., 2015).

A teoria dos conjuntos *fuzzy* fornece as ferramentas para dar tratamento matemático a conceitos, variáveis e regras imprecisos, provenientes de conceitos da linguagem humana, que é inerentemente vaga, tornando-se um modelo natural para representar o conhecimento humano (BARROS, BASSANEZI, 2006).

Um importante conceito é a variável linguística, definida como uma variável cujos valores são termos linguísticos, com uma semântica descrita por um conjunto *fuzzy* (ZADEH, 1975). Um valor de uma variável linguística representa conhecimento e tem significado determinado pelo seu grau da função de pertinência (BERGMEIR, BEN, 2015). Por exemplo, a variável incerta “valor de indenização”, definida no intervalo [1.000,15.000], pode ser representada pelos conjuntos *fuzzy* baixo, médio e alto, nos intervalos [1.000, 8.000], [6.000, 12.000] e [10000,15000], respectivamente. No caso, um

valor de indenização igual a 7.500 pertencerá a cada conjunto *fuzzy* com diferentes graus de pertinência.

Nos últimos anos, a pesquisa nessa área tem crescido constantemente e a literatura é vasta. Para mais aplicações de lógica *fuzzy* no contexto atuarial ver Shapiro (2004).

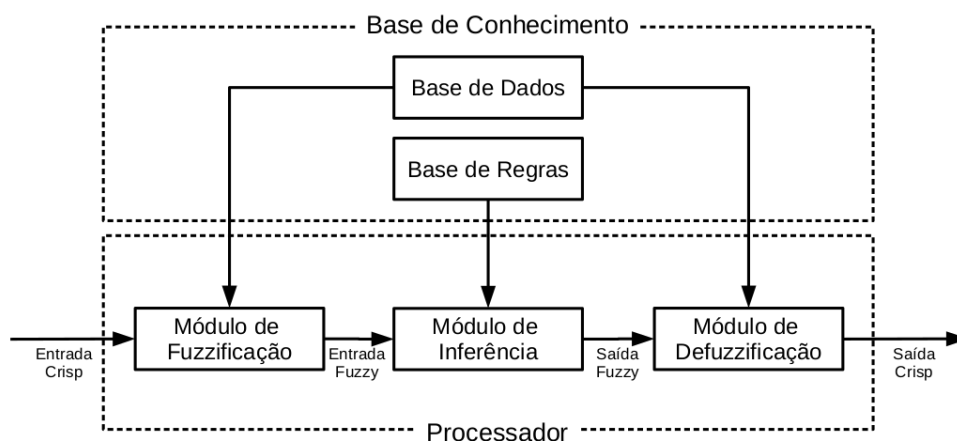
2.2.1 Sistemas baseados em regras *fuzzy*

Sistemas baseados em regras *fuzzy* (SBRF) (em inglês *Fuzzy Rule-Based Systems - FRBS*) são uma extensão de sistemas baseados em regras clássicas e são basicamente regras expressas na forma “SE A ENTÃO B”. Nos SBRFs *fuzzy* A e B são conjuntos *fuzzy*, sendo A e B chamados de parte antecedente e parte consequentes da regra, respectivamente (RIZA et al., 2015).

Os sistemas baseados em regras *fuzzy* envolvem em sua aplicação uma base de conhecimento e um processador. A base de conhecimento fornece funções de pertinência e regras *fuzzy* necessárias para o processamento das variáveis de entrada (SHAPIRO, 2004).

Na fase de processamento, utilizando uma base de dados, as variáveis de entrada do sistema passam pelo módulo de fuzzificação, onde são transformados em conjuntos *fuzzy*. No módulo de inferência, as variáveis de entrada e saída são conectadas, criando-se a base de regras. Os conjuntos *fuzzy* resultantes (saída *fuzzy*), do módulo de inferência, são então transformados pelo módulo de defuzzificação em valores numéricos (saída crisp) e se tornam a saída do sistema. A Figura 3 ilustra o processo de inferência nos sistemas baseados em regras *fuzzy* (SHAPIRO, 2004).

Figura 3: O sistema de inferência *fuzzy*.



Fonte: adaptado de Shapiro (2004)

2.2.2 O método de inferência de Mamdani

Introduzido por Mamdani (1974) e Mamdani e Assilian (1975) este tipo de modelo é constituído por conjuntos *fuzzy* em ambas as partes antecedentes e consequentes do sistema de regras. Além disso, é constituído por várias variáveis de entradas e uma variável saída. As regras *fuzzy* são da seguinte forma:

$$\text{SE } X_1 \text{ é } A_1 \text{ e } \dots \text{ e } X_n \text{ é } A_n \text{ ENTÃO } Y \text{ é } B, \quad (4)$$

onde X_i e Y são variáveis de entrada e saída, respectivamente, e A_i e B são conjuntos *fuzzy*.

O modelo Mamdani conta com quatro componentes: fuzzificação, base de conhecimento, mecanismo de inferência e defuzzificador.

O processo de fuzzificação transforma as variáveis de entradas *crisp* em valores linguísticos representados por conjuntos *fuzzy*. A base de conhecimento é constituída de um banco de informações, que contém as definições dos conjuntos *fuzzy* e os parâmetros das funções de pertinência, e uma base de regras do tipo “SE ENTÃO”. O mecanismo de inferência executa as operações do conjunto de regras nos dados de entrada. Por sua vez, o defuzzificador produz valores *crisp* dos conjuntos *fuzzy* como os resultados do processo de inferência. Uma vantagem fundamental do modelo Mamdani é sua maior interpretabilidade e flexibilidade para formular a base de conhecimento (RIZA et al., 2015).

2.2.3 Métodos de defuzzificação

Nos sistemas baseados em regras *fuzzy*, o módulo de inferência recebe uma variável de entrada e produz uma variável de saída, ambas *fuzzy*. Entretanto, se a variável de entrada do sistema for um número real, é esperado que a saída correspondente também seja um número real. Para que isso ocorra é necessário fazer uso de um método de defuzzificação, que transforma um conjunto *fuzzy* em um número real (BARROS, BASSANEZI, 2006).

Centro de gravidade

O centro de gravidade, também conhecido como centroide, é um dos métodos mais utilizados na literatura. O cálculo desse método se assemelha com o cálculo da esperança de uma variável aleatória e fornece a média da área dos gráficos que representam os graus de pertinência de um conjunto *fuzzy* (BARROS, BASSANEZI, 2006). A equação 5 apresenta o método de cálculo do centro de gravidade no caso discreto.

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n x_i \varphi_B(x_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(x_i)}, \quad (5)$$

em que $\varphi_B(x_i)$ representa os pesos que indicam o grau de pertencimento do valor x_i à variável modelada pelo conjunto *fuzzy* B

3 Metodologia

Conforme apresentado na introdução, este trabalho tem como objetivo obter um sistema baseado em regras *fuzzy* integrado ao modelo probabilístico de Crámer-Lundberg (equação 1) para encontrar o limite superior da probabilidade de ruína de uma seguradora. Nesta seção serão apresentados: o cálculo do coeficiente de ajustamento (R) para os casos em que as indenizações têm distribuição exponencial ($X \sim \text{exponencial}(\beta)$) e gama ($X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$), os recursos computacionais e a metodologia utilizada para a construção do sistema baseado em regras *fuzzy*, bem como as simulações de Monte Carlo realizadas para a obtenção das variáveis.

3.1 Indenizações com distribuição exponencial

Para os casos em que as indenizações têm distribuição exponencial ($X \sim \text{exponencial}(\beta)$), o valor do coeficiente de ajustamento (R) pode ser obtido através de uma solução fechada. Partindo da definição apresentada na Equação 2, tem-se que $e^{rc} = M_S(r)$ com $M_S(r) = M_N[\ln M_x(r)]$.

Substituindo a função geradora de momentos da distribuição exponencial, tem-se que

$$rc = \lambda[M_X(r) - 1] = \lambda \left[\frac{\beta}{\beta - r} - 1 \right] = \lambda \left[\frac{\beta - \beta + r}{\beta - r} \right] = \frac{\lambda r}{\beta - r}.$$

Resolvendo para r :

$$rc\beta - r^2c - \lambda r = 0$$

$$r(c\beta - rc - \lambda) = 0$$

$$c\beta - rc - \lambda = 0$$

$$R = \frac{-\lambda + c\beta}{c}.$$

que é o coeficiente de ajustamento para ($X \sim \text{exponencial}(\beta)$).

3.2 Indenizações com distribuição gama

Utilizando o mesmo raciocínio para os casos em que as indenizações têm distribuição gama ($X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$), tem-se que

$$e^{rc} = M_S(r) = M_N[\ln M_X(r)] = M_N \left[\ln \left(\frac{\eta}{\eta - r} \right)^\alpha \right] = e^{\lambda \left[e^{\ln \left(\frac{\eta}{\eta - r} \right)^\alpha} - 1 \right]}$$

$$rc = \lambda \left[\left(\frac{\eta}{\eta - r} \right)^\alpha - 1 \right]$$

Como essa equação não possui solução analítica é necessário recorrer a uma rotina numérica para encontrar suas raízes (KAAS et al 2008). Nesse trabalho foi utilizado a função *uniroot* da linguagem de programação R (R CORE TEAM, 2016).

$$1 + (1 + \theta)r\mu_1 = M_X(r)$$

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r)$$

$$\lambda M_X(r) - \lambda - cr = 0.$$

3.3 Recursos computacionais

Esse estudo foi feito utilizando a linguagem de programação R (R CORE TEAM, 2016) através do programa gratuito e de código aberto RStudio (R Development Core Team, 2016), que é um ambiente de desenvolvimento integrado e tem por objetivo tornar o uso do R mais produtivo e intuitivo.

Além disso, foram utilizados três pacotes, sendo eles: *ggplot2*, que é destinado à visualização de dados, *dplyr*, que fornece um conjunto consistente de funções destinadas à manipulação de dados e *frbs* que implementa os sistemas baseados em regras *fuzzy* mais utilizados, tais como, Mamdani e Takagi Sugeno Kang, bem como algumas variantes (WICKHAM, 2009) (WICKHAM; FRANCOIS, 2015) (RIZA et al., 2015).

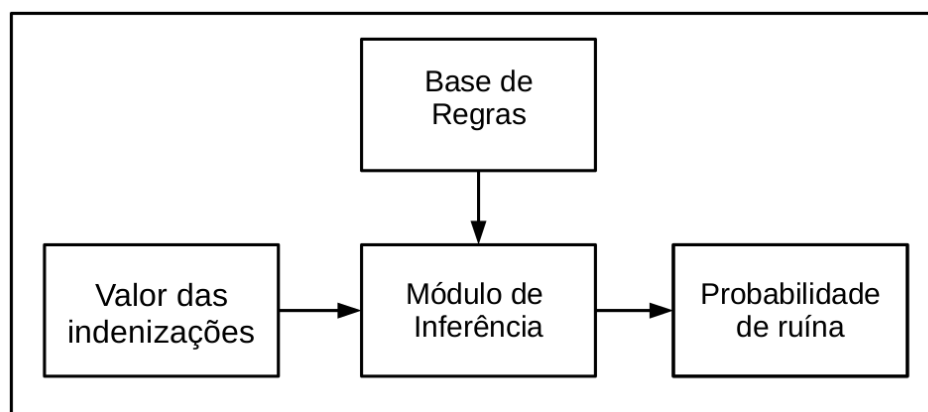
3.4 Sistema baseado em regras *fuzzy*

O SBRF criado para a estimação da probabilidade da ruína ($\psi(u)$) utiliza como variável de entrada valores de indenizações (X) gerados através do método de Monte Carlo. Foram elaborados dois modelos, um para o caso em que as indenizações têm distribuição exponencial ($X \sim \text{exponencial}(\beta)$) e outro para o caso em que as indenizações

possuem distribuição gama ($X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$). Ambos os SBRFs foram criados utilizando a função de pertinência gaussiana, o método de inferência de Mandani e o método defuzzificação centro de gravidade (equação 5).

A Figura 4 ilustra o SBRF criado para encontrar o limite superior da probabilidade de ruína utilizando como variável de entrada o valor da indenização (X). Nesse sistema, a base de regras é construída por meio de um método de aprendizagem baseado em algoritmos genéticos.

Figura 4: O SBRF para a probabilidade de ruína.



Fonte: Elaboração própria

3.4.1 O pacote *FRBS*

O pacote *frbs* visa fornecer os modelos de SBRFs mais comuns e também implementar os procedimentos de aprendizagem mais amplamente utilizados (RIZA et al., 2014). Esse pacote traz a vantagem da possibilidade de criação das regras *fuzzy* através de métodos de aprendizado e, além disso, possibilita a criação manual a partir de conhecimento especializado (RIZA et al., 2015).

O pacote *frbs* permite que sejam construídos modelos como o Mamdani e o Takagi Sugeno Kang entre outros. Em relação às abordagens de aprendizagem para construir um SBRF, o pacote apresenta cinco grupos principais: *frbs* baseado na partição espacial, que usa a estratégia de dividir o espaço da variável e, em seguida, a partir dessas divisões obter os parâmetros das funções de pertinência. *frbs* baseado no gradiente descendente, que faz uso da abordagem de gradiente descendente para otimizar parâmetros nas partes antecedentes e consequentes das regras, *frbs* baseado em algoritmos genéticos, que se refere aos sistemas genéticos *fuzzy* e que é uma combinação do SBRF com algoritmos genéticos onde os algoritmos genéticos são usados para otimizar os parâmetros das funções de pertinência. Também há os *frbs* baseado em redes neurais e *frbs* baseado em *clustering*

Esse trabalho faz uso do método de aprendizagem baseados em algoritmos genéticos,

mais especificamente, método de ajustamento genético lateral (método GFS.LT.RS) (RIZA et al., 2015). O ajustamento consiste em aprimorar a definição da base de dados, uma vez que a base de regras foi obtida. Ele se dá através de uma variação na forma das funções de pertinência o que melhora a interação global das funções e têm o objetivo de induzir uma maior cooperação entre as regras. Desta forma, o objetivo do ajustamento é encontrar a melhor configuração global das funções de pertinência, e não apenas encontrar funções de pertinência independentes (ALCALÁ, ALCALÁ-FDEZ, HERRERA, 2007).

O ajustamento lateral, por sua vez, permite com que as funções de pertinência sejam deslocadas lateralmente, considerando apenas um parâmetro, o que simplifica a otimização do modelo (RIZA et al., 2015).

3.5 Simulações

A Tabela 1 apresenta as simulações de Monte Carlo (MC) empregadas para gerar os dados das indenizações utilizadas como variável de entrada nos SBRFs. Em todas as simulações, o valor da reserva inicial foi 1 ($u = 1$), taxa de recebimento dos prêmios da seguradora (c) constante e igual a 3 e o parâmetro λ da distribuição do número de indenizações igual a 1 ($N \sim \text{Poisson}(1)$). No cenário em que a distribuição das indenizações é gama ($X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$) variando os valores de η o parâmetro α é fixo e igual a 2, 5. Já nos cenários em que as indenizações têm distribuição gama com o parâmetro α variando, o parâmetro η é fixo e igual a 2.

Para a implementação do SBRF via pacote *frbs* (método GFS.LT.RS), foram consideradas 10.000 simulações Monte Carlo de cada distribuição de X , sendo 60% das simulações utilizadas como dados de treinamento e 40% como dados de teste. As funções de pertinência gaussianas foram geradas automaticamente pelo pacote.

Tabela 1: Simulações para os valores das indenizações.

Simulação	Distribuição de X	Nº de conjuntos <i>fuzzy</i>
1	$X \sim \text{exponencial}(\beta)$	5
2	$X \sim \text{exponencial}(\beta)$	10
3	$X \sim \text{exponencial}(\beta)$	15
4	$X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$ com α fixo	5
5	$X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$ com α fixo	10
6	$X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$ com α fixo	15
7	$X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$ com η fixo	5
8	$X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$ com η fixo	10
9	$X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$ com η fixo	15

4 Resultados

Esta seção tem como objetivo apresentar os resultados das simulações dos valores de indenização, os resultados da aproximação de Cramér-Lundberg para a probabilidade da ruína e também os resultados dos SRBF's. As Tabelas 2, 4 e 6 e as Figuras 5, 7 e 9 apresentam as estimativas da probabilidade da ruína ($\psi(u)$) para diferentes valores dos parâmetros da distribuição das indenizações. As Figuras 6, 8 e 10 apresentam os valores ajustados pelo SRBF em função dos valores simulados para os dados de treinamento e teste. Além disso, apresentam as estimativas da probabilidade de ruína em função do valor de sinistro para valores ajustados pelo SBRF e valores simulados. As Tabelas 3, 5 e 7 apresentam estatísticas dos SBRFs para diferentes números de conjuntos *fuzzy*.

4.1 Indenizações com distribuição exponencial

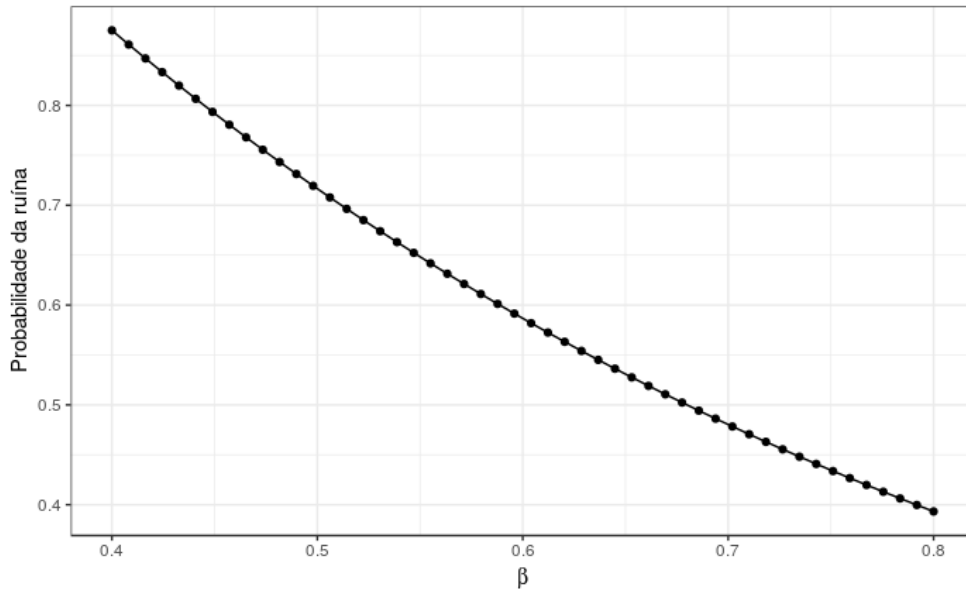
A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para a probabilidade de ruína pelo modelo de Cramér-Lundberg considerando que as indenizações são variáveis aleatórias com distribuição exponencial ($X \sim \text{exponencial}(\beta)$). Os resultados dessa tabela foram alcançados considerando a reserva inicial igual a 1, a taxa de recebimento dos prêmios da seguradora constante e igual a 3 e o parâmetro $\lambda = 1$. Como esperado, observa-se que a probabilidade de ruína diminui quando o valor de β é menor.

Tabela 2: Estimativas do limite superior da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição exponencial para $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$ e diferentes valores de β .

β	\bar{x}	$\psi(u)$
0,4000000	2,471234	0,8751733
0,4444444	2,208988	0,8007374
0,4888889	2,067006	0,7326325
0,5333333	1,872354	0,6703200
0,5777778	1,709096	0,6133075
0,6222222	1,611897	0,5611440
0,6666667	1,508938	0,5134171
0,7111111	1,413843	0,4697496
0,7555556	1,332563	0,4297961
0,8000000	1,258115	0,3932407

O gráfico da Figura 5 ilustra a relação entre a probabilidade de ruína e valores de β utilizados para as simulações. Esse gráfico ilustra os resultados apresentados na Tabela 2 e observa-se que a probabilidade de ruína diminui à medida que o valor do β é menor.

Figura 5: Relação entre o limite superior da probabilidade de ruína e valores de β . Para $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$ e diversos valores de β .



Fonte: Elaboração própria

A Tabela 3 traz os resultados dos SBRFs criados com 5, 10 e 15 conjuntos *fuzzy* e para os casos em que a variável de entrada são indenizações com distribuição exponencial. É possível observar que o erro quadrado médio, tanto dos dados de treinamento quanto de teste alcançam valores menores à medida que mais conjuntos *fuzzy* são utilizados. Além disso, o coeficiente de determinação (R^2) em ambos os SBRFs tende a aumentar quando mais conjuntos *fuzzy* são empregados e, em todos os casos, apresenta valores acima de 95%, o que indica que os SBRFs têm boa capacidade de previsão da probabilidade da ruína.

Tabela 3: Estatísticas do SBRF para diferentes números de conjuntos *fuzzy*, com indenizações com distribuição exponencial, para $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$ e diferentes valores de β .

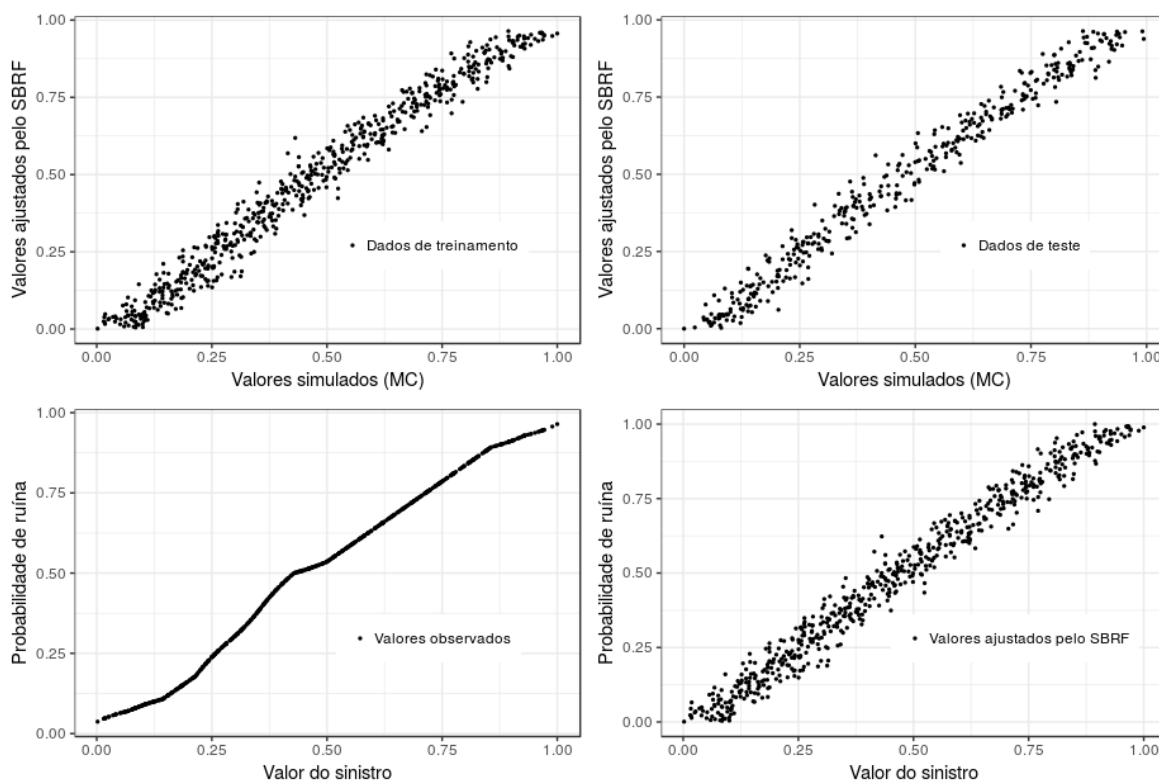
Nº de conjuntos <i>fuzzy</i>	R^2 treinamento	Erro treinamento	R^2 teste	Erro teste
5	0,9874869	0,0028093	0,9889606	0,0027673
10	0,9741854	0,0007739	0,9909758	0,0007576
15	0,9953996	0,0003897	0,9953120	0,0004043

A Figura 6 apresenta os resultados do SBRF para os dados de treinamento e teste para o caso em que as indenizações têm distribuição exponencial considerando $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$ e diversos valores de β . Os gráficos da Figura 6 apresentam os resultados alcançados pelo SBRF conforme Tabela 2, com 15 conjuntos *fuzzy*, pois com esse número de conjuntos foram obtidos os melhores resultados. Os valores simulados são os valores obtidos pelo SBRF e os valores observados são os valores obtidos através das simulações de Monte Carlo.

A relação entre os valores simulados pelo MC e os valores simulados pelo SBRF permitem avaliar a qualidade do ajuste dos modelos. Nos gráficos apresentados é possível observar que, tanto para os dados de treinamento quanto de teste, o SBRF apresenta boa capacidade de ajuste.

Os gráfico que apresentam a relação entre o valor do sinistro (valor da indenização) e a probabilidade da ruína possibilitam fazer uma comparação entre os valores observados e os valores ajustados pelo SBRF. Espera-se que a dispersão dos dados para os valores ajustados pelo SBRF tenha a mesma forma da dispersão dos dados observados. Mais uma vez é possível observar que, tanto para os dados de treinamento quanto de teste, o SBRF apresenta boa capacidade de ajuste, pois a dispersão dos dados ajustados pelo SBRF se aproxima da dispersão dos dados observados.

Figura 6: Valores ajustados pelo SBRF (15 conjuntos *fuzzy*) em função dos valores simulados (MC) para dados ($X \sim \text{exponencial}(\beta)$) de treinamento e teste e estimativas do limite superior da probabilidade de ruína.



Fonte: Elaboração própria

4.2 Indenizações com distribuição gama

A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos para a probabilidade de ruína pelo método de Cramér-Lundberg, considerando que as indenizações são variáveis aleatórias com distribuição gama com parâmetro $\alpha = 2,5$ ($X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$) variando os valores de η o parâmetro α é fixo e igual a 2,5. Já nos cenários em que as indenizações

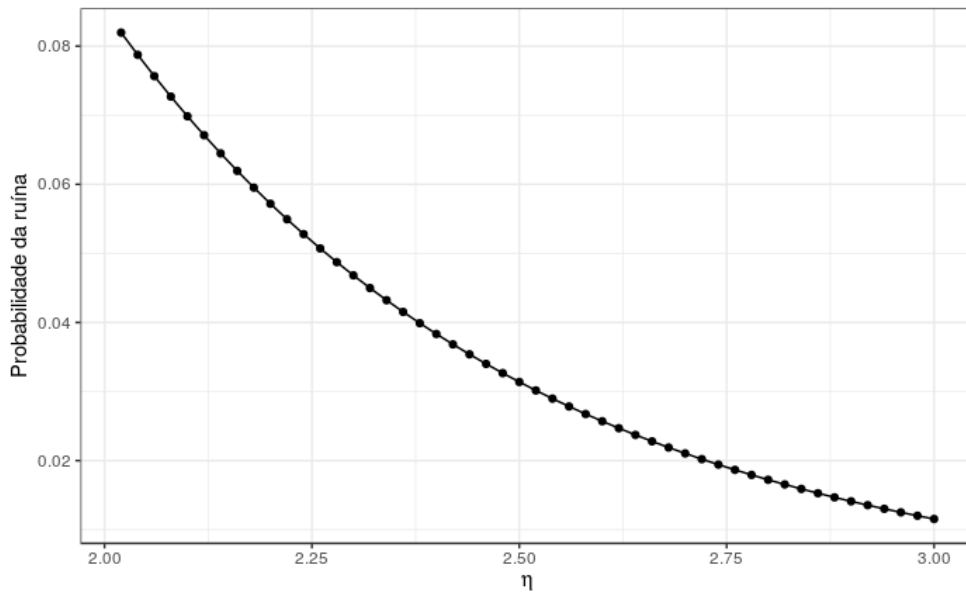
têm distribuição gama variando os valores de α o parâmetro η é fixo e igual a 2. Os resultados foram obtidos considerando a reserva inicial igual a 1, a taxa de recebimento dos prêmios da seguradora constante e igual a 3 e o parâmetro $\lambda = 1$. Como esperado, observa-se que a probabilidade de ruína diminui quando o valor de η é maior.

Tabela 4: Estimativas do limite superior da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição gama, para $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2, 5$ e diversos valores de η .

η	\bar{x}	$\psi(u)$
1,800000	1,383844	0,5404103
1,844444	1,354722	0,5242143
1,888889	1,340873	0,5084404
1,933333	1,289743	0,4930753
1,977778	1,264809	0,4781077
2,022222	1,231806	0,4635544
2,066667	1,221883	0,4493689
2,111111	1,197245	0,4355754
2,155556	1,152902	0,4221615
2,200000	1,140412	0,4091165

O gráfico da Figura 7 ilustra a relação entre a probabilidade de ruína e valores de η utilizados para as simulações. Esse gráfico ilustra os resultados apresentados na Tabela 4 e é possível observar que a probabilidade de ruína diminui à medida que o valor do η é maior.

Figura 7: Relação entre o limite superior da probabilidade de ruína e valores de η Para $\alpha = 2,5$, $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$.



Fonte: Elaboração própria

Na Tabela 5 são apresentados os resultados dos SBRFs criados para os casos em que a variável de entrada são indenizações com distribuição gama. São considerados 5, 10 e 15 conjuntos *fuzzy* e é possível observar que o erro quadrado médio nos dados de treinamento e de teste tendem a ser menores à medida que mais conjuntos *fuzzy* são utilizados. Além disso, observa-se que o coeficiente de determinação (R^2) em ambos os SBRFs tende a aumentar quando mais conjuntos *fuzzy* são utilizados e, em todos os casos, apresenta valores acima de 95%, o que indica que os SBRFs têm boa capacidade de previsão da probabilidade da ruína.

Tabela 5: Estatísticas do SBRF para diferentes números de conjuntos *fuzzy*, com indenizações com distribuição gama, para $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2,5$ e diferentes valores de η .

Nº de conjuntos <i>fuzzy</i>	R^2 treinamento	Erro treinamento	R^2 teste	Erro teste
5	0,9398887	0,0070875	0,9406672	0,0072997
10	0,9786645	0,0019749	0,9769295	0,0019738
15	0,9846479	0,0013135	0,9856412	0,0012655

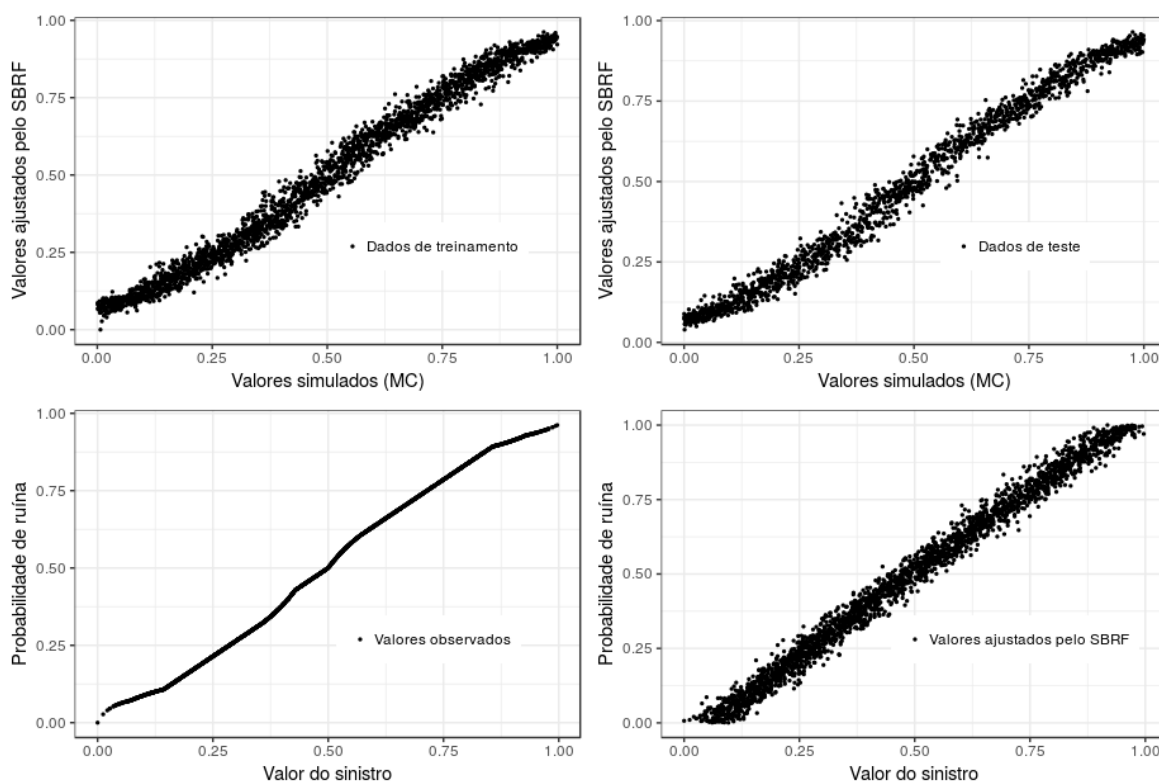
Na Figura 8 são apresentados os resultados do SBRF para os dados de treinamento e teste para o cenário em que as indenizações têm distribuição gama com $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 2,5$, com diferentes valores de η (Tabela 4). Assim como no caso em que as indenizações têm distribuição exponencial, os gráficos apresentam os resultados alcançados pelo SBRF com 15 conjuntos *fuzzy*, pois com esse número de conjuntos

foram obtidos os melhores resultados e os valores simulados são os valores obtidos pelo SBRF e os valores observados são os valores obtidos através das simulações de Monte Carlo.

Para avaliar a qualidade do ajuste dos modelos foram gerados gráficos que exibem a relação entre os valores simulados pelo MC e os valores simulados pelo SBRF. Nesses gráficos, é possível observar que tanto para os dados de treinamento quanto de teste o SBRF apresenta boa capacidade de ajuste.

Também foram gerados gráficos que apresentam a relação entre o valor do sinistro (valor da indenização) e a probabilidade da ruína, a fim de fazer uma comparação entre os valores observados e os valores ajustados pelo SBRF. Espera-se que a dispersão dos dados para os valores ajustados pelo SBRF tenha a mesma forma da dispersão dos dados observados. Mais uma vez é possível observar que tanto para os dados de treinamento quanto de teste o SBRF apresenta boa capacidade de ajuste pois a dispersão dos dados ajustados pelo SBRF se aproxima da dispersão dos dados observados.

Figura 8: Valores ajustados pelo SBRF (15 conjuntos *fuzzy*) em função dos valores simulados para dados ($X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$, α fixo) de treinamento e teste e estimativas do limite superior da probabilidade de ruína.



Fonte: Elaboração própria

A Tabela 6 apresenta os resultados obtidos para a probabilidade de ruína, considerando que as indenizações são variáveis aleatórias com distribuição gama ($X \sim$

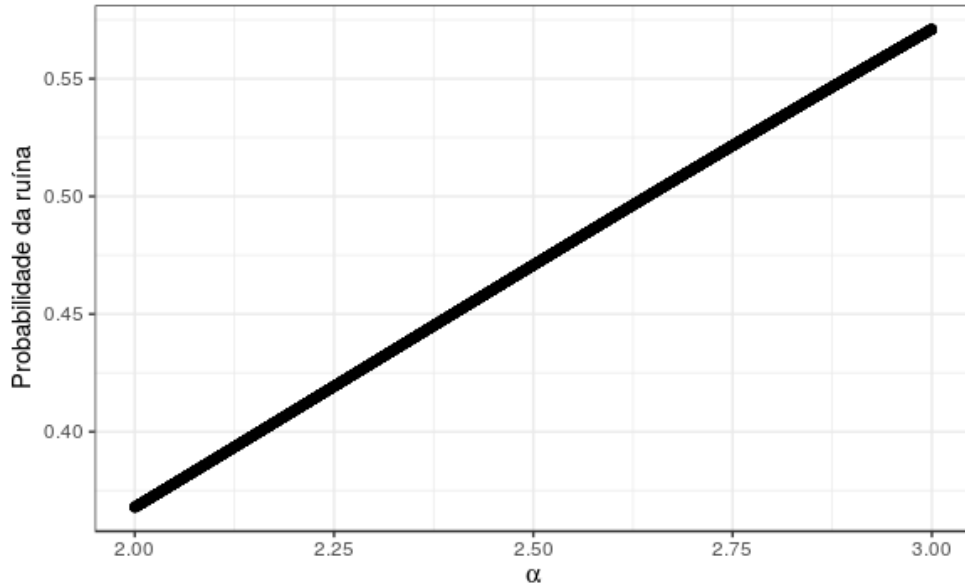
gama(α, η) variando os valores de α conforme Tabela 6, o parâmetro η é fixo e igual a 2. Os resultados foram obtidos considerando a reserva inicial igual a 1, a taxa de recebimento dos prêmios da seguradora constante e igual a 3 e o parâmetro $\lambda = 1$. Como esperado, observa-se que a probabilidade de ruína diminui quando o valor do η é maior.

Tabela 6: Estimativas do limite superior da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição gama. Para $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$, $\beta = 2$ e diversos valores de α .

α	\bar{x}	$\psi(u)$
2,000000	1,005679	0,3678794
2,111111	1,052645	0,3906372
2,222222	1,107169	0,4135475
2,333333	1,168451	0,4364708
2,444444	1,220689	0,4593668
2,555556	1,278819	0,4821477
2,666667	1,342679	0,5047595
2,777778	1,386829	0,5271369
2,888889	1,444785	0,5492426
3,000000	1,504786	0,5710304

O gráfico da Figura 9 ilustra a relação entre a probabilidade de ruína os diversos valores de α utilizados para as simulações. Esse gráfico ilustra os resultados apresentados na Tabela 6, nele é possível observar que a probabilidade de ruína aumenta à medida que o valor do α aumenta.

Figura 9: Estimativas do limite superior da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição gama. Para $\eta = 2$, $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$ e diferentes valores de α .



Fonte: Elaboração própria

As estatísticas dos SBRFs para 5, 10 e 15 conjuntos *fuzzy*, no caso em que as indenizações têm distribuição gama com os valores de α variando, são apresentadas na Tabela 7. É possível observar que o erro quadrado médio tende a ser menor à medida que mais conjuntos *fuzzy* são utilizados, esse padrão é observado tanto nos dados de treinamento quanto nos de teste. Além disso, observa-se que o coeficiente de determinação (R^2) tende a aumentar quando mais conjuntos *fuzzy* são utilizados e, em todos os casos, apresenta valores acima de 95% indicando boa capacidade de previsão da probabilidade da ruína.

Tabela 7: Estatísticas do SBRF para diferentes números de conjuntos *fuzzy*. Indenizações com distribuição gama, para $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$, $\eta = 2$ e diferentes valores de α .

Nº de conjuntos <i>fuzzy</i>	R^2 treinamento	Erro treinamento	R^2 teste	Erro teste
5	0,9903475	0,0040186	0,9899505	0,0038129
10	0,9946615	0,0008708	0,9945196	0,0008789
15	0,9943193	0,0005918	0,9943019	0,0005952

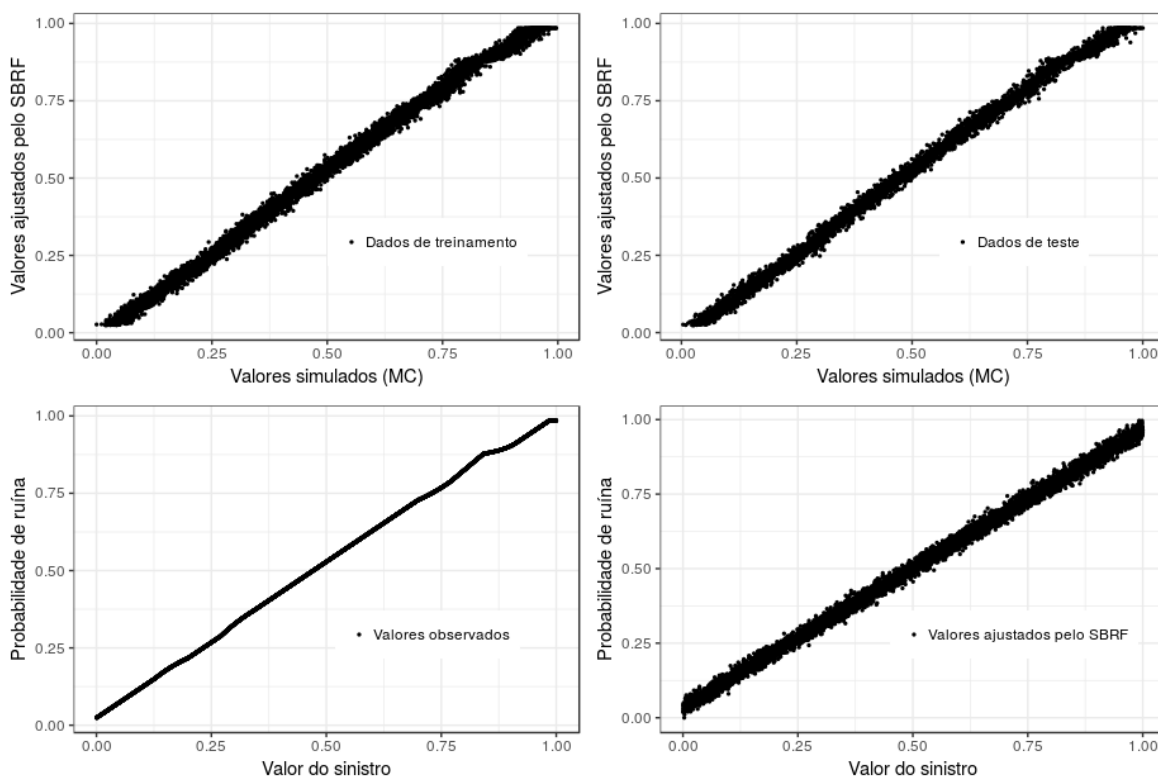
Os resultados do SBRF para os dados de treinamento e teste para o cenário em que as indenizações têm distribuição gama com $u = 1$, $c = 3$, $\lambda = 1$ e $\eta = 2$, com diversos valores de α são apresentados na Figura 10. Assim como no caso em que as indenizações têm distribuição exponencial os gráficos apresentam os resultados alcançados pelo SBRF com 15 conjuntos *fuzzy* pois com esse número de conjuntos foram obtidos

os melhores resultados e os valores simulados são os valores obtidos pelo SBRF e os valores observados são os valores obtidos através das simulações de Monte Carlo.

A qualidade do ajuste dos modelos pode ser avaliada através dos gráficos que exibem a relação entre os valores simulados pelo MC e os valores simulados pelo SBRF. Nesses gráficos, é possível observar que tanto para os dados de treinamento quanto de teste, o SBRF apresenta boa capacidade de ajuste.

Os gráficos que apresentam a relação entre o valor da indenização e a probabilidade da ruína buscam fazer uma comparação entre os valores observados e os valores ajustados pelo SBRF. Um bom ajuste é obtido quando a dispersão dos dados para os valores ajustados pelo SBRF tenha a mesma forma da dispersão dos dados observados. Mais uma vez é possível observar que, tanto para os dados de treinamento quanto de teste, o SBRF apresenta boa capacidade de ajuste pois a dispersão dos dados ajustados pelo SBRF se aproxima da dispersão dos dados observados.

Figura 10: Valores ajustados pelo SBRF (15 conjuntos *fuzzy*) em função dos valores simulados para dados ($X \sim \text{gama}(\alpha, \eta)$, η fixo) de treinamento e teste e estimativas do limite superior da probabilidade de ruína.



Fonte: Elaboração própria

5 Considerações finais

Este trabalho apresentou em seu desenvolvimento os fundamentos teóricos da teoria da ruína, mais especificamente o modelo clássico de Crámer-Lundberg, incluindo o cálculo da probabilidade da ruína, do coeficiente de ajustamento e da desigualdade de Lundberg. Além disso, foi feita uma breve introdução à teoria dos conjuntos *fuzzy*, a fim de apresentar o embasamento teórico necessário para a construção dos sistemas baseados em regras *fuzzy* utilizados para estimação da probabilidade da ruína. Também são apresentados os principais métodos de inferência utilizados pelos SBRFs e os métodos de defuzzificação.

Através da desigualdade de Lundberg e do cálculo do coeficiente de ajustamento foram feitas simulações, utilizando-se do método de Monte Carlo, para a probabilidade da ruína, para o caso em que as indenizações têm distribuição exponencial e gama. O valor das indenizações, obtido através das simulações, foi utilizado como variável de entrada nos SBRFs que foram criados utilizando a função de pertinência gaussiana, o método de inferência de Mandani e o método defuzzificação centro de gravidade e, têm como objetivo encontrar o limite superior da probabilidade da ruína.

Os resultados numéricos mostram que, tanto para o caso em que as indenizações têm distribuição exponencial quanto para o caso em que as indenizações têm distribuição gama, os sistemas baseados em regras *fuzzy* foram bem ajustados e alcançaram um bom desempenho na estimação da probabilidade de ruína. Em todas as simulações, o SBRF alcançou um coeficiente de determinação superior a 90%.

É importante destacar que em trabalhos futuros, pretende-se analisar o desempenho dos sistemas baseados em regras *fuzzy* utilizando outras aproximações para a probabilidade da ruína, como a De Vylder (DE VYLDER, 1978) e Beekman-Bowers (BEEKMAN, 1969).

6 Referências

- ALCALÁ, R; ALCALÁ-FDEZ, J; HERRERA, F. A proposal for the genetic lateral tuning of linguistic fuzzy systems and its interaction with rule selection. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 15, n. 4, p. 616-635, 2007.
- ASMUSSEN S. Ruin Probabilities (2nd Edition). 2010. Disponível em: <http://site.ebrary.com/lib/royallibrary/docDetail.action?docID=10480047>).
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2010.
- BEEKMAN, J. A. A Ruin Function Approximation. **Transactions of the Society of Actuaries** v. 21, p. 41-48, 1969
- BEEKMAN, J A. A series for infinite time ruin probabilities. **Insurance Mathematics and Economics**, v. 4, n. 2, p. 129-134, 1985.
- BERGMEIR, C; BEN, M. frbs : Fuzzy Rule-Based Systems for Classification. **Journal of Statistical Software**, v. 65, n. 6, p. 1-30, 2015.
- DE VYLDER, F.; GOOVAERTS, M. J. Recursive calculation of finite-time ruin probabilities. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 7, n. 1, p. 1-7, 1988.
- DE VYLDER, F. A Practical Solution to the Problem of Ultimate Ruin Probability. **Scandinavian Actuarial Journal**, p. 114-119, 1978
- DICKSON, D. C. M. **Insurance risk and ruin**. Cambridge University Press, 2016.
- DICKSON, D. C. M; WATERS, H. R. The probability and severity of ruin in finite and infinite time. **ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA**, v. 22, n. 2, p. 177-190, 1992.
- EADE, J. P. The ruin problem for mixed Poisson risk processes. **Scandinavian Actuarial Journal**, v. 1983, n. 4, p. 193-210, 1983.
- EMBRECHTS, P.; SCHMIDLI, H. Ruin estimation for a general insurance risk model. **Advances in applied probability**, v. 26, n. 2, p. 404-422, 1994.
- EVERITT, B. S.; HOTHORN, T. **An introduction to applied multivariate analysis with R**. New York: Springer-Verlag, 2011.
- FERREIRA, P. P. Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo. Rio de Janeiro: FUNENSEG, 2005. p. 210.

GERBER, H. U.; GOOVAERTS, M. J.; KAAS, R. On the probability and severity of ruin. **The Journal of the IAA**, v. 17, n. 2, p. 151-163, 1987.

HIPP, C. Estimators and Bootstrap Confidence Intervals for Ruin Probabilities. **ASTIN Bulletin**, v. 9, n. 01, p. 57-70, 1989.

KAAS, R., GOOVAERTS, M., DHAENE, J., DENUIT, M. Modern actuarial risk theory: using R. Springer Science & Business Media, 2008.

LEMOS, S. R. R. Probabilidade de Ruína no Mercado de Seguros: Fundamentos Teóricos e alguns resultados de Simulação. 2008. Dissertação e mestrado em estatística. UFPE, 2008.

MAMDANI, E. H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. In: **Proceedings of the institution of electrical engineers**. IET, 1974. p. 1585-1588.

RAMOS, P. A. F. L. Princípios de cálculo de prémios e de medidas de risco em modelos atuariais. Dissertação de mestrado. Universidade do Minho, Portugal, 2014.

R CORE TEAM. **R**: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria, 2014. Disponível em: <http://www.R-project.org/>. Acesso em: 4 de junho 2019

RSTUDIO. **RStudio**: integrated development for R 2016. Disponível em: <http://rstudio.org/>. Acesso em: 4 de junho 2019

RIZA, L. S. et al. Learning from data using the R package FRBS. **IEEE International Conference on Fuzzy Systems** p. 2149-2155. 2014.

RIZA, L. S. et al. Fuzzy Rule-Based Systems for Classification and Regression Tasks. R package version 3.1-0, 2015. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=frbs>.

SEAH, E. S. Computing the Probability of Eventual Ruin. **Transaction of Society of Actuaries**, v. 42, p. 421-446, 1990. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.124.6446>.

SHAPIRO, A. F. Fuzzy logic in insurance. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 35, n. 2 SPEC. ISS., p. 399-424, 2004.

SUGENO, M; TAKAGI, T. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, v. 15, n. 1, p. 116-132, 1985.

WICKHAM, H. **ggplot2**: Elegant Graphics for Data Analysis. Springer-Verlag New York, 2009. Disponível em: [⟨https://CRAN.R-project.org/package=ggplot2⟩](https://CRAN.R-project.org/package=ggplot2). Acesso em: 4 de junho 2019

WICKHAM, H.; FRANCOIS, R. **dplyr**: A Grammar of Data Manipulation. R package version 0.4.3, 2015. Disponível em: [⟨https://CRAN.R-project.org/package=dplyr⟩](https://CRAN.R-project.org/package=dplyr). Acesso em: 4 de junho 2019

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and control**, v. 8, p. 338-353, 1965.

ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. **Information Sciences**, v. 8, n. 3, p. 199-249. 1975.