O formalismo de Hamilton-Ostrogradski aplicado ao oscilador de Pais-Uhlenbeck

Ivan Francisco de Souza*
Departamento de Física, Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, Minas Gerais

Cássius Anderson Miquele de Melo†
Instituto de Ciêcia e Tecnologia, Universidade Federal de Alfenas,
BR 267 - Rodovia José Aurélio Vilela, nº 11.999,
Km 533 37715-400 Cidade Universitária, Poços de Caldas, Minas Gerais, Brasil.
(Dated: 8 de setembro de 2023)

Resumo: É nótorio que a natureza é descrita por leis que só envolvem derivadas de primeira e segunda ordem como: as leis de Newton, as equações de Maxwell e a equação de Schrodinger. Essa questão motivou vários físicos a buscarem por situações que são descritas por derivadas de ordem mais altas que segunda ordem. O físico Ostrogradski foi o primeiro a buscar uma formulação das equações de derivadas de ordem superior, ele ampliou as equações de Hamilton considerando lagrangianas que dependem derivadas de ordem superior das coordenadas generalizadas. A formulação de Hamilton-Ostrogradski serviu de base para estudos posteriores com derivadas de ordem superior. Entretando, o formalismo de Hamilton-Ostrogradski é ignorado em diversas literaturas e cursos de física avançada. O que nos motivou a fazer uma breve discussão acerca do formalismo de Hamilton-Ostrogradski e aplicá-lo no modelo teórico do oscilador clássico de Pais-Uhlenbeck. Esperamos que a abordagem apresentada nesse trabalho possa servir de base e referências para estudos posteriores e apresentados para estudantes que nunca tenham deparado com esse tema em cursos de mecânica avançada.

Abstract: It is notorious that nature is described by laws that only involve first and second order derivatives, such as: Newton's laws, Maxwell's equations and Schrodinger's equation. This question has motivated many physicists to look for situations that are described by higher-than-second-order derivatives. Physicist Ostrogradski was the first to seek a formulation of higher order derivative equations, he extended Hamilton's equations by considering Lagrangians that depend on higher order derivatives of generalized coordinates. The Hamilton-Ostrogradski formulation served as the basis for further studies with higher order derivatives. However, the Hamilton-Ostrogradski formalism is ignored in many advanced physics literature and courses. This motivated us to make a brief discussion about the Hamilton-Ostrogradski formalism and apply it to the theoretical model of the classical Pais-Uhlenbeck oscillator. We hope that the approach presented in this work can serve as a basis and references for further studies and presented to students who have never encountered this topic in advanced mechanics courses.

I. INTRODUÇÃO

É notório que várias equações da física só aparecem derivadas de primeira e segunda ordem, como por exemplo as leis de Newton, as equações de Maxwell, a equação de Schrodinger e entre outras. Alguns físicos questionam o porquê das leis físicas não dependem de derivadas de ordem maior que dois. Essa é uma questão que tem motivado estudiosos a encontrarem sistemas físicos que possam depender de derivadas mais altas.

Existem modelos teóricos que envolvem derivadas de ordem superior, geralmente estão associadas alguma expansão pertubativa, um dos modelos mais simples é o oscilador de Pais-Uhlenbeck [1]. Além disso, há um interesse prático das derivadas de ordem superior para a gravitação quântica e teoria de campos, pois tais derivadas surgem naturalmente como correções efetivas candidatas a teorias fundamentais, como a teoria das cordas [2]. Contudo, o arcabouço experimental que a física possui ainda não é o suficiente para testar a existência de taxas temporais maiores na natureza, logo o que se sabe até o momento sobre derivadas de ordem superior está limitado à física teórica.

Para descrever sistemas físicos com derivadas de ordem superior é necessário equações que envolvem derivadas de qualquer ordem. A primeira pessoa a formular as equações de movimento de ordem superior foi o físico Mikhail Vassiliovich Ostrogradski [3]. Em 1850, o físico Ostrogradski obteve as equações de Hamilton quando se considera lagrangianas que dependem de derivadas temporais de ordem superior das coordendas generalizadas [3].

Equações de movimento de derivadas de ordem superior é um tema que é ignorado em diversas literaturas e cursos de mecânica avançada. Nas últimas décadas, esse tema vem sendo muito estudado, pois há estudiosos que acreditam que novas descobertas nessa área poderiam ampliar nosso entendimento da natureza, porém ainda

* ivan.souza@sou.unifal-mg.edu.br; https://orcid.org/0000-0002-1679-0057
† cassius@unifal-mg.edu.br; https://orcid.org/0000-0001-5096-1297

é um tema desconhecido por vários estudantes de física. Pensando nisso, visamos nesse trabalho trazer uma breve apresentação acerca de equações de movimento de ordem superior, e esperamos que possa servir de motivação e base para estudantes que queiram se aprofundar e consultar outras referências que abarcam esse tema.

Na seção II deste trabalho, é apresentado as equações de Lagrange quando se considera uma lagrangiana que depende de derivada temporal de ordem n-ésima das coordenadas generalizadas. Na seção III, é apresentada a passagem do formalismo lagrangiano para o formalismo hamiltoniano de ordem superior. Como uma aplicação de equações de ordem superior apresentamos como exemplo o oscilador de Pais-Uhlenbeck na seção V, cuja a lagrangiana depende de derivada de até segunda ordem e gera equação de movimento de quarta ordem. Não é algo familiar energias que dependem de derivadas segunda, o que num primeiro estudo pode ser uma dificuldade entender e visualizar o oscilador de Pais-Uhlenbeck, por conta disso, apresentamos na seção IV o modelo de dois osciladores acoplados, que é mais fácil de visualizar e que é equivalente ao oscilador de Pais-Uhlenbeck.

II. EQUAÇÃO DE LAGRANGE DE ORDEM SUPERIOR

Sabe-se que as equações de movimento dos sistemas dinâmicos podem ser obtidas pelas leis de Newton, porém não é simples generalizar essas leis para derivadas de ordem maior que dois já que elas estão baseadas em fatos empíricos. Por outro lado, as equações de Lagrange e as equações de Hamilton podem ser obtidas a partir do princípio da mínima ação, o que torna possível impor algumas condições e realizar procedimentos matemáticos para obter equações de ordem superior.

Na literatura [4–7] e nos cursos de mecânica avançada, geralmente só é apresentado a formulação lagrangiana considerando lagrangianas que dependem somente de derivadas de até primeira ordem, a lagrangiana comum é

$$L(q, \dot{q}, t) \tag{1}$$

onde q é a coordenada generalizada, $\dot{q} = dq/dt$ é a velocidade generalizada (derivada de primeira ordem) e t é o tempo.

A equação de Lagrange para esse tipo de lagrangiana é

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2}$$

observe que essa é uma equação que só envolve derivada de até segunda ordem, basta explicitar o segundo termo da Eq.(2). Essa equação pode ser útil para a grande maioria dos sistemas físicos, mas pensando em sistemas físicos que podem depender de derivadas de ordem maior que dois, é necessário generalizar as equações de Lagrange.

Indo mais além, considerando uma lagrangiana que também possa depender de $\ddot{q}$, que é a aceleração generalizada, ao impor algumas condições e com alguns procedimentos matemáticos (Cf. Apêndice A), obtém a seguinte equação de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0 \tag{3}$$

Note que agora é uma equação que pode aparecer derivadas de até quarta ordem. Com as condições e procedimentos matemáticos adequados para lagrangianas que dependem de derivadas de ordem ainda maiores, é possível notar um padrão nos termos das equações, é um exercício que fica a cargo do leitor para conferir como fica as equações de Lagrange considerando lagrangianas que dependem de derivadas ainda maiores que dois. Com isso, é possível generalizar as equações de Lagrange que depende da derivada de ordem n-ésima, eis a equação de Lagrange de ordem superior é

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{d}^{(k)}}{\mathrm{d}t^{(k)}}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}\right) = 0 \tag{4}$$

Escrevemos o índice que indica a ordem da derivada entre "( )" para não confundir com o expoente, por exemplo $(-1)^k$ quer dizer que é -1 elevado a k-ésima potência, enquanto $q^{(k)}$ é a derivada de ordem k-ésima da coordenada generalizada. Para $n = 1$ a equação de ordem superior se reduz à Eq.(1).

Se o sistema possuir N graus de liberdade haverá N coordenadas generalizadas e N equações de Lagrange de ordem superior

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{d}^{(k)}}{\mathrm{d}t^{(k)}}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}}\right) = 0 \quad (i = 1, ..., N) \tag{5}$$

A Eq.(5) é uma equação que pode aparecer derivadas de até ordem $2n$, os $q_i^{(2n)}$ poderão ser isolados, se a matriz hessiana for regular, ou seja, seu determinante for não-nulo. Observe a Eq.(6)

$$W_{ij} q_j^{(2n)} = F_i(q_i, ..., q_i^{(2n-1)}, t) \quad (i, j = 1, ..., N) \tag{6}$$

A função $F_i(q_i, ..., q_i^{(2n-1)}, t)$ engloba todos os termos da equação de Lagrange que são derivadas que estão abaixo do termo de maior ordem. E W_{ij} é o elemento que está na linha i e coluna j da matriz hessiana $\mathbf{W}$, que também pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{W} \rightarrow W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial q_i^{(n)} \partial q_j^{(n)}} \quad (i, j = 1, ..., N) \tag{7}$$

III. EQUAÇÕES DE HAMILTON DE ORDEM SUPERIOR

Nesta seção faremos uma ressalva das equações de Hamilton, como geralmente é apresentada, considerando a lagrangiana da Eq.(1). Depois consideraremos lagrangiana com derivada de ordem dois para depois apresentar a formulação geral das equações de Hamilton.

Como foi visto na seção anterior, a Eq.(2) possui derivadas somente até segunda ordem, o que resolve vários sistemas físicos. A vantagem de passar do formalismo lagrangiano para o formalismo hamiltoniano é que as equações de Hamilton são de primeira ordem. Em compensação, a quantidade de variáveis e equações é duplicada, já que é introduzida os momentos generalizados, eis a definição de momento

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, ..., N) \tag{8}$$

Para construir a função hamiltoniana, é usado a transformação de Legendre

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{9}$$

Novamente a condição que a matriz hessiana seja regular deve ser satisfeita para que seja possível inverter as N equações do tipo da Eq.(8) e escrever os $\dot{q}_s$ como funções dos q_s, p_s e t. Com isso, a formulação hamiltoniana possui um conjunto de $2N$ equações que podem ser resolvidas para determinar as $2N$ variáveis independentes. As equações de Hamilton usuais são:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} . \tag{10}$$

Quando consideramos lagrangianas de ordem superior, a transformação de Legendre como é apresentada na Eq.(9) não gera as equações de Hamilton correspondentes para ordem superior [8]. A passagem de formalismos quando se considera derivadas mais altas é um pouco mais sutil, pois novas coordenadas e momentos devem ser definidos. Veremos que tais definições irão implicar em vínculos que são inevitáveis quando se considera lagrangianas que dependam de derivadas de ordem maior que um, por conta disso, as variáveis não serão todas mutuamente independentes. Devido a isso, uma transformação de Legendre mais geral é necessária para equações de ordem superior. O primeiro a obter a formulação hamiltoniana para lagrangianas de ordem superior foi o Ostrogradski [3], essa formulação ficou conhecida como formalismo de Hamilton-Ostrogradski.

Faremos uma abordagem mais simples do formalismo de Hamilton-Ostrogradski considerando que o sistema só possui um grau de liberdade e a sua lagrangiana não depende explicitamente do tempo. Pensando no caso da lagrangiana do tipo $L(q, q^{(1)}, q^{(2)})$, vimos que a equação de Lagrange tem a forma da Eq.(3). A definição que Ostrogradski usou para as variáveis canônicas são

$$\begin{aligned} Q_1 &= q, \\ Q_2 &= q^{(1)} \\ P_1 &= \frac{\partial L}{\partial q^{(1)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)}}\right) \\ P_2 &= \frac{\partial L}{\partial q^{(2)}} \end{aligned} \tag{11}$$

Onde Q_1 e Q_2 são novas coordenadas e o P_1 e P_2 são os novos momentos. Observe que pela definição de momento, surgem vínculos como por exemplo

$$P_1 + \dot{P}_2 - \frac{\partial L}{\partial q^{(1)}} = 0 \tag{12}$$

Para obter as equações canônicas é necessário que a matriz hessiana seja regular para que a derivada de maior ordem possa ser escrita em termos das novas variáveis, nesse caso $q^{(2)}$ como função de Q_1, Q_2 e P_2, assim escrever a hamiltoniana para esse caso (Cf.Apêndice B). Caso contrário, é necessário usar o método de Dirac-Bergmann para lidar com os esses vínculos que surgem a partir dessas definições. Não iremos abordar o método de Dirac-Bergmann aqui, ao invés disso, iremos considerar casos em que a matriz hessiana é regular. Feito alguns procedimentos matemáticos (Cf.Apêndice B), obtém se a seguinte transformação de Legendre

$$\begin{aligned} H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = P_1\dot{Q}_1 + P_2 q^{(2)}(Q_1, Q_2, P_2) \\ -L(Q_1, Q_2, q^{(2)}(Q_1, Q_2, P_2)) \end{aligned} \tag{13}$$

Ao passo que as equações de Hamilton agora serão

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial P_1} \\ \dot{Q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial P_2} \\ \dot{P}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial Q_1} \\ \dot{P}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial Q_2} \end{aligned} \tag{14}$$

Mesmo considerando apenas um grau de liberdade, ao passar para formulação hamiltoniana, foram definidas quatro novas variáveis, o que precisou de quatro equações de Hamilton. No Apêndice B é mostrado como se chega nesses resultados, é importante sublinhar que só é possível chegar nessas equações se considerar que a lagrangiana não-degenerada, i. e, cujo sua matriz hessiana é invertível.

A forma mais geral usada por Ostrogradski para definir as variáveis canônicas é da forma

$$Q_k = q^{(k-1)} \quad (k = 1, ..., n) \tag{15}$$

$$P_k = \sum_{l=k}^{n} (-1)^{l-k} \frac{\mathrm{d}^{(l-k)}}{\mathrm{d}t^{(l-k)}} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)}} \right) \quad (k = 1, ..., n) \tag{16}$$

Em que Q_k é a k-ésima coordenada e P_k é o k-ésimo momento, é definido um total de $2n$ variáveis, mas que nem todas são independentes por causa dos vínculos que surgem a partir dessas definições. A transformação geral de Legendre tem a seguinte forma:

$$H = \sum_{k=1}^{n-1} P_k Q_{k+1} + P_n q^{(n)} - L = \sum_{k=1}^{n} P_k \dot{Q}_k - L \tag{17}$$

E as $2n$ equações de Hamilton serão da forma

$$\begin{aligned} \dot{Q}_k &= \frac{\partial H}{\partial P_k} \\ \dot{P}_k &= -\frac{\partial H}{\partial Q_k} \end{aligned} \quad (k = 1, ..., n) \tag{18}$$

Para um sistema de N graus de liberdade, haverá um total de $N \times 2n$ equações para $N \times 2n$ variáveis

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{i,k} &= \frac{\partial H}{\partial P_{i,k}} \quad (i = 1, ..., N) \\ \dot{P}_{i,k} &= -\frac{\partial H}{\partial Q_{i,k}} \quad (k = 1, ..., n) \end{aligned} \tag{19}$$

Em geral, os modelos físicos que podem depender de derivadas superiores são hipotéticos, nas últimas decádas alguns estudiosos tem buscado por modelos que tenham interpretações física e que sejam possíveis de existirem na natureza. Um modelo bastante interessante que será visto na próxima seção é o do oscilador de Pais-Uhlenbeck, que é simples, mas que possui inúmeros casos que podem ser analisados.

IV. OSCILADORES ACOPLADOS

Um modelo interessante que pode ser usado para uma primeira abordagem de equações de ordem superior é o de dois osciladores acoplados. Veremos que não é necessário recorrer as equações de Lagrange de ordem superior ou as de Hamilton-Ostrogradski para se obter as equações de movimento desses osciladores, pois a lagrangiana desse sistema depende até derivadas de primeira ordem. Contudo, veremos também que as equações de movimento de segunda ordem dos osciladores acoplados sao equivalentes a equação de movimento de quarta ordem do oscilador de Pais-Uhlenbeck, o qual é necessário usar equações de ordem superior.

Para iniciar a discussão, considere dois osciladores de massas m_1 e m_2 ligados em paredes com molas de constantes k_1 e k_2, respectivamente; entre as duas massas há uma terceira mola de constante k que as acoplam, como pode ser visto na Figura 1:

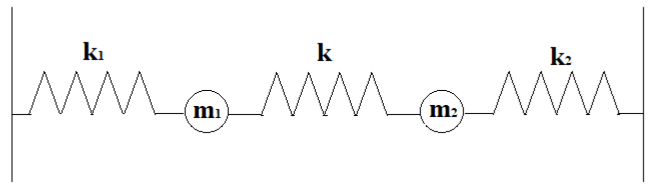

Figura 1. Figura esquemática de dois osciladores acoplados

Seja x_1 e x_2 as posições das massas m_1 e m_2, respectivamente, temos que a lagrangiana dos osciladores acoplados é

$$L = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} - \frac{k_1 x_1^2}{2} - \frac{k_2 x_2^2}{2} - \frac{k(x_2 - x_1)^2}{2} \tag{20}$$

Trata-se de um sistema com dois graus de liberdade, nesse caso, podemos usar a Eq.(2) para obter as equações de movimento

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k(x_1 - x_2) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Note nessas duas equações de movimento, que o movimento dos osciladores não são independentes por conta da constante k de acoplamento, a primeira equação de movimento associado ao movimento do oscilador 1 aparece coordenada associada ao movimento do oscilador 2 e a segunda equação que está associado ao movimento do oscilador 2 aparece coordenada associada ao movimento do oscilador 1. Se $k = 0$, o sistema se reduz a dois osciladores harmônicos desacoplados. Para encontrar a soluções dessas duas equações de movimento, um metódo que pode ser empregado é o de elevação de ordem das equações. Basicamente, se deriva uma dessas equações duas vezes e substitui a outra equação que não foi derivada nessa nova equação que é de quarta ordem, com isso haverá apenas uma equação que é de quarta ordem e que só envolve coordenada e derivadas de um dos osciladores. Com a aplicação desse metódo (Veja a Ref.[2]), o conjunto de duas equações da Eq.(21) se reduz à uma única equação de quarta ordem:

$$\begin{aligned} m_1 \ddddot{x}_1 + \left[(k_1 + k) + (k_2 + k) \frac{m_1}{m_2} \right] \ddot{x}_1 \\ + \left[\frac{(k_1 + k)(k_2 + k)}{m_2} - \frac{k^2}{m_2} \right] x_1 = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

A equação quarta ordem para o oscilado 2 é semelhante, basta trocar os índices 1 por 2 na Eq.(22), isto é devido a simetria das equações dos dois osciladores.

A solução que que satisfaz a Eq.(22) é da forma

$$\begin{aligned} x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t) \\ +A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t) \end{aligned} \tag{23}$$

Onde ω_1 e ω_2 são

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{k_2+k}{m_2}+\frac{k_1+k}{m_1}+\sqrt{\left[\frac{k_2+k}{m_2}-\frac{k_1+k}{m_1}\right]^2-\frac{4k^2}{m_1m_2}}\right]}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{k_2+k}{m_2}+\frac{k_1+k}{m_1}-\sqrt{\left[\frac{k_2+k}{m_2}-\frac{k_1+k}{m_1}\right]^2-\frac{4k^2}{m_1m_2}}\right]}. \end{aligned} \tag{24}$$

E A_1, A_2, B_1 e B_2 são as constantes de integrações que dependem das condições iniciais

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\omega_2^2 x_1(0) + \ddot{x}_1(0)}{\omega_2^2-\omega_1^2}, \\ A_2 &= -\frac{\omega_1^2 x_1(0) + \ddot{x}_1(0)}{\omega_2^2-\omega_1^2}, \\ B_1 &= \frac{\omega_2^2 \dot{x}_1(0) + \dddot{x}_1(0)}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}, \\ B_2 &= -\frac{\omega_1^2 \dot{x}_1(0) + \dddot{x}_1(0)}{\omega_2(\omega_2^2-\omega_1^2)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Para obter as soluções dos osciladores acoplados, teve que ser usado um método que forneceu uma equação de movimento que só aparece coordenadas e derivadas de um dos osciladores, consequentemente, se antes tinha duas equações de segunda ordem, agora temos uma equação de quarta ordem. Como a solução do oscilador 1 foi determinada, isolar x_2 na primeira equação da Eq.(21) e fazer a substituição de $x_1(t)$ e $\ddot{x}_1(t)$ para se ter a solução para o oscilador 2.

Na próxima seção, será apresentado a lagrangiana do oscilador de Pais-Uhlenbeck, que gera uma equação de movimento que é de quarta ordem. Veremos também que a soluções do osciladores acoplados satisfazem a equação de movimento do oscilador de Pais-Uhlenbeck.

V. OSCILADOR DE PAIS-UHLENBECK

O oscilador de Pais-Uhlenbeck é um modelo que rende bastante análise, um caso particular é dos osciladores acoplados. Por conta disso, nessa seção iremos focar em discutir como o modelo de dois osciladores acoplados visto na seção anterior é equivalente ao oscilador de Pais-Uhlenbeck.

A lagrangiana do oscilador de Pais-Uhlenbeck é

$$L_{PU} = \frac{1}{2}[\ddot{x}^2 + (\Omega_1^2+\Omega_2^2)\dot{x}^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2 x^2] \tag{26}$$

Onde Ω_1 e Ω_2 são constantes.

Essa é uma lagrangiana que depende de derivada de segunda ordem, o que requer o uso de uma equação de Lagrange de ordem superior para obter a equação de movimento. Aplicando a Eq.(3) para essa lagrangiana, obtemos:

$$\ddddot{x} + (\Omega_1^2+\Omega_2^2)\ddot{x} + \Omega_1^2\Omega_2^2 x = 0 \tag{27}$$

Temos uma equação de movimento que é de quarta ordem. Se dividirmos a Eq.(21) por m_1, pode se notar a semelhança entre a Eq.(22) e a Eq.(27). Para que sejam equivalentes, as relações a seguir devem ser satisfeitas

$$\begin{aligned} \Omega_1^2+\Omega_2^2 &= \frac{k_1+k}{m_1}+\frac{k_2+k}{m_2}, \\ \Omega_1^2\Omega_2^2 &= \frac{k_1k+k_2k+k_1k_2}{m_1m_2}. \end{aligned} \tag{28}$$

resolvendo essas duas equações para determinar Ω_1 e Ω_2, temos que

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{k_2+k}{m_2}+\frac{k_1+k}{m_1}+\sqrt{\left[\frac{k_2+k}{m_2}-\frac{k_1+k}{m_1}\right]^2-\frac{4k^2}{m_1m_2}}\right]}, \\ \Omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{k_2+k}{m_2}+\frac{k_1+k}{m_1}-\sqrt{\left[\frac{k_2+k}{m_2}-\frac{k_1+k}{m_1}\right]^2-\frac{4k^2}{m_1m_2}}\right]}. \end{aligned} \tag{29}$$

Ou seja, $\Omega_1=\omega_1$ e $\Omega_2=\omega_2$. Admitindo isso, e sabendo que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções do oscilador . Devido à essa equivalência, podemos construir uma lagrangiana para o osciladores acoplados que é semelhante a lagrangiana do oscilador de Pais-Uhlenbeck

$$L = \frac{1}{2}[\ddot{x}_1^2 + (\omega_1^2+\omega_2^2)\dot{x}_1^2 + \omega_1^2\omega_2^2 x_1^2] \tag{30}$$

Para uma abordagem hamiltoniana do oscilador de Pais-Uhlenbeck primeiro devemos escrever as novas coordenadas e momentos a partir da definição de Ostrogradski. Através da Eq.(11) temos que

$$\begin{aligned} &Q_1 = x_1, \\ &Q_2 = \dot{x}_1 \\ &P_1 = \frac{\partial L}{\partial q^{(1)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)}}\right) = (\omega_1^2+\omega_2^2)\dot{x}_1 - \dddot{x}_1 \\ &P_2 = \ddot{x}_1 \end{aligned} \tag{31}$$

A hamiltoniana pode ser obtida a partir da Eq.(13)

$$H = P_1Q_2 + \frac{{P_2}^2}{2} - \frac{1}{2}[(\omega_1^2+\omega_2^2)Q_2^2 + \omega_1^2\omega_2^2 Q_1^2] \tag{32}$$

Usando as equações de Hamilton-Ostrogradski da Eq.(14) temos que

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1} = Q_2$$
$$\dot{Q}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2} = P_2$$
$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial Q_1} = \omega_1^2\omega_2^2 Q_1 \tag{33}$$
$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial Q_2} = -P_1 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)Q_2$$

As soluções dessas equações são

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t) \\ &+ A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t) \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= [-A_1\sin(\omega_1 t) + B_1\cos(\omega_1 t)]\omega_1 \\ &+ [-A_2\sin(\omega_2 t) + B_2\cos(\omega_2 t)]\omega_2 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} P_1(t) &= [-A_1\sin(\omega_1 t) + B_1\cos(\omega_1 t)]\omega_1(2\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ & [-A_2\sin(\omega_2 t) + B_2\cos(\omega_2 t)]\omega_2(\omega_1^2 + 2\omega_2^2) \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} P_2(t) &= [-A_1\cos(\omega_1 t) - B_1\sin(\omega_1 t)]\omega_1^2 \\ &+ [-A_2\cos(\omega_2 t) - B_2\sin(\omega_2 t)]\omega_2^2 \end{aligned} \tag{37}$$

Essa soluções são facilmente obtidas sabendo que $Q_1(t) = x_1(t)$, basta usar as relações que aparecem na Eq.(33). De modo análogo pode ser feito para $x_2(t)$, não apresentamos aqui já que os resultados são semelhantes e não há necessidade de repetir os procedimentos matemáticos.

Por fim, pode se dizer que o modelo do oscilador de Pais-Uhlenbeck não é tão simples de visualizar num primeiro estudo, não estamos acostumados a deparar com energias que dependem de acelerações como pode ser visto na L_{PU}. Contudo, o modelo de dois osciladores acoplados é mais fácil de interpretar e visualizar. E devido a equivalência que o osciladores acoplados possui com o oscilador de Pais-Uhlenbeck, isso torna um bom modelo para ser dado de exemplo numa primeira abordagem de equações de ordem superior.

Apesar desse trabalho não ter sido detalhado e ter faltado alguns conceitos importantes da formulação de Ostrogradski, buscamos apresentar aspectos importantes como as equações de Lagrange e as equações de Hamilton para ordens superior. O leitor interessado pode consultar as referências [8–11] para um melhor aprofundamento na formulação de Ostrogradski para equações de ordem superior. Já para uma leitura mais aprofundada do oscilador de Pais-Uhlenbeck pode ser lida nas referências [2, 12]

VI. CONCLUSÃO

Nesse trabalho, foi apresentado uma breve discussão a respeito do formalismo lagrangiano considerando lagrangiana que depende de derivadas temporais de qualquer ordem das coordenadas generalizadas. Em seguida, apresentamos a abordagem usada por Ostrogradski para fazer a passagem do formalismo lagrangiano com derivadas de ordem superior para o formalismo hamiltoniano, que é conhecido como formalismo de Hamilton-Ostrogradski. E por fim, apresentamos o modelo de dois osciladores acoplados e o modelo de Pais-Uhlenbeck, os quais suas lagrangianas são equivalentes. A lagrangiana do oscilador de Pais-Uhlenbeck depende de derivada de segunda ordem, que é algo que não estamos familiarizados na física. Por outro lado, a lagrangiana de dois osciladores acoplados depende de derivadas de até primeira ordem e trata se de um modelo que é mais fácil de interpretar.

Em sínteses, é uma questão interessante que a natureza, em geral, é descrita por leis que só envolvem derivadas até segunda ordem. Essa questão tem motivado vários estudiosos a buscarem por situações físicas que são descritas por derivadas de ordem superior. Acredita-se que, se tais modelos teóricos puderem ser comprovados experimentalmente, isso ampliaria o entendimento que temos a acerca da natureza.

Contudo, o tema de derivadas superiores e o formalismo de Hamilton-Ostrogradski é ignorado nas literaturas e nos cursos de mecânica avançada, e vários estudantes de física deixam de ter contato com esse tema e sua importância. Diante disso, esperamos com que abordagem feita aqui de forma não muito aprofundada possa servir de base para aqueles que nunca se deparam com esse tema, e que posteriomente queiram se aprofundar em referências mais detalhadas.

APÊNDICE

Apêndice A: Equações de Lagrange de ordem superior

Por simplicidade, consideremos que o sistema possui apenas um grau de liberdade e que a lagrangiana não dependa explicitamente do tempo, considere a lagrangiana:

$$L(q, q^{(1)}, q^{(2)}) \tag{38}$$

na qual estamos usando a notação $q^{(n)} = d^{(n)}q/dt^{(n)}$ para indicar a derivada temporal de ordem n-ésima da coordenada generalizada, sendo assim, $q^{(1)}$ e $q^{(2)}$ são as derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente.

A partir do princípio da mínima ação é possível obter a equação de Lagrange para esse tipo de lagrangiana

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, q^{(1)}, q^{(2)})dt = 0 \tag{39}$$

Aplicando a variação do lado direito da Eq.(39) tem que

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta\ddot{q}\right)dt=0 \tag{40}$$

Impondo a condição que $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=\delta\dot{q}(t_1)=\delta\dot{q}(t_2)=0$, pode ser feito integrais por partes a fim de desaparecer com $\delta\dot{q}$ e $\delta\ddot{q}$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}dt=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial q}\delta q dt=\\ =-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial q}\delta q\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta\ddot{q}dt=\left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta\dot{q}\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta\dot{q}dt=\\ -\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta\dot{q}=-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta q dt=\\ =\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta q dt\end{aligned} \tag{42}$$

Substituindo o resultado das Eq's (41) e (42) na Eq.(40), ficamos com:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\delta q dt=0 \tag{43}$$

Com δq sendo uma variação arbitrária, extraímos a equação de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}=0 \tag{44}$$

Para generalizar a equação de Lagrange para ordem superior, considere a lagrangiana que depende derivadas de até ordem n:

$$L=L(q,q^{(1)},q^{(2)},...,q^{(n)}) \tag{45}$$

Para obter a equação de Lagrange de ordem superior, considere que:

$$\delta q^{(k)}(t_1)=\delta q^{(k)}(t_2)=0 \quad (k=1,...,n-1) \tag{46}$$

isso permitirá que seja feita integrações por partes para que apareça apenas coeficientes de δq. Fazendo procedimentos análogo ao que foi feito para o caso $n=2$, a equação de Lagrange de ordem superior é

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^{(k)}}{\mathrm{d}t^{(k)}}\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}=0 \tag{47}$$

Para não causar confusão na notação de derivada, convecionamos escrever os índice da ordem da derivada entre () ao passo que a potência não será escrita entre (). Desse modo, $^{(k)}$ é o índice que indica derivada de k-ésima ordem, enquanto ^{k} representa o expoente k-ésimo.

Para um sistema com N graus de liberdade, haverá um conjunto de N coordenadas generalizadas e N equações de Lagrange de ordem superior

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^{(k)}}{\mathrm{d}t^{(k)}}\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}}=0 \quad (i=1,...,N) \tag{48}$$

Aqui foi suposto que as N coordenadas generalizadas são todas independentes, o que faz com que os δq_i sejam mutuamente independentes e arbitrários.

A. Apêndice B: Equações de Hamilton de ordem superior

No Apêndice A mostramos como obter a equação de Lagrange considerando uma lagrangiana que depende de derivada de até segunda ordem, depois com algumas considerações mostramos a forma geral da equação de Lagrange para derivadas de até ordem n-ésima.

Nesse apêndice, mostraremos como obter as equações de Hamilton considerando a lagrangiana que depende de derivada de até segunda ordem, depois apresentaremos a generalização das equações de Hamilton para ordem n-ésima.

Sabe-se que para mudar do formalismo lagrangiano para o formalismo hamiltoniano é usada a transformação de Legendre. O caso comum em que a lagrangiana é $L(q_i,\dot{q}_i,t)$, a transformação de Legendre tem a seguinte forma:

$$H(q_i,p_i,t)=\sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i-L(q_i,\dot{q}_i,t) \tag{49}$$

onde p_i é o momento conjugado, que é definido como:

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1,...,N) \tag{50}$$

Seja a matriz hessiana formada por elementos W_{ij}, onde esses elementos são da forma:

$$W_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\dot{q}_j} \quad (i,j=1,...,N) \tag{51}$$

Se a matriz hessiana for regular, i. e., seu determinante é diferente de zero, então é possível resolver as N equações da Eq.(50) e escrever os $\dot{q}_s$ como funções dos q_s, p_s e t. Feito isso, substitui os $\dot{q}_s$ na Eq.(51) para construir a hamiltoniana.

As equações de Hamilton é um conjunto de $2N$ equações diferenciais da forma:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, ..., N) \tag{52}$$

As equações de Hamilton assim como as Equações de Lagrange permitem obter equações de movimento, porém as equações de Hamilton são de primeira ordem, enquanto as equações de Lagrange são de segunda ordem. Em compensação, o formalismo lagrangiano lida com um número de N equações e N coordenadas generalizadas $(q_1, ..., q_N)$, enquanto o formalismo hamiltoniano lida com $2N$ equações e $2N$ variáveis que são as coordenadas e momentos $(q_1, ..., q_N, p_1, ..., p_N)$.

Contudo, para fazer a mudança de formalismos quando se considera de derivadas de ordem superior, a transformação de Lengendre como é apresentada na Eq.(49) não irá servir. Por isso, deve se buscar uma generalização da transformação de Legendre que dê conta do caso geral. Além disso, novas coordenadas e momentos serão.

Por simplicidade, vamos considerar novamente que o sistema só tem um grau de liberade. Se a lagrangiana é do tipo $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$, vimos que a equação de Lagrange é

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0 \tag{53}$$

Novas coordenadas e momentos serão definidos da seguinte forma:

$$Q_1 = q; \quad Q_2 = \dot{q}; \quad P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}; \quad P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \tag{54}$$

onde Q_1 e Q_2 são novas coordenadas generalizadas e P_1 e P_2 são os novos momentos conjugados. Observe que pela definição dos novos momentos irão surgir vínculos, como por exemplo:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = P_1 + \dot{P}_2 \tag{55}$$

Por conta disso, as coordenadas e momentos não serão todas independentes. Na definição de P_2 podemos perceber que existe uma dependência com q, $\dot{q}$ e $\ddot{q}$. Para que possamos inverter a equação e escrever $\ddot{q}$ como função de q, $\dot{q}$ e P_2, a matriz hessiana deve ser singular, contudo a matriz hessiana nesse caso envolve termos que são de derivadas em relação as acelerações generalizadas

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}_i \ddot{q}_j} \quad (i, j = 1, ..., N) \tag{56}$$

no caso unidimensional, essa matriz possui apenas um elemento

$$W = \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}^2} \tag{57}$$

se $det(W) \neq 0$, então podemos escrever

$$\ddot{q} = \ddot{q}(q, \dot{q}, P_2) = \ddot{q}(Q_1, Q_2, P_2) \tag{58}$$

Para obter a transformação de Legendre podemos partir da diferencial da lagrangiana,

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}d\ddot{q} \tag{59}$$

Usando as definições de coordenadas e momentos feitas na Eq.(54), ficamos com

$$dL = \dot{P}_1 dQ_1 + (P_1 + \dot{P}_2)dQ_2 + P_2 d\ddot{q} \tag{60}$$

Para que apareça apenas diferenciais de Q_s e P_s em dL, podemos usar a identidade $\ddot{q}dP = d(P\ddot{q}) - Pd\ddot{q}$, desse modo temos que

$$dL = d(P_1Q_2 + \ddot{q}P_2) + \dot{P}_1 dQ_1 - Q_2 dP_1 + \dot{P}_2 dQ_2 - \ddot{q}dP_2 \tag{61}$$

Podemos rescrever a Eq.(61) como

$$dH = d(P_1Q_2 + \ddot{q}P_2 - L) = -\dot{P}_1 dQ_1 + Q_2 dP_1 - \dot{P}_2 dQ_2 + \ddot{q}dP_2 \tag{62}$$

temos que a transformação de Legendre é da forma

$$H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = P_1Q_2 + P_2\ddot{q} - L(Q_1, Q_2, \ddot{q}) \tag{63}$$

estamos supondo que $\ddot{q} = \ddot{q}(Q_1, Q_2, P_2)$. Observe também que

$$Q_2 = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{Q}_1 \quad , \quad \ddot{q} = \frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t} = \dot{Q}_2 \tag{64}$$

Com isso, obtemos a transformação de Legendre para o caso em que a lagrangiana depende de $\ddot{q}$

$$H = P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 - L \tag{65}$$

Do lado direito da Eq.(62) extraímos as equações de Hamilton

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1} \quad \dot{Q}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2} \quad \dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial Q_1} \quad \dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial Q_2} \tag{66}$$

Observe que a Eq.(53) é uma equação de quarta ordem e temos que determinar apenas uma variável. Enquanto na Eq.(66) há quatro equações de primeira ordem e temos que determinar quatro variáveis.

Para o caso mais geral, considere a lagrangiana que depende de derivadas temporais de até ordem n do $q(t)$

$$L = L(q, q^{(1)}, q^{(2)}, ..., q^{(n)}) \tag{67}$$

sendo $q^{(1)} = \dot{q}$, $q^{(2)} = \ddot{q}$ e mesma notação para as derivadas maiores.

De maneira geral as novas coordenadas são da seguinte forma:

$$Q_k = q^{(k-1)} \quad (k = 1, ..., n) \tag{68}$$

e os novos momentos serão da forma

$$P_k = \sum_{m=k}^{n} (-1)^{m-k} \frac{\mathrm{d}^{(m-k)}}{\mathrm{d}t^{(m-k)}} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}} \right) \quad (k = 1, ..., n) \tag{69}$$

a transformação geral de Legendre será

$$H = \sum_{k=1}^{n} P_k \dot{Q}_k - L \tag{70}$$

a forma geral das equações de Hamilton de ordem superior são

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} \quad , \quad \dot{P}_k - \frac{\partial H}{\partial Q_k} \quad (k = 1, ..., n) \tag{71}$$

[1] A. Pais and G. Uhlenbeck, On field theories with non-localized action, Physical Review **79**, 145 (1950).
[2] L. O. MENDES, Um estudo de teorias com derivadas superiores: O oscilador de pais-uhlenbeck, .
[3] M. Ostrogradsky, Memoires sur les equations differentielles relatives au probleme des isoperimetres, Mem. Acad. St. Petersbourg **6**, 385 (1850).
[4] N. A. Lemos, *Mecânica analítica* (Editora Livraria da Física, 2007).
[5] J. B. Marion, *Dinámica clásica de las partículas y sistemas* (Reverté, 2014).
[6] L. D. Landau, E. Lifshitz, V. Berestetskii, and L. Pitaevskii, *Física teórica. Mecánica* (Reverte, 2021).
[7] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical mechanics* (American Association of Physics Teachers, 2002).
[8] M. Rashid and S. Khalil, Hamiltonian description of higher order lagrangians, International Journal of Modern Physics A **11**, 4551 (1996).
[9] C. Grosse-Knetter, Effective lagrangians with higher order derivatives, arXiv preprint hep-ph/9306321 (1993).
[10] R. P. Woodard, The theorem of ostrogradsky, arXiv preprint arXiv:1506.02210 (2015).
[11] E. Svanberg, Theories with higher-order time derivatives and the ostrogradsky ghost, arXiv preprint arXiv:2211.14319 (2022).
[12] M. Pavšič, Pais–uhlenbeck oscillator and negative energies, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics **13**, 1630015 (2016).