



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**Discente:** LEONARDO FERREIRA ALVES  
**Orientador:** Prof. Dr. ANDERSON ANTUNES NOGUEIRA

TEORIA DE CAMPOS E SIMETRIAS NO VIEZ CON-  
CEITUAL DE MECÂNICA ANALÍTICA: UM BREVE  
ESTUDO NO FORMALISMO LAGRANGIANO E  
HAMILTONIANO

UNIFAL  
Alfenas - MG  
2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE<sub>x</sub>  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**Discente:** LEONARDO FERREIRA ALVES  
**Orientador:** Prof. Dr. ANDERSON ANTUNES NOGUEIRA

**TEORIA DE CAMPOS E SIMETRIAS NO VIEZ CONCEITUAL DE MECÂNICA ANALÍTICA: UM BREVE ESTUDO NO FORMALISMO LAGRANGIANO E HAMILTONIANO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Física pela Universidade Federal de Alfenas.

**Área de concentração:** Partículas e Campos.

**Orientador:** Professor Dr. Anderson Antunes Nogueira

UNIFAL  
Alfenas - MG  
2023

# Agradecimentos

Gostaria de aproveitar este momento para expressar minha gratidão a todas as pessoas e instituições que contribuíram para a realização deste trabalho e pela conclusão desta etapa de graduação.

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor Dr. Anderson Antunes Nogueira, por sua orientação constante, paciência e sabedoria. Suas insights e orientações desempenharam um papel fundamental na evolução deste trabalho, e sou muito grato por sua dedicação.

À minha família, especialmente à minha Mãe, por seu apoio ao longo dos anos. Seu incentivo e compreensão tornaram possível enfrentar os desafios que surgiram durante este processo. Gostaria também de deixar meus agradecimentos a Neilde Araujo, uma segunda mãe, que sem seu apoio e motivação eu não conseguiria concluir esta etapa.

Aos meus amigos e colegas, em especial a Auro Vichiatto, que desempenhou um papel de extrema importância no meu interesse pelas ciências naturais e na motivação para seguir uma carreira acadêmica, compartilhando sempre dos seus conhecimentos e mostrando a beleza da natureza através da Química. Agradeço por estarem ao meu lado, compartilhando conhecimento, experiências e bons momentos. Suas conversas e apoio tornaram esta jornada mais rica e memorável.

Expresso minha gratidão a todos os professores do departamento de Física e a coordenação do curso, especialmente ao Professor Dr. Samuel Soltau, que me guiou nos primeiros passos, tanto na matemática quanto em meu primeiro contato com a física de partículas. Suas recomendações de materiais e valiosos recursos foram fundamentais.

Também à Professora Dra. Thirza Sorpreso, que me inspirou com seu profissionalismo exemplar e trabalho impecável. Além disso, sou grato por seus conselhos e conhecimentos sobre a arte de ensinar, bem como por sua generosidade ao dedicar tempo e paciência quando iniciei no curso.

Por fim, minha sincera gratidão à Unifal - MG por fornecer recursos e acesso a bibliotecas e laboratórios que enriqueceram esta jornada, e a CAPES pelas oportunidades de participar de programas que enriqueceram muito minha formação.

*Nós somos uma forma de vida que surge do cosmos e se dedica ao estudo do cosmos; temos a capacidade de compreender o universo porque somos feitos das mesmas partículas elementares que o compõem, e que se organizaram de maneira complexa ao longo da evolução. Quando olhamos para o céu, contemplamos o passado, mas também nos vemos refletidos lá, como uma parte do todo, como o próprio universo tentando entender a si mesmo.*

---

— Carl Sagan, **Cosmos**

# Teoria de Campos e Simetrias no vizez conceitual de Mecânica Analítica

( Um breve estudo no formalismo lagrangiano e hamiltoniano )

L. Ferreira<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> *Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciências Exatas, Alfenas 37133-840, Brasil*

Maio, 2023

## Resumo

Temos como objetivo desse trabalho de conclusão de curso estudar o comportamento dos campos e as simetrias que moldam suas interações (calibre, global e local) na descrição das forças que atuam nas conexões entre matéria e radiação. Primeiramente investigaremos e construiremos a descrição clássica de campos das partículas escalares (Schrödinger, Klein-Gordon), vetoriais (Maxwell) e fermiônicas (Dirac). Dando continuidade exploraremos a relação entre simetrias e quantidades conservadas via teoremas de Emmy Noether não somente no formalismo lagrangiano mas também no formalismo hamiltoniano.

**Palavras chaves:** Mecânica Analítica; Teoria de Campos; Simetrias

---

\* leonardoferreira.alves@sou.unifal-mg.edu.br

# Field Theory and Symmetries in the conceptual vein of Analytical Mechanics

( A brief study in the lagrangian and hamiltonian formalisms )

L. Ferreira<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> *Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciências Exatas, Alfenas 37133-840, Brasil*

May, 2023

## Abstract

The objective of this undergraduate thesis is to study the behavior of fields and the symmetries that shape their interactions (gauge, global and local) in the description of the forces that act on the connections between matter and radiation. Firstly, we will investigate and construct the classical description of scalar (Schrödinger, Klein-Gordon), vector (Maxwell) and fermionic (Dirac) particle fields. Continuing, we will explore the relationship between symmetries and conserved quantities through Emmy Noether's theorems not only in the lagrangian formalism but also in hamiltonian formalism.

**Keywords:** Analytical Mechanics; Field Theory; Symmetries

---

\* leonardoferreira.alves@sou.unifal-mg.edu.br

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Conceitos Introdutórios</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Campos Escalares, Vetoriais e Fermiônicos</b>	<b>4</b>
2.1	Campos escalares e o limite contínuo de um sistema mecânico discreto . . .	7
2.2	Campos vetoriais e a simetria de calibre . . . . .	10
2.2.1	Simetria de Calibre . . . . .	11
2.2.2	Equações de Maxwell na forma covariante e a simetria de calibre . .	13
2.3	Princípio da correspondência . . . . .	17
2.3.1	Analogia ótico-mecânica . . . . .	17
2.3.2	Conceitos básicos de mecânica analítica. . . . .	21
2.3.3	Princípio da mínima ação. . . . .	21
2.3.4	Uniformidade temporal, conservação da energia e Hamiltoniana. . .	23
2.3.5	Equação de Hamilton-Jacobi . . . . .	25
2.3.6	A busca por uma equação de onda para descrever a matéria [Campo de Schrödinger] . . . . .	26
2.3.7	A equação de onda (Partícula livre) . . . . .	28
2.3.8	Partícula interagente [ Analogia ótico-mecânica ] . . . . .	29
2.3.9	Conservação da carga e equação da continuidade . . . . .	30
2.3.10	Campo de Schrödinger e equação de movimento . . . . .	30
2.3.11	Campo de Klein-Gordon-Fock . . . . .	32
2.3.12	Campo de Dirac . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Simetrias e Teorema de Emmy Noether no formalismo lagrangiano</b>	<b>37</b>
3.1	Mecânica . . . . .	37
3.1.1	Translação espacial (rígida) . . . . .	37
3.1.2	Rotação espacial (rígida) . . . . .	37
3.1.3	Translação temporal . . . . .	39
3.2	Teorema de Emmy Noether . . . . .	39
3.2.1	Simetrias e o Teorema de Emmy Noether no formalismo lagrangiano A [ caso particular de transformações ] . . . . .	41
3.2.2	Simetrias e o Teorema de Emmy Noether no formalismo lagrangiano B [ caso geral de transformações ] . . . . .	44
3.2.3	Simetrias da ação e Teorema de Noether em teoria clássica de campos	47
3.2.4	Invariância da ação e quantidades conservadas . . . . .	48
3.2.5	Aspectos gerais e aplicações envolvendo quantidades conservadas . .	50
<b>4</b>	<b>Simetrias e Teorema de Emmy Noether no formalismo hamiltoniano</b>	<b>54</b>
4.1	Função de Hamilton, parênteses de Poisson e transformações canônicas . .	54
4.2	Transformações canônicas e simetrias do sistema . . . . .	57
4.3	Geradores de uma transformação e quantidades conservadas . . . . .	58
4.4	Simetrias da hamiltoniana e quantidades conservadas em teoria clássica de campos . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Reflexões finais e perspectivas futuras</b>	<b>64</b>
<b>A</b>	<b>As equações de onda inhomogêneas: transformações e escolhas de calibre</b>	<b>66</b>

B Solução das equações de onda inhomogêneas via potenciais retardados e funções de Green	69
C A relação de Louis de Broglie	72
D Dirac e a equação relativística do elétron	74

## Lista de Figuras

1	Esquema de uma corda vibrante com suas extremidades fixas . . . . .	7
2	Esquema geométrico decompondo as forças sobre um ponto da corda . . . .	9
3	Esquema com três meios distintos onde há diferentes índices de refração. .	18
4	Esquema visual da projeção de uma miragem . . . . .	18
5	Decomposição de vetores e um ponto da onda . . . . .	18
6	Curva construída por uma soma de vetores infinitesimais . . . . .	19
7	Esquema de rotação . . . . .	38
8	Distribuição de cargas . . . . .	69
9	O primeiro pósitron identificado . . . . .	75

# 1 Conceitos Introdutórios

A busca por uma teoria única capaz de explicar as interações da natureza, incluindo as interações eletromagnética, fraca, forte e gravitacional, tem sido uma jornada longa e contínua. O princípio de calibre é o protagonista dessa busca, e a simetria de calibre determina a interação entre a matéria, a radiação e suas auto-interações. [1]

Tendo em vista a importância do papel das simetrias na Física e no atual Modelo Padrão das partículas elementares, vamos apresentar suas nuances, descrevendo brevemente a evolução e adaptação dos conceitos de simetria ao longo do tempo.

Observando não apenas a descrição da interação entre matéria (elétrons) e radiação (fótons, intermediador da interação, mensageiro) via acoplamento corrente-campo, onde temos uma troca de fótons e conservação da carga elétrica, mas também a teoria de Fermi para o decaimento beta do nêutron ( $n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ ) em termos de um acoplamento corrente-corrente entre 4 campos (vértice), Heisenberg, Tamm e Yukawa propõem uma descrição das interações fortes (entre prótons e nêutrons) em que partículas nucleares (prótons e nêutrons) estariam trocando partículas massivas (mésons, píons) e teríamos também a conservação de uma carga (isospin global). [2–6]

A questão da massa para partículas intermediadoras da interação e a descrição de interações de curto alcance é revisitada por Proca e Stückelberg, onde percebemos a possibilidade de campos vetoriais massivos apresentarem a simetria de calibre. [7–11]

Como sabemos, Weyl foi o primeiro a sugerir que o princípio de calibre derivado do eletromagnetismo poderia ser expandido para incluir outras interações, como a gravitacional, buscando elevar a simetria de calibre a um nível mais fundamental. Yang e Mills retomaram esse trabalho, buscando explicar a interação forte generalizando a simetria de fase (isospin global) para um patamar local, introduzindo o conceito de derivada covariante tendo em vista a simetria de calibre. No entanto, como Pauli já sabia, as partículas intermediadoras dessa interação relacionada à simetria de isospin local eram não massivas, o que contradizia o fato de a interação forte ser descrita por uma interação de curto alcance com partículas intermediadoras massivas. Paralelamente, Utiyama e Shaw desenvolvem suas abordagens para teorias não abelianas. [12–18]

Na Física de Partículas lidamos com um grande número de simetrias: simetrias de translação, rotação, invariância de Lorentz, simetria quiral, simetria dual, simetrias C (carga), P (paridade) e T (reversão de tempo), simetria de gauge e simetrias internas, como as simetrias de grupo SU(2) e SU(3). Interações diferentes são governadas por simetrias diferentes. Tendo em vista a violação da paridade (quebra de simetria) no decaimento beta, a interação de Fermi teve que ser reformulada em termos de uma interação de 4-campos envolvendo um acoplamento corrente-corrente (axial-vetorial). Além disso a interação fraca parece ser descrita pela troca de partículas intermediadoras massivas (mésons vetoriais), necessitando uma compreensão envolvendo a origem dessas massas. [19–27]

Até o presente momento a abordagem das simetrias internas da física está sendo dada pelos teoremas de Emmy Noether onde temos uma quantidade denominada ação e estudamos a invariância da mesma devido a atuação de um grupo de simetria. A mudança de paradigma se inicia com o estudo de Glashow sobre simetrias parciais na interação eletrofraca, ganha apreço não apenas com os estudos não apenas de Nambu e Goldstone do potencial advindo do estudo de matéria condensada e supercondutores (forma de um chapéu mexicano, com vértices envolvendo o acoplamento de 4 escalares) mas também com as investigações de Abdus Salam e Steven Weinberg envolvendo o surgimento de um escalar não massivo (bóson). Inspirado no trabalho do Anderson sobre mediadores de interação e simetrias de calibre em matéria condensada, Eglet-Higgs-Kibble e colaboradores investigam um mecanismo de quebra de simetria em uma teoria de calibre local (abeliana / não abeliana). Um resultando importante é que o bóson de Nambu-Goldstone desaparece e os campos de calibre adquirem massa, dizemos então que os campos de calibre engolem escalares de Nambu-Goldstone adquirindo massa. Sendo pavimentado as nuances envolvendo a quebra espontânea de simetria e a geração de massa para campos vetoriais, a unificação da interação fraca com a eletromagnética não tarda a ser concretizada em uma teoria eletrofraca via modelo de leptons de S. Weinberg, o que de certa forma era esperado tendo em vista analogias entra a interação fraca e eletromagnética (intermediadas por campos vetoriais massivos e não massivos). Posteriormente o conceito de quebra de simetria e massa para campos vetoriais é revisitado envolvendo o conceito de renormalização, percebendo que a renormalização de um modelo não é danificada perante a quebra de simetria. [28–42]

É importante salientar também a existência de um outro mecanismo de geração de massa além da quebra espontânea de simetria. Observando a física que descreve as transições de fase das substâncias Ginzburg e Landau construíram uma maneira de avaliar os expoentes críticos em termos de expansões da energia livre e classificação dos parâmetros de ordem associados a uma transição. A partir desta linha geral de pesquisa, a compreensão da supercondutividade ganhou nova vida na visão microscópica que, em determinadas condições, os férmions podem ser emparelhados e ligados juntos na física da matéria condensada (Pares de Cooper). Como sabemos, na teoria BCS (Bardeen, Cooper e Schrieffer), um par de elétrons em um metal pode ser ligado juntos a baixas temperaturas de uma certa forma que uma atração arbitrariamente pequena entre elétrons em um metal pode causar um estado par de elétrons a ter uma energia menor que a energia de Fermi. Em supercondutores convencionais, esta atração é devida à interação elétron-fônon. Quando se considera muitas formações de pares eletrônicos, encontra-se que o emparelhamento abre uma lacuna (gap) no espectro contínuo de estados de energia permitidos dos elétrons, o que significa que todas as excitações do sistema devem possuir uma quantidade mínima de energia. Esse gap nas excitações leva à supercondutividade, já que pequenas excitações, como a dispersão de elétrons, são proibidas. O gap aparece devido

aos efeitos muitos-corpos entre elétrons sentindo a atração. Da mesma forma, isso também acontece no fenômeno da superfluidez na descrição das propriedades dos solitons (bósons) formados pela combinação de dois fermions (Hélio-3) no hélio líquido. Essa ideia de pares de cooper deu frutos em física nuclear com os trabalhos de Nambu-Jona-Lasinio, onde exploramos novamente a interação de Fermi acoplando 4 férmions (corrente-corrente) com a simetria quirial, construindo assim um mecanismo de geração dinâmica de massa para os férmions (condensados quirais). As simetrias quebradas levam a bósons pseudoescalares sem massa que às vezes são chamados de pions. [43–49]

Dando continuidade, os estudos da quebra espontânea ou dinâmica da simetria foram explorados implementando correções radiativas tanto quânticas quanto térmicas aos modelos via conceitos de teoria efetiva. Dessas investigações perceberam que as simetrias poderiam ser restauradas. Além disso, um grande feito das teorias efetivas foi explicar a física nuclear hadrônica (baixas energias, troca de mésons por bárions) como advinda da cromodinâmica (altas energias, troca de gluons por quarks). [50–59]

Atualmente, existe uma vasta literatura sobre campos (clássicos, quânticos ou térmicos) envolvendo os conceitos de geração de massa para as partículas via quebra de simetria (espontânea ou dinâmica) e cálculos em teorias efetivas. Todas essas ferramentas teóricas envolvendo campos são a nossa visão filosófica atual de como descrevemos os blocos construtores da nossa realidade física tendo em vista a interação entre matéria e radiação. Como podemos testemunhar ao longa da introdução, a questão da massa das partículas em seus diferentes aspectos ainda é um assunto moderno e inspirador. [60–85]

Temos como objetivo explorar a teoria de campos de uma maneira que incorpora ou se concentra nos conceitos e princípios da mecânica analítica. Isso pode envolver a aplicação dos princípios da mecânica analítica para entender melhor como os campos se comportam ou como as equações de campo podem ser formuladas a partir de princípios variacionais. Essa investigação explorará as relações entre a teoria de campos e a mecânica analítica, analisando como os conceitos e métodos da mecânica analítica podem ser aplicados para obter insights ou simplificar a descrição física de fenômenos envolvendo campos. Essa abordagem pode ser particularmente útil para estudantes que estão iniciando sua caminhada no tema. Na Sec.2 apresentamos a formulação dos campos escalares, vetoriais e fermiônicos. Na Sec.3 investigamos o teorema de Noether na formulação lagrangiana. Na Sec.4 investigamos o teorema de Noether na formulação hamiltoniana. Por fim, na Sec. 5 temos as conclusões como desfecho do estudo.

## 2 Campos Escalares, Vetoriais e Fermiônicos

Na física ao estudarmos os diferentes tipos de fenômenos nos deparamos com a necessidade de existir diferentes tipos de campos, os chamados campos escalares e os campos vetoriais são os tipos de campos que descrevem grandezas associadas aos pontos de uma região do espaço. Um campo escalar é aquele em que todos os pontos apresentam grandezas isentas de direção e sentido, ao invés de vetores, apenas um valor seguido de sua unidade já baste para descrever a configuração do fenômeno. Alguns exemplos desse tipo de campo são a distribuição de temperaturas máximas em um mapa ou as densidades populacionais em bairros de uma cidade qualquer.

Já para os campos vetoriais, cada ponto está associado a um vetor que possui um comprimento guardando o valor e a unidade, uma direção e um dos diferentes sentidos possíveis dentro daquela direção. A distribuição de velocidades para cada molécula de um fluido, por exemplo, ou mesmo o campo magnético e elétrico de uma partícula com carga necessitam deste tipo de estrutura.

E um campo fermiônico é um tipo de campo quântico que descreve partículas elementares chamadas férmions. Os férmions seguem as estatísticas de Fermi-Dirac, o que significa que eles têm propriedades únicas em relação à sua distribuição quântica. Ao contrário dos campos bosônicos, que seguem relações de comutação canônicas, os campos fermiônicos seguem relações de anticomutação canônicas. Isso implica que as partículas fermiônicas não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente, o que leva a propriedades distintas e comportamento peculiar em nível subatômico.

Para chegarmos ao nosso primeiro campo, precisamos partir do Princípio da mínima ação de Hamilton. O Princípio da Mínima Ação é um conceito fundamental na física teórica que descreve o comportamento de sistemas dinâmicos, como partículas em movimento. Este princípio é uma generalização do Princípio de Fermat da ótica, que afirma que a luz segue o caminho que minimiza o tempo necessário para percorrer entre dois pontos. Formulado por William Rowan Hamilton no século XIX, o Princípio da Mínima Ação, é uma ferramenta poderosa para entender o comportamento de sistemas físicos em várias escalas, desde partículas subatômicas até corpos celestes.

Embora nós estudantes de física na graduação temos, primeiro, o contato com a Mecânica Lagrangiana, para chegarmos no campo necessitamos utilizar a densidade de Lagrangiana. A Lagrangiana e a densidade de Lagrangiana são conceitos relacionados, mas são usados em contextos diferentes na física teórica, principalmente na mecânica clássica e na teoria de campos.

A Lagrangiana é uma função que descreve a dinâmica de um sistema mecânico. Ela é comumente usada na mecânica clássica para descrever o comportamento de partículas ou sistemas físicos em movimento e é definida como a diferença entre a energia cinética  $T$  e a energia potencial  $U$  do sistema. Em notação matemática, a Lagrangiana  $\mathcal{L}$  é dada pela equação (1)

$$L = T - U \quad (1)$$

Ao contrário da Lagrangiana tradicional, a densidade de Lagrangiana não é uma diferença entre energias, mas sim uma medida da densidade de energia do campo e, às vezes, inclui derivadas espaciais e temporais dos campos.

Ao definirmos a grandeza  $S$  que chamamos de Ação, que é uma quantidade física definida como uma integral de uma função Lagrangiana ao longo de um certo intervalo de tempo ou espaço. A forma exata da Ação varia dependendo do contexto físico, mas, em essência, a Ação é uma medida agregada de como um sistema ou campo evolui ao longo do tempo, ou do espaço. Ao pegar uma pequena variação da Ação e igualarmos a zero, temos então O Princípio da Mínima Ação, que vimos anteriormente.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \delta \phi' \right) dx dt = 0 \quad (2)$$

Onde (2) é a configuração de campo que minimiza a ação. Utilizaremos as notações de ponto, simbolizando derivadas temporais, e linha para derivadas espaciais. (3)

$$\delta \dot{\phi} = \frac{\partial}{\partial t}(\delta \phi) , \quad \delta \phi' = \frac{\partial}{\partial x}(\delta \phi) \quad (3)$$

Assim podemos em diversos casos que irão aparecer posteriormente, simplificar a notação, como podemos observar na equação (4).

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta(\dot{\phi}) \right] dx dt = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial}{\partial t}(\delta \phi) \right] dt dx \quad (4)$$

Expandindo os cálculos:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) \right]_{t_1}^{t_2} dx}_{0} - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) (\delta \phi) \right] dt dx \cdot \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) \right]_{t_1}^{t_2} dx dt \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} (\delta \phi) \right]_{x_1}^{x_2} dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \delta \phi dx dt \tag{5}
\end{aligned}$$

Onde o primeiro termo da equação (5) é igual a zero.

Devemos lembrar que os extremos estão fixos, a menos de derivadas totais, pois partimos e chegamos ao mesmo ponto, embora por caminhos diferentes. Temos interesse no caminho que minimiza a nossa ação.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial t}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x}} \right) \right\} \delta \phi dx dt = 0 \tag{6}$$

Portanto, temos a equação de movimento (7)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial t}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{7}$$

Essa equação descreve as equações de movimento para um sistema físico governado pela Lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Ela é usada para determinar como o campo escalar  $\phi$  evolui no espaço e no tempo de acordo com as leis físicas descritas pela Lagrangiana. É uma ferramenta poderosa na mecânica lagrangiana e em outras áreas da física teórica. Através dela, podemos chegar até os campos.

## 2.1 Campos escalares e o limite contínuo de um sistema mecânico discreto

Para discutirmos esse campo, podemos partir de um exemplo aplicado a um sistema onde temos uma corda vibrante fixada por meio de dois pontos, como em uma corda de violão ou em outros instrumentos de corda. Veremos que, a partir da solução desse problema, encontraremos uma configuração que nos permite ajustar apenas a *tensão* aplicada na corda e sua *densidade linear de massa* para controlar sua velocidade. Como a velocidade de uma onda é constante em um mesmo meio, ao alterar esses dois valores, podemos controlar as possíveis frequências em que nossa corda pode vibrar. Isso nos permite criar músicas, entre outras aplicações.

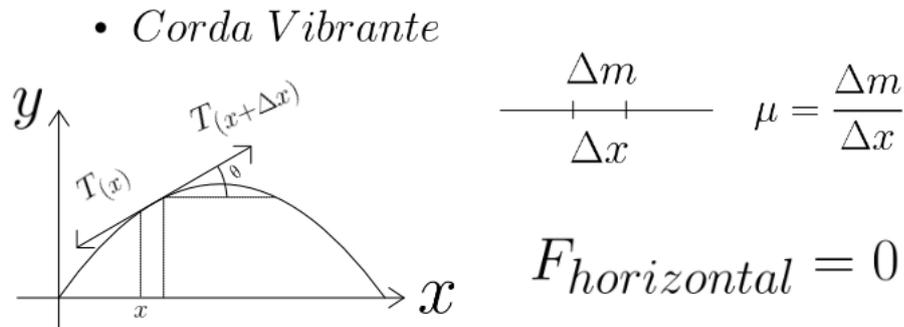


Figura 1: Esquema de uma corda vibrante com suas extremidades fixas

$$F_{vertical} = T \sin \theta(x + \Delta x) - T \sin \theta(x)$$

$$F_{vertical} = \frac{T \left( \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right)}{\Delta x} \Delta x$$

$$\sin \theta = \tan \theta \quad [ \text{Para } \theta \text{ é muito pequeno} ]$$

$$\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

logo

$$F_{vertical} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad [ \text{Newton} ]$$

sendo assim

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\overbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}^{(10.1)} \quad \left| \quad \underbrace{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}_{(10.2)} \quad (9)$$

Onde nossa equação (9) é a equação de uma onda (10.1), com sua velocidade de propagação (10.2).

Também podemos obter as energias do sistema através de sua Lagrangiana (10), onde (11.1) é sua energia cinética e (11.2) é sua energia potencial.

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2}_{(11.1)} - \underbrace{\frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}_{(11.2)} \quad (10)$$

Com isso podemos separar

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial y}{\partial t}} = \mu \frac{\partial y}{\partial t}}_{\text{Dependência temporal}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial y}{\partial x}} = -T \frac{\partial y}{\partial x}}_{\text{Dependência espacial}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial y}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial y}{\partial x}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \left| \quad y \longleftrightarrow \phi \right.$$

Conforme demonstrado anteriormente, podemos chegar às equações de movimento por meio de uma Lagrangiana. Fomos capazes de derivar a equação de onda para uma corda de forma contínua e também pudemos avaliar suas energias por meio da construção do campo.

Como veremos a seguir, este raciocínio também se aplica para o caso discreto onde os deslocamentos transversais são quantizados. Os deslocamentos serão  $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n$  também vale destacar que  $y_0 = y_{n+1} = 0$  pois os extremos são fixados.

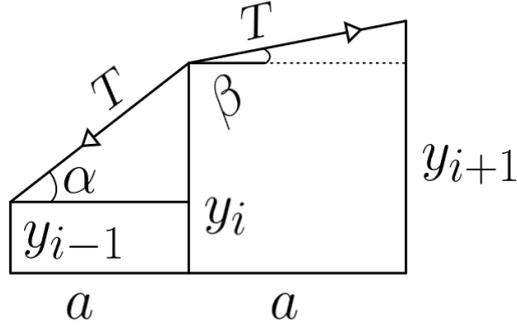


Figura 2: Esquema geométrico decompondo as forças sobre um ponto da corda

Onde  $i$  é a  $i$ -ésima partícula do modelo discreto

$$m\ddot{y}_i = T(\tan \beta - \tan \alpha)$$

$$m\ddot{n}_i = \frac{T}{a}[(y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1})]$$

Assim descrevemos

$$L = \sum_{K=1}^N \frac{m}{2} (\dot{y}_K)^2 - \sum_{K=0}^N \frac{T}{2a} (y_{K+1} - y_K)^2 - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}$$

$$L = -m\ddot{y}_i - \sum_{K=0}^N \frac{T}{a} \times (y_{K+1} - y_K)(\delta_{(K+1)i} - \delta_{Ki}) - m\dot{y}_i$$

$$L = -m\ddot{y}_i - \sum_{K=0}^N \frac{T}{a} \times (y_{K+1} - y_K)(\delta_{(K+1)i} - \delta_{Ki}) - m\dot{y}_i$$

$$L = \frac{T}{a} [(y_i - y_{i-1}) - (y_{i+1} - y_i)] \quad (11)$$

Aplicando o limite para o contínuo,  $\underbrace{\Sigma \longrightarrow \int}_{\text{Riemann}}$  a soma se transforma em uma integral.

$$L = \int \frac{u}{2} \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 \Delta x - \int \frac{T}{2} \left[ \frac{y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x} \right] \Delta x$$

para infinitos graus de liberdade temos a seguinte ação

$$S = \int \mathcal{L} dt dx \quad (12)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{T}{2} \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \Leftrightarrow \mathcal{L} = y \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] y \quad (13)$$

onde  $y(x, t)$  pode ser visto como um campo escalar  $\phi(x, t)$ .

A integral  $L = \int \mathcal{L} \Delta x$  é usada para somar as contribuições infinitesimais de todos os elementos ao longo da corda, resultando na energia total do sistema. De maneira geral inserindo uma interação corrente-campo temos como equação de movimento uma equação de onda inhomogênea

$$\mathcal{L} = \phi \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \phi + J\phi \quad (14)$$

$$\square \phi = J. \quad (15)$$

Essa abordagem é uma generalização da mecânica lagrangiana para sistemas contínuos, onde o sistema é dividido em elementos infinitesimais, e a Lagrangiana é usada para descrever a energia local em cada ponto. Em seguida, a integral sobre toda a extensão do sistema fornece a ação total do sistema, que é usada para derivar as equações de movimento através do princípio de Hamilton, assim como na mecânica lagrangiana convencional.

Essa forma da Lagrangiana é especialmente útil para sistemas contínuos, como cordas vibrantes, membranas vibrantes, campos de partículas e outros sistemas que possuem uma infinidade de graus de liberdade.

## 2.2 Campos vetoriais e a simetria de calibre

Campos vetoriais são conceitos fundamentais na física e na matemática que descrevem como as quantidades variam em diferentes pontos do espaço. Eles são representados por vetores, que têm magnitude e direção em cada ponto do espaço. Pense em um campo vetorial como uma espécie de vetor flecha em cada ponto do espaço, indicando a direção em que uma quantidade está agindo e sua intensidade.

Um exemplo comum de um campo vetorial é o campo de velocidade em fluidos. Em cada ponto de um fluido em movimento, podemos associar uma seta que mostra a velocidade do fluido naquele ponto. Outros exemplos incluem campos elétricos, campos magnéticos e campos de força gravitacional.

### 2.2.1 Simetria de Calibre

A simetria de calibre é um conceito importante na física, particularmente na teoria eletromagnética e na teoria das partículas elementares. Ela se refere a uma propriedade matemática das equações que descrevem campos, como o campo eletromagnético.

A ideia-chave da simetria de calibre é que diferentes descrições do mesmo fenômeno físico podem ser relacionadas por uma transformação matemática chamada "transformação de calibre" sem alterar o resultado observável. Em outras palavras, a simetria de calibre é uma redundância na descrição dos campos.

No contexto eletromagnético, a simetria de calibre está relacionada com a escolha de um potencial eletromagnético. O campo elétrico ( $E$ ) e o campo magnético ( $B$ ) podem ser calculados a partir do potencial elétrico ( $A^0$ ) e do vetor potencial magnético ( $A^i$ ) através das equações de Maxwell. No entanto, diferentes escolhas dos potenciais ( $A^\mu$ ) podem levar aos mesmos campos ( $E$ ) e ( $B$ ) e, portanto, representam a mesma física observável.

A simetria de calibre é uma ferramenta poderosa na teoria eletromagnética e em outras áreas da física, pois simplifica os cálculos e ajuda a entender as relações entre diferentes descrições dos campos físicos. Ela também desempenha um papel importante em teorias de partículas elementares, como a teoria eletrofraca, que unifica as interações eletromagnéticas e fracas.

Com o intuito de ganhar familiaridade com a simetria de calibre e suas consequências considere naturalmente um extensão da equação de onda de campos escalares para campos 4-vetoriais

$$\square \phi = 0, \quad \square = \partial_\mu \partial^\mu, \quad (16)$$

$$\square A_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (17)$$

Sendo assim formulamos a seguinte densidade de lagrangiana

$$L = \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu [\eta^{\mu\nu} \square] A_\nu \quad (18)$$

Com o intuito dessa equação ser invariante pela simetria de calibre local vide Apêndice [A](#)

$$A_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \quad (19)$$

procuramos um  $G^{\mu\nu}$  tal que a lagrangiana seja invariante pela transformação de calibre proposta, ou seja

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_\mu[\eta^{\mu\nu}\square + G^{\mu\nu}]A_\nu, \quad (20)$$

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\alpha)[\eta^{\mu\nu}\square + G^{\mu\nu}]A_\nu + A_\mu[\eta^{\mu\nu}\square + G^{\mu\nu}](\partial_\nu\alpha) + (\partial_\mu\alpha)[\eta^{\mu\nu}\square + G^{\mu\nu}](\partial_\nu\alpha) \quad (21)$$

onde a menos de derivadas totais temos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} [\eta^{\mu\nu}\square + G^{\mu\nu}]\partial_\mu &= 0 \\ [\eta^{\mu\nu}\square + G^{\mu\nu}]\partial_\nu &= 0 \\ [\eta^{\mu\nu}\square + G^{\mu\nu}]\partial_\mu\partial_\nu &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

cuja solução é imediata

$$G^{\mu\nu} = -\partial^\mu\partial^\nu \quad (23)$$

Agora se incluirmos um termo de interação corrente-campo ( $J_\mu A^\mu$ ) a simetria de calibre local nos diz que

$$\delta(J_\mu A^\mu) = J_\mu(\partial^\mu\alpha) = \partial^\mu(J_\mu\alpha) - (\partial^\mu J_\mu)\alpha \quad (24)$$

essa corrente de acoplamento deve ser conservada tendo em vista a equação da continuidade escrita na forma covariante  $\partial^\mu J_\mu = 0$ .

Portanto nossa densidade de lagrangiana com simetria de calibre que descreveria campos 4-vetoriais interagindo com 4-correntes seria a seguinte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}A_\mu[\eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu]A_\nu - J_\mu A^\mu \\ [\eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu]A_\nu &= J_\mu \end{aligned} \quad (25)$$

Vamos investigar agora se a equação anterior condiz com as equações de Maxwell em sua forma covariante.

### 2.2.2 Equações de Maxwell na forma covariante e a simetria de calibre

Usaremos as unidades naturais, onde definimos todas as constantes como

$$c = \mu = \epsilon = \hbar = 1$$

Pois podemos depois via análise dimensional retornar com as constantes sem nenhum tipo de perda.

Na interação entre a partícula com campo externo, temos que a ação (26):

$$S = S_{\text{livre}} + S_{\text{interação}} \quad (26)$$

Onde a partícula livre se dá pela equação (27) e a interação com o campo pela expressão (28).

$$S_l = - \int m dS \quad (27) \quad S_{int} = - e A^\mu dx_\mu \quad (28)$$

Em um intervalo  $dS^2 = dx_\nu dx^\nu$  junto ao princípio da mínima ação  $\delta S = 0$

1.  $x^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$
2.  $\delta dS = \frac{1}{\sqrt{dx^\mu dx_\mu}} dx^\mu \delta dx_\mu$
3.  $\delta S_l = \int m \frac{d^2 x^\mu}{dS^2} \delta x_\mu dS$
4.  $\delta(A^\mu dx_\mu) = -[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] \frac{dx_\nu}{dS} \delta x_\mu dS$
5.  $\delta S_{int} = e[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] \frac{dx_\nu}{dS} \delta x_\mu dS$

logo

6.  $m \frac{d^2 x^\mu}{dS^2} = -e F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{dS}$
7.  $F^{\mu\nu} = [ \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu ]$

Para velocidades Newtonianas, ou seja com ( $v \ll 1$ ), lembrando que (c) é definido como (1) em unidades naturais.

Temos que

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - e F^{io} - e F^{ij} \frac{dx_j}{dt} = e E^i + e (\vec{v} \times \vec{B})^i \quad (29)$$

com o 4-vetor

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E^i = -F^{io} = F^{oi} = -\frac{\partial}{\partial t} A^i - \frac{\partial}{\partial x^i} \phi \\ \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \vec{\nabla} \phi \end{array} \right. \quad (31)$$

Portanto

$$(\vec{v} \times \vec{B})^i = F^{ij} v_j = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^j = \epsilon^{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^j v_k \quad (32)$$

$$\epsilon^{ijk} v_k B_j \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Temos simetria de calibre

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu + \partial^\mu \alpha \quad (33)$$

1.  $\phi' = \phi + \partial^0 \alpha = \phi + \frac{\partial}{\partial t} \alpha$
2.  $\vec{A}'^i = \vec{A}^i + \partial^i \alpha = A^i - \frac{\partial}{\partial x^i} \alpha$
3.  $\phi' = \phi + \partial^0 \alpha = \phi + \frac{\partial}{\partial t} \alpha$
4.  $F'^{\mu\nu} = [\underbrace{\partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \alpha)}_0 - \partial^\nu (\underbrace{A^\mu + \partial^\mu \alpha}_0)]$
5.  $[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] = F^{\mu\nu}$

Sabendo que, através das identidades vetoriais, se o divergente do rotacional de um campo vetorial for igual a *zero*, isso implica que podemos definir um campo vetorial cujo divergente é nulo através do rotacional de uma nova função.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{A}$$

Onde  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  são funções quaisquer neste exemplo anterior.

Também sabemos das relações de *rotacional* e *gradiente* de uma função.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} B) = 0 \quad \vec{\nabla} B = \vec{A}$$

Onde  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  também são funções quaisquer neste exemplo.

Aplicando essas propriedades nas equações de Maxwell, podemos definir um potencial escalar e um potencial vetor.

$$[1] \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \quad [2] \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad [\text{Faraday - Lenz}] \quad (34)$$

$$[3] \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad [4] \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{tal que} \quad [\nexists \text{ monopolo magnético}] \quad (35)$$

Agora nos resta verificar que as correntes geram campos. Sabendo que  $S = \int \mathcal{L} d^4x$  e nossa  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int}$  e  $J^\mu = (\rho, \vec{j})$  por tanto temos que:

$$\mathcal{L} = -\underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_m} + \underbrace{J^\mu A^\mu}_{\mathcal{L}_{int}} \quad (36)$$

Observe que eq. (25) e eq. (36) são densidades de lagrangianas equivalentes, tendo em vista que uma se relaciona com a outra a menos de derivadas totais.

E por fim, podemos usar o conceito de simetria de calibre, que foi discutido brevemente na seção (2.2.1).

1.  $A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha$   
onde as equações são invariantes

$$\mathcal{L}'_m = \mathcal{L}_m \quad F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$$

2.  $J^\mu A'_\mu = J^\mu A_\mu + J^\mu \partial_\mu \alpha$
3.  $J^\mu \partial_\mu \alpha = \partial_\mu (J^\mu \alpha) - \partial_\mu J^\mu$   
onde temos a equação da continuidade  
 $\partial_\mu J^\mu = 0$

4.  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu$
5.  $-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu F^{\mu\nu} A_\nu + J_\nu A^\nu + \dots$   
[ Termos de superfície ]

portanto

6.  $\delta S = 0 \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$

7.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \delta A \quad \partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu$

A investigação a soluções da equação de onda inhomogênea  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$  pode ser vista no Apêndice B porém devemos fixar o calibre tendo em vista a condição covariante de Lorenz  $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_\mu [ \eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu ] A_\nu + B(\partial_\mu A^\mu) - J_\mu A^\mu \quad (37)$$

$$[ \eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu ] A_\nu - \partial^\mu B = J^\mu \quad (38)$$

$$B = - \partial^\nu A_\nu \quad (39)$$

onde  $B$  seria um campo independente interpretado como multiplicador de Lagrange necessário para abarcar a fixação de calibre.

## 2.3 Princípio da correspondência

O princípio da correspondência, na física, nos garante que sistemas microscópicos e discretos, tendem a se comportar como um sistema macroscópico no limite clássico, podemos tomar como exemplo a carga de um elétron, onde é a menor unidade de cargas possíveis na natureza e por tanto podemos dizer que a carga é quantizada, visto que sempre encontraremos múltiplos inteiros desta carga elementar, considerando não apenas o experimento de raios catódicos de Thomson associado a razão (carga/massa) mas também o experimento das gotículas carregadas de Millikan.

Não apenas a carga, sendo uma quantidade física, é quantizada, mas a energia do fóton via descrição da radiação de corpo negro de Planck, e também o momento angular tendo em mente as órbitas circulares de Bohr e o comportamento da matéria (átomo). A quantização de Planck e Bohr na descrição do comportamento da matéria e radiação pode ser generalizada na formulação de Wilson-Sommerfeld onde percebemos como motivação para a quantização o princípio da correspondência, afirma que o comportamento dos sistemas descritos pela antiga teoria quântica reproduz a física clássica no limite de grandes números quânticos, complementado pela observação física de que as quantidades que são quantizadas devem ser invariantes adiabáticas. O princípio da correspondência entre uma teoria clássica e uma teoria quântica sofre adaptações históricas tendo em vista não apenas a abordagem envolvendo a relação entre quantidades físicas e operadores diferenciais de Schrödinger em sua formulação ondulatória, mas também observando a relação entre o parêntese de Poisson de quantidades clássicas e comutadores de operadores quânticos na visão de Dirac.

Embora não podemos ter qualquer valor para cargas quando trabalhamos em sistemas com poucas partículas, ao analisarmos sistemas com um número grande o suficiente, os valores antes discretizados agora se tornam contínuos, já que podemos chegar a qualquer valor numérico combinando diferentes números de cargas, note que para que isso seja possível precisamos de uma quantidade de partículas grande, e que nossa carga só se tornaram continua quando atingir valores que estão a muitas ordens de grandezas maiores do que a carga elementar.

O mesmo podemos relacionar ao estudar a luz, seu comprimento de onda é tão pequeno comparado aos objetos de nosso dia a dia, que podemos sem perda nenhuma aproximar a trajetória desta onda como uma linha, assim chegamos na *Ótica Geométrica*.

### 2.3.1 Analogia ótico-mecânica

Para o Princípio da correspondência e suas nuances temos a Propagação de raios luminosos em meios inhomogêneos [ ótica ].

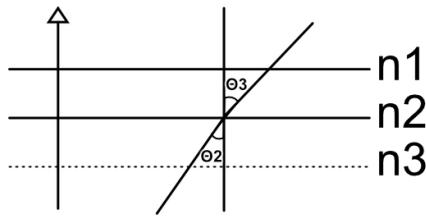


Figura 3: Esquema com três meios distintos onde há diferentes índices de refração.

$$\begin{cases} n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 \\ n \sin \theta = \text{constante} \end{cases}$$

Aperfeiçoando nossos conhecimentos em ótica, podemos descrever com grande precisão fenômenos atmosféricos, tais como miragens no asfalto, e uma série de outros efeitos causados pela luz.

Em estradas quentes no deserto, é comum observar miragens que fazem parecer que há água à frente, quando na verdade é apenas um reflexo da luz no asfalto quente.

Às vezes, o sol ou a lua parecem estar distorcidos e mais próximos do horizonte do que realmente estão, devido à refração da luz na atmosfera.

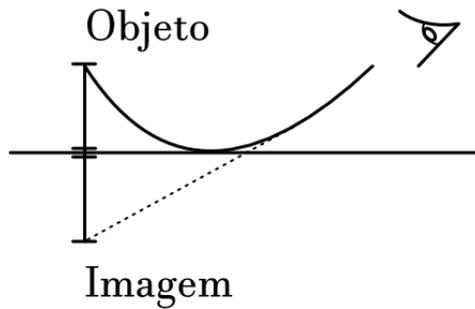


Figura 4: Esquema visual da projeção de uma miragem

A medida que  $n$  varia, a amplitude se altera. Podemos também generalizar para superfícies com  $n = \text{constante}$ .

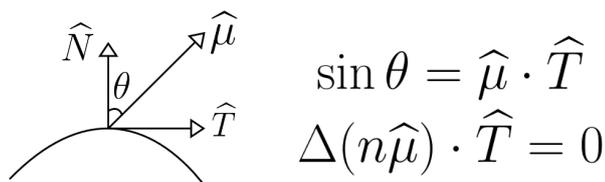


Figura 5: Decomposição de vetores e um ponto da onda

E se variarmos ao longo do raio, obtemos:

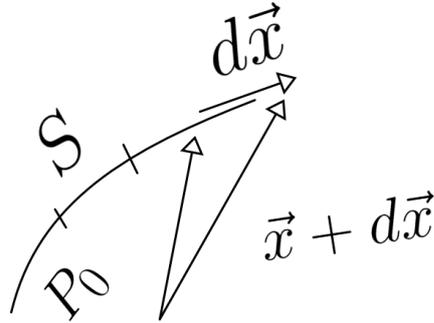


Figura 6: Curva construída por uma soma de vetores infinitesimais

$$(n\hat{\mu})^2 = n^2, \text{ diferenciado}$$

$$\hat{\mu} = \frac{d\vec{x}}{dS} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(n\hat{\mu}) \cdot d(n\hat{\mu}) = 2n \, dn \\ dn = \vec{\nabla}n \cdot d\vec{x} \\ \text{(gradiente)} \end{array} \right.$$

logo

$$\frac{d}{dS} \left( n \frac{d\vec{x}}{dS} \right) = \vec{\nabla}n \quad (40)$$

A expressão (40) é o que chamamos de *analogia ótica - mecânica*.

A analogia ótico-mecânica é uma maneira de relacionar os princípios da ótica, que lidam com a propagação da luz, aos princípios da mecânica, que tratam do movimento de objetos físicos. Ela é frequentemente usada para simplificar a compreensão de certos fenômenos ou conceitos, demonstrando como os princípios óticos podem ser comparados a eventos mecânicos.

Princípios variacionais são de grande utilidade não somente na ótica, tendo em vista o princípio de Fermat do tempo mínimo na descrição da reflexão e refração, mas em mecânica, e a relação entre ótico e mecânica pode ser percebida também nos estudos de Maupertuis e Jacobi.

Vamos usar um exemplo para ilustrar essa analogia: Imagine que você está olhando para um peixe dentro de um aquário. A luz do ambiente atinge a superfície da água e sofre refração, o que faz com que a imagem do peixe pareça estar em um local ligeiramente diferente do que realmente está. Isso ocorre porque a luz muda de velocidade ao passar da água para o ar, de acordo com as leis da ótica. Neste cenário, a luz se comporta de maneira semelhante a um objeto mecânico em movimento. A refração da luz na superfície da água pode ser comparada ao desvio ou mudança de direção que um objeto experimentaria ao passar de um meio para outro em uma situação mecânica. Se você imaginar um objeto físico, como uma bola, rolando de um terreno plano para um terreno inclinado, ele mudaria de direção devido à inclinação do solo. Da mesma forma, a luz muda de direção ao passar de um meio para outro de densidades diferentes. Assim podemos notar que em certas situações podemos aproximar a ótica com a mecânica, mesmo que seja uma onda, para grandes físicos do passado. A luz era composta por micropartículas mecânicas que se propagavam.

Sir Isaac Newton, tinha uma teoria particular sobre o comportamento da luz. Ele acreditava que a luz consistia em partículas minúsculas chamadas *corpúsculos de luz*. Essa teoria, conhecida como a teoria corpuscular da luz, era uma das duas principais teorias sobre a natureza da luz durante o século XVII, sendo a outra a teoria ondulatória.

É claro que nosso entendimento de ótica evoluiu ao longo do tempo, mas de certa maneira resgatamos posteriormente esta propriedade de partícula da luz com os fótons, na física moderna, claro, com as devidas ressalvas e correções. Mas a meu ver esta é uma das grandes belezas da física. Como há uma convergência entre as diferentes áreas.

A equação de campo escalar é uma equação que descreve o comportamento de um campo escalar em uma região do espaço-tempo. A equação de onda, por outro lado, é uma equação diferencial parcial que descreve como uma onda se propaga em um meio. Mas ela é comumente usada para descrever o comportamento de campos físicos como ondas sonoras, ondas eletromagnéticas e outras ondas na física de campos.

As duas equações estão relacionadas em certos contextos. Por exemplo, em física relativística, a equação de Klein-Gordon que iremos abordar mas adiante, descreve um campo escalar relativístico e tem uma forma que se assemelha à equação de onda. A equação de Klein-Gordon pode ser vista como uma generalização da equação de onda clássica para partículas relativísticas.

$$\frac{d}{dS} \left( n \frac{d\vec{x}}{dS} \right) = \vec{\nabla} n \quad (41)$$

Voltando a expressão (41) que obtivemos com a *analogia ótica - mecânica*. Em particular, para o caso homogêneo, com nosso  $n = \text{constante}$ .

$$\frac{d^2\vec{x}}{dS^2} = 0, \quad \vec{x} = \vec{a} \cdot S + \vec{b} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \vec{a} = \vec{\mu}_0 \\ \vec{b} = \vec{x}_0 \end{cases} \quad (42)$$

Temos a nossa propagação retilínea (42), assim, um raio de luz linear.

### 2.3.2 Conceitos básicos de mecânica analítica.

Nesta seção iremos conectar alguns conceitos introduzidos nos capítulos anteriores, e a partir destes conceitos chegaremos até os campos restantes.

A mecânica analítica é uma parte da física que nos ajuda a entender e prever o movimento dos objetos de uma forma mais eficiente e poderosa do que os métodos tradicionais da mecânica clássica. Ela se concentra em usar equações matemáticas para descrever o comportamento dos sistemas físicos, tornando os mais fáceis de resolver problemas complexos de movimento.

A principal ideia por trás da mecânica analítica é a de que podemos descrever o comportamento de um sistema físico usando uma quantidade chamada "Lagrangiano" e as equações de Euler-Lagrange. O Lagrangiano é uma função que depende das posições e velocidades das partículas em um sistema e descreve a energia total do sistema. As equações de Euler-Lagrange nos permitem derivar as equações de movimento do sistema a partir do Lagrangiano, o que simplifica muito a resolução de problemas complicados.

O interesse da física na mecânica analítica é enorme porque ela fornece uma abordagem mais geral e elegante para entender como os objetos se movem. Ela é particularmente útil quando lidamos com sistemas complexos, como partículas interagindo umas com as outras ou sistemas com restrições geométricas. Além disso, a mecânica analítica é fundamental para a formulação da teoria da relatividade de Einstein e é amplamente aplicada em áreas como a mecânica quântica e a astrofísica.

### 2.3.3 Princípio da mínima ação.

O princípio da ação mínima que é uma ideia fundamental na mecânica analítica e é frequentemente chamado de Princípio de Hamilton.

A ação de uma partícula é definida como a integral do Lagrangiano (L) ao longo de um certo intervalo de tempo (t). Matematicamente, é representada como a equação (43):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (43)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt \quad (\text{Lagrange}) \quad (44)$$

O princípio da ação mínima diz que a trajetória real que a partícula segue é aquela que torna a ação estacionária. Em outras palavras, a variação da ação deve ser zero para a trajetória real. Isso pode ser expresso como (45):

$$\delta S = 0 \quad (45)$$

A variação da ação, denotada como  $\delta S$ , é a diferença entre a ação ao longo da trajetória real e a ação ao longo de uma trajetória vizinha.

$$\delta S = S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)] \quad (46)$$

onde  $q(t)$  é a trajetória real e  $\delta q(t)$  é uma pequena variação na trajetória.

Substituindo a definição de ação e usando a expansão em série de Taylor, podemos escrever a expressão para a variação da ação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \delta \vec{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \delta \dot{\vec{x}} \right] dt \quad (\text{derivadas totais}) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \right) \right] \delta \vec{x} dt = 0 \end{aligned}$$

Com isso podemos obter as equações de Newton através do resultado das equações de Euler-Lagrange, que nos mostra como o Lagrangiano varia com a trajetória e suas derivadas, como podemos ver nas equações (47).

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \right)}_{\text{Euler-Lagrange}} = 0 \quad , \quad \underbrace{L = \frac{m (\dot{\vec{x}})^2}{2} - V(x)}_{\text{Cinética e Potencial}} \quad (47)$$

Para chegar até as equações de Newton

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) \quad (48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) = m \dot{x} \quad (49)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) = -\frac{dU}{dx} \quad (50)$$

$$\frac{d}{dt}(m \dot{x}) + \frac{dU}{dx} = 0 \quad (51)$$

$$\boxed{m \ddot{\vec{x}} = \vec{F} = -\vec{\nabla} V} \quad [ \text{Newton} ]$$

Esta é a forma das equações de Newton para uma partícula de massa  $m$  que se move sob a influência de uma força  $\vec{F}$ . Ela descreve como a aceleração da partícula ( $\ddot{x}$ ) é relacionada à força que atua sobre ela  $F(x)$ , de acordo com as leis de Newton.

### 2.3.4 Uniformidade temporal, conservação da energia e Hamiltoniana.

Agora iremos desenvolver alguns conceitos que serão de extrema importância para o desenrolar deste trabalho.

A uniformidade temporal é um princípio fundamental que nos afirma que as leis da física são as mesmas em todos os momentos. Isso implica que as leis da física não mudam com o tempo. Matematicamente, podemos representar a uniformidade temporal da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt}(K) = 0 \quad \text{Onde K é alguma quantidade física} \quad (52)$$

Isso significa que a taxa de variação dessa quantidade física com o tempo é igual a zero.

Por tanto, ao verificarmos nossa função  $L$  teremos (53):

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \dot{\vec{x}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \ddot{\vec{x}} + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \boxed{\dot{t} = 1} \quad (53)$$

$$\frac{dL}{dt} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \dot{\vec{x}}}_{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \right)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \ddot{\vec{x}} + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (54)$$

Observe que

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \right)$$

logo

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \dot{\vec{x}} \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \implies \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \dot{\vec{x}} - L \right] = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \quad [ \text{Legendre} ]$$

Portanto, para que as equações de Legendre sejam consistentes com o princípio da uniformidade temporal, o Lagrangiano  $L$  não deve depender explicitamente do tempo e a partícula deve estar se movendo com velocidade constante. Essas condições garantem que as leis da física que descrevem o sistema são as mesmas em todos os momentos, mantendo a uniformidade temporal.

Com isso  $H = \vec{p} \cdot \vec{x} - L$  (Hamilton)

Se  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V = E$  [ Conservação da energia ]

$$p = \sqrt{2m(E - V)}, \quad \vec{p} = m\dot{\vec{x}} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{x}} = \vec{v} \\ dS = v dt \end{array} \right.$$

E então retornamos para equação de Lagrange (55).

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}V \quad [ \text{Gradiente} ] \quad (55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dS}{st} \frac{d\vec{x}}{dS} \implies \vec{p} = p \frac{d\vec{x}}{dS} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = v \frac{d}{dS} \left( p \frac{d\vec{x}}{dS} \right) \end{array} \right.$$

Por outro lado

$$\vec{\nabla}_p = \frac{dp}{dV} \vec{\nabla}V = -\frac{1}{2} \sqrt{2m} [E - V]^{-\frac{1}{2}} \vec{\nabla}V$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{2m} [E - V]^{-\frac{1}{2}} \vec{\nabla}V = -\frac{m}{p} \vec{\nabla}V = -\frac{1}{v} \vec{\nabla}\vec{v}$$

$$\text{Portanto } \frac{d}{dS} \left[ p \frac{d\vec{x}}{dS} \right] = \vec{\nabla}p$$

Fazendo analogia com ótica definimos o índice de refração  $n = \frac{p}{p_0}$ ,  $p_0 = \sqrt{2mE}$

[ Adimensional ]

### 2.3.5 Equação de Hamilton-Jacobi

A equação de Hamilton-Jacobi é uma forma alternativa de descrever a evolução de um sistema dinâmico, em vez de usar as equações de movimento de Hamilton ou as equações de Lagrange. Ela é particularmente útil quando se deseja encontrar soluções analíticas para um sistema complexo ou quando se quer estudar o comportamento global do sistema.

Variando um dos extremos no princípio da mínima ação e utilizando o caminho otimizado

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \delta \vec{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \delta \dot{\vec{x}} \text{ variações} \quad (56)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \delta \vec{x} \right] dt \left\{ \begin{array}{l} \delta \vec{x}(t_2) = d\vec{x} \\ \delta \vec{x}(t_1) = \vec{0} \end{array} \right. \quad (57)$$

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \Big|_{t_2} \delta \vec{x} = \frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \quad (58)$$

$$\text{logo} \quad \frac{\partial S}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \Big|_{t_2} = \vec{p}(t_2) = dS \quad (59)$$

$$\delta S = L dt = \frac{\partial S}{\partial \vec{x}} d\vec{x} + \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad (60)$$

$$\text{Sendo assim} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = -H \\ H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L \end{array} \right. \quad (61)$$

### 2.3.6 A busca por uma equação de onda para descrever a matéria [Campo de Schrödinger]

A busca de Erwin Schrödinger por uma equação de onda para descrever a matéria ocorreu no início do século XX, em meio a uma revolução na física teórica que estava sendo desencadeada pelas descobertas e desenvolvimentos da física quântica. Vamos examinar nessa seção a motivação e o contexto histórico que levaram Schrödinger a essa busca.

No início do século XX, muitos dos físicos estavam lutando com os limites da física clássica, especialmente em sistemas atômicos e subatômicos. Experimentos, como o efeito fotoelétrico e a emissão de radiação dos corpos negros, não podiam ser explicados com os princípios da física clássica, o que levou à necessidade de uma nova teoria.

Isso porque em 1913, Niels Bohr propôs o modelo de átomo de hidrogênio, no qual os elétrons se moviam em órbitas quantizadas ao redor do núcleo, e a radiação era emitida ou absorvida quando os elétrons saltavam entre essas órbitas. Embora esse modelo fosse uma

melhoria significativa, ele ainda era um postulado e não tinha uma base teórica sólida.

Lembrando que, para resolver o problema em que a emissão de radiação da curva de emissão do Corpo Negro explodia para o infinito, Max Planck quantizou a energia, a fim de resolver o problema matematicamente, embora, em um primeiro momento, nem ele mesmo acreditasse que a energia era quantizada.

Em 1900, quando Planck desenvolveu sua teoria da radiação do corpo negro, ele estava buscando uma maneira de explicar as observações experimentais que não podiam ser explicadas pela física clássica. Planck propôs que a energia dos osciladores responsáveis pela emissão e absorção de radiação nos átomos era quantizada, ou seja, não poderia ter qualquer valor de energia, mas apenas valores discretos. Essa quantização era uma hipótese postulada, introduzida para fazer as equações coincidirem com as observações experimentais.

Schrödinger procurava uma teoria que unificasse todos os fenômenos quânticos, como o comportamento ondulatório das partículas e a quantização da energia. Ele queria uma teoria que desse conta tanto do comportamento de partículas subatômicas quanto do comportamento de ondas.

Ele estava insatisfeito com a natureza postulada do modelo de Bohr e procurava uma teoria mais fundamental e geral que não dependesse de suposições específicas sobre órbitas e transições.

Schrödinger estava interessado na dualidade onda-partícula, uma característica fundamental da física quântica. Ele queria encontrar uma equação que descrevesse tanto o comportamento de partículas quanto o comportamento ondulatório das partículas, unindo assim esses dois aspectos.

A dualidade onda-partícula foi inicialmente proposta por Louis de Broglie em sua tese de doutorado em 1924, antes da formulação da equação de Schrödinger, que ocorreu em 1925. De Broglie postulou que, assim como a luz pode ter propriedades de onda e partícula, as partículas também podem ter essas características dualísticas. Ele introduziu a ideia de que partículas como elétrons poderiam estar associadas a uma onda de matéria com um comprimento de onda relacionado à quantidade de momento da partícula<sup>1</sup>

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{62}$$

Portanto a equação de Schrödinger, desenvolvida em 1925, foi uma formulação matemática que descreveu a evolução temporal das funções de onda das partículas quânticas. Ela unificou as ideias de de Broglie sobre a dualidade onda-partícula com os desenvolvimentos anteriores na teoria quântica de Max Planck e outros.

---

<sup>1</sup>Para maiores detalhes dessa relação, veja o Apêndice C.

### 2.3.7 A equação de onda (Partícula livre)

Tendo em vista as equações de *Planck - Einstein* para os fótons

$$\left\{ \begin{array}{l} E = h\nu = \hbar\omega \\ E = pc \quad c = \lambda\nu = \frac{\omega}{K} \end{array} \right. \quad (63)$$

e a quantização do momento angular por *Bohr* ( $L = n\hbar$ ) de Broglie postula um comprimento de onda associado a partícula não relativísticas

$$\vec{p} = \hbar\vec{K}, \quad K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Neste caso  $\lambda = \frac{h}{p}$  onde  $p = \sqrt{2mE}$  para o caso de uma partícula livre. Por outro lado, com a equação de onda em mãos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \vec{\nabla}^2 \psi \quad v = \frac{\omega}{K} \\ \psi = Ae^{i(\vec{K} \cdot \vec{x} - \omega t)} \end{array} \right. \quad (64)$$

*Schrödinger* percebe que [ Partícula livre ]

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{\nabla}^2 + \vec{K}^2) \psi = 0 \\ \vec{K} = \frac{\vec{p}}{\hbar}, \quad K^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \end{array} \right. \quad (65)$$

$$\left[ \frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + E \right] \psi = 0 \quad (66)$$

onde ao introduzir o princípio da correspondência descrevemos o comportamento ondulatório de uma partícula livre

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \\ E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right. \quad (67)$$

$$\text{Operador Hamiltoniano} \left\{ \begin{array}{l} \hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \\ \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \end{array} \right. \quad (68)$$

### 2.3.8 Partícula interagente [ Analogia ótico-mecânica ]

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \vec{\nabla}^2 + \vec{K}^2 \right] \psi = 0 \\ \vec{k} = nK_0 \text{ [ Índice de Refração ]} \end{array} \right. \quad (69)$$

onde como vimos anteriormente

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \sqrt{1 - \frac{V}{E}} \\ p_0^2 = 2mE = \hbar^2 K_0^2 \end{array} \right. \quad (70)$$

Portanto

$$\left[ \vec{\nabla}^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V) \right] \psi = 0 \quad (71)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V \right] \psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (72)$$

$$\text{ou seja } \left\{ \begin{array}{l} \hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \\ \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \end{array} \right. \quad (73)$$

Por fim, fazendo a transformação  $\psi = \psi_0 e^{i\frac{S}{\hbar}}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \implies \frac{\partial S}{\partial t} = -H \quad [\text{Hamilton - Jacobi}] \quad (74)$$

### 2.3.9 Conservação da carga e equação da continuidade

$$\text{Como vimos } \left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \\ \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \end{array} \right. \quad (75)$$

Neste caso calculando a variação temporal do objeto  $|\psi| = \psi * \psi$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi * \psi) = \frac{\hat{p}}{2m} (\psi * \hat{p}\psi - \psi \hat{p}\psi^*) \quad (76)$$

ao compararmos com a equação da continuidade na forma diferencial temos que

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{relação} \quad \hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (77)$$

$$p = \psi * \psi \quad [\text{densidade de probabilidade}] \quad \vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m} (\psi * \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \quad (78)$$

### 2.3.10 Campo de Schrödinger e equação de movimento

$$\left[ E - V + \frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} \right] \psi = 0 \quad \left| \quad S = \int dt d^3\vec{x} \mathcal{L} \quad [\text{Densidade de Lagrangiana}] \quad (79)$$

$$\mathcal{L} = \psi^* \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V + \frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} \right] \psi \quad (80)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \psi^* i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{1}{2} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \psi - V \psi^* \psi - \frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* \quad (81)$$

A menos de derivadas totais  
 $\psi$ ,  $\psi^*$  independentes

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_t \psi, \vec{\nabla} \psi; \psi^*, \partial_t \psi^*, \vec{\nabla} \psi) \quad (82)$$

$$\delta S = \int dt d^3 \vec{x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} \delta \psi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)^*} \delta (\partial_t \psi)^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \psi)^*} \delta (\vec{\nabla} \psi)^* + \dots \text{mesmo para } \psi \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)^*} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \psi)^*} \right) = 0 \quad (83)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi^*)} = i\hbar \psi \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\psi^*)} = -V \psi \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \psi^*)} = \frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla} \psi \quad (84)$$

$$\left[ -V + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \right] \psi = 0 \quad (85)$$

Observe que a lagrangiana de Schrödinger em eq. (81) é invariante pela transformação de calibre global

$$\psi \rightarrow \exp[ i\alpha ] \psi \quad (86)$$

$$\psi^* \rightarrow \exp[ -i\alpha ] \psi^* \quad (87)$$

onde a simetria de calibre local  $\alpha(t, \vec{x})$  é satisfeita implementando um campo vetorial compensador via prescrição do acoplamento mínimo

$$\partial_t \rightarrow \partial_t - iA_0 \quad (88)$$

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} - i\vec{A} \quad (89)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \quad (90)$$

### 2.3.11 Campo de Klein-Gordon-Fock

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad [ \text{Einstein} ] \quad (91)$$

Em notação relativística  $p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2 \quad (92)$$

Resgatando o princípio da correspondência

$$p^\mu = i\hbar \partial^\mu \begin{cases} E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \end{cases} \quad (93)$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (94)$$

$$\left[ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 \right] \phi = m^2 c^4 \phi \quad (95)$$

$$x^4 = (ct, \vec{x}) \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (96)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \equiv \square \quad (97)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu) \phi = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi \quad (98)$$

$$[\square + m^2] \phi = 0 \quad (99)$$

Sistema Natural de unidades  $\hbar = c = 1$   
Equação de movimento

$$L = \int d^3 \vec{x} \mathcal{L} \quad (100) \qquad S = \int d^4 x \mathcal{L} \quad (101)$$

$$\mathcal{L} = \hbar^2 \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 c^2 \phi^* \phi = -\hbar^2 \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + m^2 c^2 \phi^* \phi \quad (102)$$

$$\mathcal{L}(\phi^*, \partial_\mu \phi^*; \phi, \partial^\mu \phi) \quad (103)$$

$$\delta S = \int d^4 x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} \delta \phi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \delta (\partial_\mu \phi^*) \right]_{\delta \phi} + \dots \quad (104)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right) = 0 \quad (105) \qquad m^2 c^2 \phi + \hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad (106)$$

Da mesma forma que a equação de Schrödinger discutida anteriormente, a lagrangiana de Klein-Gordon em eq. (102) é invariante pela transformação de calibre global

$$\phi \rightarrow \exp[+i\alpha] \phi \quad (107)$$

$$\phi^* \rightarrow \exp[-i\alpha] \phi^* \quad (108)$$

onde a simetria de calibre local  $\alpha(t, \vec{x})$  é satisfeita implementando um campo vetorial compensador via prescrição do acoplamento mínimo

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (109)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \quad (110)$$

$$\mathcal{L} = -D_\mu \phi^* D^\mu \phi + m^2 \phi^* \phi \quad (111)$$

### 2.3.12 Campo de Dirac

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2 \quad p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) = i\hbar \partial^\mu \quad (112)$$

Procedimento de Dirac [ Equação de primeira ordem ]

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mcI)\psi = 0 \quad (113)$$

$$(\alpha + \alpha^\nu \partial_\nu)(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mcI) = \hbar^2 \square + m^2 c^2 \quad (114)$$

$$i\hbar(\alpha \gamma^\nu) \partial_\nu - (\alpha I)mc + i\frac{\hbar}{2}(\alpha^\nu \gamma^\nu + \alpha^\nu \gamma^\nu) \times \partial_\mu \partial_\nu - (\alpha^\nu I)mc \partial_\nu = \hbar^2 \square + m^2 c^2 \quad (115)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar(\alpha \partial^\mu) - (\alpha^\mu I)mc = 0 \\ i\frac{\hbar}{2}(\alpha^\nu \gamma^\nu - \alpha^\nu \gamma^\nu) = \hbar^2 \eta^{\mu\nu} \\ -(\alpha I)mc = m^2 c^2 I \end{array} \right. \quad (116)$$

Álgebra de Clifford  
Solução

$$\alpha = -mc \quad e \quad \alpha^\mu = -i\hbar \gamma^\nu \quad (117)$$

Densidade de Lagrangiana

$$S_D = \int d^4x \mathcal{L}_D \quad (118)$$

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i \overbrace{\hbar \gamma^\mu \partial_\mu}^{\hbar \not{\partial}} - mc) \psi \quad (119)$$

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} \bar{\psi} i \hbar \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - \frac{1}{2} i \hbar (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - mc \bar{\psi} \psi \quad [ \text{A menos de derivadas totais} ] \quad (120)$$

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_D(\bar{\psi}, \partial_\mu \bar{\psi}; \psi, \partial_\nu \psi) \quad (121)$$

$$\delta S_D = 0 = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\psi}} \delta \bar{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \delta (\partial_\mu \bar{\psi}) \right] \quad (122)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad (123)$$

Conservação de carga elétrica

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0 \quad (124)$$

$$\bar{\psi} (i \hbar \gamma^\mu \partial_\mu + mc) = 0 \quad (125)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad [ \text{equação da continuidade na forma covariante} ] \quad (126)$$

$$j^\mu = i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (127)$$

$$(i\hbar\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \underbrace{i\hbar}_{\text{}}\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu\psi) = 0 \quad (128)$$

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi, \quad (129) \quad Q = \int d^3\vec{x}j^0 \quad (130)$$

carga elétrica só é possível se

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \quad [ \text{Operador dagger} ] \quad (\gamma^0)^2 = 1 \quad (131)$$

Mais detalhes sobre a equação de Dirac podem ser vistas no Apêndice D. Por fim, da mesma forma que a equação relativística de Klein-Gordon discutida anteriormente, a lagrangiana de Dirac em eq. (120) é invariante pela transformação de calibre global

$$\psi \rightarrow \exp[i\alpha]\psi \quad (132)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \exp[-i\alpha]\bar{\psi} \quad (133)$$

onde a simetria de calibre local  $\alpha(t, \vec{x})$  é satisfeita implementando um campo vetorial compensador via prescrição do acoplamento mínimo

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (134)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \quad (135)$$

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (136)$$

### 3 Simetrias e Teorema de Emmy Noether no formalismo lagrangiano

#### 3.1 Mecânica

##### 3.1.1 Translação espacial (rígida)

$$\left\{ \begin{array}{l} L = L(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) \text{ sistema de } n \text{ partículas} \\ \vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \delta\vec{r}, \quad \delta\vec{r}_i = \epsilon\hat{n} \end{array} \right. \quad (137)$$

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i = 0 \implies \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right] \epsilon\hat{n} = 0 \quad (138)$$

Por outro lado, pelas equações de movimento

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) = \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad (139)$$

Logo

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \hat{n} \right] = 0, \quad \frac{d}{dt} [ \vec{p} \hat{n} ] = 0 \quad (140)$$

Onde (140) nos mostra a conservação do momento.

##### 3.1.2 Rotação espacial (rígida)

$$\left\{ \begin{array}{l} L = L(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) \\ \vec{r}_i = \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i \end{array} \right. \quad (141)$$

$$\begin{cases} \delta \vec{r}_i = r_i \sin(\theta) \delta \phi = (\delta \phi \hat{n}) \times \vec{r}_i \\ \delta \vec{v}_i = (\delta \phi \hat{n}) \times \vec{v}_i \end{cases} \quad (142)$$

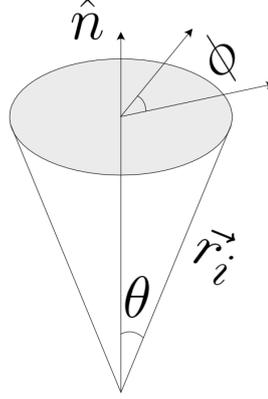


Figura 7: Esquema de rotação

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \delta \vec{v}_i \quad (143)$$

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} (\delta \phi \hat{n}) \times \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} (\delta \phi \hat{n}) \times \vec{v}_i \quad (144)$$

$$\delta L = \delta \phi \hat{n} \left[ \sum_i \left( \vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \vec{v}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) \right] \quad (145)$$

E temos (145) pelas equações de movimento

$$\delta L = \delta \phi \hat{n} \left[ \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i + \vec{v}_i \times \vec{p}_i \right] \quad (146)$$

$$\delta L = \delta \phi \frac{d}{dt} \left[ \hat{n} \left( \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right) \right] \quad (147)$$

$$\delta L = 0 \implies \frac{d}{dt} \left[ \hat{n} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right] = 0 \quad (148)$$

Portanto, temos nossa conservação do momento angular (149).

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[ \hat{n} \vec{L} \right] = 0} \quad (149)$$

### 3.1.3 Translação temporal

$$\left\{ \begin{array}{l} L = L(q, \dot{q}, t) \\ H = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \end{array} \right. \quad (150)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \ddot{q} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}} + \dot{q} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (151)$$

$$\frac{dH}{dt} = \dot{q} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (152)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies \frac{dH}{dt} = 0 \quad (153)$$

Com isso temos a conservação da energia (153).

## 3.2 Teorema de Emmy Noether

Nesta seção falaremos sobre o Teorema de Emmy Noether, que é um resultado fundamental na matemática e na física teórica por estabelecer uma conexão profunda entre simetrias e leis de conservação. Ele descreve como as leis de conservação emergem de simetrias nas equações de movimento. Para ilustrar o teorema de Noether, vamos consi-

derar um sistema mecânico simples descrito por uma única coordenada  $q(t)$  e uma única função lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$ .

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (154)$$

Agora, variando a ação  $S$  em relação à trajetória  $q(t)$ .

Isso é feito introduzindo uma perturbação infinitesimal  $\delta q(t)$  na trajetória:

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t) \quad (155)$$

E, conseqüentemente, uma perturbação infinitesimal na ação  $\delta S$ :

$$S \rightarrow S + \delta S \quad (156)$$

A variação  $\delta S$  da ação pode ser escrita como:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt \quad (157)$$

Aplicando o Teorema de Noether

Se o sistema possui uma simetria contínua em relação a uma transformação

$$q \rightarrow q + \epsilon \eta(q, t)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro infinitesimal e  $\eta(q, t)$  é uma função arbitrária, então podemos aplicar o teorema de Noether.

O teorema de Noether estabelece que, para cada simetria contínua, existe uma quantidade conservada correspondente. A quantidade conservada  $I$ , podemos descrever pela expressão (158):

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta - \alpha(q, t) \quad (158)$$

Aqui,  $\alpha(q, t)$  é uma função arbitrária que pode depender de  $q$  e  $t$ , mas não de  $\dot{q}$  ou  $\epsilon$ .

A quantidade  $I$  é uma constante ao longo das trajetórias que satisfazem a simetria contínua em questão. Isso significa que, se a lagrangiana  $L$  for invariante sob a transformação

$$q \rightarrow q + \epsilon \eta(q, t)$$

então  $I$  é uma quantidade conservada.

[ Dinâmica lagrangiana  $\longleftrightarrow$  Propriedades de simetria [ invariância ] ]

### 3.2.1 Simetrias e o Teorema de Emmy Noether no formalismo lagrangiano A [ caso particular de transformações ]

No contexto da formulação lagrangiana da mecânica podemos definir uma simetria como sendo (159)

$$\bar{L}(q', \dot{q}') = L(q(q'), \dot{q}(q', \dot{q}')) \quad (159)$$

Onde  $\bar{L}$  é nossa substituição de coordenadas antigas pelas novas, com as transformações pontuais  $q, \dot{q} \rightarrow q', \dot{q}'$ , são chamadas de *transformações de invariância* os tipos especiais de transformações, para qual é valido a expressão (160)

$$\bar{L}(q', \dot{q}') = L(q', \dot{q}') \quad (160)$$

Dessa maneira podemos escrever estas variações como sendo transformações do tipo

$$q \longrightarrow q' = q + \epsilon h$$

$$\dot{q} \longrightarrow \dot{q}' = \dot{q} + \epsilon \dot{h}$$

Substituindo na equação anterior

$$L(q + \epsilon h, \dot{q} + \epsilon \dot{h}) \quad (161)$$

Assim podemos expandir em séries de potências, aproximando apenas em termos de primeira ordem em  $\epsilon$

$$L(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + \epsilon \frac{\partial L}{\partial q} h + \epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} \implies 0 \quad (162)$$

Sabendo que podemos usar a equação de Euler-Lagrange (163) para fazer uma minimização

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \quad (163)$$

temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h = 0 \quad (164)$$

Sabendo da propriedade  $\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = \dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t)$

Podemos escrever nossa expressão (164) como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}(h) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \right) \quad (165)$$

Portanto, se definirmos um  $\mathcal{Q} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h$ , então  $\mathcal{Q}$  descreve uma quantidade conservada, visto que

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = 0 \quad (166)$$

Este é o teorema de Noether no formalismo lagrangiano. As quantidades  $\mathcal{Q}$ , são quantidades conservadas, também chamadas de *cargas de Noether*. Podemos estender a investigação do teorema de Noether anterior e estabelecer uma relação mais profunda entre simetrias nas leis da física e quantidades conservadas. Enquanto o Teorema de Noether lida principalmente com simetrias contínuas em sistemas mecânicos e campos, o Teorema estendido de Noether amplia seu alcance para sistemas mais gerais em teorias de campo e na mecânica quântica.

$$L \longrightarrow L' = L - \frac{d}{dt}F(q, t) \quad (167)$$

$$\bar{L}(q', \dot{q}') = L(q', \dot{q}') - \frac{d}{dt}F(q', t') \quad (168)$$

$$\begin{aligned} L(q(q'), \dot{q}(q', \dot{q}')) &= L(q', \dot{q}') - \frac{d}{dt}F(q', t') \\ &= L(q + \epsilon h, \dot{q} + \epsilon \dot{h}) - \frac{d}{dt}F(q', t') \\ &= L(q, \dot{q}) + \epsilon \frac{\partial L}{\partial q} h + \epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} - \frac{d}{dt}F(q', t') \\ &= L(q, \dot{q}) + \epsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h + \epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} - \frac{d}{dt}F(q', t') \\ &= L(q, \dot{q}) + \epsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h - \frac{1}{\epsilon} F \right) \end{aligned}$$

Por fim, temos que (169) precisa ser 0

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h - \frac{1}{\epsilon} F \right) = 0 \quad (169)$$

Este é o teorema de Noether estendido, se a lagrangiana for alterada pelo acréscimo da derivada total de uma função qualquer  $F(q, t)$ , a seguinte quantidade é conservada

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h - \frac{1}{\epsilon} F = \mathcal{Q}_r - \frac{1}{\epsilon} F \quad (170)$$

Nesse contexto costumamos usar os termos

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q} = \text{carga total de Noether} \\ \mathcal{Q}_r = \text{carga nua de Noether} \end{array} \right.$$

A *carga total de Noether* e a *carga nua de Noether* são conceitos usados na teoria de campos e física de partículas para entender as propriedades de conservação associadas às simetrias de uma ação física.

A carga total de Noether está relacionada a simetrias de uma ação física e é uma quantidade conservada, enquanto a carga nua é uma propriedade intrínseca das partículas e pode ser afetada por interações com outras partículas carregadas. A carga nua é especialmente importante na teoria eletromagnética, onde a blindagem de cargas influencia as interações entre partículas carregadas.

### 3.2.2 Simetrias e o Teorema de Emmy Noether no formalismo lagrangiano B [ caso geral de transformações ]

Considere a transformação infinitesimal geral

$$\left\{ \begin{array}{l} t' \longrightarrow t + \epsilon X(q, t) \\ q_i' \longrightarrow q_i(t) + \epsilon \psi_i(q, t) \end{array} \right. \quad (171)$$

Dizemos que a ação permanece invariante sob esta transformação se

$$\Delta S = \int_{t'_1}^{t'_2} L\left(q'(t'), \frac{d}{dt'} q'(t'), t'\right) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \frac{d}{dt} q(t), t\right) dt = 0 \quad (172)$$

Notemos que inicialmente

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt'}{dt} = 1 + \epsilon \dot{X} \quad \text{Taylor} \\ \frac{dt}{dt'} = (1 + \epsilon \dot{X})^{-1} = (1 - \epsilon \dot{X}) \end{array} \right. \quad (173)$$

$$\frac{dq'_i}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dq'_i}{dt} = (1 - \epsilon \dot{X})(\dot{q}_i + \epsilon \dot{\psi}_i) = \dot{q}_i + \epsilon \xi_i, \quad \xi_i = \dot{\psi}_i - \dot{q}_i \dot{X} \quad (174)$$

Neste caso

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \epsilon \psi, \dot{q} + \epsilon \xi, t + \epsilon X)(1 + \epsilon \dot{X}) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (175)$$

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ L + \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \xi_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \epsilon \dot{X} \right] (1 + \epsilon \dot{X}) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (176)$$

$$\Delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} X + L \dot{X} \right] dt \quad (177)$$

$$\Delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i \left[ \psi_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + (\dot{\psi}_i - \dot{q}_i \dot{X}) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + L \dot{X} + X \frac{\partial L}{\partial t} \right\} dt = 0 \quad (178)$$

$$\sum_i \left[ \psi_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + (\dot{\psi}_i - \dot{q}_i \dot{X}) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + L \dot{X} + X \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (179)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange, temos que

$$\sum_i \left[ \psi_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + (\dot{\psi}_i - \dot{q}_i \dot{X}) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + L \dot{X} + X \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (180)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_i \psi_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) \dot{X} + X \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (181)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \psi_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - HX \right] = 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i - \psi_i) - LX \right] = 0 \end{array} \right. \quad \boxed{\text{Aplicações} \quad L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)} \quad (182)$$

$$\left[ \text{Translação espacial} \quad X = 0 \quad \psi_i = \hat{n} \cdot \hat{i} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_i \hat{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right] = \frac{d}{dt} [\hat{n} \cdot \vec{p}], \quad \vec{p} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$$

$$\left[ \text{Rotação espacial} \quad X = 0 \quad \psi_i = (\hat{n} \times \vec{r}_i) \cdot \hat{i} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_i (\hat{n} \times \vec{r}_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \left( \sum_i \vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) \cdot \hat{n} \right] = \frac{d}{dt} [-\hat{n} \cdot \vec{L}] = 0 \quad \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\left[ \text{Translação temporal} \quad X = 1 \quad \psi_i = 0 \right]$$

$$\frac{d}{dt} [-H] = 0, \quad H = \sum_i q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

### 3.2.3 Simetrias da ação e Teorema de Noether em teoria clássica de campos

Dadas as transformações infinitesimais gerais

$$\left\{ \begin{array}{l} x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \\ \phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x) + \Delta\phi_\alpha \end{array} \right. \quad (183)$$

definimos  $\Delta$  como a alteração tanto da forma funcional quanto do seu argumento e também

$$\delta\phi_\alpha = \phi'_\alpha(x) - \phi_\alpha(x) \quad \text{alteração apenas da forma.} \quad (184)$$

Neste caso

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi_\alpha(x) = \delta\phi_\alpha(x) + \phi_{\alpha;\mu}\Delta x^\mu \\ \phi_{\alpha;\mu}(x) \equiv \partial_\mu\phi_\alpha(x) \end{array} \right. \quad (185)$$

$$\Delta\phi_{\alpha;\beta}(x) = \delta\phi_{\alpha;\beta}(x) + \phi_{\alpha;\beta;\mu}\Delta x^\mu \quad (186)$$

e dessa forma investigamos a invariância da ação perante a transformação proposta

$$\Delta S = \int_{\Omega'} d^4\alpha' \mathcal{L}(\phi'_\alpha(x'), \phi'_{\alpha;\beta}(x'), x') - \int_{\Omega} d^4\alpha \mathcal{L}(\phi_\alpha(x), \phi_{\alpha;\beta}(x), x) \quad (187)$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\phi_\alpha(x) + \Delta\phi_\alpha(x), \phi_{\alpha;\beta}(x) + \Delta\phi_{\alpha;\beta}(x), x + \Delta x) = \mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{\alpha;\beta}}\delta\phi_{\alpha;\beta} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\Delta x^\mu$$

$$\text{Pois } (\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu}\Delta x^\mu)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha} \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{\alpha;\beta}} \frac{\partial\phi_{\alpha;\beta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{array}{l} d^4x' = Jd^4x \\ J = \left(1 + \frac{\partial\Delta x^\mu}{\partial x^\mu}\right) d^4x \quad [\text{Jacobiano}] \end{array} \right. \quad (188)$$

onde utilizamos as identidades

$$B = 1 + \epsilon A$$

$$\det B = e^{\text{tr} \ln B} \sim e^{\epsilon \text{tr} A} \sim 1 + \epsilon \text{tr} A$$

sendo  $\text{tr} A$  é o traço de  $A$ .

Desprezando termos de ordem superior

$$\Delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[ \delta \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \Delta x^\mu + \mathcal{L} \frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right] = \int_{\Omega} d^4x \left[ \delta \mathcal{L} + \frac{d}{dx^\mu} (\mathcal{L} \Delta x^\mu) \right] \quad (189)$$

Agora usando as equações de movimento

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} = \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\mathcal{L}}{\partial \alpha_{\alpha;\beta}} \right)$$

obtemos

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} \delta \phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\beta}} \delta \phi_{\alpha;\beta} = \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\beta}} \right) \delta \phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\beta}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\delta \phi_\alpha) = \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\beta}} \delta \phi_\alpha \right)$$

$$\Delta S = \int_{\Omega} d^4x \frac{d}{dx^\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\mu}} \delta \phi_\alpha + \mathcal{L} \Delta x^\mu \right\} = 0 \quad (190)$$

cujos casos particulares de conservação são dados pela equações da continuidade  $\partial_\mu J^\mu = 0$  e  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  associadas a conservação de uma carga e energia-momento respectivamente.

### 3.2.4 Invariância da ação e quantidades conservadas

Se partirmos de uma ação  $S$  que depende de um campo escalar  $\phi$  e suas derivadas espaciais e temporais

$$S(\phi) = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \quad (191)$$

Agora, suponha que a ação  $S$  seja invariante sob uma transformação contínua de um parâmetro  $\epsilon$

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon \Delta\phi(x) \quad (192)$$

onde  $\epsilon$  é um pequeno parâmetro e  $\Delta\phi(x)$  é a variação infinitesimal do campo  $\phi$  devido à transformação.

Agora, vamos usar o teorema de Noether para encontrar a quantidade conservada associada a essa invariância.

$$\delta S = S(\phi') - S(\phi) \quad (193)$$

Onde  $S(\phi')$  e  $S(\phi)$  são as ações para os campos transformados e não transformados. Usando a invariância da ação, temos

$$S(\phi') = S(\phi + \epsilon \Delta\phi) = S(\phi) \quad (194)$$

Assim, a variação da ação é nula

$$\delta S = S(\phi') - S(\phi) = 0 \quad (195)$$

Agora, aplicamos o teorema de Noether, que nos diz que a quantidade conservada associada a essa invariância pode ser encontrada da seguinte maneira

$$\mathcal{Q} = \int J^0 d^x \quad (196)$$

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \Delta\phi - \eta^\mu \mathcal{L} \quad (197)$$

Neste caso, a componente temporal da densidade de corrente  $J^0$  se torna

$$J^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} \Delta\phi - \mathcal{L} \quad (198)$$

Agora, usando a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (199)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial^0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} \right) - \partial^i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^i \phi)} \right) = 0 \quad (200)$$

Substituindo para  $J^0$   $J^0 = \partial^0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} \Delta\phi - \mathcal{L} \right) - \partial^i J^i \Delta\phi \quad (201)$

Integrando  $J^0$  em  $d^3x$   $\mathcal{Q} = \int J^0 d^3x = \int \partial^0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} \Delta\phi - \mathcal{L} \right) d^3x \quad (202)$

onde a última igualdade é devida ao fato de que a segunda integral se anula devido às condições de contorno. Portanto,  $\mathcal{Q}$  é a quantidade conservada associada à invariância da ação sob a transformação contínua  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x)$

### 3.2.5 Aspectos gerais e aplicações envolvendo quantidades conservadas

Dados  $R$  parâmetros infinitesimais independentes e a transformação abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x^\mu = \sum_r X^{\mu|r} \epsilon_r \\ \Delta \phi_\alpha = \sum_r \psi_\alpha^{(r)} \epsilon_r \\ [ \text{Indices repetidos} ] \end{array} \right. \quad (203)$$

com a notação

$$\Delta x^\mu = X^{\mu r} \epsilon_r \quad [ \text{Notação de Soma} ] \quad (204)$$

$$\Delta \phi_\alpha = \delta \phi_\alpha + \phi_{\alpha,\mu} \Delta x^\mu \quad (205)$$

$$\psi_\alpha^{(r)} \epsilon_r = \delta \phi_\alpha + \phi_{\alpha;\nu} X^{\nu(r)} \epsilon_r \quad (206)$$

$$\delta \phi_\alpha = (\psi_\alpha^{(r)} - \phi_{\alpha;\nu} X^{\nu(r)}) \epsilon_r \quad (207)$$

$$\text{é possível concluir que } \Delta S = - \int_{\Omega} d^4x \epsilon_r \underbrace{\partial_\mu \Theta^{\mu(r)}}_0 = 0 \quad (208)$$

$$* \Theta^{\mu(r)} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\mu}} (\psi_\alpha^{(r)} - \phi_{\alpha;\nu} X^{\nu(r)}) - \mathcal{L} X^{\mu(r)}. \quad (209)$$

Vamos aplicar a equação anterior para explorar a conservação da energia e momento e também a conservação da carga.

### Conservação do 4-momento

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad \psi_\alpha^{(B)} = 0 \quad (210)$$

$$\Delta x^\mu = \epsilon^\mu = \underbrace{g^{\mu\beta}}_{x^{\mu(\beta)}} \epsilon_\beta \quad (211)$$

$$\Theta^{\mu(\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\beta}} \phi_{\alpha;\beta} X^{\beta(\nu)} - \mathcal{L} X^{\mu(\nu)} \quad (212)$$

$$[ \text{Klein - Gordon} ] \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\Theta \phi \partial^\Theta \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (213)$$

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\beta \phi g^{\beta\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} \quad (214)$$

[ Tensor energia-momento ]

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (215)$$

### Transformações globais e conservação da carga elétrica

Seja uma equação de um campo escalar complexo

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (216)$$

com a seguinte simetria global

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \longrightarrow e^{i\epsilon} \phi = \phi' = \phi + i\epsilon \phi \\ \phi^* \longrightarrow e^{-i\epsilon} \phi^* = \phi'^* = \phi^* - i\epsilon \phi^* \end{array} \right. \quad (217)$$

$$\Delta \phi = i\epsilon \phi \quad \Delta \phi^* = -i\epsilon \phi^* \quad (218)$$

$$\phi_1 = \phi, \quad \phi_2 = \phi^* \quad (219)$$

Na notação proposta

$$\Delta \phi_1 = \psi_1^{(1)} \epsilon_1 \quad \Delta \phi_2 = \psi_2^{(1)} \epsilon_1 \quad (220)$$

$$X^{\mu(1)} = 0, \quad \psi_1^{(1)} = i\phi \quad \psi_2^{(1)} = -i\phi^* \quad (221)$$

concluimos que

$$\Delta S = - \int_{\Omega} d^4x \epsilon_{(1)} \partial_\mu \Theta^{\mu(1)} = 0 \quad (222)$$

$$\Theta^{\mu(1)} \left\{ \begin{array}{l}
= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{1;\mu}} \psi_1^1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{2;\mu}} \psi_2^1 \\
= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} i \\
= -i\phi \partial^\mu \phi^* + i\phi^* \partial^\mu \phi \\
= +i[\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*] \\
= i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad \partial_\mu \Theta^{\mu(1)} \equiv 0
\end{array} \right. \quad (223)$$

Por outro lado seja uma equação de um campo fermiônico

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (224)$$

com a simetria global

$$\left\{ \begin{array}{l}
\psi \longrightarrow e^{i\alpha} \psi \sim \psi + i\alpha\psi \\
\bar{\psi} \longrightarrow e^{i\alpha} \bar{\psi} \sim \bar{\psi} - i\alpha\bar{\psi}.
\end{array} \right. \quad (225)$$

Na notação proposta

$$\left\{ \begin{array}{l}
\Delta\phi = i\alpha\psi \\
\Delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi}
\end{array} \right. \quad (226) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\epsilon_1 = \epsilon_2 = \alpha \\
\Delta\phi_1 - \psi_1^{(1)}\epsilon_1 \\
\Delta\phi_2 - \psi_2^{(2)}\epsilon_2 \\
X^{\mu(1)} = 0 \\
\psi_1^{(1)} = i\phi, \quad \psi_2^1 = -i\psi
\end{array} \right. \quad (227)$$

concluimos que

$$\Theta^{\mu(1)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \bar{\psi} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \psi \quad (228)$$

## 4 Simetrias e Teorema de Emmy Noether no formalismo hamiltoniano

### 4.1 Função de Hamilton, parênteses de Poisson e transformações canônicas

Partindo das equações de Lagrange com coordenadas generalizadas

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (229)$$

onde  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  e  $i = 1, 2, \dots, N$  é a função de Lagrange e definindo  $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ , para o caso não singular<sup>2</sup>

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t}$$

$$W_{ji} = \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}, \quad \det W \neq 0 \quad (230)$$

podemos escrever uma função de Hamilton via transformada de Legendre

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (231)$$

$$\dot{q}_i = f_i(q_i, p_i, t) \quad (232)$$

---

<sup>2</sup>Para o caso singular é necessário utilizar a metodologia de Dirac-Bergmann, onde temos vínculos e multiplicadores de Lagrange.

tendo em vista o conceito de função implícita. Observe que

$$\ddot{q}_i = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f_i}{\partial t}. \quad (233)$$

Neste caso temos o seguinte resultado

$$dH = \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^N \left( \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\dot{p}_i} \dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial p_i}}_{p_i} \dot{p}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (234)$$

por outro lado sendo  $H(q_i, p_i, t)$

$$dH = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (235)$$

somos conduzidos as equações abaixo

$$\dot{q}_i = + \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (236)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (237)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (238)$$

Agora ao considerarmos uma função  $F(q_i, p_i, t)$

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (239)$$

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (240)$$

definimos o parêntese de Poisson

$$\{F, H\}_P = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (241)$$

Sendo assim as equações de Hamilton podem ser escritas como

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}_P \quad (242)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}_P \quad (243)$$

Por fim vamos investigar o conceito de transformações canônicas e funções geradoras. Uma transformação no espaço de fase será de nosso interesse apenas se preservar a forma canônica das equações de movimento. Sejam  $Q_i(q_j, p_j, t)$  e  $P_i(q_j, p_j, t)$  tais que

$$\dot{Q}_i = \{Q_i, K\}_P \quad \text{e} \quad \dot{P}_i = \{P_i, K\}_P \quad (244)$$

$$K(Q_i, P_i, t) \quad (245)$$

A validade simultânea das equações canônicas anteriores nos levam ao resultado

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0 \quad (246)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^N P_i \dot{Q}_i - K \right) dt = 0. \quad (247)$$

Logo a menos de derivadas totais existe uma função  $\Phi(q_i, p_i, t)$  tal que

$$\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^N P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d\Phi}{dt} \quad (248)$$

$$d\Phi = \sum_{i=1}^N (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) + (K - H) dt \quad (249)$$

equação que serve para caracterizar uma transformação canônica.

Definindo a função geradora

$$F_1(q_i, Q_i, t) = \Phi(q_i, p_i(q_j, Q_j), t) \quad (250)$$

$$d\Phi = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (251)$$

somos conduzidos ao resultado

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad \text{e} \quad P_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad (252)$$

onde  $K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$ . É válido ressaltar que temos mais três espécies de transformações canônicas caracterizadas pelas funções geradoras.

## 4.2 Transformações canônicas e simetrias do sistema

Dadas as transformações canônicas infinitesimais

$$Q_i = q_i + \delta q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j, t) \quad (253)$$

$$P_i = p_i + \delta p_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j, t) \quad (254)$$

onde consideramos  $t$  fixo, temos o seguinte

$$\sum_{i=1}^N [ p_i dq_i - (p_i + \epsilon g_i)(q_i + \epsilon f_i) ] = -\epsilon \sum_{i=1}^N [ g_i dq_i + p_i df_i ] = \epsilon F \quad (255)$$

observando que desprezamos termos de ordem  $O(\epsilon^2)$ .

Como podemos ver

$$\sum_{i=1}^N (g_i dq_i - p_i df_i) = -dF \quad (256)$$

e neste caso podemos escrever a equação anterior da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^N (g_i dq_i - f_i dp_i) = -dG \quad (257)$$

$$G = \sum_{i=1}^N p_i f_i + F. \quad (258)$$

De imediato deduz-se que  $f_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}$  e  $g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$ , ou seja,

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} = \epsilon \{q_i, G\}_P \quad (259)$$

$$\delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} = \epsilon \{p_i, G\}_P. \quad (260)$$

Agora perante a transformação canônica infinitesimal anterior, a Hamiltoniana se transforma como nas equações (261, 262 e 263)

$$\delta H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \quad (261)$$

$$\delta H = \epsilon \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \quad (262)$$

$$\delta H = \epsilon \{H, G\}_P \quad (263)$$

Se a transformação canônica infinitesimal estudada é uma simetria do sistema, então

$$\delta H = 0. \quad (264)$$

### 4.3 Geradores de uma transformação e quantidades conservadas

Por outro lado tendo em vista que  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$  e  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$  temos como resultado da variação temporal do gerador  $G$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial G}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \quad (265)$$

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial G}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (266)$$

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \{G, H\}_P \quad (267)$$

e neste caso

$$\delta H = \epsilon \{H, G\}_P = - \epsilon \frac{dG}{dt} \quad (268)$$

e dessa forma o gerador da transformação canônica estudada é uma constante de movimento. Vamos agora apresentar alguns exemplos de transformações canônicas associadas a quantidades conservadas.

Primeiramente seja a transformação  $Q_i = q_i + \epsilon \delta_{ik}$ , temos que

$$\delta q_i = \epsilon \delta_{ik} = \epsilon \{q_i, G\}_P \quad (269)$$

$$\delta p_i = 0 = \epsilon \{p_i, G\}_P. \quad (270)$$

Logo o momento  $G = p_k$  é uma quantidade conservada.

Dando continuidade seja a transformação passiva dos eixos  $(x, y)$  perante uma rotação infinitesimal de um ângulo  $\theta$

$$x' = x - y d\theta \quad (271)$$

$$y' = y + x d\theta \quad (272)$$

$$z' = z \quad (273)$$

Tendo em vista a definição de momento angular  $L_z = xp_y - yp_x$  percebemos de imediato que o mesmo é um gerador da rotação anterior

$$\delta x = d\theta \{x, L_z\}_P \quad (274)$$

$$\delta y = d\theta \{y, L_z\}_P \quad (275)$$

$$\delta z = d\theta \{z, L_z\}_P = 0 \quad (276)$$

De maneira geral em notação vetorial

$$\delta \vec{x} = d\theta \{ \vec{x}, \vec{L} \cdot \hat{n} \}_P, \quad (277)$$

e neste caso uma rotação em torno de um eixo é representada pelas seguintes transformações canônicas infinitesimais

$$\vec{Q} = \vec{q} + \delta\vec{q} \quad (278)$$

$$\vec{P} = \vec{p} + \delta\vec{p} \quad (279)$$

onde

$$\delta\vec{q} = d\theta\{\vec{q}, \vec{L}.\hat{n}\}_P = d\theta\frac{dG}{d\vec{p}} \quad (280)$$

$$\delta\vec{p} = d\theta\{\vec{p}, \vec{L}.\hat{n}\}_P = -d\theta\frac{dG}{d\vec{q}} \quad (281)$$

sendo  $G = (\vec{q} \times \vec{p}).\hat{n}$ . Observe que não apenas

$$\delta\vec{q} = d\theta(\hat{n} \times \vec{q}) \quad (282)$$

$$\delta\vec{p} = d\theta(\hat{n} \times \vec{p}) \quad (283)$$

mas também que um escalar  $\vec{p}.\vec{q}$  é invariante por rotações pois

$$\delta(\vec{p}.\vec{q}) = \vec{p}.\delta\vec{q} + \delta\vec{p}.\vec{q} \quad (284)$$

$$\delta(\vec{p}.\vec{q}) = \vec{p}.d\theta\{\vec{q}, \vec{L}.\hat{n}\}_P + d\theta\{\vec{p}, \vec{L}.\hat{n}\}_P.\vec{q} \quad (285)$$

$$\delta(\vec{p}.\vec{q}) = \vec{p}.d\theta(\hat{n} \times \vec{q}) + d\theta(\hat{n} \times \vec{p}).\vec{q} \quad (286)$$

$$\delta(\vec{p}.\vec{q}) = d\theta [\vec{p}.\hat{n} \times \vec{q} + (\hat{n} \times \vec{p}).\vec{q}] = 0 \quad (287)$$

Por fim, vamos analisar o conceito de energia perante uma translação temporal  $t \rightarrow t + dt$ . Sendo assim

$$Q_i = q_i + \delta q_i = q_i(t + dt) \quad (288)$$

$$P_i = p_i + \delta p_i = p_i(t + dt) \quad (289)$$

Logo

$$\delta q_i = \dot{q}_i dt \quad (290)$$

$$\delta p_i = \dot{p}_i dt \quad (291)$$

onde

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad (292)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad (293)$$

Então a transformação canônica associada a translação temporal é gerada pela hamiltoniana. Por outro lado

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (294)$$

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \{H, H\}_P + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (295)$$

Se  $H$  não depender explicitamente do tempo, a energia será conservada.

#### 4.4 Simetrias da hamiltoniana e quantidades conservadas em teoria clássica de campos

Vimos anteriormente que a densidade de lagrangiana de um campo escalar complexo, a menos de termos de superfície, pode ser escrita da seguinte forma

$$L = \int d^4x \mathcal{L} \quad (296)$$

$$\mathcal{L} = \phi^* [ \square + m^2 ] \phi \rightarrow \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (297)$$

onde  $\phi^*$  e  $\phi$  são considerados independentes. Definindo a densidade de momento de forma usual

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^* \quad (298)$$

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi} \quad (299)$$

somos conduzidos via transformada de Legendre a uma densidade de Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L} \quad (300)$$

$$\pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L} = \pi^* \pi + \vec{\nabla} \phi^* \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^* \phi \quad (301)$$

Agora tendo em vista a variação

$$\delta \mathcal{H}(\phi, \phi^*; \pi, \pi^*) = \delta(\pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^*) - \delta \mathcal{L}(\phi, \phi^*; \dot{\phi}, \dot{\phi}^*) \quad (302)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi^*} \delta \phi^* + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \delta \pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^*} \delta \pi^* = \delta(\pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^*) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} \delta \phi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} \delta \dot{\phi}^*$$

juntamente com as equações de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (303)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} \right) = 0 \quad (304)$$

somos conduzidos as equações de Hamilton

$$\dot{\phi} = + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}, \quad \dot{\phi}^* = + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^*}, \quad (305)$$

$$\dot{\pi} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}, \quad \dot{\pi}^* = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi^*}. \quad (306)$$

Sendo assim, dada uma quantidade física  $F = \int d^3 \vec{x} \mathcal{F}(\phi, \phi^*; \pi, \pi^*)$ , escrita em termos de uma densidade, sua evolução no espaço de fase é dada por

$$\frac{dF}{dt} = \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{y} \left[ \frac{\partial \mathcal{F}(x)}{\partial \phi(y)} \dot{\phi}(y) + \frac{\partial \mathcal{F}(x)}{\partial \phi^*(y)} \dot{\phi}^*(y) + \frac{\partial \mathcal{F}(x)}{\partial \pi(y)} \dot{\pi}(y) + \frac{\partial \mathcal{F}(x)}{\partial \pi^*(y)} \dot{\pi}^*(y) \right] \quad (307)$$

$$\frac{dF}{dt} = \int d^3 \vec{x} \{ \mathcal{F}(x), \mathcal{H}(y) \}_P \quad (308)$$

onde é possível definir o parêntese de Poisson

$$\{ \mathcal{F}(x), \mathcal{H}(y) \}_P = \int d^3 \vec{y} \left[ \frac{\partial \mathcal{F}(x)}{\partial \phi(y)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}(y) + \frac{\partial \mathcal{F}(x)}{\partial \phi^*(y)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^*}(y) - \frac{\partial \mathcal{F}(x)}{\partial \pi(y)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}(y) - \frac{\partial \mathcal{F}(x)}{\partial \pi^*(y)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi^*}(y) \right] \quad (309)$$

Por fim, com o intuito de trazer a tona a simetria associada a campos escalares complexos, atentamos para o fato da densidade de hamiltoniana na equação (300) ser invariante pela seguinte transformação de fase global

$$\begin{aligned} \phi &= \exp(-i\alpha) \phi \rightarrow \phi - i\alpha \phi \\ \phi^* &= \exp(+i\alpha) \phi^* \rightarrow \phi + i\alpha \phi^* \\ \pi &= \exp(+i\alpha) \pi \rightarrow \pi + i\alpha \pi \\ \pi^* &= \exp(-i\alpha) \pi^* \rightarrow \pi - i\alpha \pi^* \end{aligned}$$

Neste caso tendo em mente a equação associada ao teorema de Noether no formalismo hamiltoniano

$$\delta\mathcal{H} = \alpha\{\mathcal{H}, \mathcal{Q}\}_P = -\alpha\frac{d\mathcal{Q}}{dt} \quad (310)$$

procuramos pelo gerador  $\mathcal{Q}$  associado a transformação de fase global estudada. Pois bem, observando não apenas as transformações

$$\delta\phi = \alpha\{\phi, \mathcal{Q}\}_P = -i\alpha\phi \quad (311)$$

$$\delta\phi^* = \alpha\{\phi^*, \mathcal{Q}\}_P = +i\alpha\phi^* \quad (312)$$

$$\delta\pi = \alpha\{\pi, \mathcal{Q}\}_P = +i\alpha\phi \quad (313)$$

$$\delta\pi^* = \alpha\{\pi^*, \mathcal{Q}\}_P = -i\alpha\pi^* \quad (314)$$

mas também as identidades

$$\{\phi, \pi\phi\}_P = \phi \quad (315)$$

$$\{\phi^*, \pi^*\phi^*\}_P = -\phi^* \quad (316)$$

$$\{\pi, \pi\phi\}_P = -\pi \quad (317)$$

$$\{\pi^*, \pi^*\phi^*\}_P = \pi^* \quad (318)$$

somos conduzidos ao gerador das transformações de fase globais

$$\mathcal{Q} = i(\pi\phi - \pi^*\phi^*) \quad (319)$$

associado a conservação de uma carga  $Q = \int d^3\vec{x} \mathcal{Q}$  e equivalente à análise lagrangiana veja a equação (223).

A metodologia aqui apresentada para a conservação da carga elétrica pode ser aplicada para outros tipos de conservação, bastando apenas encontrar o gerador associado a transformação de simetria estudada.

A simetria de calibre local

$$\phi \rightarrow \exp[i\alpha(x)]\phi \quad (320)$$

$$\phi^* \rightarrow \exp[-i\alpha(x)]\phi^* \quad (321)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (322)$$

também pode ser obtida na prescrição hamiltoniana de maneira natural via acoplamento mínimo

$$\partial_t \rightarrow \partial_t - ieA_0 \quad \vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} - ie\vec{A} \quad (323)$$

$$\mathcal{H} = (\pi^* - ieA_0)(\pi + ieA_0) + (\vec{\nabla}\phi - ie\vec{A}\phi)^*(\vec{\nabla}\phi + ie\vec{A}\phi) + m^2\phi^*\phi. \quad (324)$$

pavimentando assim a interação entre campos escalares e campos vetoriais.

## 5 Reflexões finais e perspectivas futuras

Como foi possível testemunhar, apresentamos a ideia de campos clássicos juntamente com suas simetrias e interações, utilizando como apoio os conceitos já pavimentados de mecânica analítica.

De início observando o comportamento de uma corda vibrante e o limite para o contínuo, tendo em vista infinitos graus de liberdade, encontramos a densidade de lagrangiana para campos escalares reais ( Klein-Gordon ).

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}\phi \square\phi \quad (325)$$

$$\square = \partial^\mu\partial_\mu \quad (326)$$

que seria uma equação de onda.

Aplicando a equação de onda para 4-vetores e supondo que nossa teoria possui a simetria de calibre local  $U(1)$  encontramos a densidade de Lagrangiana de Maxwell

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (327)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x). \quad (328)$$

Por outro lado tendo em mente o princípio da correspondência de Schrödinger via de Broglie e analogia ótico-mecânica

$$p^\mu = i\partial^\mu \begin{cases} E = i\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} = -i\vec{\nabla} \end{cases} \quad (329)$$

juntamente com a equação de Einstein  $E^2 - p^2 = m^2$  obtemos não apenas uma densidade de lagrangiana para campos escalares carregados e massivos

$$\mathcal{L}_{KG} = \phi^*(\square + m^2)\phi \quad (330)$$

mas também via argumento de Dirac

$$(\alpha + \alpha^\nu \partial_\nu)(i\gamma^\mu \partial_\mu - mI) = \square + m^2 \quad (331)$$

foi possível encontrar a densidade de lagrangiana de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (332)$$

Agora o acoplamento entre matéria (campos carregados massivos) e radiação (campo eletromagnético) pode ser obtido via prescrição do acoplamento mínimo aplicando a transformação

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (333)$$

levando em consideração a simetria de calibre local e sendo  $e$  uma carga elétrica, por exemplo.

Sabendo que o conceito de simetrias é um ponto central na Física, apresentamos como o Teorema de Noether é utilizado não apenas no formalismo lagrangiano mas também no hamiltoniano, investigando, digamos assim, duas faces da mesma moeda. Em especial, a conservação de carga, foi extraída não apenas diretamente das equações de movimento via equação de continuidade mas pela invariância da ação perante transformações de fase globais nos preceitos lagrangiano e também pelo gerador das transformações de fase globais na análise hamiltoniana. Tendo em mente Teoria de Grupos e simetrias, os campos estudados poderiam ser vistos como representações escalares, vetoriais e espinoriais do grupo de Lorentz-Poincaré. A análise de como as simetrias estabelecem o acoplamento entre campos e suas auto-interação também é um assunto muito sutil e celebrado. [84]

Por fim, levando em consideração campos escalares massivos, poderíamos propor campos vetoriais massivos vide Proca da seguinte forma

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (334)$$

porém esse termo massivo quebraria a simetria de calibre local tão essencial na nossa descrição das interações entre matéria e radiação. Pois bem, é possível restaurar a simetria de calibre local por meio de um campo compensador de Stüeckelberg  $B_\mu$  que se transforma de forma conveniente

$$\mathcal{L}_S = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2(A_\mu - B_\mu)(A^\mu - B^\mu) \quad (335)$$

$$B_\mu \rightarrow B_\mu - \partial_\mu\alpha(x). \quad (336)$$

O estudo de campos vetoriais massivos atentando para a quebra adequada da simetria de calibre (mecanismo de Higgs) foi de grande importância para a construção da teoria eletrofraca. Temos como perspectiva futura dar continuidade ao trabalho aqui apresentado e escrever um artigo para a Revista Brasileira de Ensino de Física com possíveis estudantes colaboradores envolvendo a teoria eletrofraca na abordagem de Stüeckelberg. [86]

## A As equações de onda inomogêneas: transformações e escolhas de calibre

As equações de ondas eletromagnéticas desempenham um papel fundamental na física, pois descrevem como campos elétricos e magnéticos se propagam no espaço e no tempo. Essas equações podem ser categorizadas em duas classes principais: equações homogêneas e equações inomogêneas, cada uma delas oferecendo uma perspectiva única sobre como as ondas eletromagnéticas se comportam em diferentes ambientes.

Equações de ondas eletromagnéticas homogêneas descrevem a propagação de ondas em meios onde não há presença de fontes de campos elétricos ou magnéticos, ou seja, em meios livres de cargas elétricas e correntes elétricas. Por outro lado, equações de ondas eletromagnéticas inomogêneas consideram a influência de fontes de campos elétricos e magnéticos em um meio, como cargas elétricas e correntes elétricas.

Neste contexto, exploraremos as características das inomogêneas destacando como elas são fundamentais para entender a propagação das ondas eletromagnéticas em diferentes

cenários.

Como vimos anteriormente [ *Potencial e Coulomb* ](337)

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(\vec{r}, t) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t') dv'}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \end{array} \right. \quad (337)$$

e também [ *Biot-Savart* ](338)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t') dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right. \quad (338)$$

Agora pela lei de Faraday-Lenz  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \\ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \\ \text{ou seja} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (339)$$

Então, se fizermos a transformação de  $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' + \vec{\nabla}\alpha$  e  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left( \phi' + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad (340)$$

Onde podemos definir as transformações de calibre como

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \phi' - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ \vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}\alpha \end{array} \right.$$

Tendo em vista as equações inhomogêneas (341)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right. \quad (341)$$

podemos então escrevê-las em termos do *potencial escalar* e do *potencial vetor* (342).

$$\left\{ \begin{array}{l} -\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right. \quad (342)$$

Identificando uma equação de onda para os potenciais  $\phi$  e  $\vec{A}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\vec{\nabla}^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} + \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$$

onde utilizamos a identidade  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$ .

Podemos fixar a arbitrariedade dos potenciais devido às transformações de calibre pela condição de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$$

Supondo que ela não seja satisfeita

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi'}_{\beta} + \vec{\nabla}^2 \alpha - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha$$

Podemos escolher um  $A$  tal que  $\beta$  seja igual a 0, resultando na expressão (343)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = \vec{\nabla}^2 \alpha - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha \quad (343)$$

Recuperando ou atingindo a condição de Lorenz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$

Portanto, temos equações de onda inhomogêneas descrevendo o comportamento dos potenciais (344).

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{array} \right. \quad (344)$$

## B Solução das equações de onda inhomogêneas via potenciais retardados e funções de Green

Vamos agora encontrar uma solução para as equações de onda inhomogêneas. Em um ponto  $P$  fora da distribuição de cargas, vide fig. 8.

Podemos utilizar a ideia de ondas esfericamente simétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = 0 \\ \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r, \phi = \frac{F}{r} \end{array} \right.$$

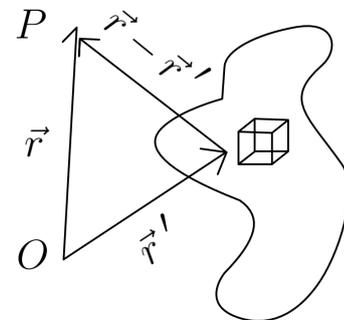


Figura 8: Distribuição de cargas

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad F = \overbrace{F_-(r - ct)}^{\text{Retardada}} + \underbrace{F_+(r + ct)}_{\text{Avançada}} \quad (345)$$

ou mesmo o fato da informação se propagar na velocidade da luz e intuir que

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c})}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dv' \quad (346)$$

em que

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad \text{e} \quad t' = t_R = t - \frac{R}{c}$$

Mostraremos que  $\phi$  é solução da equação de onda inhomogênea por substituição direta

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{\vec{\nabla}\rho}{R} + \rho \vec{\nabla} \frac{1}{R} \right] dv'$$

$$\vec{\nabla}\rho = \dot{\rho} \vec{\nabla} t_R = -\frac{\dot{\rho}}{c} \hat{R} (\vec{\nabla} R = \hat{R})$$

$$\text{e} \quad \vec{\nabla} \frac{1}{R} = -\frac{\hat{R}}{R^2} \quad \text{logo}$$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ -\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{R}}{R} - \rho \frac{\hat{R}}{R^2} \right] dv'$$

Dando continuidade, com as identidades

- $\vec{\nabla}\dot{\rho} = -\frac{\ddot{\rho}}{c} \vec{\nabla} R = -\frac{\ddot{\rho}}{c} \hat{R}$
- $\vec{\nabla} \left( \frac{\hat{R}}{R} \right) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \hat{R}}{R} + \hat{R} \vec{\nabla} \frac{1}{R} = \frac{1}{R^2}$

pois

$$\vec{\nabla} \frac{\hat{R}}{R} = \frac{3}{R} + \vec{R} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R} = \frac{2}{R}$$

- $\vec{\nabla} \frac{\hat{R}}{R^2} = 4\pi\delta^3(\vec{R})$

Portanto

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{\ddot{\rho}}{c^2 R} - 4\pi\delta^3(\vec{R})\rho \right] dv' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad (347)$$

Argumento análogo para o potencial vetor  $\vec{A}$ . Nas entrelinhas temos o princípio da causalidade desconsiderando os potenciais avançados  $t + \frac{R}{c}$ .

Por fim, podemos também explorar soluções pelo método de Green (348)

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \int G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \rho(\vec{r}', t') d^3\vec{r}' dt' \\ \left[ \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \times \delta(t - t') \quad [ \text{solução particular} ] \end{array} \right. \quad (348)$$

Tendo em vista a transformada de Fourier  $\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \int G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{2\pi} d\omega \\ (\vec{\nabla}^2 + K^2)G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r}, \vec{r}') \end{array} \right.$$

pois  $\frac{\omega^2}{c^2} = K^2$ . Observe que conhecemos a solução [ função de Green ] para o caso estudado

$$G \pm (\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{e^{\pm iK|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

pois

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

Neste caso

$$G_{\pm}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-e^{\pm iK|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{-i\omega(t-t')}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d\omega \quad (349)$$

$$G_{\pm}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{-1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega \left[ (t-t') \pm \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \right]} \right] \quad (350)$$

$$G_{\pm}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = - \frac{\delta \left[ (t-t') \pm \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \right]}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \begin{cases} G_{+} \text{retardada} \\ G_{-} \text{avançada} \end{cases} \quad (351)$$

Portanto

$$\begin{cases} \phi = \phi_n - \frac{1}{\epsilon_0} \int G_{+}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \rho(\vec{r}', t') d^3\vec{r}' dt' \\ \vec{A} = \vec{A}_n - \mu_0 \int G_{+}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \vec{J}(\vec{r}', t') d^3\vec{r}' dt' \end{cases} \quad (352)$$

Solução

[ homogênea + particular ]

## C A relação de Louis de Broglie

Como sabemos, a energia de uma partícula relativística é dada pela expressão de Einstein-Planck

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = h\nu_0. \quad (353)$$

Para o caso de uma partícula em repouso escrevemos a função de onda  $\psi$  proposta por de Broglie para descrever o comportamento da matéria

$$mc^2 = h\nu_0$$

$$\psi = A \sin(2\pi\nu_0 t)$$

e sendo assim perante uma mudança de referencial [ boost na direção  $\hat{x}$  ] escrevemos a função de onda via transformação de Lorentz

$$\psi' = A \sin \left( 2\pi\nu_0 \frac{\left( t - \frac{vx}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (354)$$

onde ao compararmos com a expressão  $\psi = A \sin(\omega t - kx)$  obtemos como resultados<sup>3</sup>

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c^2}{v\nu_0}$$

Sendo assim encontramos não apenas a velocidade de fase  $v_f$  mas também  $\lambda$

$$v_f = \lambda\nu = \frac{c^2}{v} = \frac{\lambda E}{h} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{hc^2}{v} \frac{1}{E} = \frac{h}{p} \quad (355)$$

onde  $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , mas também a velocidade de grupo  $v_g$

$$v_g = \frac{dE}{dp} \quad \Rightarrow \quad v_g = \frac{p}{E} c^2 = v \quad (356)$$

observando que utilizamos a relação  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ .

---

<sup>3</sup>Observe que  $\omega = 2\pi\nu$  e  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

## D Dirac e a equação relativística do elétron

A motivação histórica que levou Paul Dirac a procurar uma nova equação linear para a função de onda, diferente da equação de Schrödinger, está diretamente ligada ao desenvolvimento da teoria quântica e à busca de uma teoria que incorporasse os princípios da mecânica quântica e da teoria da relatividade especial.

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad + \quad E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

Para isso a Hamiltoniana  $\hat{H}$  foi reescrita como  $\hat{H} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)$

Dirac estava ciente de que a equação de Schrödinger não era compatível com a teoria da relatividade especial, que mostrava que a velocidade da luz era uma constante fundamental e que os princípios da relatividade eram válidos em todas as escalas de energia. Isso levou Dirac a buscar uma nova equação que fosse consistente com a teoria da relatividade e descrevesse com precisão o comportamento das partículas carregadas, como elétrons, a altas velocidades.

Em 1928, Paul Dirac publicou a famosa equação de Dirac, também conhecida como equação de Dirac do elétron relativístico. Essa equação era uma generalização da equação de Schrödinger que incorporava os princípios da relatividade especial de Einstein e previa propriedades quânticas do elétron, como o spin, que não eram consideradas pela equação de Schrödinger. A equação de Dirac também foi capaz de prever corretamente o spin do elétron e explicar fenômenos observados experimentalmente.

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \tag{357}$$

### O elétron positivo

A equação de Dirac é uma equação diferencial parcial que descreve o comportamento dos férmions, partículas com spin 1/2, no contexto da relatividade restrita. Ela é uma equação de primeira ordem que é representada em forma matricial, o que leva a quatro componentes independentes. Portanto, a equação de Dirac tem quatro soluções independentes, uma para cada componente do spinor.

Paul Dirac percebeu que a sua equação tinha quatro soluções independentes, que representavam diferentes combinações de energia e spin. Duas dessas soluções tinham energias positivas, o que foi interpretado como descrevendo o comportamento do elétron, uma partícula com carga negativa. No entanto, as outras duas soluções tinham energias

diferentes, e na época não havia uma interpretação física clara para essas soluções.

Dirac então sugeriu que as soluções com energia diferente poderiam representar a existência de uma partícula até então desconhecida, uma partícula idêntica ao elétron, mas com carga positiva. Isso foi uma ideia revolucionária na época, pois implicava que o universo não consistia apenas de partículas com carga negativa, mas também de partículas com carga positiva. Essa nova partícula foi chamada de *antipartícula* do elétron e posteriormente recebeu o nome de *pósitron*.

A previsão do pósitron por Dirac foi revolucionária e teve importantes consequências para a teoria quântica de campos e para a física de partículas. O pósitron foi posteriormente detectado experimentalmente, confirmando a previsão de Dirac e abrindo caminho para o desenvolvimento da teoria das antipartículas. Dirac recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1933 por suas contribuições à mecânica quântica, que incluíram a previsão teórica do pósitron.

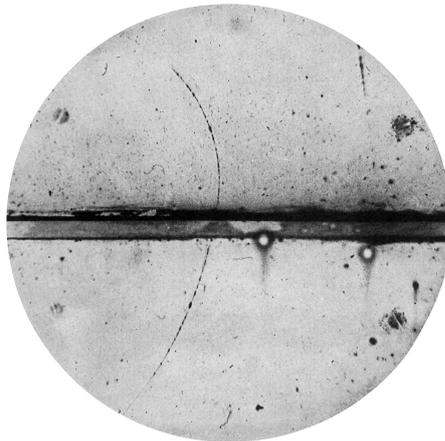


Figura 9: O primeiro pósitron identificado

A existência de pósitrons foi postulada pela primeira vez em 1928 pelo Dirac, pouco depois em 1932, o físico Carl David Anderson fez a confirmação ao observar o pósitron, uma partícula subatômica idêntica ao elétron, mas com carga positiva.

O pósitron foi detectado através de um experimento realizado no Laboratório de Radiações Cósmicas da Universidade de Caltech. O experimento consistia em usar uma câmara de névoa, um dispositivo que permitia visualizar partículas subatômicas em movimento.

Neste experimento, Anderson observou raios cósmicos que atravessavam a câmara de névoa e produziam trilhas de partículas quando interagiam com átomos do gás na câmara. Algumas das trilhas eram curvas, indicando que as partículas que as produziam tinham carga, o que era uma descoberta significativa.

Após cuidadosa análise, Anderson determinou que essas partículas curvas eram, na verdade, partículas com carga positiva. A descoberta do pósitron foi um marco na física de partículas, pois confirmou a existência da antimatéria.

Equação de Dirac

1.  $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$

2.  $\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \longrightarrow \hat{H}^2 |\psi\rangle = E^2 |\psi\rangle^2$

Tomando  $c = \hbar = 1$  [ unidades naturais ]

3.  $\hat{H}^2 |\psi\rangle = [ \hat{p}^2 + m^2 ] |\psi\rangle \quad \left| \quad \hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t} \quad \hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial_i} \right.$

4.  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)^2 |\psi\rangle = E |\psi\rangle$

Hamiltoniana modificada para tentar linearizar a equação

5.  $(\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) |\psi\rangle = E |\psi\rangle$

6.  $[ \alpha_i \alpha_i p_i p_i + (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m + \beta^2 m^2 ] |\psi\rangle = i \partial_0 |\psi\rangle$

Para que  $(H^2)$  seja igual a  $(p^2 + m^2)$  precisamos cumprir 10 condições

7.  $[ \overbrace{\alpha_i^2}^1 p_i^2 + \underbrace{(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i)}_0 p_i p_j + \underbrace{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i)}_0 p_i m + \overbrace{\beta^2}^1 m^2 ] = p^2 + m^2$

Como não comutam podem ser matrizes,  $\alpha_i^2$  e  $\beta_i^2$  também precisam ser 1

As 10 condições para encontrar uma solução

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 = 0 & \alpha_1 \beta + \beta \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2 = 0 & \alpha_2 \beta + \beta \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_3 = 0 & \alpha_3 \beta + \beta \alpha_3 = 0 \\ (\alpha_1)^2 = (\alpha_2)^2 = (\alpha_3)^2 = \beta^2 = 1 & \end{array} \right.$$

Também é possível mostrar que as Matrizes precisam ser **quadradas, pares e maiores que 2x2**.

As Matrizes de Pauli são um exemplo de 2x2, cumprem apenas **6** das **10** condições, por tanto não é uma solução como podemos ver na equação (358).

$$[ \sigma_i, \sigma_j ] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k \tag{358}$$

Matriz de Pauli  $\sigma_1$ :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Pauli  $\sigma_2$ :

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Pauli  $\sigma_3$ :

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se  $(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0)$ , logo  $(\alpha_i\beta = -\beta\alpha_i)$  e usando propriedade de determinantes, podemos mostrar que a matriz precisa ser par, visto que o determinante comuta por se tratar de um número como podemos ver na equação (359).

$$\begin{aligned} \det(\alpha_i\beta) &= \det(-\beta\alpha_i) \\ \det(\alpha_i)\det(\beta) &= \det(-\beta)\det(\alpha_i) \\ \det(\alpha_i)\det(\beta) &= \det(-I)\det(\beta)\det(\alpha_i) \\ \det(\alpha_i)\det(\beta) &= \det(-I)\det(\alpha_i)\det(\beta) \\ \det(I) &= \det(-I) \\ \text{logo} \\ \det(-I) &= +1 \end{aligned} \tag{359}$$

Determinante de Matriz Identidade Negativa:

$$\det(-I) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n$$

Com isso podemos afirmar que  $n$  precisa ser par  $[ n = 2q ]$  e  $[ n > 2 ]$ .

Quando lidamos com as matrizes soluções da equação de Dirac, é possível ter mais de uma representação disponível. Uma delas é a representação de Dirac-Pauli, enquanto também temos a representação de Weyl, chamada também de representação Quiral. Neste exemplo, iremos trabalhar com as matrizes na representação de Dirac.

Matrizes na representação de Dirac.

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}_i \\ \vec{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

O spinor de Dirac (360) é um conceito fundamental na física de partículas e na teoria quântica de campos, servem para descrever o comportamento intrínseco das partículas elementares com spin semi-inteiro. O spin é uma propriedade intrínseca das partículas. Os spinors de Dirac são soluções da equação de Dirac. Eles são objetos matemáticos complexos, com quatro componentes que representam projeções diferentes do spin da partícula.

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (360)$$

Também é importante mencionar que esse Spinor não se transforma como um 4-vetor sob transformações de Lorentz.

Determinando  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$ , podemos retornar a nossa equação e substitui os termos.

$$1. \quad (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Aplicando  $\beta$  em todo mundo pela esquerda, temos

$$2. \quad \beta [(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi] = \beta \left[ i \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]$$

$$3. \quad \beta \left[ (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \implies -i\beta\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi + m\psi = i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Passando para forma covariante

$$4. \quad (i\beta\partial_t + i\beta\vec{\alpha} \cdot \partial_i)\psi = m\psi \implies (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

Onde  $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\vec{\alpha})$

Matrizes  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ ,  $a_0 = I$

---

Matriz  $\gamma^0$ :

$$\beta I = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz  $\gamma^2$ :

$$\beta\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma}_2 \\ -\vec{\sigma}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


---

Matriz  $\gamma^1$ :

$$\beta\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma}_1 \\ -\vec{\sigma}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz  $\gamma^3$ :

$$\beta\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma}_3 \\ -\vec{\sigma}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


---

### Notação Slashed (Feynman)

A notação *slash* é uma convenção usada na física de partículas para representar as matrizes gama ( $\gamma^\mu$ ) em equações envolvendo a teoria quântica de campos relativística, especialmente na teoria de campos de Dirac. Ela é chamada de *notação slash* devido ao uso de uma barra diagonal sobre a matriz gama. Essa notação é frequentemente usada para simplificar e compactar equações.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad (i\rlap{\not{D}} - m)\psi = 0$$

Ela é frequentemente usada em física de partículas, especialmente em cálculos envolvendo diagramas de Feynman, que são usados para descrever interações de partículas em termos de processos quânticos.

$$\rlap{\not{D}} \equiv \gamma^\mu D_\mu = \gamma^0 D_0 + \gamma^1 D_1 + \gamma^2 D_2 + \gamma^3 D_3$$

## Referências

- [1] L. O’Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory* (Princeton University Press, Princeton, 1997).
- [2] W. Heisenberg, *On the Structure of Atomic Nuclei, I.* *Z. Physik* 77, 1 (1932).
- [3] E. Fermi, *Towards the Theory of  $\beta$ -Rays*, *Zs. f. Phys.* 88, 161 (1934).
- [4] I.G. Tamm, *Exchange Forces between Neutrons and Protons, and Fermi’s Theory*, *Nature* 133, 981 (1934).
- [5] H. Yukawa, *On the Interaction of Elementary Particles*, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.* 17, 48 (1935).
- [6] H. Yukawa and S. Sakata, *On the interaction of elementary particles II*, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* 19, 1084 (1937).
- [7] A. Proca, *Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs*, *J. Phys. Radium* 7, 347 (1936); *Sur la théorie du pósiton* *C. R. Acad. Sci. Paris* 202, 1366 (1936).
- [8] Liang-Cheng Tu, Jun Luo and George T Gillies, *The mass of the photon*, *Rep. Prog. Phys.* 68 77 (2005).
- [9] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley & Sons, Singapore, 1999).
- [10] E. C. G. Stueckelberg, *The interaction forces in electrodynamics and in the field theory of nuclear forces (I)*, *Helv. Phys. Acta* 11, 225 (1938); *The interaction forces in electrodynamics and in the field theory of nuclear forces (II)*, *Helv. Phys. Acta* 11, 299 (1938); *The interaction forces in electrodynamics and in the field theory of nuclear forces (III)*, *Helv. Phys. Acta* 11, 312 (1938).
- [11] J. Lacki, H. Ruegg and G. Wanders e E.C.G. Stueckel- berg, *An Unconventional Figure of Twentieth Century Physics* (Birkhäuser Verlag AG, Basel, 2008).
- [12] H. Weyl, *Gravitation and electricity*, *Preuss Akad. Wiss.* 465, 29 (1918).
- [13] H. Weyl, *Electrons and gravitation. I*, *Zeit. f. Physik* 330, 56 (1929).
- [14] C.N. Yang e R. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, *Phys. Rev.* 96, 191 (1954).
- [15] R. Utiyama, *Invariant Theoretical Interpretation of Interaction*, *Phys. Rev.* 101, 1597 (1957).
- [16] J. C. Taylor, *Gauge Theories In The Twentieth Century* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 2001).

- [17] O. A. Acevedo, R. R. Cuzinatto, B. M. Pimentel e P. J. Pompeia, Teorias de gauge a la Utiyama, *Rev. Bras. Ens. Fis.* 40, e4302 (2018).
- [18] N. Straumann, The Ninth Marcel Grossmann Meeting, editado por V.G Gurzadyan, R.T Jantzen e R. Ruffini (World Scientific, Singapore, 2002).
- [19] E. Wigner, Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, *Annals of Mathematics*, 40, 149 (1939).
- [20] W. Pauli, The connection between spin and statistics, *Phys. Rev.* 58, 716 (1940); Exclusion principle, Lorentz group and reflection of space-time and charge. In W. Pauli (Ed.), *Niels Bohr and the Development of Physics*, pp. 30–51. London: Pergamon Press.
- [21] A. Das e S. Okubo, *Lie Groups and Lie Algebras for Physicists* (World Scientific Publishing Company, Singapura, 2014).
- [22] Kazuhiko Nishijima, Charge Independence Theory of V Particles, *Progress of Theoretical Physics*, Volume 13, Issue 3, March 1955, Pages 285–304
- [23] M. Gell-Mann, The interpretation of the new particles as displaced charge multiplets. *Nuovo Cim* 4 (Suppl 2), 848(1956).
- [24] J.Schwinger A Theory of the Fundamental Interactions, *Annals of Physics* 2, 407-434 (1957); M. Gell-Mann and M. L évy, The Axial Vector Current in Beta Decay, *Il Nuovo Cimento* 16, 705 (1960).
- [25] R. P. Feynman and M. Gell-Mann, Theory of the Fermi Interaction, *Phys. Rev.* 109, 193 (1958).
- [26] J. Leite Lopes, A model of the universal fermi interaction, *Nucl. Phys.* 8, 234 (1958); Forty years of the first attempt at the electroweak unification and of the prediction of the weak neutral boson Z0, *Braz. J. Phys.* 29, n3 (1999).
- [27] E. C. G Sudarshan and R. E. Marshak, Chirality invariance and the universal Fermi interaction, *Phys Rev* 109: 18601862 (1958).
- [28] A. Salam and J. C. Ward, Weak and electromagnetic interactions, *Nuovo Cimento* 11, 568 (1959).
- [29] S. Glashow, The renormalizability of vector meson interactions, *Nucl. Phys.* 10, 107 (1959); Partial-symmetry of weak interactions. *Nucl. Phys.* 22, 579 (1961).
- [30] E. Noether, Invariant Variation Problems, *Math-phys. Klasse* 1918, 235 (1918); translated by M.A. Tavel, arXiv: 0503066v2 (2005).

- [31] A. Salam thesis, Developments in quantum theory of fields, 1951; A. Salam, Phys. Rev. 82, 217 (1951).
- [32] Y. Nambu, Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity, Phys. Rev. 117, 648 (1960).
- [33] J. Goldstone, Field Theories with Superconductor Solutions, Nuovo Cimento 19, 154 (1961).
- [34] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Broken Symmetries, Phys. Rev. 127, 965 (1962).
- [35] P. W. Anderson, Plasmons, Gauge Invariance, and Mass, Phys. Rev. 130, 439 (1963).
- [36] F. Englert and R. Brout, Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons, Phys. Rev. Lett. 13, 321 (1964).
- [37] P. W. Higgs, Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons, Phys. Rev. Lett. 13, 508 (1964).
- [38] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, Global Conservation Laws and Massless Particles, Phys. Rev. Lett. 13, 585 (1964).
- [39] S. Weinberg, A Model of Leptons, Phys. Rev 19, 21 (1967).
- [40] Gerardus 't Hooft, Renormalization of massless Yang-Mills fields, Nucl. Phys. B 33, 173 (1971).
- [41] Gerardus 't Hooft, Renormalizable Lagrangians for massive Yang-Mills fields, Nucl. Phys. B 35, 167 (1971).
- [42] Gerardus 't Hooft and J. G. Veltman, Regularization and renormalization of gauge fields, Nucl. Phys. B 44 189 (1972).
- [43] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Statistical Physics Part1, (Pergamon Press, Oxford, 1980); Statistical Physics Part2, (Pergamon Press, Oxford, 1980).
- [44] J. Bardeen, Theory of the Meissner Effect in Superconductors, Phys. Rev. 97, 1724 (1955).
- [45] L. Cooper, Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas, Phys. Rev. 104, 1189 (1956).
- [46] J. Bardeen, L. Cooper and J. R. Schrieffer, Microscopic Theory of Superconductivity, Phys. Rev. 106, 162 (1957); Theory of superconductivity Phys. Rev. 108, 1175 (1957).

- [47] M. Tinkham, Introduction to Superconductivity, (Dover, New York, 1996); V. V. Schmidt, The physics of superconductors. Introduction to fundamentals and applications, (Springer, Berlin,1997).
- [48] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I, Phys. Rev. 122, 345 (1961); Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II, Phys. Rev. 124, 246 (1961); V. G. Vaks and A. I. Larkin, On the Application of the Methods of Superconductivity Theory to the Problem of the Masses of Elementary Particles, Sov. Phys. JETP. 13, 192 (1961).
- [49] V. Koch, Aspects of chiral symmetry (2002).
- [50] S. Coleman and E. Weinberg, Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking, Phys. Rev. D. 7, 1888 (1973).
- [51] S. Coleman, R. Jackiw and H. D. Politzer, Spontaneous symmetry breaking in the  $O(N)$  model for large  $N$ , Phys. Rev. D 10, 2491 (1974).
- [52] Sidney Coleman - Aspects Of Symmetry-Cambridge University Press (1988).
- [53] Bryan Gin-ge Chen, David Derbes, David Griffiths, Brian Hill, Richard Sohn, Yuan-Sen Ting, Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory, (World Scientific, Singapore 2019).
- [54] R. Jackiw, Phys. Functional evaluation of the effective potential, Rev. D 9, 1686 (1974).
- [55] S. Weinberg, Gauge and global symmetries at high temperature, Phys. Rev. D 9, 3357 (1974).
- [56] Matsubara, A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics, Progr. Theor. Phys. 14, 351 (1955).
- [57] L. Dolan and R. Jackiw, Symmetry behavior at finite temperature, Phys. Rev. D 9, 3320 (1974).
- [58] D. Ebert, H. Reinhardt, and M. Volkov, Effective hadron theory of QCD, Prog. Part. Nucl. Phys. 33, 1 (1994).
- [59] A. Smetana, Electroweak Symmetry Breaking, (Springer, Switzerland, 2014).
- [60] S. Scheber, An introduction to relativistic quantum field theory, (Row, Peterson and Company, 1961).

- [61] S. Weinberg, The quantum theory of fields, Vol. I and II, Cambridge University Press, Cambridge 1996.
- [62] M. Srednicki, Quantum Field Theory, (University of California, Santa Barbara, 2006).
- [63] Chris Quigg, Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions, (Princeton University Press, Princeton, 2013).
- [64] M. D. Schwartz, Quantum Field Theory and the Standard Model, (Cambridge University Press, 2013).
- [65] E. Fradkin, Quantum Field Theory An Integrated Approach, (Princeton University Press, Princeton, 2021).
- [66] E. Fradkin, Field Theories of Condensed Matter Physics, (Cambridge University Press, Cambridge 2013).
- [67] C.P. Burgess, Introduction to Effective Field Theory, Thinking Effectively about Hierarchies of Scale, (Cambridge University Press, 2021).
- [68] M. Le Bellac, Thermal Field Theory, 1st edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [69] J. I. Kapusta and C. Gale, Finite-temperature field theory-principles and applications, (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [70] Jean Zinn-Justin, From Random Walks to Random Matrices, (Oxford University Press, Oxford 2019).
- [71] N. Nakanishi e I. Ojima, Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity, Lecture Notes in Physics (World Scientific, Singapore, 1990).
- [72] Bertrand Russell, The Problems of Philosophy, (Simon and Brown, 2013).
- [73] Nivaldo A. Lemos, Mecânica Analítica, (Livraria da Física, 2007); W. Greiner and Reinhardt, Field Quantization, (Springer, Berlin, 1996).
- [74] Aldrovandi and J. G. Pereira, An Elementary Introduction to Classical Fields, IFT-Unesp (2019).
- [75] J. B. Neto, Eletrodinâmica Quântica, notas de curso (IF/UFRJ, Rio de Janeiro, 1988); Ashok Das, Lectures on Quantum Field Theory, (World Scientific, Singapore, 2008).

- [76] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields* (Princeton University Press, Princeton, 2002); M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, (Perseus Books, New York, 1995); A. Maggiore, *Modern Introduction to Quantum Field Theory*, (Oxford, 2005).
- [77] J. L. Lopes, *Lectures on weak interactions: From Fermi-Majorana-Perrin to Glashow-Weinberg-Salam and some cotributions from Latin American physicists*, Mexico National University (1986); J. L. Lopes, *Gauge Field Theories an Introduction* (Pergamom Press, Oxford, 1981).
- [78] Magnar K. Bugge et all, ATLAS Masterclasses -W and Z path physics and presentation of the Z path measurement, *The European Physical Journal Conferences* 71, 00024 (2014); C. Kourkoumelis and S. Vourakis, HYPATIA—an online tool for ATLAS event visualization, *Physics Education* 49 (1), 22 (2014).
- [79] C. A. Bonin, G. B. de Gracia, A. A. Nogueira and B. M. Pimentel, Debye screening in generalized quantum electrodynamics, *Int. J. Mod. Phys. A* 35. 2050179 (2020).
- [80] A. Nogueira and F. L. Braghin, Spontaneous symetry breakings in the singlet scalar Yukawa model within the auxiliary field method, *Int. J. Mod. Phys. A* 37. 2250066 (2022).
- [81] C. A. Bonin, G. B. de Gracia, A. A. Nogueira and B. M. Pimentel, Generalized Stueckelberg-Higgs gauge theory, *Braz. J. Phys.* 52, 127 (2022); C. A. Bonin and B. M. Pimentel *Phys. Rev. D* 106, 016003 (2022).
- [82] F. A. Barone, A. A. Nogueira and B. M. Pimentel, O Efeito Casimir em Teoria das Fontes, *Revista Brasileira de Ensino de Física* vol. 38, e3317 (2016).
- [83] A. F. Ferrari, A. A. Nogueira e C. Palechor, Mínimo teórico para descrever campos quânticos em equilíbrio termodinâmico, *Rev. Bras. Ens. Fís.* 40, e3315 (2018).
- [84] A. Nogueira e D. R. da Silva, Teorias de calibre a la Shaw-Deser, *Rev. Bras. Ens. Fis.* 42, e20200137, 2020.
- [85] O. A. Acevedo and B.M. Pimentel, Teoremas de Nöther: um estudo, *Rev. Bras. Ens. Fis.* 45, e20230091 (2023).
- [86] H. Ruegg, M. Ruiz-Altaba, The Stueckelberg Field, *Int. J. Mod. Phys. A* 19, 3265 (2004).