

**TEORIA DE CAMPOS E SIMETRIAS NO VIEZ CONCEITUAL
DE MECÂNICA ANALÍTICA: UM BREVE ESTUDO NO
FORMALISMO LAGRANGIANO E HAMILTONIANO.**

Universidade Federal de Alfenas - MG

**Leonardo Ferreira Alves
Dr Anderson Antunes Nogueira**

Evolução, Planejamento e Caminho até aqui

Aspectos Introdutórios do Modelo Padrão
- Campos, Simetria de calibre
e Mecanismos de Geração de Massa

+

03/2023 ?

08/2023



Teoria de Campos e Simetrias no Vies Conceitual
de Mecânica Analítica: Um Breve Estudo no
Formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano

2

Evolução, Planejamento e Caminho até aqui

... mas parte II

Trabalho de conclusão de curso

**Aspectos Introdutórios do Modelo Padrão-
Campos, Simetria de calibre e
Mecanismos de Geração de Massa**

Orientador: prof. Dr. Anderson Antunes Nogueira
Aluno: Leonardo Ferreira Alves

1

UNIFAL-MG
2023

Discente: LEONARDO FERREIRA ALVES
Orientador: Prof. Dr. ANDERSON ANTUNES NOGUEIRA

TEORIA DE CAMPOS NO VIEZ CONCEITUAL DE
MECÂNICA ANALÍTICA: UM BREVE ESTUDO

1/2

UNIFAL
Alfenas - MG
2023



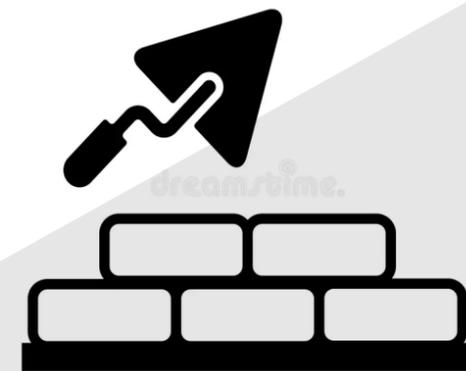
Discente: LEONARDO FERREIRA ALVES
Orientador: Prof. Dr. ANDERSON ANTUNES NOGUEIRA

TEORIA DE CAMPOS E SIMETRIAS NO VIEZ CON-
CEITUAL DE MECÂNICA ANALÍTICA: UM BREVE
ESTUDO NO FORMALISMO LAGRANGIANO E
HAMILTONIANO

2

UNIFAL
Alfenas - MG
2023

Objetivos



Primeiro contato com a Teoria de Campos



Discutir sobre os diferentes campos



Apresentar a matemática e seus formalismos

[Aplicação e Construção]

Modelo Padrão *mas...*

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ Quantidade X Qualidade



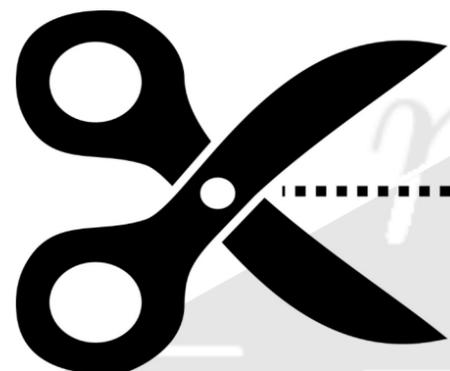
Reajuste do conteúdo



Modelo Padrão das Partículas Elementares

| | três gerações da matéria (férmions) | | | interações / partículas mensageiras (bósons) | |
|----------------|--|---|---|--|----------------------------------|
| | I | II | III | | |
| massa | $\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$ | $\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$ | $\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$ | 0 | $\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$ |
| carga | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 |
| spin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| QUARKS | u up | c charm | t top | g glúon | H higgs |
| | $\approx 4.7 \text{ MeV}/c^2$ | $\approx 98 \text{ MeV}/c^2$ | $\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$ | 0 | |
| | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | |
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | |
| | d down | s strange | b bottom | γ fóton | |
| | $\approx 0.511 \text{ MeV}/c^2$ | $\approx 105.66 \text{ MeV}/c^2$ | $\approx 1.7768 \text{ GeV}/c^2$ | $\approx 91.19 \text{ GeV}/c^2$ | |
| | -1 | -1 | -1 | 0 | |
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | |
| LÉPTONS | e elétron | μ múon | τ tau | Z bóson Z | |
| | $< 1.0 \text{ eV}/c^2$ | $< 0.17 \text{ MeV}/c^2$ | $< 18.2 \text{ MeV}/c^2$ | $\approx 80.39 \text{ GeV}/c^2$ | |
| | 0 | 0 | 0 | ± 1 | |
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | |
| | ν_e neutrino do elétron | ν_μ neutrino do múon | ν_τ neutrino do tau | W bóson W | |

BÓSONS DE GAUGE VETORIAIS
BÓSONS ESCALARES



Arquitetura do trabalho

Introdução > Campos (Escalares, Vetoriais, Fermiônicos.)

| | | |
|--------|---|----|
| 2 | Campos Escalares, Vetoriais e Fermiônicos | 4 |
| 2.1 | Campos escalares e o limite contínuo de um sistema mecânico discreto | 7 |
| 2.2 | Campos vetoriais e a simetria de calibre | 10 |
| 2.2.1 | Simetria de Calibre | 11 |
| 2.2.2 | Equações de Maxwell na forma covariante e a simetria de calibre | 13 |
| 2.3 | Princípio da correspondência | 17 |
| 2.3.1 | Analogia ótico-mecânica | 17 |
| 2.3.2 | Conceitos básicos de mecânica analítica. | 21 |
| 2.3.3 | Princípio da mínima ação. | 21 |
| 2.3.4 | Uniformidade temporal, conservação da energia e Hamiltoniana. | 23 |
| 2.3.5 | Equação de Hamilton-Jacobi | 25 |
| 2.3.6 | A busca por uma equação de onda para descrever a matéria [Campo de Schrödinger] | 26 |
| 2.3.7 | A equação de onda (Partícula livre) | 28 |
| 2.3.8 | Partícula interagente [Analogia ótico-mecânica] | 29 |
| 2.3.9 | Conservação da carga e equação da continuidade | 30 |
| 2.3.10 | Campo de Schrödinger e equação de movimento | 30 |
| 2.3.11 | Campo de Klein-Gordon-Fock | 32 |
| 2.3.12 | Campo de Dirac | 34 |

Campos escalares

Campos escalares são quantidades que têm um valor associado a cada ponto em um espaço, sem direção ou orientação.

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Contato com as diferentes notações da física de campos

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right] \delta \phi dt dx = 0$$

?dx?

$$L = \int \mathcal{L} dx; \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{\phi}^2 - \frac{T}{2} \phi'^2$$

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi', t, x)$$

$$\mu \ddot{\phi} - T \phi'' = 0$$

$$\ddot{\phi} - \frac{T}{\mu} \phi'' = 0 \rightarrow \partial^2 \phi - v^2 \nabla^2 \phi = 0$$

E novas notações...

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu X)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0$$

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \left(\eta^{\mu\nu} \frac{d}{dx^\mu} \frac{d}{dx^\nu} \right) H = 0$$

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \rightarrow \partial_\mu \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \rightarrow \partial_\mu \partial^\mu$$

Campos vetoriais...

Campos vetoriais são representações matemáticas que associam vetores a cada ponto em um espaço.

$$[1] \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \quad [2] \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad [\text{Faraday - Lenz}] \quad (34)$$

$$[3] \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad [4] \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{tal que} \quad [\neq \text{monopolo magnético}] \quad (35)$$

Agora nos resta verificar que as correntes geram campos. Sabendo que $S = \int \mathcal{L} d^4x$ e nossa $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int}$ e $J^\mu = (\rho, \vec{j})$ por tanto temos que:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_m} + \underbrace{J^\mu A^\mu}_{\mathcal{L}_{int}} \quad (36)$$

Equação de Klein-Fock-Gordon

O campo de Klein-Gordon descreve a dinâmica de campos escalares relativísticos.

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 \right] \phi = m^2 c^4 \phi$$

$$x^4 = (ct, \vec{x}) \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \equiv \square$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu) \phi = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \nabla^2 \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0.$$

Dirac

Combina a mecânica quântica e a teoria da relatividade especial. Ele descreve partículas com spin 1/2, fundamental na física de partículas e na teoria quântica de campos.

**Demonstração
da conservação de
carga elétrica.**

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)^2 |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

Aplicação e Construção

Mecânica Analítica

Newton

v

Lagrangiana

v

Hamiltoniana

Vínculos

Newton -> Forças de Vínculos e Forças Externas

Deslocamentos Virtuais

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi$$

Lagrangiana X Hamiltoniana

Posição, Velocidade X Posição, Momento

A abordagem lagrangiana usa o Princípio da Ação Mínima para derivar as equações de movimento do sistema.

Relações de Energia

A abordagem hamiltoniana usa as Equações de Hamilton, que são um conjunto de equações de primeira ordem em relação às coordenadas de posição e momentos.

Teorema de Emmy Noether

O teorema de Noether estabelece que, para cada simetria contínua de um sistema físico, existe uma quantidade conservada associada a essa simetria.

Essa quantidade conservada pode ser expressa por meio de uma corrente, e sua conservação é representada por uma equação de continuidade.



Teorema de Noether [Lagrangiana] [I]

3.2.3 Simetrias da ação e Teorema de Noether em teoria clássica de campos

Dadas as transformações infinitesimais gerais

$$\begin{cases} x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \\ \phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x) + \Delta\phi_\alpha \end{cases} \quad (183)$$

definimos Δ como a alteração tanto da forma funcional quanto do seu argumento e também

$$\delta\phi_\alpha = \phi'_\alpha(x) - \phi_\alpha(x) \quad \text{alteração apenas da forma.} \quad (184)$$

Teorema de Noether [Lagrangiana] [2]

$$\Delta S = \int_{\Omega} d^4x \frac{d}{dx^{\mu}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\mu}} \delta \phi_{\alpha} + \mathcal{L} \Delta x^{\mu} \right\} = 0$$



$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \text{ e } \partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

**Associadas a conservação de uma
carga e energia-momento**

Teorema de Noether [Lagrangiana] [3]

(214)

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\beta \phi g^{\beta\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$$

[Tensor energia-momento]

(215)

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} = 0$$

Teorema de Noether [Lagrangiana] [4]

Transformações globais e conservação da carga elétrica

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \longrightarrow e^{i\epsilon}\phi = \phi' = \phi + i\epsilon\phi \\ \phi^* \longrightarrow e^{-i\epsilon}\phi^* = \phi'^* = \phi^* - i\epsilon\phi^* \end{array} \right.$$

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \longrightarrow i\partial_{\mu}\phi^* \overset{\longleftrightarrow}{\partial^{\mu}} \phi = 0$$

Teorema de Noether [Lagrangiana] [5]

Conservação de Carga em Dirac

concluimos que

$$\Theta^{\mu(1)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \bar{\psi} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (228)$$

$$\partial_\mu \Theta^{\mu(1)} \equiv 0$$

$$i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0$$

Teorema de Noether [Hamiltoniana] [I]

$$\delta H = 0$$

Gerador de transformação é conservado

$$\delta H = \epsilon \{H, G\}_P = - \epsilon \frac{dG}{dt} \quad (268)$$

Aplicação em Klein - Gordon

$$\mathcal{H} = \pi^* \pi + \vec{\nabla} \phi^* \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^* \phi$$

Gerador

$$Q = i(\pi \phi - \pi^* \phi^*)$$

Transformações globais

$$\phi = \exp(-i\alpha)\phi \rightarrow \phi - i\alpha\phi$$

$$\phi^* = \exp(+i\alpha)\phi^* \rightarrow \phi + i\alpha\phi^*$$

$$\pi = \exp(+i\alpha)\pi \rightarrow \phi + i\alpha\pi$$

$$\pi^* = \exp(-i\alpha)\pi^* \rightarrow \phi - i\alpha\pi^*$$

Simetria de Gauge [Calibre]

$$\mathcal{L} = \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi^* \phi$$

Transformações Globais

$$\phi \rightarrow \exp[+i\alpha] \phi$$

$$\phi^* \rightarrow \exp[-i\alpha] \phi^*$$

Transformações Locais

$$\phi \rightarrow \exp[i\alpha(x)] \phi$$

$$\phi^* \rightarrow \exp[i\alpha(x)] \phi^*$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$$

Simetria de Gauge [Local]

[2]

Como consequência da simetria de calibre local, temos as interações dos campos via acoplamento mínimo.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{n^2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi$$

Considerações Finais

A mecânica Analítica e seu ferramental certamente facilitam e tornam possível a descrição de sistemas complexos.

A física e suas relações de Simetria e Conservação, para cada relação de simetria, há uma quantidade conservada nela.

Os campos físicos e suas descrições matemáticas mostram uma precisão sem igual no desenvolvimento de novos conhecimentos.

2023

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi$$