

Qiskit aplicado ao ensino de conceitos básicos de informação e computação quântica

Raphael Pimenta, Anibal Thiago Bezerra
Universidade Federal de Alfenas, Departamento de Física, Alfenas, MG
(Dated: January 25, 2020)

Informação Quântica é um assunto que tem ganhado destaque na mídia nos últimos anos dado o crescente interesse pela Computação Quântica, pela Inteligência Artificial e pela possibilidade de uma quebra de paradigma no que diz respeito à capacidade e velocidade de processamento de dados. Na computação quântica a superposição de estados quânticos exerce papel fundamental no seu funcionamento e aplicação. Dada por uma combinação linear de todos os estados possíveis à esse sistema, cada um com sua probabilidade de ser determinado ao realizar uma medição, a superposição leva à contrassensos que não podem ser entendidos e nem possui análogos do ponto de vista clássico, como o emaranhamento quântico. Os estados quânticos emaranhados estão na base dos protocolos de computação quântica, dentre os quais destacamos os chamados estados os estados de Bell, que formam a base para o funcionamento dos algoritmos nessa área. Uma plataforma de código aberto para desenvolvimento de softwares para computação quântica chamada Qiskit, lançada em 2017 pela IBM Research, foi criada para facilitar a programação e execução de experimentos em processadores quânticos bem como em simuladores de processadores quânticos. Por se tratar de uma plataforma gratuita e de software livre, o Qiskit tem potencial para beneficiar estudantes de Mecânica Quântica trazendo para eles uma aplicação de conceitos abstratos que são de difícil compreensão durante os estudos em livros, elucidando de modo aplicado o funcionamento desse universo não-determinístico que não faz parte de sua realidade vivente.

I. INTRODUÇÃO

Informação Quântica é um assunto que tem ganhado destaque na mídia nos últimos anos dado o crescente interesse pela Computação Quântica, pela Inteligência Artificial e pela possibilidade de uma quebra de paradigma no que diz respeito à capacidade e velocidade de processamento de dados (BOUWMEESTER; ZEILINGER, 2000). A Computação Quântica promete trazer avanços históricos e impossíveis de serem alcançados com a computação clássica que utilizamos no nosso dia-a-dia, com potencial de revolucionar diversos aspectos de nossa sociedade.

Na vanguarda dessas pesquisas estão grandes empresas com foco em tecnologia como a *IBM* e o *Google*, ambas em plena competição pelo desenvolvimento de hardware e software quânticos. Um exemplo desse desenvolvimento se deu no trabalho de Zalcman e colaboradores (ZALCMAN et al., 2019), que anunciaram no final de outubro de 2019 a chamada *supremacia quântica*, determinando um marco para a computação mundial. Nesse trabalho, os autores atestam a obtenção e uso de um processador quântico de 53 qubits, capaz de tratar um estado quântico com dimensão $2^{53} (\sim 10^{16})$ em cerca de 200 segundos, de modo reproduzível e com alta fidelidade. Para um computador clássico, ainda segundo o trabalho, a mesma capacidade de processamento de informação foi estimada em cerca de 10^4 anos. Nesse sentido, o processador quântico impôs um limite de processamento intangível ao hardware clássico.

Na base da Computação Quântica está a Mecânica Quântica, um teoria formulada por conceitos não-determinísticos, abstratos e, muitas vezes, sem análogos na Física Clássica. Para entender tais conceitos, parte do processo de aprendizado está na assimilação de

um formalismo matemático matricial significativamente difícil à discentes de graduação e praticamente impossível de ser apresentado e assimilado pelo alunos de ensino médio.

Enquanto a Computação Clássica faz uso de bits, dígitos binários que representam estados lógicos que podem assumir apenas dois valores, a Computação Quântica utiliza de qubits para suas operações. O qubit é a unidade básica na informação quântica e, diferentemente da clássica, ele assume um estado quântico de superposições e não é exato como o estado de um bit. A manipulação desse qubits se baseia no uso extremamente controlado de campos eletromagnéticos, obedecendo à dinâmica temporal obtida por meio de operadores quânticos que atuam nos estados quânticos de spin (DIVINCENZO, 1995). Dessa forma, a manipulação dos qubits usando operadores lógicos quânticos é uma aplicação direta do formalismo matricial. Portanto, a visualização e contato direto com as operações lógicas em qubits, pode ajudar no processo de entendimento acerca de conceitos e relações matemáticas amplamente utilizadas na Mecânica Quântica.

Atualmente, assim como no início da computação clássica, o acesso ao hardware quântico ainda é bem restrito, uma vez que tais processadores devem trabalhar em temperaturas criogênicas, afim de preservar a coerência dos estados quânticos durante as operações lógicas (DIVINCENZO, 1995). Ainda são poucos os computadores quânticos em operação. No entanto, a *IBM* lançou o projeto *IBM Q Experience*, junto com a plataforma Qiskit, possibilitando que usuários em todo o mundo possam ter acesso e executar seus próprios algoritmos em um hardware quântico real (IBM, 2019c).

Nesse sentido, abre-se uma avenida de possibilidades à usuários comuns que queiram se aventurar no mundo da

Computação Quântica. No entanto, a programação de softwares quânticos mantém pouquíssimas relações com a programação tradicional, de modo que o entendimento básico de conceitos quânticos e de informação quântica se faz necessário. Isso se deve ao fato que o princípio fundamental do funcionamento dos qubits engloba os estados quânticos e suas características mais marcantes: a superposição e o emaranhamento. O aumento exponencial da capacidade de processamento e transferência de informação está diretamente relacionado a tais propriedades (ZALCMAN et al., 2019).

No presente trabalho apresentamos alguns conceitos que julgamos fundamentais para o entendimento dos processos relacionados à computação quântica, mostrando de maneira sucinta a álgebra matricial associada à manipulação de dois qubits. À seguir utilizamos a plataforma Qiskit como uma maneira de visualizar tais conceitos e seu uso direto no desenvolvimento de softwares para serem executados em hardwares quânticos.

II. ESTADOS QUÂNTICOS

Para falarmos de Estados Quânticos podemos começar pensando em uma definição para a expressão “estado físico de um sistema”. No mundo macroscópico em que vivemos, por exemplo, o estado de uma partícula sob à ação de forças pode ser obtido segundo a mecânica Newtoniana. O que se precisa saber para definir o estado nesse caso em específico é a posição \vec{x} e o momento \vec{p} da partícula em um instante de tempo qualquer, t . Com essas variáveis informadas, é possível se obter todas as informações a respeito do sistema, bem como prever configurações para instantes futuros de tempo. À essas configurações chamamos de estado físico, ou seja, a descrição completa das propriedades de um sistema físico (SHANKAR, 2012).

Segundo a Mecânica Newtoniana, o conhecimento do estado físico de um sistema permite a utilização de relações matemáticas e, à partir delas, calcular a evolução do estado do sistema com o passar tempo e obter seu “futuro”.

No caso de estados quânticos podemos nos indagar: “Quais as informações necessárias para descrever o estado do físico de um sistema quântico? Como obter tais informações?”.

Com relação à obtenção das informações sobre estado quântico, estamos condicionados à chamada função de onda, obtida pela solução da equação de Schrödinger usando o Hamiltoniano que descreve o sistema físico (GRIFFITHS; FREITAS, 2011). A equação de Schrödinger é também responsável pela evolução temporal do estado do sistema quântico.

Porém, diferentemente do caso clássico (determinístico), as propriedades físicas mensuráveis de um sistema quântico só podem ser obtidas probabilisticamente. Como podemos inferir, a função de

onda ($\psi(\vec{r}, t)$) solução da equação de Schrödinger não é localizada no espaço mas estendida como uma onda e, para obtermos um significado físico real (medirmos uma propriedade física) à partir dela, precisamos de uma função de densidade de probabilidade. Nesse cenário probabilístico, a densidade de probabilidade indica o quão provável para o sistema é assumir uma dada configuração e ser detectado em uma dada posição \vec{r} em um dado instante de tempo t . Nesse sentido, não temos acesso à posição exata onde o sistema físico pode ser encontrado, sabemos na verdade qual a probabilidade dele poder ser encontrado numa posição específica no momento da medida. O mesmo ocorre para outras propriedades físicas do sistema quântico como momento, energia, transições entre estados, corrente, dentre outras.

Na mecânica quântica, seus objetos são representados por densidades de probabilidade, obtidas à partir das funções de onda como

$$P(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \equiv \iiint_{\vec{r}} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) d\vec{r}, \quad (\text{II.1})$$

onde ψ^\dagger é o complexo conjugado da função de onda, uma vez que essa pode ser uma quantidade complexa. À partir da densidade de probabilidade, podemos obter o valor esperado de operadores quânticos, responsáveis pelas medidas. Temos, por exemplo, o operador Hamiltoniano (\hat{H}) que determina a energia total do sistema. O valor esperado desse operador é a energia média total, definida como

$$\langle E \rangle = \iiint_{\vec{r}} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \hat{H} \psi(\vec{r}, t) d\vec{r}. \quad (\text{II.2})$$

No entanto, não podemos medir precisamente algumas grandezas físicas ao realizar medidas simultâneas (EISBERG; RESNICK, 1979). Tendo em vista o comportamento ondulatório dos sistemas físicos na abordagem quântica, algumas grandezas são intrinsecamente correlacionadas entre si e, portanto, não podem ser definidas com precisão simultaneamente. Essa indeterminação está associada à interferência que o ato de medir causa no estado quântico do sistema. Dada a reciprocidade da posição e momento, por exemplo, ao medirmos a posição do sistema a perturbação causada pela medida gera uma incerteza intrínseca na medida do momento. O mesmo ocorre com às quantidades energia e tempo. Esse comportamento recebe o nome de Princípio da Incerteza de Heisenberg. Variáveis que não comutam obedecem à relação

$$\Delta \vec{r} \Delta \vec{p}_r \geq \frac{h}{4\pi}, \quad (\text{II.3})$$

onde $\Delta \vec{r}$ e $\Delta \vec{p}_r$ são as incertezas nas medidas da posição e momento, respectivamente, proporcionais à contante de Planck h . Segundo a equação II.3, certeza na posição ($\Delta \vec{r} = 0$) leva à uma incerteza infinita no momento.

Esse mesmo comportamento ondulatório é responsável por outra característica fundamental da matéria que não pode ser entendido com base nas ideias da mecânica clássica, a superposição (interferência) entre estados quânticos. Proposto por de Broglie e atestado pelo experimento de Davisson-Germer e posteriormente pelo de G. P. Thomson, a matéria possui características surpreendentes como interferência e difração, similares às ondas (EISBERG; RESNICK, 1979). Então, assim como ondas clássicas podem se superpor e interferir construtivamente ou destrutivamente, os sistemas físicos na abordagem quântica terão um comportamento similar e seus estados podem se superpor. Ou seja, o princípio de superposição que é necessário para descrevermos uma onda também se aplica à matéria.

A superposição de estados quânticos leva à contrassensos que não podem ser entendidos do ponto de vista clássico, como é o caso do famoso *paradoxo EPR*.

III. PARADOXO EPR

No ano de 1935, Einstein, Podolsky e Rosen publicaram um artigo intitulado “A descrição da mecânica-quântica da realidade física pode ser considerada completa?” (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935), no qual eles defendiam que a interpretação probabilística da mecânica quântica da realidade física estava incompleta e que a única descrição sustentável era a realista.

A visão realista argumenta que a mecânica quântica é uma teoria parcial, pois mesmo que conheçamos a função de onda do sistema que o descreve como um todo, ainda assim não é possível determinar todas as suas características simultaneamente. Nesse sentido, deve haver alguma outra informação à qual a mecânica quântica não é capaz de obter e que é necessária para uma descrição integral da realidade física (GRIFFITHS; FREITAS, 2011).

No artigo publicado pelos três cientistas, foi apresentado o famoso *paradoxo EPR* no qual a visão realista foi fortemente defendida e que para entendermos primeiro precisamos assimilar o que é emaranhamento entre estados quânticos.

A. Emaranhamento quântico

Numa analogia clássica, suponha que tenhamos os dois reis de um conjunto de peças de Xadrez. Colocamos o rei das peças pretas em uma caixa *A* e o rei das peças brancas em uma caixa *B*, ambas indistinguíveis uma da outra. Em seguida, embaralhamos as caixas de modo que não seja mais possível saber em qual caixa está determinada peça. Ao abrir uma delas e descobrir que ela possui, por exemplo, o rei das peças brancas, imediatamente sabemos que na outra caixa está guardado o rei das peças pretas sem precisar checar esta caixa. Então, nessa

pobre analogia, podemos dizer que esses dois objetos estão emaranhados, isto é, saber algo quanto a um objeto faz com que você saiba algo do outro sem precisar checar.

Digamos agora que os dois reis anteriores obedeçam às leis da Mecânica Quântica e queremos determinar em qual caixa cada um está. Quando as caixas estão fechadas e não temos como saber em qual caixa está determinado rei, o que a Mecânica Quântica nos leva à conclusão que em ambas as caixas temos um rei que branco e preto ao mesmo tempo, devido a superposição de seus estados físicos (NOVAES; STUDART, 2016).

Isso posto, a superposição de um estado quântico generalizado é dada por uma combinação linear de todos os estados possíveis à esse sistema, cada um com sua probabilidade de ser determinado ao realizar uma medição (SAKURAI; NAPOLITANO et al., 2014). Para o nosso caso, os estados possíveis para as peças são apenas dois: rei das peças brancas ou rei das peças pretas. Assim, em ambas as caixas as peças estão em uma superposição entre branca e preta simultaneamente. Se abrirmos uma das caixas para descobrir qual peça está lá, determinamos o estado superposto e a peça passa a ser apenas, por exemplo, o rei das peças pretas. Porém, ao determinar o estado dessa primeira peça, também determinamos o estado da segunda peça na outra caixa sem ao menos tocarmos nela. Consequentemente, a segunda peça de xadrez deixará o estado superposto e será o rei das peças brancas, devido ao emaranhamento de seus estados.

No sentido das funções de onda que descrevem o estado quântico do sistema, a medição determina o estado, ou seja, há um *colapso* da função de onda, a qual manterá esse estado determinado - “rei das peças pretas”, por exemplo. Para estados emaranhados, a medição de um estado determina completamente o outro, mesmo que este esteja a uma distância relativamente grande do primeiro.

B. Ação à distância “fantasmagórica” - *Spooky distance action*

Essa ação à distância, isto é, colapsar a função de onda do objeto sem ao menos interagir diretamente com ele, somente pela determinação do estado de seu par emaranhado, era o que Einstein, Podolsky e Rosen não aceitavam.

Do ponto de vista da relatividade de Einstein, poderia estar ocorrendo uma transferência de informação com velocidades maiores que o limite da velocidade da luz (limite superluminal), uma vez que a influência de um objeto sobre o outro não depende da distância entre eles (GRIFFITHS; FREITAS, 2011).

Na analogia das peças de xadrez, as caixas estavam uma ao lado da outra, mas elas poderiam estar a 10 anos-luz de distância uma da outra e, ainda assim, a influência seria instantânea. Para Einstein, Podolsky e Rosen, essa violação do princípio fundamental da relatividade era um

absurdo. Segundo o postulado da teoria da relatividade, nenhuma influência pode se propagar mais rapidamente do que a luz e esse é o principal argumento do paradoxo EPR. Nessa situação, houve a violação de uma teoria determinística local, onde assumimos que os resultados obtidos para um sistema não deveriam depender do que acontece em um segundo sistema que não tem conexão causal com este primeiro (MACCONE, 2013).

Na tentativa de recuperar a causalidade, D. Bohm apresentou uma análise sobre “variáveis ocultas”, assumindo que além da função de onda $\psi(\vec{r}, t)$ descrevendo o estado físico de sistemas quânticos, uma outra quantidade oculta λ seria necessária para se obter o estado completo de um sistema (BOHM, 1952). Nos anos seguintes muitas outras teorias sobre variáveis ocultas foram elaboradas para complementar a visão quântica e o debate sobre uma interpretação física plausível da mecânica quântica perpetuou (GRIFFITHS; FREITAS, 2011).

C. Desigualdade de Bell

Quem trouxe um parecer definitivo sobre a não necessidade de variáveis ocultas para uma interpretação completa da mecânica quântica foi J. S. Bell (BELL, 1964). Para entendermos o desenvolvimento de Bell, vamos fazer mais um experimento mental agora com elétrons em estados emaranhados na configuração de *spin singlete*. Nesse arranjo, um dos elétrons possui *spin up* enquanto que o outro possui *spin down* e dois observadores que irão medir o estado de spin desse elétrons estão separados por uma distância arbitrária.

Começaremos escolhendo três vetores unitários \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} não necessariamente ortogonais, pelos quais os observadores irão orientar seus detectores e realizar as medições de spin. Pela visão realista de variáveis ocultas, assim que gerarmos os elétrons em *singlete* seus spins também serão determinados e não irão se alterar enquanto eles percorrem a distância até os observadores. Como, no presente experimento, temos três direções possíveis para medir o spin, cada elétron deve possuir três variáveis ocultas correlacionadas entre os elétrons. Como o spin medido nas direções \hat{a} , \hat{b} ou \hat{c} pode assumir os valores $+1/2$ ou $-1/2$, devem haver 8 conjuntos de configurações possíveis para os spins das duas partículas, conforme mostra a tabela I.

Podemos agora pensar em configurações específicas para as medições e, à partir delas, determinar a desigualdade de Bell (para uma dedução mais rigorosa e completa ver (BELL, 1964) e/ou o apêndice A do presente trabalho).

Segundo a tabela I, a probabilidade do observador 1 encontrar o spin na direção $+\hat{a}$ e do observador 2 encontrar o spin na direção $+\hat{b}$ ($P(|\uparrow\rangle \hat{a} \otimes |\uparrow\rangle \hat{b})$) é $P_3 + P_4$ (onde $P(|\uparrow\rangle)$ representa o estado de spin Up “+”), pois nessas condições o par de elétrons só pode estar no estado 3 ou 4. Da mesma maneira,

Estado	Probabilidade	Elétron 1	Elétron 2
		$\hat{a} \hat{b} \hat{c}$	$\hat{a} \hat{b} \hat{c}$
1	P_1	+++	---
2	P_2	++-	--+
3	P_3	+ - +	- + -
4	P_4	+ - -	- + +
5	P_5	- + +	+ - -
6	P_6	- + -	+ - +
7	P_7	--+	++-
8	P_8	---	+++

TABLE I. Possíveis configurações de orientação do spin dos elétrons medidos em três direções \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} .

a probabilidade do observador 1 encontrar o spin na direção $+\hat{a}$ e do observador 2 encontrar o spin na direção $+\hat{c}$ ($P(|\uparrow\rangle \hat{a} \otimes |\uparrow\rangle \hat{c})$) será $P_2 + P_4$. Numa terceira situação, a probabilidade do observador 1 encontrar o spin na direção $+\hat{c}$ e do observador 2 encontrar o spin na direção $+\hat{b}$ ($P(|\uparrow\rangle \hat{c} \otimes |\uparrow\rangle \hat{b})$) será $P_3 + P_7$. Como as probabilidades são não-negativas parece óbvio que a probabilidade de duas medições independentes deva ser maior que a probabilidade para uma única medição, isto é

$$P_3 + P_4 \leq (P_2 + P_4) + (P_3 + P_7), \quad (\text{III.1})$$

ou então, escrevendo de acordo com os versores

$$P(|\uparrow\rangle \hat{a} \otimes |\uparrow\rangle \hat{b}) \leq P(|\uparrow\rangle \hat{a} \otimes |\uparrow\rangle \hat{c}) + P(|\uparrow\rangle \hat{c} \otimes |\uparrow\rangle \hat{b}). \quad (\text{III.2})$$

Essa é uma representação da **desigualdade de Bell**, também conhecida como teorema de Bell, que deve ser respeitada caso sejam necessárias variáveis ocultas à teoria quântica (SAKURAI; NAPOLITANO et al., 2014).

Em seu artigo “*On the Einstein Podolsky Rosen paradox*”, Bell demonstrou que essa desigualdade não é respeitada ao tratarmos de estados descritos por meio da mecânica quântica. Para as configurações no exemplo acima, a probabilidade na mecânica quântica do primeiro observador medir a configuração *spin up* na direção \hat{a} enquanto que o o segundo observador mede *spin up* na direção \hat{b} , assume a forma

$$P(|\uparrow\rangle \hat{a} \otimes |\uparrow\rangle \hat{b}) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta_{ab}}{2} \right), \quad (\text{III.3})$$

onde θ_{ab} é o ângulo formado entre os dois detectores (BELL, 1964). Então, a equação (III.2) se torna

$$\frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta_{ab}}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta_{ac}}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta_{cb}}{2} \right) \quad (\text{III.4})$$

Para analisarmos a desigualdade, analisemos um caso simples onde os versores $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ são ortogonais e o versor $\hat{\mathbf{c}}$ forma um ângulo de 45° com os dois. Nesse caso, $\theta_{ab} = \pi/2$ e $\theta_{ac} = \theta_{cb} = \pi/4$ de modo que a equação (III.4) resulta em

$$\frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad (\text{III.5})$$

ou seja a desigualdade é violada,

$$0,250 \leq 0,146. \quad (\text{III.6})$$

Podemos mostrar a possibilidade de posicionarmos três detectores em direções diversas (ver Apêndice A), utilizar probabilidades quânticas e ainda assim violar a desigualdade de Bell (BELL, 1964). Portanto, a teoria local de Einstein é incompatível com a mecânica quântica e medição de um estado determina completamente o outro mesmo à distâncias arbitrárias como agora. Mas isso não significa que realmente exista uma transmissão de informações entre duas partículas que se propaga mais rápido do que a luz. Mesmo que os dois observadores estejam separados por 10 anos-luz, o primeiro observador saberá qual resultado o segundo observador obteve porém não há comunicação entre eles, apenas uma sequência aleatória de spins \uparrow ou \downarrow . Suponhamos que os observadores 1 e 2 combinem previamente de medir somente o spin na direção $\hat{\mathbf{a}}$ e partam para realizar suas medidas. Se um deles resolver romper o combinado e medir em outra direção, o outro observador não terá como saber que isso aconteceu e apenas continuará anotando sequências de *spins* \uparrow e \downarrow , não há transmissão de informações através dessa ação “fantasmagórica” à distância. Ainda assim, para comparar os resultados de suas anotações feitas 10 anos-luz de distância, os observadores estão restritos à velocidade da luz para suas viagens de volta, o que não viola os princípios relativísticos.

Os estados quânticos emaranhados estão na base dos protocolos de computação quântica. Dentre tais estados destacamos os chamados estados os estados de Bell.

IV. ESTADOS DE BELL

O estado de singlete descrito anteriormente pode também ser chamado de “Estado de Bell”, ou seja, um estado maximamente emaranhado de duas partículas. Os estados de Bell para duas partículas compõem uma base de quatro estados maximamente emaranhados que dependem do estado inicial de spin dessas partículas. São eles

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle] \quad (\text{IV.1})$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle] \quad (\text{IV.2})$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle] \quad (\text{IV.3})$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle]. \quad (\text{IV.4})$$

À partir dos estados de spin interagentes, podemos obter os estados de Bell com um pouco de álgebra matricial. Continuemos utilizando o exemplo anterior com dois elétrons com *spin up* (na base de spin $1/2$) $|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$. De forma matricial, o produto externo entre esses estados leva a

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.5})$$

Primeiramente aplicamos um operador unitário H_d que atuará no primeiro elétron, criando um estado onde medir $|\uparrow\uparrow\rangle$ ou $|\downarrow\uparrow\rangle$ é igualmente provável. Sendo

$$H_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.6})$$

temos que

$$H_d |\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_d |\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

que podemos reconhecer como

$$H_d |\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |\uparrow\rangle. \quad (\text{IV.7})$$

Após atuar o operador H_d , atuamos outro operador unitário C_N , o qual muda o spin do segundo elétron de acordo com o spin do primeiro. Sempre que o primeiro elétron tiver spin $|\downarrow\rangle$, o segundo elétron passará a ter spin $|\downarrow\rangle$. Definindo C_n como

$$C_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.8})$$

sua ação sobre os estado resulta em

$$C_N(H_d |\uparrow\uparrow\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_N(H_d |\uparrow\uparrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$C_N(H_d |\uparrow\uparrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$$

que é o estado de Bell $|\Phi^+\rangle$ na equação (IV.1). Os outros três estados de Bell podem ser obtidos ao variarmos os estados iniciais dos elétrons entre $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$.

Os estados de Bell são maximamente emaranhados pois não é possível os decompô-los como a combinação linear de estados de uma única partícula de modo independente. Isto é, não é possível determinar de modo independente o estado de uma das partículas sem interferir no estado da outra.

V. COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

O emaranhamento quântico e os estados de Bell são fundamentais para a computação quântica, formando a base para funcionamento dos algoritmos nessa área. Na computação quântica há uma manipulação de estados de *spin*, que dá origem aos qubits (bits quânticos). Esses qubits podem ser inicializados com $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ (na base de spin 1/2, $|0\rangle \equiv |\uparrow\rangle$ e $|1\rangle \equiv |\downarrow\rangle$) e operações lógicas (também chamadas de portões) são utilizadas para manipulá-los (NIELSEN; CHUANG, 2011).

Ao trabalhar com qubits estamos sujeitos à algumas restrições, uma delas é o teorema de não-clonagem, no qual estabelece que um estado quântico desconhecido qualquer não pode ser copiado, acarretando em perda de coerência (ver apêndice B) (NIELSEN; CHUANG, 2011). Para resolver esse óbice e podermos transmitir a informação de um dado qubit para outro sem interferir no estado do qubit e, conseqüentemente, destruir sua coerência quântica, precisamos utilizar o teletransporte quântico, cuja base está nos estados emaranhados de Bell.

Assim como demonstrado anteriormente, os estados de Bell podem ser obtidos por meio de operações unitárias. Na computação quântica tais operações nos qubits, são obtidas por meio de operadores lógicos. O equivalente

ao operador H_d na computação quântica é o portão Hadamard. Já o operador C_N é dado pelo portão $CNOT$. Ambos os portões atuam da maneira que foi demonstrada algebricamente nos spins dos elétrons, alterando os qubits entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Dessa forma, estado de Bell $|\Phi^+\rangle$ pode ser obtido pela atuação do portão Hadarmad em um circuito com dois qubits, seguida pela atuação do portão $CNOT$.

Temos que nos atentar que se atuarmos o portão Hadamard no primeiro qubit devemos atuar o portão identidade no segundo, de modo que apenas o primeiro qubit se altere e o $CNOT$ atue corretamente no segundo qubit, controlado pelo primeiro. Se os dois qubits de entrada forem $|0\rangle \otimes |0\rangle$, o portão Hadamard faz com o que estado se torne

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle. \quad (\text{V.1})$$

A atuação do portão $CNOT$ retorna

$$|\Phi^+\rangle \equiv CNOT(H_d \otimes \mathbf{1})|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (\text{V.2})$$

O estado emaranhado na equação (V.2) é o estado de Bell desejado. Se projetarmos o estado $|\Phi^+\rangle$ na base dos possíveis estados de dois spins $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, podemos encontrar a probabilidade dele estar numa determinada configuração, validando o procedimento de obtenção de um estado maximamente emaranhado. Temos que as projeções retornam

$$|\langle 00|\Phi^+\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{1}{2}$$

$$|\langle 11|\Phi^+\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{1}{2}$$

$$|\langle 10|\Phi^+\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 0$$

$$|\langle 01|\Phi^+\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 0.$$

Podemos determinar os outros três estados de Bell mudando o valor dos qubits iniciais. Atuando os portões Hadamard e $CNOT$ nos inicializados como

$|01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, teremos

$$\text{CNOT}(H_d \otimes \mathbf{1}) |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\Phi^-\rangle$$

$$\text{CNOT}(H_d \otimes \mathbf{1}) |01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = |\Psi^+\rangle$$

$$\text{CNOT}(H_d \otimes \mathbf{1}) |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = |\Psi^-\rangle.$$

Podemos desse modo expressar todas as probabilidades em função de cada estado de Bell, conforme a tabela II. O cálculo das projeções para os demais estados de Bell foram mostrados no apêndice C.

$P_{spin1,spin2}$	$ \Phi^+\rangle$	$ \Phi^-\rangle$	$ \Psi^+\rangle$	$ \Psi^-\rangle$
P_{00}	0.5	0.5	0.0	0.0
P_{01}	0.0	0.0	0.5	0.5
P_{10}	0.0	0.0	0.5	0.5
P_{11}	0.5	0.5	0.0	0.0

TABLE II. Projeções dos estados de Bell.

VI. QISKIT

Uma plataforma de código aberto para desenvolvimento de softwares para computação quântica que anda ganhando destaque é o chamado Qiskit, uma plataforma dotada de diversas ferramentas para arquétipos de computadores quânticos e também para simulações e emulações em processadores clássicos. Lançado em 2017 pela IBM Research, o Qiskit foi criado para facilitar a programação e execução de experimentos em processadores quânticos bem como em simuladores de processadores quânticos, disponibilizando versões para programação em Python, Java e Swift. Para instalá-lo e utilizá-lo, os desenvolvedores disponibilizam diversos guias instrutivos (IBM, 2019c)(IBM, 2019b).

O Qiskit possui em sua estrutura quatro bibliotecas principais; “Terra”, “Aqua”, “Ignis” e “Aer”. A biblioteca Terra é àquela que compõe a base estrutural do Qiskit e seus demais componentes, é ela quem permite construir os códigos quânticos e manipulá-los como circuitos quânticos através da linguagem OpenQASM e também pulsos com a linguagem OpenPulse (WILLE; VAN METER; NAVEH, 2019). Além disso, ele fornece otimização automática do código para o hardware onde o software será executado, sem que o usuário precise se preocupar ou aprender sobre isso. Já a biblioteca Aqua se trata de uma série de ferramentas criadas para buscar aplicações da computação quântica no mundo real, ela é muito utilizada por especialistas nas áreas de Química, finanças e de Inteligência Artificial. A biblioteca permite que o usuário execute tarefas sem que ele precise fazer uma programação quântica específica,

deixando que o próprio Qiskit Aqua aplique o algoritmo quântico adequado. O Qiskit Ignis, por sua vez, é destinado a correções de erros e ruídos em resultados. Também fornece ferramentas para quem quer se dedicar a criação de códigos de correção de erros e de otimização de circuitos e códigos quânticos. Por fim, no Qiskit Aer, estão incluídos os simuladores e emuladores utilizados para prever o comportamento dos circuitos e algoritmos quânticos antes de enviá-los ao hardware quântico.

Para realizar simulações é necessário apenas um computador local com a biblioteca Qiskit compilada para a linguagem escolhida. Para realizar experimentos em computadores quânticos reais, é preciso se cadastrar no site da IBM(IBM, 2019a) e a partir daí será possível executar os algoritmos nos computadores fornecidos pela IBM, através de um *token* que é agregado ao Qiskit.

A. Demonstrando um Estado de Bell

Neste trabalho utilizamos a linguagem Python agregada ao Jupyter Notebook para realizar simulações com o Qiskit. Para construirmos um estado de Bell e medir suas probabilidades através do Qiskit, montamos um circuito provido de 2 qubits para gerar o estado e 2 bits clássicos para medir as probabilidades. Isso pode ser feito através das linhas de comando apresentadas na Figura 1.

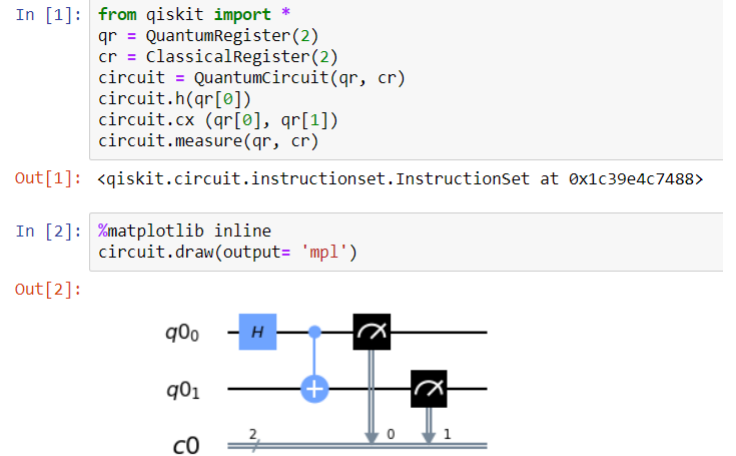


FIG. 1. Células de comandos no Jupyter para criar um Estado de Bell juntamente com o circuito lógico desenhado

Na primeira célula de comandos na Figura 1 (In [1]), importamos toda a biblioteca do Qiskit para o notebook, criamos os dois qubits (“qr = QuantumRegister(2)”), que por padrão são criados no estado $|00\rangle$, e os dois bits clássicos (“cr = ClassicalRegister(2)”) e os colocamos no circuito. Seguindo o procedimento de criação do estado de Bell $|\Phi^+\rangle$, aplicamos o portão Hadamard no primeiro qubit (“circuit.h(qr[0])”). A aplicação da matriz identidade é feita de forma automática ao chamarmos o

portão Hadamard para um sistema de dois qubits. À seguir atuamos com portão CNOT em ambos os qubits (“circuit.cx(qr[0], qr[1])”). O primeiro qubit controla o portão CNOT atuado no segundo qubit. Por fim, para verificar se a sequência de operações levou ao estado emaranhado de Bell, executamos a medição dos qubits nos bits clássicos (“circuit.measure(qr,cr”). Para ter uma visão geral da operação na segunda célula (In [2]) foi gerada uma representação do circuito.

O próximo passo foi realizar a simulação do circuito através das linhas de comando conforme Figura 2. Utilizamos para tanto o simulador da linguagem OpenQASM presente no Qiskit Aer, obtendo o comportamento do circuito através de nossa máquina local. Uma ferramenta de plotagem presente no próprio Qiskit nos retornou um histograma com as probabilidades dos possíveis estados $|00\rangle$ e $|11\rangle$. Como resultado da simulação, conforme esperado, a projeção do estado de Bell $|\Phi^+\rangle$ na base de um sistema de dois spin 1/2 retornou $\sim 50\%$ de probabilidade de encontrar o sistema na configuração $|00\rangle$ e $\sim 50\%$ de probabilidade de encontrar o sistema na configuração $|11\rangle$. Vale ressaltar, que o simulador faz uma análise probabilística e por *default* são realizadas 1024 execuções, o que justifica o desvio da probabilidade dos valores esperados, conforme a tabela II.

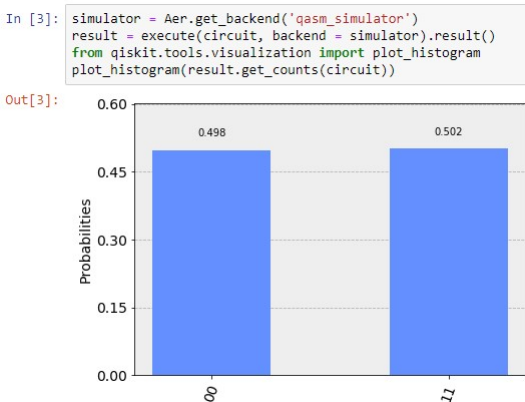


FIG. 2. Célula de comandos para simular as probabilidades do Estado de Bell, o resultado da simulação é visualizado em forma de gráfico abaixo da célula

A seguir, podemos enviar o algoritmo para ser rodado em um dos computadores quânticos da IBM. Para isso as linhas de comando necessárias foram apresentadas na Figura 3. Com o acesso garantido pelo *token* de cadastro, a tarefa foi colocada em uma fila de ordem de chegada, pois outras pessoas também estão fazendo suas execuções. Após executar, o computador enviou de volta os resultados e utilizamos novamente a ferramenta de plotagem para os analisar.

Como podemos ver no resultado na Figura 3 (Out[4]), as probabilidades calculadas para o estado $|\Phi^+\rangle$ são diferentes daquelas encontradas na Tabela II. Existem probabilidades não nulas para projeções nas configurações

$|01\rangle$ e $|10\rangle$, as quais não são esperadas por se tratar de um estado maximamente emaranhado. Esse desvio do esperado está diretamente associado ao estado de tecnologia atual que os computadores quânticos disponíveis.

A criação de qubits que preservem coerência após diversas operações ainda é um desafio gigantesco na área hardwares quânticos. Para tentar evitar a influência do meio e com isso a decoerência, os processadores quânticos são mantidos em temperaturas criogênicas e isolados em ultra-alto-vácuo, no entanto, ainda assim os qubits não são perfeitos. Para melhorar os resultados obtidos pelos computadores quânticos reais, várias ferramentas de correção de erros tem sido propostas e implementadas, mas a tecnologia ainda se encontra em fase bastante inicial.

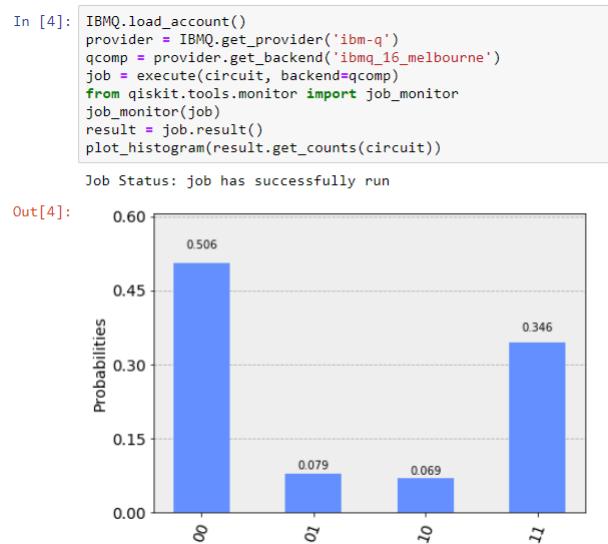


FIG. 3. Célula de comandos para executar o circuito na Nuvem, o resultado fornecido pelos computadores externos é apresentado em forma de gráfico abaixo da célula

B. Demonstrando o teletransporte quântico

Uma vez verificada a possibilidade e facilidade de utilizarmos um computador quântico para construir estados emaranhados como os estados de Bell, podemos nos atentar a uma dificuldade já mencionada na manipulação de qubits - o estado de um qubit não pode ser copiado, no entanto, pode ser teletransportado.

No teletransporte do estado de um qubit para outro, o emaranhamento do qubit original com o um qubit de apoio é necessário, formando um estado de Bell. O protocolo de emaranhamento no qual dois observadores Alice e Bob desejam trocar informações de um estado de um qubit genérico $|\psi\rangle$, foi descrito à seguir (BELLAC, 2006).

- Alice e Bob criam um par de qubits emaranhados (estado de Bell) e se separam espacialmente. Suponhamos que Alice possui o qubit q_1 e Bob o qubit q_2 ;
- Alice aplica o portão $CNOT$ em seu qubit controlado pelo qubit $|\psi\rangle$;
- Depois disso Alice aplica o portão Hadamard no qubit $|\psi\rangle$ e mede o qubit inicial q_1 e $|\psi\rangle$.
- O resultado de suas medidas é passado para Bob que, dependendo do resultado das medidas de Alice, aplica portões específicos em seu qubit q_2 . Note que a troca de informações entre Alice e Bob é clássica, uma vez que os resultados das medidas é que são compartilhados.

O portão aplicado por Bob em seu próprio qubit depende da medida de Alice. As possibilidades foram mostrada na tabela III. Após atuar com o portão correto, o estado do qubit $|\psi\rangle$ foi teletransportado para Bob.

Medida Alice	Portão Bob
00	Nenhum
01	X
10	Z
11	ZX

TABLE III. Operações a serem realizadas por Bob segundo o resultado da medida de Alice.

Assim como no caso dos estados de Bell, podemos utilizar o Qiskit e demonstrar o teletransporte quântico. Para tanto um circuito específico seguindo o algoritmo de teletransporte foi criado. A programação do circuito bem como seu diagrama podem ser vistos na Figura 4.

```
In [1]: from qiskit import *
circuit = QuantumCircuit(3, 3)
circuit.x(0)
circuit.barrier()
circuit.h(1)
circuit.cx(1,2)
circuit.cx(0,1)
circuit.h(0)
circuit.barrier()
circuit.measure([0, 1], [0, 1])
circuit.barrier()
circuit.cx(1,2)
circuit.cz(0,2)
%matplotlib inline
circuit.draw(output='mpl')
```

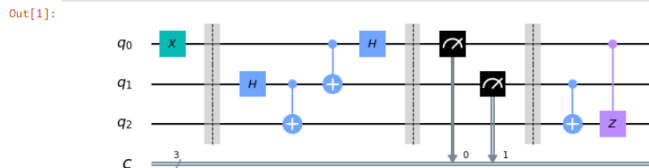


FIG. 4. Célula de comandos para um circuito para o teletransporte do estado de um qubit para outro, o desenho do circuito é mostrado logo abaixo da célula

O circuito é executado na seguinte ordem: primeiro um portão “X” foi aplicado no primeiro qubit, esse portão altera seu estado de $|0\rangle$ para $|1\rangle$. A seguir, uma barreira foi adicionada para nos dar a ideia visual que a partir dali o estado do primeiro qubit é $|1\rangle$. Logo após, um portão Hadamard atua no segundo qubit seguido de um portão CNOT no segundo qubit controlado pelo terceiro qubit. A partir daí esses dois qubits estão emaranhados, formando um estado de Bell. Então, atuamos um portão CNOT no primeiro qubit controlado pelo segundo qubit e em seguida um portão Hadamard. Após todas essas operações, deverá haver apenas quatro estados possíveis de encontrarmos o conjunto de três qubits $\{100, 101, 110, 111\}$ (ver Apêndice D), onde o primeiro valor representa a medida do estado teletransportado e, como esperado deve ser 1.

Uma nova barreira é adicionada, para representar as medidas e a transferência de informação clássica entre os observadores. Após a barreira, efetuamos medições nos dois primeiros qubits e, devido ao emaranhamento, isso força o terceiro qubit a assumir um dos quatro possíveis estados. A última parte do circuito trata da correção do estado do terceiro qubit, ambos os portões (nas linhas de código são os portões “cx” e “cz”) utilizam as informações obtidas dos resultados das medições dos dois primeiros qubits e realizam as transformações necessárias para se recuperar o estado original que queríamos teletransportar.

```
In [2]: circuit.measure(2, 2)
simulator = Aer.get_backend('qasm_simulator')
result = execute(circuit, backend = simulator, shots = 1024).result()
counts = result.get_counts()
from qiskit.tools.visualization import plot_histogram
plot_histogram(counts)
```

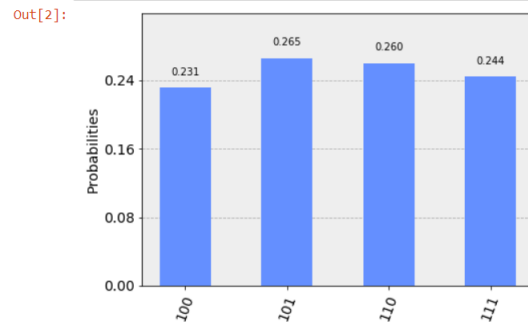


FIG. 5. Probabilidades do estado teletransportado juntamente com a célula de comandos para se efetuar as medidas

Confirmada a estrutura de nosso código, podemos executar no simulador seguindo a mesma ideia do tópico anterior. O resultado da simulação foi apresentado na Figura 5. No código, medimos o terceiro qubit no terceiro bit clássico. No eixo X do histograma, os números representam os bits clássicos em ordem inversa, isto é, o primeiro número representa o terceiro bit clássico, o segundo número o segundo bit clássico e o terceiro número o primeiro bit clássico. Com isso podemos perceber que somente estados em que o terceiro bit

clássico possui projeção do estado $|1\rangle$ foram obtidos. Ou seja, o teletransporte do estado do primeiro qubit pra o terceiro ocorreu com sucesso.

Para executarmos o código no computador quântico, também seguimos o mesmo padrão do exemplo do estado de Bell. Os resultados da simulação no hardware quântico foram apresentados na Figura 6. Percebemos que a maioria dos resultados está dentro do esperado, com o terceiro qubit no estado $|1\rangle$. Porém, novamente, os resultados vindos do computador quântico possuem alguns erros, nesse caso são estados em que o terceiro qubit está em $|0\rangle$, também são devido a erros nos portões e no estado atual da tecnologia disponível.

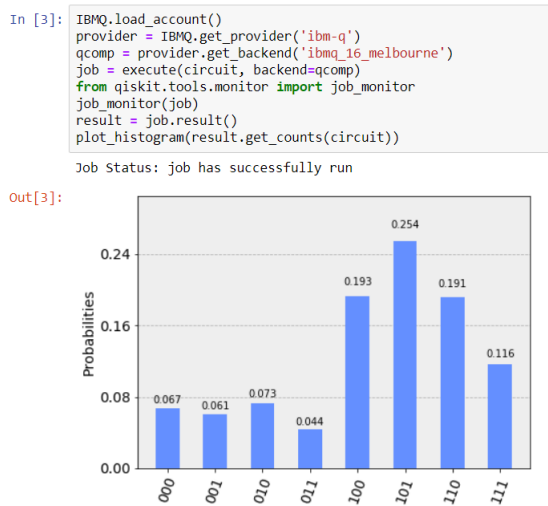


FIG. 6. Probabilidades obtidas no computador quântico

Vale ainda ressaltar as possíveis configuração para um sistema de qubits. No caso de dois estados, como no exemplo de criação do estado de Bell, um total de $2^2 = 4$ configurações foi esperada. Já no caso de um sistema de três qubits, um total de $2^3 = 8$ configurações podem ser obtidas. Nesse sentido, a quantidade de possíveis configurações escala como 2^n , onde n é a quantidade de qubits utilizada. Assim como no caso da supremacia quântica (ZALCMAN et al., 2019), uma quantidade relativamente pequena de qubits permite uma quantidade de configurações extremamente grande, naquele caso 2^{53} .

CONCLUSÃO

Mostramos no presente trabalho o potencial de uso do Qiskit para demonstração de conceitos da Mecânica Quântica que podem estar presentes num curso de ensino superior. É fato que a natureza probabilística da Mecânica Quântica traz grandes barreiras durante o aprendizado do aluno (BAO; REDISH, 2002) e que até mesmo a inserção de assuntos acerca do tema tem requerido novos tipos de abordagem

e enfoque nos tratamentos matemáticos (PANTOJA; MOREIRA; HERSCOVITZ, 2011). Sendo a computação quântica uma aplicação da abrangente Mecânica Quântica, acreditamos que pode-se trilhar um caminho didático capaz de afeiçoar o aprendizado dos alunos e proporcionar a eles quebras de paradigmas e superação de concepções alternativas desse universo não-determinístico que normalmente não é palatável ao estudante.

Do ponto de vista epistemológico quanto a mecânica quântica, é fato que uma das maiores insatisfações na sua visão é a dificuldade em discernir o que ela diz sobre o "mundo como ele realmente é", onde por muitas vezes nos parece que ela é construída apenas por pensamentos e aparatos experimentais do que fomentada pela própria natureza (PATY, 2011). Muitas vezes o formalismo matemático utilizado para caracterizar conceitos como energia, massa ou campo não parece ser suficiente para dar uma visão completa sobre o mundo, havendo uma variedade de teorias e interpretações atualmente que fazem as mesmas previsões na mecânica quântica para diferentes dados experimentais (NOVAES; STUDART, 2016). O aluno assim, fica livre para escolher àquela que melhor responde suas questões pessoais e subjetivas onde a diferença nelas trata-se apenas de interpretação.

Deste modo, compreender os fundamentos da computação quântica e aplicar os conceitos por trás deles utilizando o Qiskit, pode beneficiar o entendimento não somente dos conceitos abordados aqui, mas de toda uma extensão que abrange a formulação e funcionamento de computadores quânticos e as variadas interpretações para a mecânica quântica.

AGRADECIMENTOS

ATB agradece o fomento do Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), fundamentais no desenvolvimento do presente trabalho.

REFERÊNCIAS

- BAO, Lei; REDISH, Edward F. Understanding probabilistic interpretations of physical systems: A prerequisite to learning quantum physics. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 70, n. 3, p. 210–217, 2002.
- BELL, John S. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, APS, v. 1, n. 3, p. 195, 1964.
- BELLAC, M.L. *A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- BOHM, David. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. I. *Physical review*, APS, v. 85, n. 2, p. 166, 1952.

BOUWMEESTER, Dirk; ZEILINGER, Anton. **The physics of quantum information: basic concepts**. [S.l.]: Springer, 2000. P. 1–14.

DIVINCENZO, David P. Quantum computation. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 270, n. 5234, p. 255–261, 1995.

EINSTEIN, Albert; PODOLSKY, Boris; ROSEN, Nathan. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical review**, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.

EISBERG, Robert; RESNICK, Robert. **Física Quântica**. [S.l.]: Elsevier, 1979.

GRIFFITHS, David Jeffrey; FREITAS, Lara. **Mecânica quântica**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2011.

IBM. **IBM Q Experience**. 2019. Disponível em: <https://quantum-computing.ibm.com/login>. Acesso em: 28 nov. 2019.

_____. **Qiskit Documentation**. 2019. Disponível em: <https://qiskit.org/documentation>. Acesso em: 28 nov. 2019.

_____. **Qiskit Youtube Channel**. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/Qiskit>. Acesso em: 29 nov. 2019.

MACCONE, Lorenzo. A simple proof of Bell’s inequality. **American Journal of Physics**, AAPT, v. 81, n. 11, p. 854–859, 2013.

NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac L. **Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition**. 10th. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2011. ISBN 1107002176, 9781107002173.

NOVAES, Marcel; STUDART, Nelson. **tMecânica quântica básica**. [S.l.: s.n.], 2016.

PANTOJA, Glauco Cohen Ferreira; MOREIRA, Marco Antonio; HERSCOVITZ, Victoria Elnecape. Uma revisão da literatura sobre a pesquisa em ensino de Mecânica Quântica no período de 1999 a 2009. **Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia. Ponta Grossa. Vol. 4, no. 3 (set./dez. 2011), p. 1-34**, 2011.

PATY, Michel. “Construção do objeto” e objetividade na Física Quântica. **Teoria Quântica: estudos históricos e implicações culturais**, p. 155, 2011.

SAKURAI, Jun John; NAPOLITANO, Jim et al. **Modern quantum mechanics**. [S.l.]: Pearson Harlow, 2014. v. 185.

SHANKAR, Ramamurti. **Principles of quantum mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

WILLE, Robert; VAN METER, Rod; NAVEH, Yehuda. IBM’s Qiskit Tool Chain: Working with and Developing for Real Quantum Computers. In: IEEE. 2019 Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition (DATE). [S.l.: s.n.], 2019. P. 1234–1240.

ZALCMAN, Adam et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor, 2019.

Appendix A: Generalização desigualdade de Bell

Seja σ_A o resultado obtido pelo primeiro observador e σ_B o resultado obtido pelo segundo observador ao medirem as componentes do spin através de dois vetores unitários arbitrários \mathbf{a} e \mathbf{b} , assim os valores possíveis para ambos, em unidades e $\hbar/2$ serão

$$\sigma_A = \pm 1 \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_B = \pm 1, \quad (\text{A.2})$$

logo, o valor esperado para o produto dos spins será

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle = -1 \quad (\text{A.3})$$

para orientações paralelas de \mathbf{a} e \mathbf{b} e

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle = +1 \quad (\text{A.4})$$

para orientações anti-paralelas de \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Para orientações arbitrárias, temos das predições da mecânica quântica que a função de onda do singlete em um primeiro momento, antes da medição do primeiro observador, será

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \quad (\text{A.5})$$

e após o primeiro observador efetuar sua medida e encontrar, por exemplo, *spin up*, teremos

$$|b\rangle = |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle, \quad (\text{A.6})$$

que nos diz que, se o segundo observador efetuar sua medida na mesma direção que o primeiro, há certeza que encontrará *spin down*. Porém, se o observador decidir efetuar sua medida em outra direção \mathbf{b} arbitrária, teremos

$$|b\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi/2}|\downarrow\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi/2}|\uparrow\rangle, \quad (\text{A.7})$$

onde θ e ϕ são as coordenadas polares de \mathbf{b} , isto é, \mathbf{b} é pode ser definido por um conjunto de ângulos que dão sua orientação de modo que $\mathbf{b}(\theta, \phi)$. Então, a probabilidade do segundo observador medir *spin up* será

$$P(+\mathbf{b}) = |\langle b|\downarrow\rangle|^2 \quad (\text{A.8})$$

pois o estado após a medição do primeiro observador é (A.6)

$$P(+\mathbf{b}) = |\langle b|\downarrow\rangle|^2 = |\langle b\rangle^\dagger|\downarrow\rangle|^2 \quad (\text{A.9})$$

temos que $|\langle b\rangle^\dagger|\downarrow\rangle$ é

$$|\langle b\rangle^\dagger|\downarrow\rangle = \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi/2}\langle\downarrow| + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi/2}\langle\uparrow| \right) |\downarrow\rangle \quad (\text{A.10})$$

$$= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi/2}\langle\downarrow|\downarrow\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi/2}\langle\uparrow|\downarrow\rangle \quad (\text{A.11})$$

$$= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi/2} \quad (\text{A.12})$$

portanto

$$|\langle b|\downarrow\rangle|^2 = \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi/2} \right|^2 \quad (\text{A.13})$$

$$|\langle b|\downarrow\rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (\text{A.14})$$

Assim, a probabilidade será

$$P(+\mathbf{b}) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{A.15})$$

e a probabilidade de o segundo observador medir *spin down* será simplesmente

$$P(-\mathbf{b}) = 1 - P(+\mathbf{b}) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (\text{A.16})$$

Logo, o valor médio esperado de $\langle \sigma_A \sigma_B \rangle$ para orientações arbitrárias terá a forma

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{A.17})$$

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle = -\cos(\theta) \quad (\text{A.18})$$

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{A.19})$$

Essa é a previsão da mecânica quântica, o que é concordante com (A.3) e (A.4). Bell então contrastou esse resultado com a teoria de variáveis ocultas proposta por Einstein, Podolsky e Rosen através do seguinte argumento.

Suponhamos que o estado do sistema seja determinado por uma ou mais variáveis ocultas λ , de modo que σ_A e σ_B sejam funções não somente dos vetores unitários mas também dessa variável λ , $\sigma_i(\lambda, \mathbf{v})$ e, por conservação do momento angular, teremos

$$\sigma_A(\lambda, \mathbf{v}) = -\sigma_B(\lambda, \mathbf{v}) = \pm 1. \quad (\text{A.20})$$

Calculamos então o valor esperado $\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_\lambda$ de acordo com as probabilidades clássicas, que leva a

$$\langle \sigma_A(\mathbf{a}) \sigma_B(\mathbf{b}) \rangle_\lambda = \int \rho(\lambda) \sigma_A(\lambda, \mathbf{a}) \sigma_B(\lambda, \mathbf{b}) d\lambda, \quad (\text{A.21})$$

onde $\rho(\lambda)$ se trata da densidade de probabilidade para essa variável oculta. Utilizando (A.20) temos

$$\langle \sigma_A(\mathbf{a}) \sigma_B(\mathbf{b}) \rangle_\lambda = - \int \rho(\lambda) \sigma_A(\lambda, \mathbf{a}) \sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) d\lambda. \quad (\text{A.22})$$

Seja \mathbf{c} um vetor unitário qualquer pelo qual um observador pode efetuar suas medições. Podemos escrever a relação

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_A(\mathbf{a}) \sigma_B(\mathbf{b}) \rangle_\lambda - \langle \sigma_A(\mathbf{a}) \sigma_B(\mathbf{c}) \rangle_\lambda \\ &= - \int \rho(\lambda) \sigma_A(\lambda, \mathbf{a}) (\sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) - \sigma_A(\lambda, \mathbf{c})) d\lambda. \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

Porém, de (A.2), temos que $(\sigma_A(\lambda, \mathbf{b}))^2 = 1$, de forma que podemos escrever

$$= - \int \rho(\lambda) \sigma_A(\lambda, \mathbf{a}) (\sigma_A(\lambda, \mathbf{b}))^2 (\sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) - \sigma_A(\lambda, \mathbf{c})) d\lambda \quad (\text{A.24})$$

$$= - \int \rho(\lambda) \sigma_A(\lambda, \mathbf{a}) \sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) (\sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) - \sigma_A(\lambda, \mathbf{c})) d\lambda \quad (\text{A.25})$$

$$= - \int \rho(\lambda) \sigma_A(\lambda, \mathbf{a}) \sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) (1 - (\sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) \sigma_A(\lambda, \mathbf{c}))) d\lambda. \quad (\text{A.26})$$

Mas como $-1 \leq \sigma_A(\lambda, \mathbf{a}) \sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) \leq 1$ devido a (A.20) e $\rho(\lambda)(1 - (\sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) \sigma_A(\lambda, \mathbf{c})))$ é não-negativo, podemos superestimar o valor de (A.26) escrevendo

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_A(\mathbf{a}) \sigma_B(\mathbf{b}) \rangle_\lambda - \langle \sigma_A(\mathbf{a}) \sigma_B(\mathbf{c}) \rangle_\lambda \\ & \leq \int \rho(\lambda) (1 - (\sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) \sigma_A(\lambda, \mathbf{c}))) d\lambda \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

$$\leq \int \rho(\lambda) d\lambda - \int \rho(\lambda) \sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) \sigma_A(\lambda, \mathbf{c}) d\lambda \quad (\text{A.28})$$

$$\leq 1 + \int \rho(\lambda) \sigma_A(\lambda, \mathbf{b}) \sigma_B(\lambda, \mathbf{c}) d\lambda \quad (\text{A.29})$$

$$|\langle \sigma_A(\mathbf{a}) \sigma_B(\mathbf{b}) \rangle_\lambda - \langle \sigma_A(\mathbf{a}) \sigma_B(\mathbf{c}) \rangle_\lambda| \leq 1 + \langle \sigma_A(\mathbf{b}) \sigma_B(\mathbf{c}) \rangle_\lambda \quad (\text{A.30})$$

que é a desigualdade encontrada por Bell em seu trabalho, e que vale para qualquer teoria de variável oculta visto que não propusemos nenhum número de variáveis nem a função tomada por $\rho(\lambda)$.

Se compararmos este resultado com (A.19) teremos a relação

$$|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})| \leq 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \quad (\text{A.31})$$

Devemos então verificar a validade dessa afirmação para comprovarmos se há ou não variáveis ocultas no sistema. Podemos fazer isso impondo alguma condição arbitrária nos vetores unitários, como por exemplo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \sin \psi + \mathbf{b} \cos \psi \quad (\text{A.33})$$

que é simplesmente orientarmos os versores como na imagem:

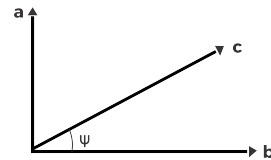


FIG. 7. Orientação dos versores

de modo que (A.31) se torna

$$|\sin \psi| \leq 1 - \cos \psi \quad (\text{A.34})$$

o que não é válido, como podemos observar com uma simples plotagem das funções, conforme mostra a figura 8.

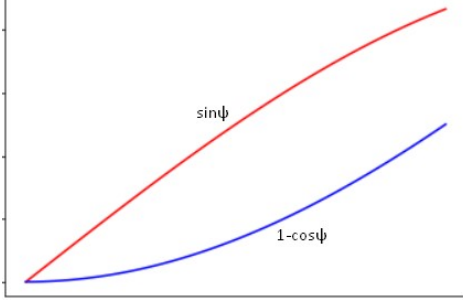


FIG. 8. Comparação entre as funções

Podemos concluir portanto, que a Mecânica Quântica é incompatível com a teoria de variáveis ocultas.

Appendix B: Princípio de Não-Clonagem

Suponha que haja um operador O qualquer que seja capaz de copiar dois estados ortogonais $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ em um estado qualquer $|0\rangle$, de modo que

$$(O|\Psi\rangle) \otimes |0\rangle = |\Psi\Psi\rangle \quad (\text{B.1})$$

$$(O|\Phi\rangle) \otimes |0\rangle = |\Phi\Phi\rangle. \quad (\text{B.2})$$

Então, pela linearidade da mecânica quântica temos

$$\begin{aligned} O(a|\Psi\rangle + b|\Phi\rangle) \otimes |0\rangle &= (aO|\Psi\rangle) \otimes |0\rangle + b(O|\Phi\rangle) \otimes |0\rangle \\ &= a|\Psi\Psi\rangle + b|\Phi\Phi\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

No entanto, se O é capaz também de clonar estados arbitrários, se segue que ele deveria retornar

$$O(a|\Psi\rangle + b|\Phi\rangle) \otimes |0\rangle = (a|\Psi\rangle + b|\Phi\rangle)(a|\Psi\rangle + b|\Phi\rangle) \quad (\text{B.4})$$

$$= a^2|\Psi\Psi\rangle + b^2|\Phi\Phi\rangle + ab|\Psi\Phi\rangle + ba|\Phi\Psi\rangle, \quad (\text{B.5})$$

o que é diferente do primeiro resultado da equação C.3.

Desse modo, não é possível a existência de um operador que copie o estado de um componente individual de sistema de estados quânticos.

Appendix C: Projeções dos Estados de Bell

Os resultados mostrados na Tabela II podem ser obtidos através das projeções dos estados de Bell na base de estados de dois spins $\{|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle\}$, conforme mostrado nas sessões à seguir.

1. Probabilidades para o estado de Bell $|\Phi^-\rangle$

$$|\langle 00|\Phi^-\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{1}{2}$$

$$|\langle 11|\Phi^-\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{1}{2}$$

$$|\langle 10|\Phi^-\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 0$$

$$|\langle 01|\Phi^-\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 0$$

2. Probabilidades para o estado de Bell $|\Psi^+\rangle$

$$|\langle 00|\Psi^+\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = 0$$

$$|\langle 11|\Psi^+\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = 0$$

$$|\langle 10|\Psi^+\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{1}{2}$$

$$|\langle 01|\Psi^+\rangle|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{1}{2}$$

3. Probabilidades para o estado de Bell $|\Psi^-\rangle$

$$\begin{aligned}
|\langle 00|\Psi^-\rangle|^2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^2 = 0 \\
|\langle 11|\Psi^-\rangle|^2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^2 = 0 \\
|\langle 10|\Psi^-\rangle|^2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{1}{2} \\
|\langle 01|\Psi^-\rangle|^2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Appendix D: Teletransporte

Descreveremos o teletransporte na base de 3 qubits onde os estados possíveis serão $|000\rangle; |001\rangle; |010\rangle; |011\rangle; |100\rangle; |101\rangle; |110\rangle$ e $|111\rangle$, que podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
|000\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\
|000\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
|000\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (D.1)
\end{aligned}$$

Para o estado $|001\rangle$:

$$\begin{aligned}
|001\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \\
|001\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
|001\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (D.2)
\end{aligned}$$

Para o estado $|010\rangle$:

$$\begin{aligned}
|010\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \\
|010\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$|010\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (D.3)$$

Para o estado $|011\rangle$:

$$\begin{aligned}
|011\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \\
|011\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
|011\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (D.4)
\end{aligned}$$

Para o estado $|100\rangle$:

$$\begin{aligned}
|100\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\
|100\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
|100\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (D.5)
\end{aligned}$$

para o estado $|101\rangle$:

$$\begin{aligned}
|101\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \\
|101\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
|101\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (D.6)
\end{aligned}$$

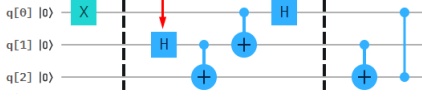
Para o estado $|110\rangle$:

$$\begin{aligned}
|110\rangle &= |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \\
|110\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
|110\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (D.7)
\end{aligned}$$

Para o estado $|111\rangle$:

$$\begin{aligned}
|111\rangle &= |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \\
|111\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
|111\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T. \quad (D.8)
\end{aligned}$$

De acordo com a figura 4 o estado para teletransporte é $|100\rangle$ dada a atuação do operador X no primeiro qubit. Para o algoritmo de teletransporte, primeiro atuamos o operador Hadamard no segundo qubit. Para tanto, primeiro operamos tensores na ordem que os portões estão no circuito, isto é, uma matriz identidade no



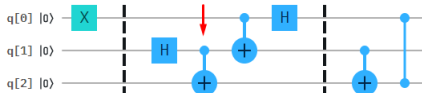
primeiro qubit, o operador Hadamard no segundo e outra identidade no terceiro $\mathbb{1} \otimes H \otimes \mathbb{1}$ atuando no estado inicial:

$$\begin{aligned}
 & (\mathbb{1} \otimes H \otimes \mathbb{1}) |100\rangle = \\
 & \left(\mathbb{1} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) |100\rangle = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)^T, \quad (\text{D.9})
 \end{aligned}$$

o que também podemos escrever em termos dos estados da base de três qubits como

$$\begin{aligned}
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} [|100\rangle + |110\rangle].
 \end{aligned}$$

Logo após, um operador CNOT entre o segundo e terceiro qubit atua nesse novo estado

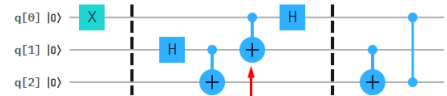


$$\begin{aligned}
 & (\mathbb{1} \otimes CNOT) \frac{1}{\sqrt{2}} [|100\rangle + |110\rangle] = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \quad (\text{D.10})
 \end{aligned}$$

que podemos escrever como

$$\begin{aligned}
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} [|100\rangle + |111\rangle].
 \end{aligned}$$

Em seguida, temos a atuação de um CNOT entre o primeiro e segundo qubit atuando no estado



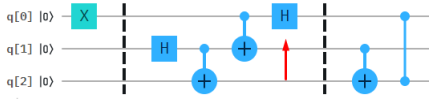
$$\begin{aligned}
 & (CNOT \otimes \mathbb{1}) \frac{1}{\sqrt{2}} [|100\rangle + |111\rangle] = \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)^T, \quad (\text{D.11})
 \end{aligned}$$

que é o estado

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[|101\rangle + |110\rangle].$$

Temos então a atuação do operador Hadamard no primeiro qubit



$$(H \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \frac{1}{\sqrt{2}}[|101\rangle + |110\rangle] =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} \right] \frac{1}{\sqrt{2}}[|101\rangle + |110\rangle]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

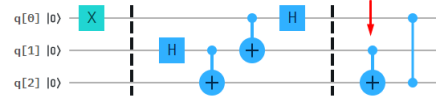
$$= \frac{1}{2} (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0)^T, \quad (\text{D.12})$$

que podemos escrever como

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2}[|010\rangle + |001\rangle - |101\rangle - |110\rangle].$$

Na sequência novamente um operador CNOT atua entre o segundo e terceiro qubit



$$(\mathbb{1} \otimes CNOT) \frac{1}{2}[|010\rangle + |001\rangle - |101\rangle - |110\rangle]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

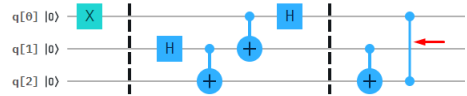
$$= \frac{1}{2} (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1)^T, \quad (\text{D.13})$$

que é

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}[|001\rangle + |011\rangle - |101\rangle - |111\rangle].$$

E por fim, o operador Cz no terceiro qubit controlado pelo primeiro qubit, o que nos leva a



$$(cz^{13}) \frac{1}{2}[|001\rangle + |011\rangle - |101\rangle - |111\rangle] =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que são os quatro estados finais:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [|001\rangle + |101\rangle + |011\rangle + |111\rangle],
 \end{aligned}$$

onde o terceiro qubit sempre está no estado $|1\rangle$ para qualquer configuração dos qubits anteriores, tendo então o estado do primeiro qubit sido teletransportado para o terceiro.