

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

SAMUEL AUGUSTO DE PAIVA

**UM ESTUDO DOS PRINCÍPIOS DE CÁLCULO DE PRÊMIOS NO PROCESSO DE
RUÍNA**

Varginha-MG

2019

SAMUEL AUGUSTO DE PAIVA

**UM ESTUDO DOS PRINCÍPIOS DE CÁLCULO DE PRÊMIOS NO PROCESSO DE
RUÍNA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal de Alfenas como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciências Atuariais.

Orientador: Dr. Danilo Machado Pires

Varginha-MG

2019

SAMUEL AUGUSTO DE PAIVA

**UM ESTUDO DOS PRINCÍPIOS DE CÁLCULO DE PRÊMIOS NO PROCESSO DE
RUÍNA**

A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentada como parte dos requisitos para obtenção do grau de Bacharel em Ciências Atuariais pelo Instituto de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal de Alfenas.

Trabalho aprovado em: 18/12/2019

Prof.: Dr. Danilo Machado Pires

Instituição: UNIFAL-MG (ICSA)

Prof.: Dr. Leandro Ferreira

Instituição: UNIFAL-MG (ICSA)

Prof.: PhD Reinaldo Antonio Gomes Marques

Instituição: UNIFAL-MG (ICSA)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo de alguns princípios de cálculo de prêmios por meio de uma análise de suas propriedades, e sua influência no processo de ruína em uma carteira fictícia. Foram realizadas simulações computacionais com variações dos princípios em diferentes valores de carregamento e da distribuição associada ao montante de severidades de sinistros. As distribuições modeladas foram a distribuição Gama e distribuição Exponencial, sendo que a variável associada a frequência de sinistros foi modelada via distribuição de Poisson. Os resultados encontrados mostram a grande influência dos valores de carregamento frente ao prêmio calculado e sua intervenção nos valores de reservas associados às frequências de ruínas.

Palavras-chave: Prêmio; Princípios de cálculo; Ruínas; Crámer-Lundberg.

ABSTRACT

The aim of this paper is to study some principles of premium calculation through an analysis of their properties, and their influence on ruin process in a fictitious portfolio. Computer simulations were performed with variations of the principles at different loading values and the distribution associated with the amount of claims severity. The modeled distributions were the Gamma distribution and Exponential distribution, and the variable associated with the frequency of claims was modeled via Poisson distribution. The results show the great influence of the loading values in relation to the calculated premium and its intervention in the values of reserves associated with the frequencies of ruins.

Keywords: Premium; Principles of calculation; Ruins; Crámer-Lundberg.

Lista de Tabelas

Tabela 1 –	Função de distribuição acumulada da k-ésima convolução de X	15
Tabela 2 –	Distribuição da função de probabilidade por convolução	16
Tabela 3 –	Propriedades de cálculo de prêmio de acordo com os princípios associado.	26
Tabela 4 –	Frequência de Ruínas observadas na simulação para X com distribuição Gama em diferentes princípios de cálculo de prêmio e valores de carregamento de segurança	36
Tabela 5 –	Frequências de Ruínas observadas na simulação para X com distribuição Exponencial em diferentes princípios de cálculo de prêmio e valores de carregamento de segurança.	41

Lista de Figuras

Figura 1 –	Nível de reservas de severidades com distribuição Gama e princípio de prêmio puro em um período de 120 meses simulados cem vezes por períodos.	31
Figura 2 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio de prêmio carregado em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.	32
Figura 3 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio de prêmio carregado em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.	33
Figura 4 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio da variância em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.	33
Figura 5 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio da variância em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.	34
Figura 6 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio do desvio padrão em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.	35
Figura 7 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio do desvio padrão em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.	35
Figura 8 –	Nível de reservas de severidades com distribuição Exponencial e princípio de prêmio puro em um período de 120 meses, simulados cem vezes por períodos.	37

Figura 9 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio de prêmio carregado em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.	38
Figura 10 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio de prêmio carregado em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.	38
Figura 11 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio da variância em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.	39
Figura 12 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio da variância em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.	39
Figura 13 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio do desvio padrão em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.	40
Figura 14 –	Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio do desvio padrão em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.	41

SUMÁRIO

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	TEORIA DO RISCO	11
2.1	MODELO DE RISCO COLETIVO ANUAL	11
2.1.1	Modelos de Frequência de Sinistros: N	12
2.1.2	Modelos de Severidade de Sinistros: X	13
2.1.3	Sinistros Coletivos	15
2.1.3.1	Processo de Convolução a partir das distribuições de X e N	15
2.1.3.2	Função Geradora de Momentos de S	16
3	TEORIA DA RUÍNA	17
3.1	Modelo Clássico de Crámer-Lundberg	18
3.2	Probabilidade de Ruína	18
3.3	Probabilidade de Ruína no horizonte infinito em tempo contínuo	21
4	PRINCÍPIOS DE CÁLCULO DE PRÊMIOS	22
4.1	Princípio do Prêmio Puro Carregado($\mu + \theta$)	23
4.2	Princípio da Variância (σ^2)	23
4.3	Princípio do Desvio Padrão (σ)	24
4.4	Princípio da Utilidade Esperada $u(\cdot)$	24
4.5	Princípio da Perda Máxima (max)	24
4.6	Propriedades dos princípios de cálculo de prêmios	25
5	METODOLOGIA	28
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	31
6.1	SIMULAÇÃO 1- DISTRIBUIÇÃO GAMA	31
6.2	SIMULAÇÃO 2- DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	36
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
	REFERÊNCIAS	46
A	Distribuições para Frequência de Sinistros	47
A.1	Distribuição Binomial	47
A.2	Distribuição de Poisson	48
A.3	Distribuição Binomial Negativa	49
B	Simulações Computacionais	51
B.1	Distribuição Gama	51
B.2	Distribuição Exponencial	52

1 INTRODUÇÃO

O ramo securitário atualmente, pode ser dividido entre o ramo vida, que está associado de forma geral ao tempo de vida adicional dos segurados, e a esfera não-vida, tratando de assuntos que envolvem as perdas de maneira geral, isto é, aos danos dos segurados. Visto isso, as seguradoras necessitam de investigar os riscos associados às suas carteiras, e é nesta análise que a teoria do risco se insere, fornecendo um conjunto de regras sistematizadas aplicadas de forma a estabelecer modelos de tarifação eficiente, frente aos sinistros que chegam as seguradoras. E com isso, seja possível a instituição estabelecer a cobrança de um valor justo para o prêmio, sendo este uma quantia paga pelo segurado ao segurador em busca de se assegurar contra possíveis danos em troca de uma garantia de indenização caso estes danos se tornem reais, afim de evitar a entrada em uma situação de ruína (RODIGUES, 2008).

A teoria que estabelece o processo de ruína é amplamente utilizada no ramo de seguros, pois ela propicia um sistema de princípios capazes de estabelecer modelos de reservas ao longo do tempo. Baseado nisso, este trabalho tem como objetivo fazer um estudo de alguns princípios de cálculo de prêmios e sua influência no comportamento da ruína, uma vez que estes comportamentos serão evidenciados através de simulações associadas às diferentes distribuições de probabilidades. E pretende-se discutir as consequências da utilização de diferentes princípios no cálculo de prêmios, uma vez que dada as premissas utilizadas nos cálculos, as ocorrências de ruínas dentro de uma carteira de seguros está atrelado à falta de reserva de capital por parte da seguradora. Esta situação pode ocorrer por diversos motivos, e uma delas é a maneira inadequada de se cobrar este valor (PACHECO, 2014).

Com isso, este trabalho foi dividido em seis sessões, sendo a primeira uma explicação sobre os modelos associados ao cálculo de reserva e a teoria por trás destes modelos, a chamada Teoria do Risco. A segunda sessão irá trazer uma breve discussão sobre os preceitos envolvidos em um processo de ruína, ou seja, os modelos utilizados e as diferentes maneiras de atingir uma dada probabilidade de ocorrência de ruína. Chegando na quarta sessão, será descrito sobre alguns dos princípios de cálculo de prêmio mais estudados na literatura e as propriedades que se baseiam este em um cálculo de prêmio. As duas últimas sessões se trata da metodologia utilizada neste estudo e os resultados atingidos com este trabalho.

2 TEORIA DO RISCO

O risco pode ser visto como o nível de possibilidade de algo que possamos perder relacionado à uma determinada incerteza de sua atividade, logo, assumir um certo risco é saber que sua perda não é algo concreto, e que com isso estabelecer métodos e critérios para estudá-los é uma tentativa de se aproximar do que ainda não é a realidade, isto é, a chance de assumir um risco está associado a uma medida de probabilidade de ocorrer um evento futuro associada as chances de perdas. Tal medida acaba sendo associada à uma variável aleatória, visto que os valores assumidos por ela serão determinados pelos cenários que estarão submetidos, gerando assim, o grau de incerteza que trazem para aquele momento (FERREIRA, 2002).

Sendo assim, a Teoria do Risco tem como objetivo modelar as variáveis aleatórias associadas aos riscos em um longo prazo, sendo utilizada como ferramenta para modelar, por exemplo, a tarifação capaz de diminuir as chances de insolvência do segurador. E que com base nisso, inclua nestes modelos, critérios que consigam aferir as probabilidades envolvidas e atribuir-lhes a cobrança de um valor pago pelo segurado, que se torne minimamente suficiente para um possível evento futuro, de tal forma que este risco, seja incerto e independa da vontade dos envolvidos e que no fim, evite o processo de ruína.

Dentre os modelos estudados na Teoria do Risco, existem dois que se destacam na literatura, o modelo de risco Individual e o modelo de risco Coletivo. O modelo Coletivo pode ser visto como sendo um caso particular do modelo Individual sujeito à algumas premissas, de modo que o valor total de suas indenizações é obtido através de uma soma aleatória de variáveis também aleatórias, isto é, ele modela conjuntamente o número de sinistros de uma carteira e a severidade atribuída à ela (RODRIGUES, 2008).

2.1 MODELO DE RISCO COLETIVO ANUAL

Quando se estuda o modelo de risco Coletivo anual, trata-se de observar a distribuição de probabilidade de danos agregados no período de um ano, sendo baseada em princípios que diz respeito a maneira como os danos individuais de uma carteira são organizados, uma vez que são assumidas a independência e a maneira idêntica de distribuição entre eles, visto que, o objetivo central do modelo de risco coletivo é modelar como a variável relacionada ao montante

agregado dos sinistros ocorridos (S_{col}), irá se comportar em determinadas situações, podendo ser entendida como uma variável associada à uma carteira de seguros (BOWERS, 1997). Sendo assim.

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i \quad (2.1)$$

em que:

X_i é a variável aleatória associada ao valor do i -ésimo sinistro individual.

N é a variável aleatória associada ao número de sinistros.

É possível notar que

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{col} > 0 \text{ se } N > 0, \\ S_{col} = 0 \text{ se } N = 0 \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

Essas medidas vinculam-se ao modelo coletivo atribuindo-lhe particularidades de uma certa distribuição capazes de gerar um sistema de cálculo para as carteiras gerenciadas pelas seguradoras, de maneira que as variáveis X e N são independentes entre elas (PACHECO, 2014).

2.1.1 Modelos de Frequência de Sinistros: N

Denota-se N , como sendo a variável aleatória associada a frequência de ocorrências de sinistros durante um determinado período de tempo, considerando inicialmente o período de um ano, sendo esta uma variável aleatória discreta e não negativa. Visto que estes sinistros são independentes e identicamente distribuídas, seja qual for o sinistro ocorrido, a variável N não interfere nos valores de sinistros, isto é, a maneira como o S_{col} se modela está relacionada a distribuição de X_i com o montante agregado (FERREIRA, 2002).

Alguns dos modelos de probabilidade mais frequentes na literatura para frequência de sinistros, devido às suas propriedades, são:

- Distribuição Binomial: tal distribuição mede a probabilidade de ocorrer k eventos independentes de uma amostra aleatória n , sendo q sua probabilidade de sucesso. Caracterizada por ter variância menor do que a sua média, de tal forma que, esta distribuição pode ser utilizada para modelar, por exemplo, a frequência de mortes em uma carteira de seguro de vida, tendo suas probabilidades de morte já definidas (PACHECO, 2014).

- Distribuição de Poisson: indica a probabilidade de ocorrer um número k de sinistros, dada uma intensidade λ . É apropriada para modelar as probabilidades de frequência de ocorrer eventos, cuja possibilidade de acontecer é baixa, porém há uma amostra grande. Por exemplo, em casos de terremotos cuja sensibilidade pode ser percebida pelos seres humanos (PACHECO, 2014).
- Distribuição Binomial Negativa: representa a probabilidade de se ter k sucessos até o momento que se alcança o r -ésimo fracasso, de forma que têm-se q como sendo a probabilidade de sucesso. Tal distribuição é capaz de se adequar as carteiras de seguros cuja variância de frequência de sinistros se mostra maior do que sua média. Assim, acaba sendo preferível do que a distribuição de Poisson em situações cuja a de Poisson não consegue captar as variações das probabilidades de ocorrência de danos (PACHECO, 2014).

Para maiores informações sobre os modelos de distribuições Binomial, Poisson e Binomial Negativa, consultar o Apêndice A.

2.1.2 Modelos de Severidade de Sinistros: X

A severidade é tida como os possíveis valores que um sinistro pode obter, e dentre os modelos utilizados para os possíveis valores de indenização, a literatura apresenta uma quantidade grande de modelos. Porém, devido às suas características, alguns modelos são utilizados especificamente para determinadas situações. Neste trabalho, destacam-se tal modelos:

- Distribuição Gama: a distribuição Gama biparamétrica, ou simplesmente chamada de distribuição Gama, refere-se a um caso particular da distribuição generalizada, isto é, acaba sendo uma derivação da distribuição tripamétrica, visto que seu $\tau = 1$. Além disso, é conhecida por ser a versão contínua da distribuição binomial negativa e possuir uma relação direta com a distribuição Exponencial, sendo uma das mais generalizadas e possui aplicação na análise de tempo de vida de produtos. Sua função densidade é dada por (PACHECO, 2014):

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \quad (2.3)$$

onde seus parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Para todo $x > 0$, a função Gama é dada por $\Gamma(\alpha)$.

Os valores de esperança e variância são encontrados da seguinte maneira.

$$\mu_X = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (2.4)$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}. \quad (2.5)$$

- Distribuição Exponencial: é uma derivação da distribuição generalizada de Gama, uma vez que o valor de α é igual à 1, seu parâmetro λ possui relação direta com a média, uma vez que seu parâmetro é o inverso do valor esperado. Assim, um parâmetro muito baixo de uma exponencial causará em um valor muito alto em sua média, sendo muito utilizada nas áreas que necessitam descrever o tempo de vida de algum equipamento, ou o tempo de chegada de determinada observação. Sua função densidade pode ser dada por (PACHECO, 2014):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (2.6)$$

onde, seu parâmetro $\lambda > 0$, com sua média e variância dadas por:

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (2.8)$$

- Distribuição Normal: quando o montante de severidades possui distribuição Normal sua função densidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.9)$$

onde seus parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, sendo sua média e variância dadas por:

$$\mu_X = \mu, \quad (2.10)$$

$$\sigma_X^2 = \sigma^2. \quad (2.11)$$

2.1.3 Sinistros Coletivos

Quando o assunto se trata das distribuições dos sinistros agregados de uma carteira de seguros, dentre as diferentes formas de se caracterizar a variável aleatória "sinistro agregado" S , na literatura destacam duas, a caracterização feita à partir do processo de convolução entre as distribuições de X e N , e a caracterização feita através do cálculo da Função Geradora de Momentos. À partir de agora, será feita uma breve discussão dos métodos listados (FERREIRA, 2002).

2.1.3.1 Processo de Convolução a partir das distribuições de X e N

O processo de convolução é de grande importância para a realização dos cálculos do montante de sinistro agregado de uma carteira de seguros. Esse processo implica em encontrar a distribuição da variável aleatória associada ao montante de sinistros agregado à partir de um processo de convolução das variáveis aleatórias X que compõe a carteira, dado que a quantidade ocorrida (N) também é uma variável aleatória. Assim, a obtenção da função de distribuição de S à partir da convolução de X e N é dada por:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n P^{*k}(s)P(N = k), \quad (2.12)$$

considerando que P^{*k} representa a função de distribuição acumulada da k -ésima convolução de X , em que:

$$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq s). \quad (2.13)$$

A variável aleatória S_{col} depende da distribuição de X . Caso for discreto, S_{col} também será discreto. Caso contrário, a distribuição dos sinistros será contínua. O processo de convolução se dá conforma Tabela 1.

Tabela 1 – Função de distribuição acumulada da k-ésima convolução de X	
Caso Discreto	Caso Contínuo
$P^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} P^{k-1}(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq x)$	$P^{*k}(s) = \int_h P^{k-1}(x - h)p(h)dh$

Fonte: FERREIRA, 2002.

Adicionalmente, têm-se que $f_{S_{col}}$ é sua função de probabilidade, caso estiver contido em

processo discreto, ou será a função densidade de probabilidade se estiver adotando um processo contínuo para a variável S_{col} , sendo

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s)P(N = k) \quad (2.14)$$

em que serão distribuídas como sendo:

Tabela 2 – Distribuição da função de probabilidade por convolução	
Caso Discreto	Caso Contínuo
$p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{k-1}(X_1 + X_2 + \dots + X_k = x)$	$p^{*k}(s) = \int_h p^{k-1}(x - h)p(h)dh$

Fonte: FERREIRA, 2002.

em que $p^{*k}(s)$ representa a função de probabilidade da k-ésima convolução de X .

2.1.3.2 Função Geradora de Momentos de S

Para se calcular a função geradora de momentos da variável aleatória S , é necessário que haja o conhecimento prévio das funções geratrizes de momentos associadas aos riscos acolhidos e também da função relacionada aos sinistros ocorridos. Desta forma, têm-se as funções geradoras de momentos de X , N e S_{col} , dadas respectivamente, por:

$$M_X(t) = E(e^{tX}), \quad (2.15)$$

$$M_N(t) = E(e^{tN}), \quad (2.16)$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln(M_X(t))). \quad (2.17)$$

Encontrada as funções, podemos encontrar suas respectivas esperanças e variâncias, que servirão como suporte ao cálculo dos prêmios, de tal forma que:

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) \quad (2.18)$$

$$Var(S_{col}) = Var(X)E(N) + E(X)^2Var(N) \quad (2.19)$$

Para maiores informações sobre essas caracterizações e possíveis aplicações, consultar (RODRIGUES, 2008).

3 TEORIA DA RUÍNA

A Teoria da Ruína trata-se, no contexto atuarial, de analisar situações nas quais há o risco de uma instituição ficar com reservas insuficientes, desta forma é caracterizada por ser um caso particular dos processos estocásticos, sendo este um conjunto de variáveis aleatórias em que $Y(t) : t \in T$, indexadas pelo parâmetro t , e que este esteja variando em um conjunto T , gerando os índices do processo.

A cada interação de $t \in T$ é associado uma variável aleatória $X(t)$, onde este conjunto normalmente é tido como a representação da variável tempo. Logo, um processo estocástico é então uma família de variáveis aleatórias indexadas no tempo, de maneira que, um dos casos particulares dos processos estocásticos são os chamados processos de contagem, onde $N(t) : t \geq 0$ pertence a esta categoria, se $N(t)$ representar um número de ocorrências de uma certa observação em um intervalo de tempo $(0,t]$. Assim, associado ao processo de contagem, têm-se os processos homogêneos de Poisson, conhecidos por ser um processo de "saltos", isto é, são modelados como um exemplo de Cadeias de Markov, sendo que a próxima ocorrência, que no caso deste trabalho é a ocorrência de sinistros, não dependerá dos valores acumulados e sim do evento anterior (RODRIGUES, 2008).

Portanto, $N(t)$ representa uma variável aleatória discreta de Poisson homogênea associada a frequência de sinistros até o tempo t , visto que este intervalo entre as ocorrências dos eventos possíveis também é uma variável aleatória com distribuição exponencial. Desta maneira, a probabilidade de não ocorrer pelo menos algum evento em um determinado intervalo de tempo, decresce exponencialmente, sendo o parâmetro λ a taxa que mede o ritmo desta queda. Isto é, quanto maior for o valor do seu parâmetro, menor será o tempo entre os eventos, uma vez que este processo é caracterizado por possuir incrementos estacionários e independentes. Logo, têm-se que $N(t)$ pertence a uma distribuição de Poisson com parâmetro (λt) . Para maiores informações, consultar DICKSON e WATERS (1992). Assim:

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, k = 0, \dots, n, \quad (3.1)$$

com sua média e variância:

$$\mu_N = \lambda t, \quad (3.2)$$

$$\sigma_N^2 = \lambda t. \quad (3.3)$$

3.1 Modelo Clássico de Crámer-Lundberg

No modelo clássico de risco, têm-se que à partir de um capital inicial, a seguradora aceita assumir um risco de um segurado, se compromissando indenizá-lo na ocorrência de sinistros. Por outro lado, o segurado se compromete a pagar prêmios para transferir seu risco à entidade e se manter prevenido durante um período de tempo.

Esta situação clássica pode assumir duas características, sendo que a primeira é quando o resultado desta operação resulta em situações que hajam recursos suficientes para cobrir as indenizações e prosseguir o negócio com solvência. Já a segunda, é quando os recursos não são suficientes para honrar os compromissos, criando uma situação que os recursos se tornam abaixo de um certo limite, o que no mercado atuarial representa entre 25% e 50% do patrimônio líquido da empresa, chegando à um caso de ruína (SILVA, 2009).

Desta forma, uma seguradora possui um recurso inicial atrelado ao seu patrimônio, representado por u , em que a seguradora recebe prêmios durante um período de tempo $(0,t]$, representado por Π_S . Dada a ocorrência do sinistro agregado S , onde esta variável corresponde a um processo de Poisson Composto que é ajustado pelo modelo de risco coletivo no intervalo $(0,t]$, têm-se que o processo estocástico do excedente ou simplesmente nomeado de nível de reserva do segurador $U(t)$ será dado pela fórmula associada ao modelo de Crámer-Lundberg (RODRIGUES, 2008):

$$U(t) = u + \Pi_S - S(t); (t \geq 0) \quad (3.4)$$

Dado que na prática, a taxa de prêmios deverá sempre exceder os sinistros esperados no período coberto. Assim, o processo de ruína irá se dar quando, a quantidade de sinistros também consumir a reserva de risco, além de não possuir o valor dos compromissos assegurados. Para maiores detalhes, consultar BOWERS (1997).

3.2 Probabilidade de Ruína

Sendo $U(t)$ um processo estocástico, que varia de acordo com o recebimento de prêmios e a ocorrência de sinistros com o pagamento dos valores de indenizações, o nível de reserva de

uma seguradora pode se visto, dentre outras maneiras, através de duas opções. A primeira quando têm-se um modelo onde o tempo segue uma escala contínua e a reserva é identificada até um dado instante t , tal que, $U(t) : t \geq 0$. E a outra forma, seria onde o processo segue um modelo de tempo discreto, assumindo t como valores inteiros, por exemplo, ter anos como medida, de maneira que, $(U(t) : t = 0,1,\dots)$.

Assim, à medida que a reserva de uma seguradora for se alterando ao longo do tempo e o modelo já ter sido escolhido, pode-se obter a probabilidade de sobrevivência da entidade $\phi(u)$ das seguintes formas:

- **Probabilidade de sobrevivência no horizonte infinito em tempo contínuo:** evidencia a probabilidade de sobrevivência de uma seguradora em um tempo contínuo mas sendo estudado em um tempo qualquer t dentro do intervalo $[0, \infty)$,

$$\phi(u) = P(U(t) \geq 0, \forall t \geq 0 | u = U(0)). \quad (3.5)$$

- **Probabilidade de sobrevivência no horizonte finito em tempo contínuo:** evidencia a probabilidade de sobrevivência de uma seguradora em um tempo contínuo mas sendo estudado até um tempo denotado como τ ,

$$\phi(u, \tau) = P(U(t) \geq 0, \forall 0 \leq t \leq \tau | u = U(0)). \quad (3.6)$$

- **Probabilidade de sobrevivência no horizonte infinito em tempo discreto:** evidencia a probabilidade de sobrevivência de uma seguradora em um tempo discreto mas sendo estudado em um tempo qualquer n dentro do intervalo $[0,1,2,\dots)$,

$$\phi(u) = P(U(n) \geq 0, \forall n = 0,1,2,\dots | u = U(0)). \quad (3.7)$$

- **Probabilidade de sobrevivência no horizonte finito em tempo discreto:** evidencia a probabilidade de sobrevivência de uma seguradora em um tempo discreto mas sendo estudado em um tempo denotado como τ ,

$$\phi(u, \tau) = P(U(n) \geq 0, \forall n = 0,1,2,\dots,\tau | u = U(0)). \quad (3.8)$$

Para maiores informações, consultar RAMOS (2014).

A ruína se dá quando $U(t) < 0$, isto é, quando a reserva se torna negativa, ou quando se torna abaixo do limite imposto pela seguradora, de maneira que a variável aleatória associada ao tempo para o processo de ruína em um ambiente contínuo será dada por (T_t) , onde:

$$T_t = \begin{cases} \min\{t|t \geq 0\}; & U(t) < 0 \\ \infty; & U(t) \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

T_t , é a representação do menor dos tempos em que a seguradora torna-se devedora com seus assegurados além de não possuir disponível algum capital para ser utilizado. Assim, têm-se que a probabilidade de ruína de uma seguradora $\psi(u)$, sua reserva inicial $u = U(0)$, é calculada conforme a seguir.

- **Probabilidade de ruína no horizonte infinito em tempo contínuo:**

$$\psi(u) = P(T_t < \infty | u = U(0)) = P(U(t) < 0, \forall t, 0 \leq t < \infty) = 1 - \phi(u). \quad (3.10)$$

- **Probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo contínuo:**

$$\psi(u, \tau) = P(T_t < \tau) = P(U(t) < 0, \forall t, 0 \leq t < \tau) = 1 - \phi(u, \tau). \quad (3.11)$$

Assim, temos que a probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo contínuo será menor ou igual à probabilidade no horizonte infinito também no modelo contínuo.

Agora, quando se olha para as probabilidades de distribuições discretas, evidencia-se a variável aleatória T_n , como sendo:

$$T_n = \min\{n : U(n) < 0\}, \quad (3.12)$$

onde, T_n é associada à medida do momento em que ocorre a ruína.

Assim, têm-se que:

- **Probabilidade de ruína no horizonte infinito em tempo contínuo:**

$$\psi(u) = P(T_n < \infty | u = U(0)) = P(U(n) < 0, \forall n, 0 \leq n < \infty) = 1 - \phi(u) \quad (3.13)$$

- **Probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo contínuo:**

$$\psi(u, \tau) = P(T_n < \tau) = P(U(n) < 0, \forall n, 0 \leq n < \tau) = 1 - \phi(u, \tau) \quad (3.14)$$

De maneira que temos que a probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo discreto será menor ou igual à probabilidade no horizonte infinito também no modelo discreto.

Vale ressaltar que todas as probabilidades aqui descritas estão sendo considerados cenários de prêmio e sinistralidade constantes, servindo de medida para as seguradoras frente ao que o mercado exige em satisfazer a solvência frente as suas responsabilidades. Maiores detalhes em RAMOS (2014).

3.3 Probabilidade de Ruína no horizonte infinito em tempo contínuo

Como apresentado na seção anterior, têm-se diferentes maneiras de como se trabalhar com as probabilidades em um processo de ruína. No presente trabalho será discutido e modelado as diferentes probabilidades para o caso infinito em um tempo contínuo. Desta forma, têm-se que a probabilidade de ruína se dá como:

$$\psi(u) = P(T_t < \infty | U(0) = u). \quad (3.15)$$

Uma maneira representativa da mesma probabilidade como sendo:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-Ru(t)} | T_t < \infty)}, u \geq 0, \quad (3.16)$$

onde R representa o coeficiente de ajustamento, sendo a menor solução não conhecida da equação em r , e que X é a variável aleatória associada ao valor de sinistro, temos que r será:

$$M_N(\ln(M_X(r))) = e^{rct} \quad (3.17)$$

Um dos casos mais abordados na literatura é quando há um carregamento c atrelado à esperança do montante agregado de sinistros em uma distribuição de Poisson (λt), de maneira que:

$$c = (1 + \theta)E(S_{col}), \quad (3.18)$$

desta forma temos que:

$$1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r). \quad (3.19)$$

sendo θ como o carregamento de segurança $\theta \geq 0$.

Dependendo da maneira como X está distribuído, o trabalho para obtenção do coeficiente de ajustamento através da equação (3.19) se torna penoso, como alternativa, é utilizado o método de Newton-Raphson. Esse método, é uma das maneiras adotadas para calcular raízes de uma função à partir de aproximações, uma vez dado o valor inicial para R (RAMOS, 2014). Assim, o melhor valor inicial para R é atribuído à seguinte desigualdade:

$$R < \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}. \quad (3.20)$$

Diante disso, é possível notar que existe um grau de dificuldade na utilização da equação (3.16). Uma alternativa é se trabalhar com a desigualdade de Lundberg, dado que o coeficiente de ajustamento seja maior que zero. A desigualdade de Lundberg é dada por.

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad (3.21)$$

$$\phi(u) \geq 1 - e^{-Ru}. \quad (3.22)$$

Uma vez que, a equação (3.21) representa o valor máximo de probabilidade de ruína de em função do valor R calculado, e (3.22) sua função de sobrevivência, têm-se que, estipulando limites para as ocorrências de ruínas, torna-se possível ter um diagnóstico financeiro da seguradora. Maiores detalhes sobre o método de cálculo alternativo e sobre a probabilidade de ruína consultar PACHECO(2014).

4 PRINCÍPIOS DE CÁLCULO DE PRÊMIOS

O prêmio é tido como a importância que o segurado paga para a seguradora de maneira que o risco no qual ele está exposto seja coberto. O valor do prêmio à ser cobrado (Π_S) está

associada à variável "valor do sinistro" X , e a maneira como Π_S será calculado é o que se chama de princípios de cálculo de prêmio (RAMOS, 2014).

No presente trabalho, será considerado o cálculo de prêmio para o modelo de risco coletivo, de maneira que a composição que representa os possíveis valores para o montante de indenizações irá atribuir um valor de prêmio.

Para calcular os prêmios à serem cobrados pelas seguradoras frente aos seus clientes, serão escolhidos neste trabalho, alguns dos mais comuns preceitos encontrados na literatura, levando em consideração as particularidades do objetivo deste estudo. Uma vez que a variável aleatória relacionada ao cálculo do prêmio (S), poderá ou não ser dependente de outras funções. Dentre outros muitos que podem ser vistos em RAMOS (2014).

4.1 Princípio do Prêmio Puro Carregado ($\mu + \theta$)

O presente princípio é uma derivação do princípio do prêmio líquido, uma vez que é adicionado à média das possíveis indenizações, um parâmetro de segurança θ , estimando π_S como.

$$\Pi_S = (1 + \theta)E(S). \quad (4.1)$$

Este princípio utiliza-se do carregamento (θ) para cobrir as flutuações do risco. Adicionalmente, se o valor do carregamento (θ) for igual a zero, temos o que se chama de Prêmio Puro, sendo calculado através da igualdade entre o prêmio e o valor esperado do montante de indenizações asseguradas, dado por.

$$\Pi_S = E(S) \quad (4.2)$$

4.2 Princípio da Variância (σ^2)

Outro princípio à ser estudado é o princípio relacionado à variância, calculado como:

$$\Pi_S = E(S) + \theta Var(S), \theta > 0 \quad (4.3)$$

Considera-se que, neste caso, o carregamento de segurança (θ) se torna altamente dependente da variância do montante das possíveis indenizações cobertas pela seguradora.

4.3 Princípio do Desvio Padrão (σ)

Tal princípio é definido como:

$$\Pi_S = E(S) + \theta\sigma_{[S]} \quad (4.4)$$

Onde: $\theta > 0$ e $\sigma_{[S]}$ representa o desvio padrão da variável aleatória S .

Este princípio caracteriza por se apoiar no desvio padrão da v.a. associada ao montante de sinistros.

4.4 Princípio da Utilidade Esperada $u(\cdot)$

Este princípio considera que se a indenização há ser paga pela seguradora tiver um valor elevado, é utilizado de uma função utilidade para realizar a ponderação em relação ao capital inicial da seguradora. Assim, este capital, aqui representado pela variável W em algum momento tenderá a se tornar estritamente igual ao valor da quantia que a seguradora terá após a ocorrência do pagamento ao segurado. Assim o valor do prêmio será:

$$u(W) = E[u(W + \Pi_S - X)] \quad (4.5)$$

4.5 Princípio da Perda Máxima (max)

Este princípio se caracteriza por determinar um valor de prêmio máximo que a seguradora poderá cobrar dos riscos assegurados. Assim, dado um risco, este princípio determinará um valor limite de prêmio que poderá ser cobrado do segurado, assim o prêmio deverá ser estritamente igual ao valor da perda máxima, sendo.

$$\Pi_S = \min(p : F_X(p) = 1) \quad (4.6)$$

O desenvolvimento deste princípios e outros tantos existentes na literatura poderá ser consultado em RAMOS (2014).

4.6 Propriedades dos princípios de cálculo de prêmios

A escolha de um determinado princípio para calcular um determinado prêmio é feita mediante o interesse em algumas propriedades, com objetivo de se adequar ao risco que é desejado cobrir. Logo, serão apresentadas algumas das mais utilizadas propriedades esperadas para realizar o cálculo de prêmios, podendo-se utilizar de outras encontradas em PACHECO (2014):

1. **Carregamento não-negativo:** tal propriedade diz que o prêmio não poderá ser menor do que a importância média à ser paga. Já que esta satisfaz o princípio da equivalência, onde o compromisso do segurado deverá ser minimamente igual ao compromisso da seguradora.

$$\Pi_S \geq E(S)$$

2. **Aditividade:** esta propriedade evidencia que se houver uma separação entre dois riscos independentes, a soma dos prêmios atribuídos à cada um será igual ao valor agregado do prêmio se não houvesse a separação. Por exemplo, em situações com dois seguros ao invés de serem cobrados individualmente, passariam à ser financiados em uma única apólice.

$$\Pi_{(X+Y)} = \Pi_X + \Pi_Y.$$

3. **Escala Invariante:** têm-se que esta propriedade lida com situações de mudanças, como por exemplo, a operação de câmbio. Assim, o prêmio poderá ser multiplicado por um fator comum a .

$$\text{Se } Z = aX, \text{ e } a > 0$$

$$\Pi_Z = a\Pi_X$$

4. **Consistência:** esta propriedade diz que se for adicionado um certo valor fixo (c), a cada um dos valores de sinistros, o valor do prêmio será adicionado à este valor.

$$\text{Se } Y = S + c, \text{ e } c > 0$$

$$\Pi_Y = \Pi_S + c$$

5. **Perda Máxima:** tal propriedade diz que se houver uma limitação ao valor do montante de sinistro agregado (r_S), isto é, o valor à ser cobrado de um segurado não poderá exceder o real valor do seu risco. Assim o valor do prêmio à ser pago será:

$$\Pi_S \leq r_S$$

Apresentada as propriedades, a Tabela 3 apresenta todos os princípios de cálculo de prêmios e a adequação ou não das propriedades com relação aos princípios. Sendo (\checkmark) o atendimento à propriedade e (X), quando não atende a propriedade..

Tabela 3 – Propriedades de cálculo de prêmio de acordo com os princípios associado.

Propriedade	Puro	Carregado	Variância	Desvio Padrão	Utilidade Nula	Perda Máxima
1	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
2	\checkmark	\checkmark	\checkmark	X	X	\checkmark
3	\checkmark	\checkmark	X	\checkmark	X	\checkmark
4	\checkmark	X	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
5	\checkmark	X	X	X	\checkmark	\checkmark

Fonte: RAMOS (2014).

Nota-se que o princípio do prêmio puro e o da perda máxima foram os únicos que satisfazem todas as propriedades. Porém, quando analisa-se a questão prática, eles se tornam inviáveis, devido à limitação de não cobrir os excedentes, como os gastos comerciais e de manutenção, além de necessitar de um número suficientemente grande para acontecer.

O princípio do prêmio puro carregado não atingiu as propriedades de consistência e perda máxima, mas é muito utilizado para o cálculo de seguro de vida. Em contrapartida muito pouco visto no ramo de danos, por conta da heterogeneidade dos seguros deste ramo.

Quando se analisa o princípio da variância, têm-se que é muito pouco utilizado para cálculos de prêmios, uma vez que, devido a característica de gerar valores elevados para a cobrança do segurado, igualmente ao princípio da utilidade nula. Porém, este se caracteriza por possuir grandes dificuldades na escolha da função utilidade.

Já o princípio do desvio padrão é caracterizado por ser o mais comum nos cálculos de prêmios para seguros de danos. Porém, para muitos, a sua falta de aditividade faz-se questionar sua eficiência.

Com isso, têm-se que a escolha da propriedade mais adequada para o cálculo de prêmios irá depender do grau de relevância que se atribui para cada propriedade. Assim, não há uma metodologia definida a ser seguida. Maiores detalhes em RAMOS (2014).

5 METODOLOGIA

O presente trabalho utilizou-se de referências bibliográficas para atribuir conceitos básicos e gerais nos estudos e simulações desenvolvidas, baseando-se em referências na área e também de teses e estudos em torno das teorias clássicas para o estudo da probabilidade de ruína em seguradoras. Para as simulações, utilizou-se os recursos da linguagem R Core Team (2019) e sua implementação na plataforma RStudio. Foram observadas as ocorrências de ruínas de uma seguradora e sua respectiva probabilidade de ruína. Desta forma, o presente estudo irá realizar simulações do comportamento de ruínas com diferentes tipos de cálculo de prêmios para uma carteira de seguros fictícia, identificando as probabilidades da reserva estar abaixo do limite estabelecido em perfis diversos.

A proposta deste trabalho é investigar a frequência de ocorrências em que a seguradora se encontra em situação abaixo do limite estipulado com suas reservas, que neste caso foi de 25% do valor da reserva inicial u , o que está dentro dos padrões utilizados no mercado atuarial que é de comprometer entre 25% até no máximo metade do patrimônio da entidade (SILVA, 2009). Com isso, deseja-se analisar probabilisticamente a chance de que este cenário aconteça em um período de tempo. Assim, foi utilizado o modelo clássico de Crámer-Lundberg através de um modelo de risco coletivo com diferentes princípios de cálculo de prêmios e atrelado a isso, uma variação dos valores de carregamento, através de variações do grau de confiança, chegando assim ao cálculo da probabilidade de ruína, sendo o valor de R encontrado pelo método de Newton-Raphson (RAMOS, 2014), em que as raízes da função são dadas por:

$$R_{n+1} = R_n - \frac{H(R_n)}{H'(R_n)} \quad (5.1)$$

Para a análise das frequências de ocorrências de ruína foram realizadas simulações de carteiras fictícias no modelo clássico de ruína, em que foram fixados o parâmetro da distribuição de Poisson, sendo esta associada ao número de sinistros em uma carteira (N). Foi fixado um valor de λ igual a 10 ocorrências.

As distribuições utilizadas para representar a severidade de sinistros em uma carteira de seguros (X), foram duas, sendo elas, a distribuição Gama, visto sua característica em modelar muito bem as indenizações de automóveis e não assumir valores extremos e, a distribuição Exponencial, devido sua característica dentro da área de modelagem, uma vez que pode representar o tempo entre sinistros e também a utilização como valor para indenizações. Para

maiores informações consultar (LEMOS, 2008).

Os parâmetros adotados nas distribuições foram escolhidos com base no valor pré definido para teste, uma vez que este valor é o resultado do produto entre os valores esperados das variáveis associadas a frequência de ocorrência e da severidade de sinistros, isto é, $E(S_{col}) = E(N)E(X)$. Desta forma, para meio de simplificação foi fixado como valor médio do montante de sinistro agregado a quantia de 1000 unidades monetárias.

Nesta mesma carteira os valores dos prêmios foram sendo calculados de acordo com os princípios apresentados na seção 2. Foram utilizados, para meio de simulação, quatro princípios, sendo eles, o princípio do prêmio puro, princípio do prêmio carregado, princípio da variância e princípio do desvio padrão. Além disso, o carregamento θ foi calculado através de uma aproximação de S pela distribuição Normal padronizada:

$$\theta = \frac{\sigma_{col} Z_{1-\alpha}}{E(S_{col})}, \quad (5.2)$$

Onde $Z_{1-\alpha}$ é o quantil da distribuição Normal, e por sua vez, $P(S_{col} \leq P) = 1 - \alpha$ e o carregamento de segurança θ são obtidos de modo que, a probabilidade do sinistro agregado ultrapassar o prêmio puro não exceda um valor α de probabilidade (FERREIRA, 2002). Desta forma, os valores de θ foram calculados de acordo com o princípio a ser utilizado, sendo que o princípio do prêmio puro não utiliza um valor de carregamento. Dessa maneira, tem-se que:

- **Princípio do Prêmio Carregado**

$$\theta = \frac{\sigma_{col} Z_{1-\alpha}}{E(S_{col})}. \quad (5.3)$$

- **Princípio da Variância**

$$\theta = \frac{\sigma_{col} Z_{1-\alpha}}{\sigma_{col}^2}. \quad (5.4)$$

- **Princípio do Desvio Padrão**

$$\theta = Z_{1-\alpha}. \quad (5.5)$$

Para maiores informações, consultar Pacheco (2014). O algoritmo utilizado é descrito a seguir:

Passo 1: Determinação dos componentes iniciais que serão utilizadas, como a reserva inicial (u), o valor fixo do prêmio Π_S , associado ao princípio escolhido, os parâmetros da

distribuições associadas ao número de sinistros (N) e a severidade de sinistros (X);

Passo 2: Gerar, de maneira aleatória, um valor para o número de sinistros N , através da distribuição de Poisson. Sendo que este número será a quantidade de observações aleatórias de X ;

Passo 3: Gerar N valores de X , em que X corresponde a uma sequência aleatória de valores associada à distribuição escolhida para severidade;

Passo 4: Uma vez gerados os valores aleatórios de X , será calculado a soma de todos estes valores. E com isso, encontra-se a reserva retida no tempo t , que corresponde: $U(t) = u + \Pi_S - S(t)$;

Passo 5: O valor da reserva obtido, $U(t)$, é guardado e servirá como a próxima reserva inicial para o próximo passo;

Passo 6: Repetir os passos anteriores por t vezes;

Passo 8: Calcular a probabilidade de ruína através da razão entre o vetor de valores de $U(t)$ com o tamanho da simulação.

Pelo algoritmo apresentado anteriormente, obtêm-se o cálculo da probabilidade de ruína ao longo do período, em que o capital inicial da seguradora foi fixado como sendo 1000 unidades monetárias e o limite de perda do patrimônio foi mantido como sendo 750 unidades monetárias, o que representa uma perda máxima de 25%, como estipulado na prática. Além disso, as simulações foram realizadas por um período de 10 anos, contados mensalmente, sendo 100 simulações por mês, dando um total de 12 mil simulações. Adicionalmente às simulações, também foram feitas a modelagem das probabilidades máximas de ruína para cada situação. Para isso, utilizou-se da desigualdade de Lundberg, uma vez que essa determina a probabilidade máxima de ruína em um período de tempo infinito. Para essa desigualdade, é necessário encontrar o coeficiente de ajustamento R , em que a determinação deste valor se deu pelo método iterativo de Newton-Raphson, possibilitando encontrar um valor mínimo que defina a probabilidade através da reserva inicial adotada, em que a probabilidade de ruína máxima se deu por e^{-Ru} .

Para maiores informações consultar o Apêndice B.

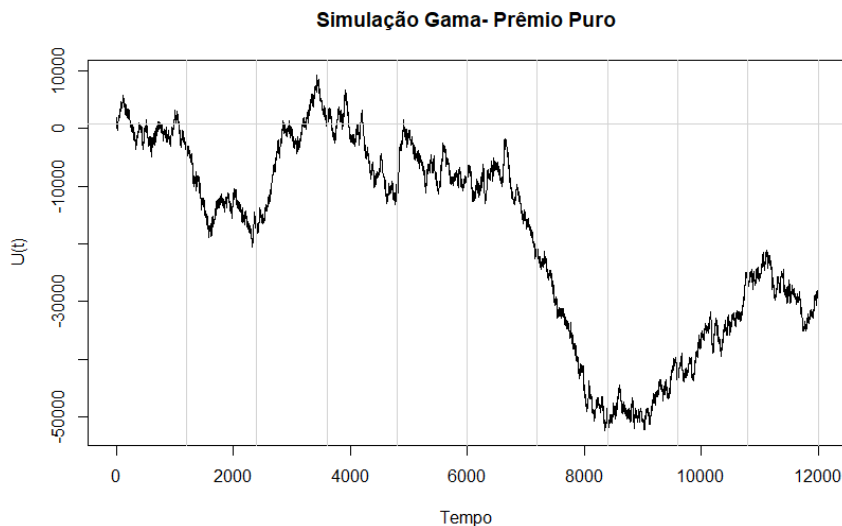
6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 SIMULAÇÃO 1- DISTRIBUIÇÃO GAMA

As primeiras simulações realizadas com intuito de analisar os princípios de cálculo de prêmios frente a frequência de ruínas em uma carteira fictícia de uma seguradora, consideraram que o montante de severidades de sinistros (X) segue uma distribuição Gama, com parâmetros $\alpha = 1000$ e $\beta = 10$. A variável associada à frequência de sinistros (N), foi modelada seguindo uma distribuição de Poisson homogêneo com $\lambda = 10$. Além disso, os valores dos prêmios Π_S foram sendo modificados de acordo com o princípio utilizado, sendo que o valor para reserva inicial (u) foi fixado em 1000 unidades monetárias. Logo, as representações gráficas foram divididas verticalmente a cada 10 anos simulados, e horizontalmente com o limite mínimo de reserva para a ocorrência de ruína, que para este trabalho considerou-se como 750 unidades monetárias.

O primeiro caso, demonstra o princípio do prêmio puro e pode-se observar que, de acordo com o comportamento do processo de ruína apresentado na Figura 1, obteve-se 10913 ruínas, a probabilidade de a seguradora se encontrar em situação de reserva abaixo do limite estipulado para essa simulação é de 90,94%. Uma vez que este, utiliza o valor esperado do montante de severidades da carteira como sendo seu valor de prêmio, e seu valor de reserva encontra-se através da equação $U(t) = 1000 + 1000t - S(t)$.

Figura 1 – Nível de reservas de severidades com distribuição Gama e princípio de prêmio puro em um período de 120 meses simulados cem vezes por períodos.

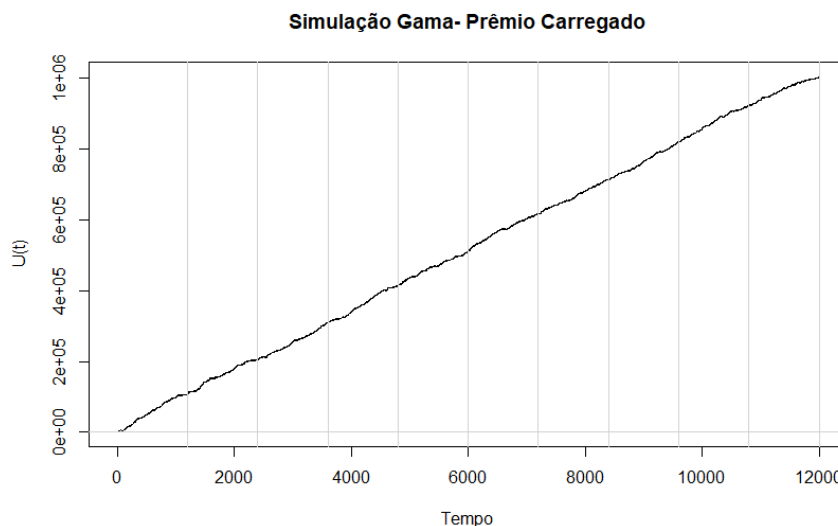


Fonte: Elaboração própria.

Com relação ao método de cálculo através do prêmio puro, encontra-se uma deficiência em seu modelo, devido ao fato de que, ao longo do tempo, a seguradora se encontrará certamente em processo de ruína (FERREIRA, 2002).

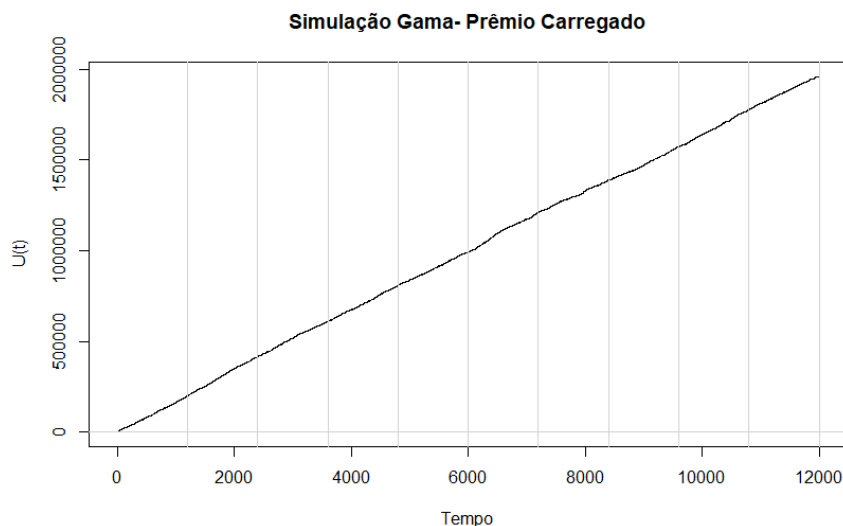
Para os próximos casos, foram calculados dois valores para serem associados à taxa de carregamento, de forma que probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda os valores de $\alpha = 40\%$ e $\alpha = 30\%$, sendo que estes valores são uma aproximação pelo quantil da distribuição Normal padronizada. Logo, para a segunda simulação, mateve-se a distribuição de X como sendo Gama. Porém, foi alterado a maneira como o prêmio é calculado, adicionando um vaor de carregamento ao valor esperado da estimativa de S . Portanto, para um α de 40%, o resultado para θ foi de 0,08099. Com isso, a reserva ao longo do período foi obtida por meio de $U(t) = 1000 + 1080,99t - S(t)$. De acordo com a Figura 2, em que, para essa simulação, não foi vericado nenhum caso de ruína. Entretanto, não significa que não poderá existir em algum momento, porém a simulação demonstra a dificuldade em acontecer.

Figura 2 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio de prêmio carregado em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.



A simulação seguinte, refere-se ao mesmo padrão anterior, porém com valor de α de 30%, de maneira que o valor de θ encontrado foi de 0,165469 e sua reserva como sendo $U(t) = 1000 + 1165,47t - S(t)$. O comportamento do processo de ruína é apresentado na Figura 3, em que a mudança do valor de carregamento não trouxe alteração para a simulação, sendo que a frequência de ruínas continuou sendo nula entre as 12 mil realizadas.

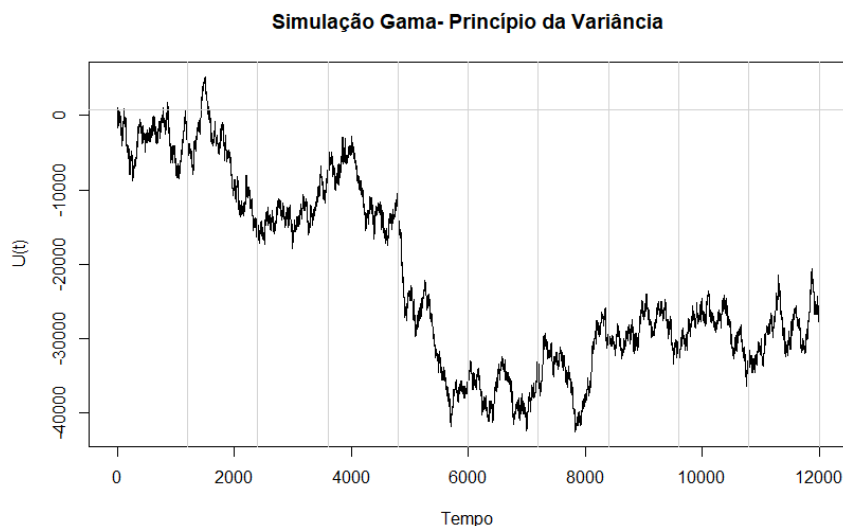
Figura 3 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio de prêmio carregado em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.



Fonte: Elaboração própria.

Para as simulações seguintes, utilizou-se como base o princípio de cálculo de prêmio da variância, que corresponde no acréscimo de uma parcela da variância da estimativa de S ao seu valor esperado. A Figura 4 apresenta o primeiro caso com valor de carregamento θ de 0,0008, para um α de 40% em que $U(t) = 1000 + 1000,08t - S(t)$. Neste caso, têm-se que o número de ruínas para esta simulação foi de 11866 em um total de 12 mil simulações, e que a probabilidade de ruína modelada foi de 98,81%.

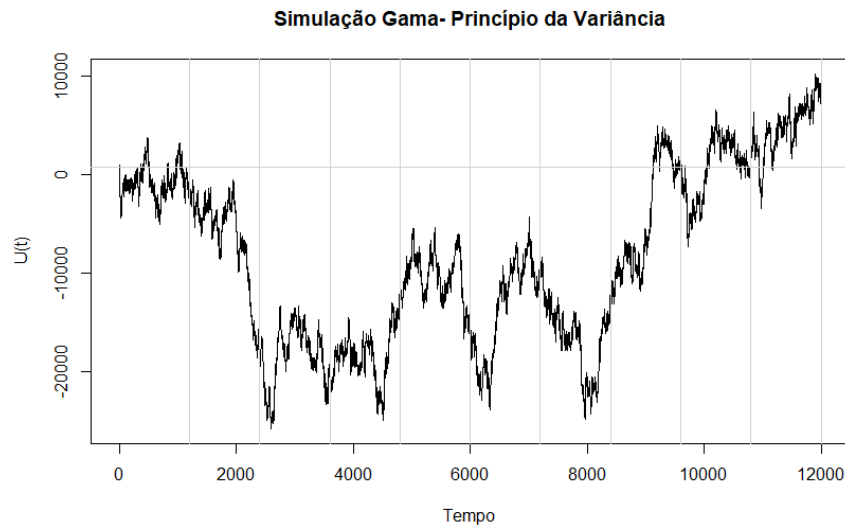
Figura 4 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio da variância em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.



Fonte: Elaboração própria.

Alterando-se o valor do carregamento para 0,00165, com $\alpha = 30\%$ e mantendo-se o princípio de cálculo associado à variabilidade da distribuição, têm-se que dentre todas os períodos houveram 9633 ocorrências de ruínas, e que a probabilidade observada foi de 80,27%, sendo sua reserva obtida por $U(t) = 1000 + 1000,17t - S(t)$, como pode ser visto na Figura 5.

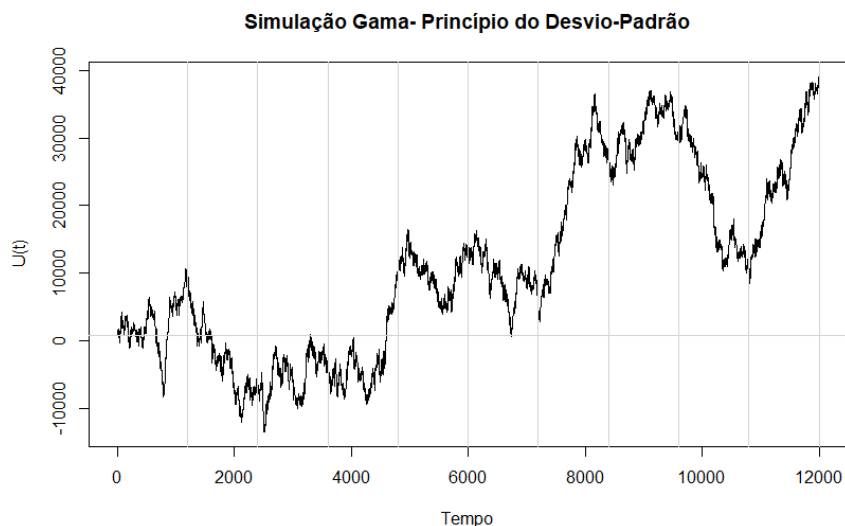
Figura 5 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio da variância em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.



Fonte: Elaboração própria.

Os próximos casos analisados foram com relação ao princípio do desvio padrão, onde a distribuição do montante de severidades foi mantido como sendo da distribuição Gama. Porém, a maneira como o cálculo do prêmio é feita, o valor esperado é acrescido do desvio padrão da estimativa de S . Os primeiros resultados demonstrados são equivalentes quando o seu carregamento θ é de 0,256, com $\alpha = 40\%$ e sua reserva $U(t) = 1000 + 1000,81t - S(t)$, resultando em um número de ruínas de 3454 dentre as 12 mil simulações, tendo frequência de ruína equivalente a 28,78%, como pode ser visto nas Figura 6.

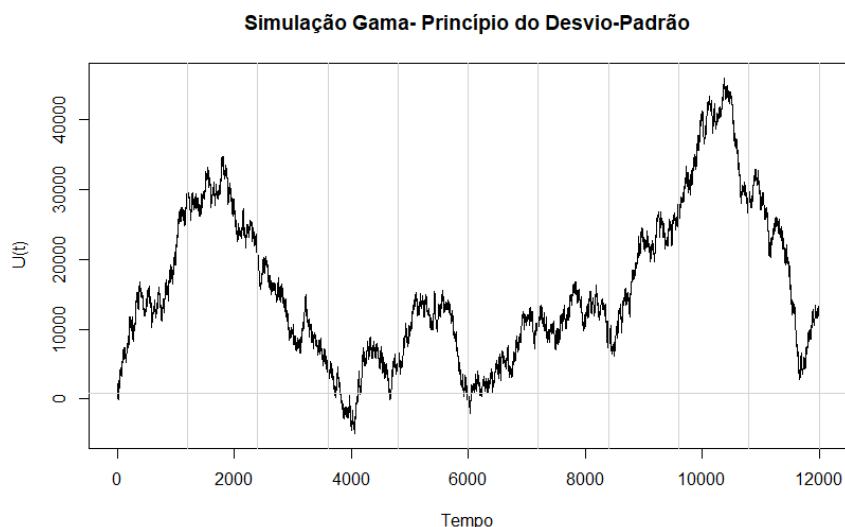
Figura 6 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio do desvio padrão em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.



Fonte: Elaboração própria.

Modificando o valor de θ , porém mantendo-se as características das distribuições, têm-se que houveram a ocorrência de 420 situações em que a reserva da seguradora ficou abaixo do limite proposto, isto é, há um proporção observada de 3,5% de haver ruínas nesta situação com valor de θ igual a 0,523, com $\alpha = 40\%$, em que as sua reserva se deu por $U(t) = 1000 + 1001,65t - S(t)$.

Figura 7 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Gama e princípio do desvio padrão em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.



Fonte: Elaboração própria.

Desta forma, dadas todas as simulações anteriores, a Tabela 4 apresenta as probabilidades máximas de uma seguradora de se encontrar em situação ruína, dado que seus valores de prêmio Π_S são fixos acompanhado de seus diferentes valores de carregamento, calculadas pela Desigualdade de Lundberg. Adicionalmente, têm-se as frequências encontradas pelas simulações, $\psi(u)_{Sim}$, em que u foi fixado em 1000 unidades monetárias para ambas as distribuições. Além disso, mostra-se os candidatos a se tornarem um possível valor de coeficiente de ajustamento R , sendo este encontrado pelo método iterativo de Newton-Raphson. Os resultados citados acima estão listados na Tabela 4:

Tabela 4 – Frequência de Ruínas observadas na simulação para X com distribuição Gama em diferentes princípios de cálculo de prêmio e valores de carregamento de segurança

Princípio de Cálculo	θ	Π_S	R	$\psi(1000) \leq e^{-Ru}$	$\psi(1000)_{Sim}$
$(\mu + \theta)$	0,080	1080,99	0,00016	0,1968	0
$(\mu + \theta)$	0,1654	1165,47	0,00033	0,0346	0
(σ^2)	0,0008	1000,08	$1,61e^{-06}$	0,9839	0,9881
(σ^2)	0,0016	1000,17	$3,30e^{-06}$	0,9675	0,8027
(σ)	0,2560	1000,81	0,00043	0,0123	0,2878
(σ)	0,5230	1001,65	0,00071	0,0003	0,0356

Fonte: Elaboração própria.

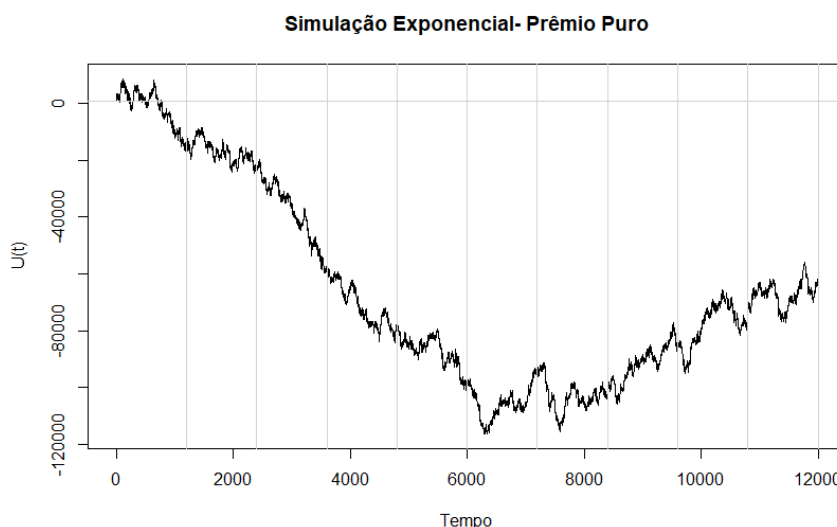
6.2 SIMULAÇÃO 2- DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Nesta seção, será apresentada as simulações para a análise dos princípios de cálculo de prêmios frente a frequência de ruínas, utilizando a distribuição Exponencial, com parâmetro $\lambda = 1/100$ para o montante de severidade dos sinistros (X). Como no caso anterior, a variável associada à frequência de sinistros (N) foi mantida como sendo $N \sim Poisson(10)$ e os valores dos prêmios Π_S foram sendo modificados de acordo com o princípio escolhido. O valor de capital inicial (u) foi mantido em 1000 unidades monetárias. As figuras a seguir foram segmentadas no eixo horizontal, que representa os valores que foram acima do limite estipulado, gerando solvência e os que caíram abaixo do limite, gerando ruína, e no eixo vertical, que apresenta o período de 10 anos (120 meses), dado que foram simulados 100 valores por mês, o que

resultou em 12000 simulações.

Para o primeiro caso, adotou-se o princípio do prêmio puro, como pode ser visto o comportamento do processo de ruína na Figura 8, sendo que o cálculo do montante de reservas da carteira foi por meio da equação $U(t) = 1000 + 1000t - S(t)$. Nota-se que a frequência de ruínas observadas nesta simulação foi de 0,9518, de tal maneira que, dentre as 12 mil simulações, ocorreram 11422 ruínas no período.

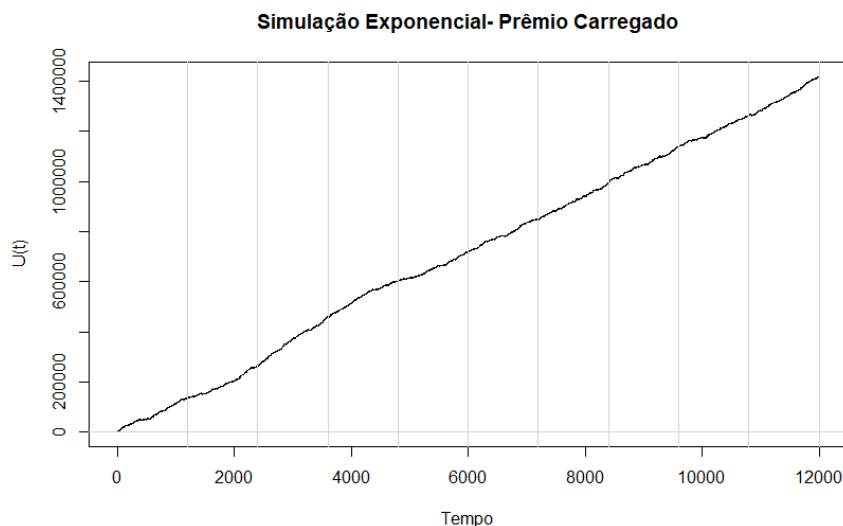
Figura 8 – Nível de reservas de severidades com distribuição Exponencial e princípio de prêmio puro em um período de 120 meses, simulados cem vezes por períodos.



Fonte: Elaboração própria.

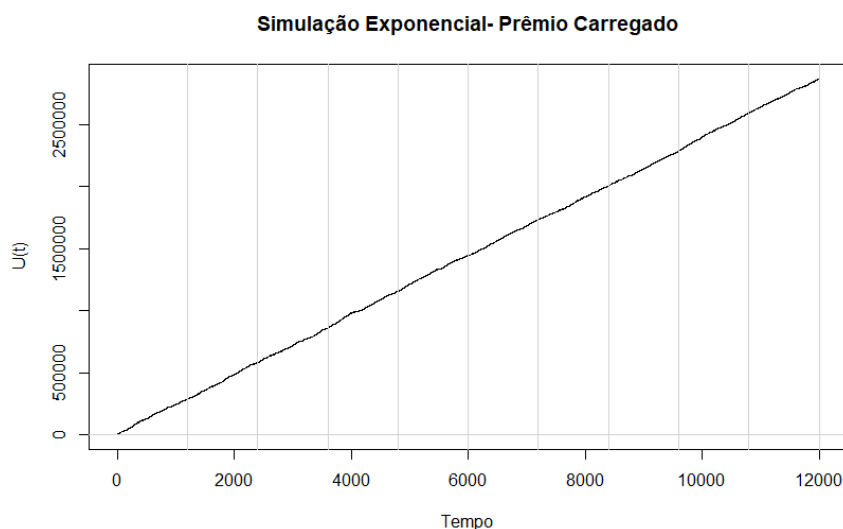
A segunda simulação realizada foi utilizando o princípio do prêmio carregado, de maneira que como referência para o cálculo do carregamento, adotou-se uma probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total imposto pela seguradora, de maneira que por aproximação pela normal padrão, o quantil não exceda 40%. Desta forma o valor do carregamento encontrado foi de 0,1144, e sua reserva ficou como sendo $U(t) = 1000 + 1114,48t - S(t)$. Assim, os resultados obtidos foram que em 12 mil simulações ocorreu nenhuma ruína. O comportamento e o processo de ruína pode ser visto na Figura 9. Alterando-se a probabilidade para o quantil que representa 30%, têm-se como valor de θ igual a 0,2389 e $U(t) = 1000 + 1238,92t - S(t)$. O resultado obtido para a simulação, ilustrada na Figura 10, foi de nenhuma ocorrência de ruína, como no caso anterior.

Figura 9 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio de prêmio carregado em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.



Fonte: Elaboração própria.

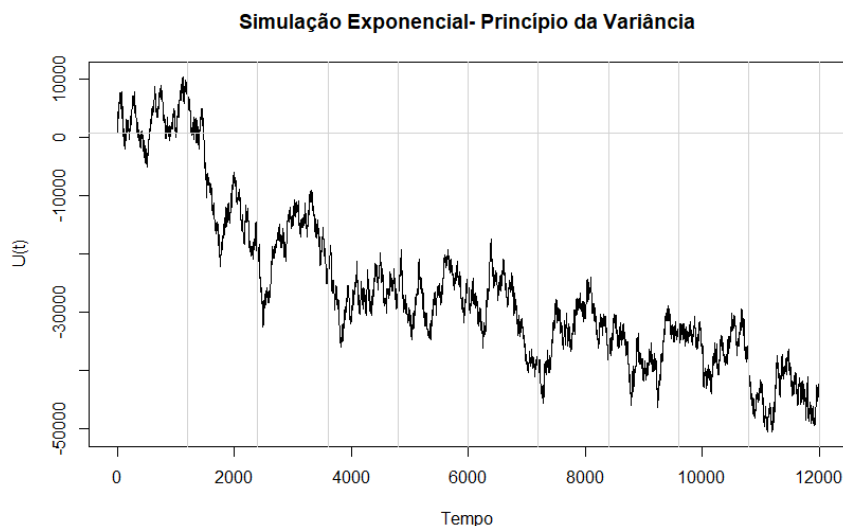
Figura 10 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio de prêmio carregado em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.



Fonte: Elaboração própria.

As simulações posteriores utilizaram o princípio de cálculo de prêmio associado ao cálculo da variância. A Figura 11 mostra o comportamento do processo de ruína, com 10903 ocorrências de ruínas, com um valor de carregamento de 0,00057 e $\alpha = 40\%$. A frequência de ruína foi de 0,9085 e seu montante de reservas foi obtido por meio $U(t) = 1000 + 1005,72t - S(t)$.

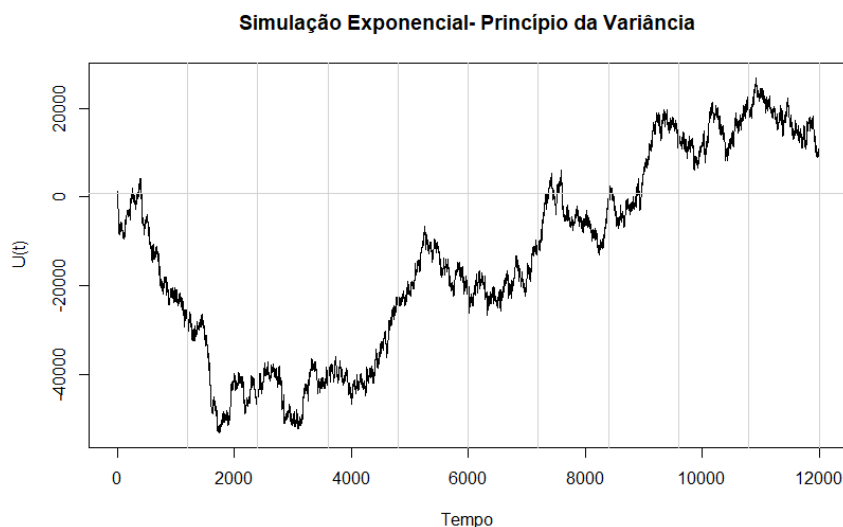
Figura 11 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio da variância em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.



Fonte: Elaboração própria.

Alterando o valor de carregamento, a situação encontrada foi de 8651 ocorrências de ruínas com carregamento de segurança θ igual a 0,0011 e $\alpha = 30\%$ e cálculo de reserva como sendo $U(t) = 1000 + 1011,69t - S(t)$. A Figura 12 apresenta o comportamento do processo de ruína para tal cenário.

Figura 12 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio da variância em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.

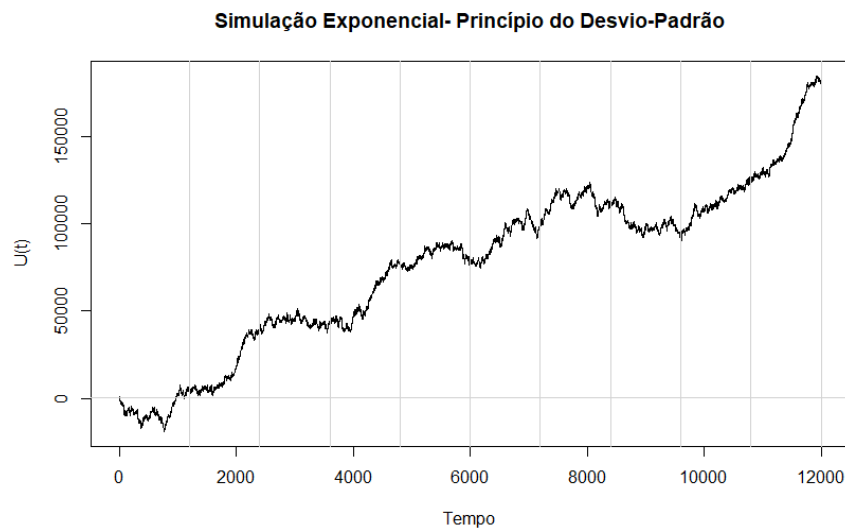


Fonte: Elaboração própria.

Considerando o princípio do desvio padrão, a primeira simulação utilizou como valor de

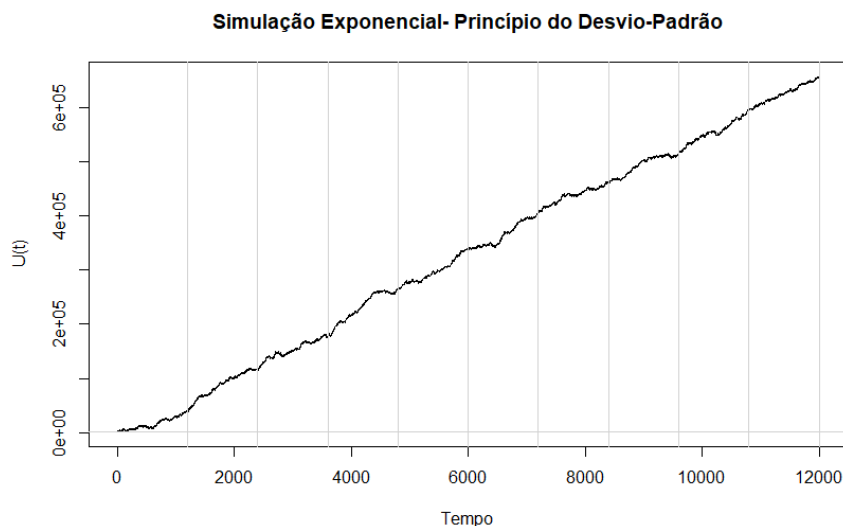
carregamento 0,256, representado pelo quantil da distribuição normal padronizada de $\alpha = 40\%$. Logo, sua reserva foi obtido por meio $U(t) = 1000 + 1025,60t - S(t)$, o que evidenciou como resultado, 977 ruínas, com probabilidade igual a 8,14%. Porém, quando utilizou um valor de 0,523 para o valor de θ , não houveram ocorrências de ruínas, o que não significa que o modelo não possa resultar em algum caso ao longo do tempo, e este resultado se deu através da equação $U(t) = 1000 + 1052,30t - S(t)$. Tais cenários podem ser vistos nas Figuras 13 e 14, respectivamente.

Figura 13 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio do desvio padrão em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 40%.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 14 – Nível de reservas de Severidades com distribuição Exponencial e princípio do desvio padrão em um período de 120 meses, simulados cem vezes por período, dado que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio total não exceda o quantil da normal-padrão de 30%.



Fonte: Elaboração própria.

Dadas as simulações realizadas, temos por meio da desigualdade de Lundberg, a probabilidade máxima de ocorrer ruínas nesta carteira fictícia igual a e^{-Ru} , em que u foi fixado como sendo 1000 unidades monetárias. Para os diferentes valores de carregamento θ , foram calculados os possíveis valores de coeficiente de ajustamento R , sendo eles encontrados pelo método de Newton Raphson. Além disso, tem-se os valores de frequência para as simulações realizadas neste trabalho $\psi(u)_{Sim}$, e por fim os valores fixados para o prêmio Π_S .

Tabela 5 – Frequências de Ruínas observadas na simulação para X com distribuição Exponencial em diferentes princípios de cálculo de prêmio e valores de carregamento de segurança.

Princípio de Cálculo	θ	Π_S	R	$\psi(1000) \leq e^{-Ru}$	$\psi(1000)_{Sim}$
$(\mu + \theta)$	0,11448	1114,48	11042	0	0
$(\mu + \theta)$	0,23389	1238,92	71729	0	0
(σ^2)	0,00057	1005,72	$5,72e^{-06}$	0,9942	0,9085
(σ^2)	0,00116	1011,69	$1,16e^{-05}$	0,9883	0,7209
(σ)	0,2560	1025,60	89430	0	0,0814
(σ)	0,5230	1052,30	-0,44	0	0

Fonte: Elaboração própria.

Pode-se dizer que levando em consideração o princípio do Prêmio Puro, tem-se que em

ambas distribuições modeladas, tanto a Gama quanto a Exponencial, evidenciou-se cenários de riscos para a carteira, uma vez que suas probabilidades de ruína estavam próximos da faixa de 90%. Isso ocorre devido ao fato de que, o presente princípio utiliza-se do artefato de cobrar o prêmio como sendo o valor esperado do seu risco e esta situação se torna insustentável no mercado de seguros, devido ao fato de não enquadrar os gastos adicionais ao risco coberto, e com isso não se assegurar de custos extras de um processo de cobertura de risco. Assim, esse princípio é aceito em carteiras cujas apólices são homogêneas e altamente massificadas, uma vez que há uma maior realocação de capital próprio da seguradora na carteira, ocorrendo maior dependência da reserva inicial no processo, sendo esta inversamente proporcional a frequência de ruína (PIROUTEK, 2009).

Com relação ao princípio do prêmio carregado, constatou-se que para a situação onde a variável aleatória associada ao montante de severidades de sinistros possuía distribuição Exponencial, as ocorrências de ruínas foram nulas, tanto para o caso das simulações quanto pelo cálculo da desigualdade de Lundberg, o que cria um cenário, possivelmente, livre de ruínas. Tal fato não aconteceu com a distribuição Gama, sendo que seu menor valor de probabilidade chegou a ser de 3,46% pela desigualdade de Lundberg, mesmo que as simulações não tenha evidenciado a ocorrência de ruínas. Assim, discute-se que a característica da distribuição Exponencial em ser eficiente em detectar falhas, e se sair melhor no princípio associado ao carregamento. Desta maneira, este princípio é caracterizado por ser muito utilizado no ramo vida, mas devido a característica de não se adequar as casos instáveis do ramo não-vida é muito pouco utilizado nestes casos. Porém, sua habilidade em desconsiderar as volatilidades de sinistro para distintas classes faz com que seu enfoque seja menor no momento de estabelecer o prêmio ao segurado. (PACHECO, 2014).

As simulações associadas ao princípio da Variância, ilustrou cenários muito parecidos para as duas distribuições, em que suas probabilidades ficaram mais elevadas nos diferentes valores de carregamento. Entretanto, quando se analisa pelos valores simulados, verifica-se que quando aumentou-se o valor de carregamento, a probabilidade de ruína diminuiu, devido ao aumento da margem de segurança imposta no prêmio. Assim, constata-se que este princípio possui preceitos que envolve um cálculo atuarial rigoroso para diagnosticar os riscos de subscrição. Logo, acaba sendo pouco utilizado nos cenários reais, pois no momento de escolha para um valor de carregamento a variância dificulta a precisão, já que a sua ordem de grandeza ser diferente da ordem atrelada ao cálculo da média, assim acaba gerando uma falta de confiança

em seus valores (PACHECO, 2014).

Por fim, analisando os resultados obtidos com as simulações associadas ao cálculo do prêmio pelo princípio do desvio padrão, obteve-se cenários onde os níveis de frequências se mostraram baixos, sendo este resultado pelo método de Lundberg. Quando se olha para os valores encontrados nas simulações, têm-se que as menores probabilidades encontradas foram com os maiores valores de carregamento, porém houve uma diferença entre as distribuições quando diminui-se o valor de β . Observou-se que para o caso Gama a probabilidade de ruína foi maior do que no caso Exponencial, com isso, este princípio acaba sendo não favorável, mesmo sendo muito utilizado nos cálculos de seguro de danos, porém a sua falta de aditividade acaba colocando em dúvida sua utilização para o cálculo de prêmios de riscos agregados (RAMOS, 2014).

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente estudo, à partir das simulações apresentadas, ficou evidente a forte influência do carregamento de segurança nos prêmios à serem cobrados pelas seguradoras, sendo baseados em medidas associadas à distribuição do sinistro agregado. Com isso, constatou-se que dentre os princípios de cálculo de prêmios analisados, aquele que obteve a menor frequência de ruína em ambas distribuições e em ambos métodos de cálculo, simulação e desigualdade de Lundberg, foi o do prêmio carregado. Isso se deve por se mostrar estável frente as flutuações dos gastos que uma seguradora possui em aceitar os riscos de seus segurados. Logo, o adicional de ter uma porcentagem frente ao valor fixo de prêmio cobrado faz com que a carteira de seguros se torne mais sustentável, e que com isso as situações de ruínas se tornem mínimas. Mas vale ressaltar a problemática de não se adequar muito bem ao ramo de danos devido a heterogeneidade deste ramo. Porém quando fala-se do ramo vida, o presente princípio se torna adequado. Além disso, pode-se perceber que mesmo o princípio do prêmio puro que satisfaz todas as propriedades estudadas se mostrou ser inadequado para se calcular um prêmio, devido a sua característica em estipular o prêmio sem considerar as flutuações dos gastos de uma seguradora.

Com relação aos outros dois princípios estudados, percebe-se que tanto o da Variância quanto o do desvio padrão se mostraram instáveis contra as ruínas, devido ao fato de o valor do prêmio se basear em grandezas de ordens diferentes da média, uma vez que seus valores de prêmios foram menores do que no princípio carregado, o que nos diz sobre a variabilidade da carteira que acaba sendo muito baixa, logo seu valor se aproxima muito da média, o que por um lado significa uma boa confiança do valor que a seguradora espera gastar, porém como as distribuições utilizadas neste trabalho se caracterizam por já possuírem baixos valores de variabilidade, sugere-se alterar o valor de reserva para o cálculo e também, alterar as distribuições com características diferentes. Por exemplo, pode-se utilizar de distribuições cuja a dispersão seja maior, o que provavelmente fará com que os preços se elevem e torne a carteira mais avessa ao risco de ruína. Ressaltando também as propriedades nas quais estes não se adequam, como é o caso da propriedade da aditividade, que é de grande utilidade em riscos agregados, desta forma utilizar de um princípio no qual a soma de carteiras e junto à elas as suas diferentes classes de riscos não se mostram confiáveis em tomar um prêmio agregado, é colocar em risco a subscrição da sua carteira.

Assim, o presente estudo analisou os princípios em cenários de ocorrência de situações de ruínas, podendo ser analisados em outras situações, como por exemplo, o cálculo de prêmios associados a modalidade de resseguro, que é uma das maneiras que a seguradora pode fazer para diminuir seus riscos, onde o principal foco do resseguro na teoria da ruína é no cálculo do coeficiente de ajustamento, por não ter uma maneira clara de se calcular a probabilidade de ruína, e acaba se baseando na desigualdade de Lundberg, maiores informações podem ser vistos em REIS(2001). Além disso, fica como sugestão para futuros trabalhos, acrescentar variáveis no modelo, podendo estudar questões como a Teoria dos Valores Extremos em resseguro.

REFERÊNCIAS

- BOWERS, N. et al. **Actuarial Mathematics**. 2.ed. Schaumburg: The Society of Actuaries, 1997.
- BRITO, Irene; GONÇALVES, Patricia; RAMOS, Pedro Lima. O Risco e a Ruína na atividade seguradora. **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática:SPM**, n. 75, p. 1-29, jul. 2017.
- DICKSON, David C.M. **Insurance Risk and Ruin**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- FERREIRA, Paulo Pereira. **Modelo de Precificação e Ruína para Seguros de Curto Prazo**. Rio de Janeiro: FUNENSEG, 2002.
- KAAS,R. et al. **Modern Actuarial Risk Theory**. 2. ed. Springer, 2009.
- PACHECO, Ricardo. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. São Paulo: Editora Atlas S.A, 2014.
- PIROUTEK, Aline Martines. **Probabilidade de Ruína com eventos espaciais**. 2009. Dissertação (Mestrado em Estatística)- Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.
- LEMOS, Sabrina Regina Ribeiro. **Probabilidade da Ruína no mercado de Seguros: Fundamentos Teóricos e Alguns Resultados de Simulação**. 2008. Dissertação (Mestrado em Estatística)- Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008.
- REIS, Alfredo D. **Teoria da Ruína**. Lisbon School of Economics and Management (ISEG), dezembro, 2011.
- RAMOS, Pedro Alexandre F. L. **Princípios de cálculo de prêmios e de medidas de risco em modelos atuariais**. 2014. Dissertação (Mestrado em Estatística)- Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, 2014.
- R Core Team (2019). **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- RODRIGUES, José Angelo. **Gestão de Risco Atuarial**. São Paulo: Editora Saraiva, 2008.
- SILVA, Affonso. Solvência das Seguradoras. **Estudos FUNENSEG**, n. 19, p. 1-72, Rio de Janeiro, 2009.

A Distribuições para Frequência de Sinistros

A.1 Distribuição Binomial

Esta distribuição evidencia a probabilidade de ocorrência de k sinistros ao longo de n eventos independentes, sendo estes com probabilidade fixa p de ocorrência de sinistros.

$$p_k = P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 < p < 1, k = 0, \dots, n; n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.1})$$

Sendo sua função geradora de momentos dada por:

$$M_N(t) = [(1-p) + pe^t]^n \quad (\text{A.2})$$

E sua média e variância:

$$\mu_N = np \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_N^2 = np(1-p) \quad (\text{A.4})$$

Observa-se que quando possuímos uma amostra com tamanho superior a 5, pode-se utilizar uma ferramenta para obter o cálculo dessa probabilidade, isto é, faz-se uma aproximação através da distribuição Normal, onde

$$N \sim Normal(\mu_N; \sigma_N) = Normal(np; \sqrt{np(1-p)})$$

De maneira que

$$P(N < k) = \sum_0^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad (\text{A.5})$$

Sendo ϕ , a função acumulada de uma Normal padrão, com média igual à 0 e, desvio padrão igual à 1. Vale ressaltar que, no presente modelo adotamos p , como sendo a probabilidade de ocorrer um sinistro a cada experimento, de modo que não seja uma variável aleatória (PACHECO, 2014).

A.2 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson evidencia qual a probabilidade de ocorrer um certo número de eventos k em um determinado intervalo de tempo t .

$$p_k = P(N = k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!}, \lambda > 0, k = 0, \dots, n; n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.6})$$

Sendo sua função geradora de momentos dada por:

$$M_N(t) = e^{-\lambda t[e^t - 1]}$$

E sua média e variância:

$$\mu_N = \lambda t \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_N^2 = \lambda t \quad (\text{A.8})$$

A distribuição de Poisson é parametrizada pelo valor de λ , e no cenário de seguro de danos isto representa, a frequência que se espera da ocorrência de sinistros em um certo período de tempo t . Além do que, esta distribuição depende fatorialmente de um valor, e em algumas situações resolver essa condição se tornar trabalhoso, com isso, é utilizado a ferramenta da fórmula de Stirling, onde:

$$k! \approx k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}$$

Desta maneira, a presente distribuição, segundo Pacheco (2014), é tida como um evento particular da distribuição Binomial e, que com isso, é capaz de quantificar a probabilidade de ocorrência de um valor k de sinistros quando há um número elevado de N eventos independentes, iusto é:

$$P(N = k) = \lim_{n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \quad (\text{A.9})$$

A distribuição de Poisson, da mesma maneira que a distribuição Binomial, possui a capacidade de ser aproximada pela distribuição Normal, porém seu parâmetro deverá ser alto, onde:

$$N \sim \text{Poisson}(\lambda t) \approx \text{Normal}(\mu_N; \sigma_N) = \text{Normal}(\lambda t; \sqrt{\lambda t})$$

De maneira que

$$P(N < k) = \sum_0^k \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \approx \phi\left(\frac{k - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}\right) \quad (\text{A.10})$$

Uma vez que, ϕ é a função acumulada da distribuição.

A.3 Distribuição Binomial Negativa

A distribuição Binomial Negativa representa a capacidade de ocorrer k sucessos até atingir-se o r -ésimo fracasso. Visto que os experimentos são independentes e a probabilidade de sucesso p é fixada em cada experimento.

$$p_k = P(N = k) = \binom{k+r-1}{k} p^k (1-p)^r, 0 < p < 1, k = 1, \dots, n; r, k \in \mathbb{N} \quad (\text{A.11})$$

Sendo sua função geradora de momentos:

$$M_N(t) = \frac{p^k}{[e^{-t} + p - 1]}$$

E sua média e variância

$$\mu = \frac{rp}{1-p} \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_N^2 = \frac{rp}{(1-p)^2} \quad (\text{A.13})$$

A presente distribuição é o resultado de uma variável aleatória que possui um comportamento similar a de Poisson, porém o seu parâmetro de frequência esperada como uma variável aleatória da distribuição Gama. Essa distribuição, têm a capacidade de se adequar as carteiras de seguros cuja variância de frequência se sinistros se mostra maior do que sua média (PACHECO, 2014).

Da mesma maneira que, com um número elevado, é capaz de se aproximar pela distribuição Normal, de tal modo que,

$$N \sim \text{Normal}\left(\frac{rp}{1-p}, \frac{\sqrt{rp}}{1-p}\right)$$

Tal que

$$P(N < K) \approx \phi\left(\frac{k(1-p) - rp}{\sqrt{rp}}\right) \tag{A.14}$$

B Simulações Computacionais

B.1 Distribuição Gama

Ut → capital excedente de uma seguradora

$u0$ → capital inicial

P → prêmios coletados por período

St → soma

$cont$ → resultado do período

$ruinas = numeric()$ → vetor para guarda os valores abaixo do limite estabelecido

$U0 = 1000$ → reserva inicial

$cont = numeric()$ → vetor que vai guardar o resultado do periodo

$b = 1$ → contador de quantas vezes foi abaixo do limite estabelecido

$for(in1 : 120)$ → número de períodos de simulação

{

$P = 1000$ → Prêmio de acordo com o princípio escolhido

$for(tin1 : 100)$ → Número de simulações dentro de cada período para gerar um rs

{

$cont[b] = U0$

$if(cont[b] < 750)$

{

$ruinas[b] = cont[b]//$ }

$b = b + 1$

$N = rpois(1,10)$ → Gerando valores de Poisson

$X = rgamma(N,1000,10)$ → Gerando N valores de uma Gama

$S = sum(X)$ → somando os valores de X

$Ut = U0 + P - S$ → Cálculo da reserva

$U0 = Ut$ → Reserva inicial que recebe o resultado do período

}

}

$fruina = length(which(cont_s < 750))$ → Total de ocorrências abaixo do limite estabelecido

fruína/length(cont_s) → Probabilidade de Ruína

B.2 Distribuição Exponencial

Ut → capital excedente de uma seguradora

u0 → capital inicial

P → prêmios coletados por período

St → soma

cont → resultado do período

ruínas = numeric() → vetor para guarda os valores abaixo do limite estabelecido

U0 = 1000 → reserva inicial

cont = numeric() → vetor que vai guardar o resultado do período

b = 1 → contador de quantas vezes foi abaixo do limite estabelecido

for(iin1 : 120) → número de períodos de simulação

{

P = 1000 → Prêmio de acordo com o princípio escolhido

for(tin1 : 100) → Número de simulações dentro de cada período para gerar um rs

{

cont[b] = U0

if(cont[b] < 750)

{

ruínas[b] = cont[b]// }

b = b + 1

N = rpois(1,10) → Gerando valores de Poisson

X = rexp(N,1/100) → Gerando N valores de uma Gama

S = sum(X) → somando os valores de X

Ut = U0 + P - S → Cálculo da reserva

U0 = Ut → Reserva inicial que recebe o resultado do período

}

}

fruína = length(which(cont_s < 750)) → Total de ocorrências abaixo do limite estabelecido

fruína/length(cont_s) → Probabilidade de Ruína