



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**Discente:** Matheus Passos Lauand  
**Orientador:** Prof. Dr. ANDERSON ANTUNES NOGUEIRA

No feitiço da simetria de calibre: Dinâmica das interações  
e a consistência dos acoplamentos entre os campos em  
Física Nuclear.

UNIFAL  
Alfenas - MG  
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**Discente:** Matheus Passos Lauand  
**Orientador:** Prof. Dr. ANDERSON ANTUNES NOGUEIRA

**No feitiço da simetria de calibre: Dinâmica das interações e a consistência dos acoplamentos entre os campos em Física Nuclear.**

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Física pela Universidade Federal de Alfenas.

**Área de concentração:** Partículas e Campos.  
**Orientador:** Professor Dr. Anderson Antunes Nogueira

UNIFAL  
Alfenas - MG  
2024

## Agradecimentos

Gostaria de aproveitar este momento para expressar minha gratidão a todas as pessoas e instituições que contribuíram para a realização deste trabalho e pela conclusão desta etapa de graduação. Gostaria de agradecer em especial a minha família, ao qual nunca mediu esforços para me suprir, com muito amor e companheirismo, me incentivando a concluir meus sonhos e minha formação, aos meus queridos professores, que sempre estavam lá para sanar minhas dúvidas e me orientar na compreensão dos mais complexos assuntos, ao meu orientador, que sempre disposto foi fundamental para a conclusão deste projeto, assim como outros já concluídos e a todos meus amados amigos, ao qual compartilhei momentos preciosos.

*Nós somos um conglomerado aleatório de átomos, que em meia aleatoriedade tomamos consciência de nós mesmo.*

---

— **Matheus Passos.**

# No feitiço da simetria de calibre

(Dinâmica das interações e a consistência dos acoplamentos entre os campos em Física Nuclear)

M. P. Lauand<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> *Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciências Exatas, Alfenas 37133-840, Brasil*

Maio, 2024

## Resumo

O presente trabalho explora os fundamentos da interação forte e suas conexões com simetrias de calibre  $SU(2)$  e  $SU(3)$ , estabelecendo uma visão unificada das forças nucleares e subnucleares. Inicialmente, a teoria de hadrodinâmica, baseada na simetria de calibre  $SU(2)$  global (isospin), é apresentada como uma ferramenta crucial para descrever as interações entre bárions e mésons. Inspirada por Heisenberg e influenciada pelo modelo de Yukawa, esta teoria explica como a troca de mésons massivos gera a força nuclear de curto alcance, essencial para a estabilidade dos núcleos atômicos. A simetria  $SU(2)$  não só garante a conservação do isospin e da carga elétrica, mas também permite tratar prótons e nêutrons como estados de uma mesma partícula, integrando as forças nucleares e eletromagnéticas sob uma descrição coesa. A partir dessa base, iremos nos aprofundar na descrição da álgebra de isospin, que relaciona propriedades como carga elétrica e número bariônico à simetria  $SU(2)$ . Essas ideias são estendidas à teoria de quarks, revelando que prótons e nêutrons são composições de quarks up e down. A estrutura matemática dessa simetria é representada por ferramentas como produtos tensoriais e diagramas de peso, que explicam a organização das partículas hadrônicas em termos de projeções de isospin. Por fim, vamos introduzir a cromodinâmica quântica (QCD) como o modelo que descreve a interação forte no nível mais fundamental, com base na simetria  $SU(3)$  local. Os quarks, carregados com "cores" vermelho, azul e verde, interagem por meio da troca de glúons, os mediadores dessa força. A estrutura lagrangiana da QCD, fundamentada na derivada covariante e nos geradores  $SU(3)$ , garante a consistência das transformações locais e explica fenômenos como confinamento de cor e a dinâmica de glúons. Esses elementos consolidam uma compreensão robusta das interações subatômicas, conectando os conceitos de isospin e cromodinâmica em uma abordagem unificada da física nuclear e de partículas. Este trabalho busca integrar essas ideias fundamentais em uma estrutura coesa, utilizando das noções básicas sobre os núcleons, partículas que formam o núcleo atômico, as forças que as mantêm unidas, as partículas mediadoras de tais interações e as partículas mais

fundamentais, que formam tais núcleons e partículas mediadoras. Oferecendo assim uma visão abrangente das interações fundamentais no nível subatômico.

**Palavras chaves:** Teoria de Campos; Simetria de calibre; Interações da Natureza

# In the Gauge Symmetry Spell

(Dynamics of interactions and consistency of couplings between fields in  
Nuclear Physics)

M. P. Lauand<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> *Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciências Exatas, Alfenas 37133-840,  
Brasil*

May, 2024

## Abstract

This work explores the foundations of the strong interaction and its connections to SU(2) and SU(3) gauge symmetries, establishing a unified view of nuclear and subnuclear forces. Initially, the theory of hadrodynamics, based on the global SU(2) gauge symmetry (isospin), is presented as a crucial framework for describing the interactions between baryons and mesons. Inspired by Heisenberg and influenced by Yukawa's model, this theory explains how the exchange of massive mesons generates the short-range nuclear force essential for the stability of atomic nuclei. The SU(2) symmetry not only ensures the conservation of isospin and electric charge but also allows protons and neutrons to be treated as different states of the same particle, integrating nuclear and electromagnetic forces into a cohesive description. Building on this foundation, we delve into the isospin algebra, which relates properties such as electric charge and baryon number to SU(2) symmetry. These ideas are extended to quark theory, revealing that protons and neutrons are compositions of up and down quarks. The mathematical structure of this symmetry is represented through tools such as tensor products and weight diagrams, which explain the organization of hadronic particles in terms of isospin projections. Finally, we introduce quantum chromodynamics (QCD) as the model that describes the strong interaction at its most fundamental level, based on local SU(3) symmetry. Quarks, carrying the "colors" red, blue, and green, interact through the exchange of gluons, the mediators of this force. The Lagrangian structure of QCD, founded on the covariant derivative and SU(3) generators, ensures the consistency of local transformations and explains phenomena such as color confinement and gluon dynamics. These elements consolidate a robust understanding of subatomic interactions, connecting the concepts of isospin and chromodynamics within a unified approach to nuclear and particle physics. This work aims to integrate these fundamental ideas into a cohesive structure, utilizing concepts about nucleons—the particles that form the atomic nucleus—the forces that bind them, the mediating particles of such interactions, and the most fundamental particles that constitute these nucleons and

mediators. Thus, it offers a comprehensive view of the fundamental interactions at the subatomic level.

**Keywords:** Field Theory; Gauge Symmetry; Interactions of Nature

---

\* [matheus.lauand@sou.unifal-mg.edu.br](mailto:matheus.lauand@sou.unifal-mg.edu.br)

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução ao tema (reflexões e conceitos)</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Hadrodinâmica e a simetria de calibre SU(2) global (isospin)</b>	<b>4</b>
2.1	Partículas massivas de Yukawa e a interação de curto alcance . . . . .	4
2.2	Interação entre dubleto de bárions, tripleto de mésons e singleto de fótons .	10
2.3	Simetria SU(2) global e a conservação de isospin e carga elétrica nos dubletos e tripletos . . . . .	14
2.4	O modelo de Heisenberg-Tamm para interação entre bárions via troca de mésons e fótons . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Isospin e a física de sabores up e down dos quarks</b>	<b>27</b>
3.1	Produto tensorial, soma direta e representações . . . . .	35
3.2	Diagramas de Feymann na representação Hadrônica por quarks: . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Cromodinâmica e a simetria de calibre SU(3) local na física das cores red, blue e green</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Considerações finais (resultados e perspectivas)</b>	<b>43</b>

# Lista de Figuras

1	Representação do núcleo do átomo de Hélio-3 ( ${}^3He$ ) sob trocas de mésons (píons) caracterizada pela força forte (responsável por manter a estrutura do núcleo do atômico) . . . . .	12
2	Interação do Próton com um Píon sem carga e a invariância do próton. . .	12
3	Interação de um Próton com um Píon <sup>+</sup> e a consequente transformação em nêutron. . . . .	12
4	Interação de um Nêutron com um Píon <sup>-</sup> e a consequente transformação em Próton . . . . .	12
5	Nêutron adquirindo um píon <sup>+</sup> e virando um próton . . . . .	25
6	Próton adquirindo um píon <sup>-</sup> ou perdendo um píon <sup>+</sup> e virando um nêutron. . .	25
7	Invariância do próton e nêutron ao adquirir um píon sem carga. . . . .	25
8	Um campo escalar Psi absorvendo um fóton. . . . .	25
9	Um píon <sup>±</sup> absorvendo dois fótons . . . . .	25
10	Um próton interagindo com um fóton. . . . .	25
11	Interação do próton com o fóton e a invariância do próton . . . . .	26
12	Interação do Próton com um Píon sem carga e a invariância do próton. . .	26
13	Interação de um Próton com um Píon <sup>+</sup> e a consequente transformação em nêutron. . . . .	26
14	Invariância do Próton perante $\pi^0$ . . . . .	37
15	Próton virando Nêutron perante $\pi^+$ . . . . .	37
16	Invariância do Próton perante $\pi^0$ (representação em quarks) . . . . .	37
17	Próton virando Nêutron perante $\pi^+$ (representação em quarks) . . . . .	37
18	quark red se transformando em quark blue e emitindo um Glúon A. . . . .	41
19	Próton virando Nêutron perante $\pi^+$ (representação em quarks e suas respectivas cores). . . . .	42

20	Invariância do Próton perante $\pi^0$ (representação em quarks e suas respectivas cores). . . . .	42
----	---	----

# 1 Introdução ao tema (reflexões e conceitos)

Como sabemos, a relação entre simetrias e quantidades conservadas é um assunto bastante celebrado em Física, onde determinadas invariâncias das equações de movimento de um sistema físico perante certas transformações nos conduzem a quantidades físicas que não sofrem alteração e permanecem constante ao longo do movimento ou cenário estudado. Nesse contexto, um dos teoremas matemáticos mais importantes já comprovados, entre aqueles que orientaram o desenvolvimento moderno da Física, são os teoremas de Emmy Nöether, nos quais percebemos os invariantes diferenciais por meio do cálculo das variações. Na terminologia e linguagem da física, as simetrias implícitas nas equações clássicas do movimento são sintetizadas no vizez conceitual de Mecânica Analítica em diferentes formalismos (Lagrange-Hamilton) e em termos de objetos como ação, lagrangeana e hamiltoniana. Como resultado dessas simetrias temos as correntes conservadas. [1–6]

Agora um princípio de simetria que contribuiu para o desenvolvimento da Física e sempre é protagonista na busca por uma teoria unificada que consiga descrever as interações da natureza (eletromagnética, fraca, forte e gravitacional) é o princípio de calibre, com a simetria de calibre determinando de forma consistente a interação ou acoplamento entre matéria, radiação, e suas auto-interações. No eletromagnetismo a simetria de calibre global  $U(1)$  nos leva a conservação da carga elétrica e se implementarmos na lagrangiana termos em que acoplamos essa corrente com campos ( $\mathbf{J} \times \mathbf{A}$ ) somos conduzidos a uma teoria com simetria de calibre local onde o conceito de derivada covariante aparece naturalmente no acoplamento entre elétrons e fótons. Seguindo a suposição de que o princípio de calibre advindo do eletromagnetismo poderia ser estendido e utilizado como base para descrever outras interações seremos levados, inclusive historicamente, a 3 prescrições independentes, porém complementares: [7–27]

- Tendo em vista o desenvolvimento e a descrição das interações fortes por Heisenberg, Tamm e Yukawa, em que partículas nucleares (protons e neutrons) estariam trocando mésons (píons), Yang and Mills retomam o empreendimento de Weyl, no esforço de explicar a interação forte generalizando a simetria de fase  $SU(2)$  (isospin global) para um patamar local, onde aparece o conceito geométrico de derivada covariante. Porém, como era bem sabido por Pauli, as partículas intermediadoras dessa interação associada a simetria de isospin local são não massivas, contradizendo o fato da interação forte ser descrita por uma interação de curto alcance e partículas massivas.

- Observando a atenção dada por Dirac na análise da simetria de calibre da época e o trabalho de Schwinger, Shaw percebeu que a simetria de calibre do eletromagnetismo  $U(1)$  apresentado na sua forma real bidimensional  $SO(2)$  poderia ser generalizado para  $SU(2)$ , onde teríamos campos vetoriais auto-interagindo, estendendo o trabalho de seu orientador de doutorado (Salam) sobre campos escalares com auto-interação. Implicitamente na abordagem de Shaw, vemos um forte apelo algébrico de implementarmos na lagrangiana

termos do tipo corrente-campo com o intuito de obtermos uma simetria de calibre local iterativamente.

- Paralelamente, Utiyama estabelece um conjunto de diretrizes para construir uma teoria de gauge para todos os grupos de Lie semi-simples e inclui também no trabalho, a relação entre a gravitação na formulação de tetradas e o eletromagnetismo via conexão. De forma geral, alguns sistemas físicos descritos por campos são considerados invariantes sobre um certo grupo de transformações onde percebemos como exemplo, que campo eletromagnético, gravitacional e de Yang-Mills seguem essa linha de raciocínio.

A simetria de calibre também se manifesta no contexto quântico das Teorias de Campos do Modelo Padrão tendo em mente as identidades de Ward-Takahashi para o caso abeliano e Slanov-Taylor para o caso não-abeliano. Essas identidades não apenas garantem o ajuste dos parâmetros dessas teorias com os experimentos via conceito de renormalização mas muitas vezes simplificam o estudo dos processos quânticos de espalhamento estudados. Existe também toda uma área da Física envolvendo procedimentos e formalismos de quantização das teorias em que a simetria de calibre desempenha um papel crucial observando a questão dos graus de liberdade físicos na fixação e escolha de calibre e advindo dessa abordagem nos deparamos com a simetria BRST e seus preceitos. O ápice desse tratamento foi formular a teoria da gravidade do ponto de vista quântico e perceber seus contratempos e obstáculos. [28–39]

Podemos também utilizar campos auxiliares ou de fundo para se estudar aspectos clássicos e quânticos da simetria de calibre. No contexto geral da física campos auxiliares podem ser utilizados para se estudar a simetria de calibre em teorias com campos vetoriais massivos (Stüeckelberg), como multiplicador de Lagrange quântico para se fixar o calibre (Nakanishi) ou mesmo como um campo de fundo mantendo a simetria de calibre em todas as etapas do cálculo (DeWitt). [40–47]

Como foi possível testemunhar ao longo da introdução a simetria de calibre dita a dinâmica das interações fundamentais no modelo padrão (interações eletromagnéticas, fraca e forte). No entanto é possível também utilizar o método de calibre e sua sabedoria para estudar a gravidade também, em que as bases para o estudo estariam nos trabalhos envolvendo uma formulação linear da gravidade via Gupta, Kraichnan e Feynman e cuja dinâmica também poderia ser introduzida nos moldes de uma interação corrente-campo. Esse estudo nos leva ao entendimento de como a simetria de calibre molda a dinâmica quântica das interações de modo geral, com a inclusão dos fantasmas. Na literatura quem explorou e abstraiu vastamente a aplicação do objeto corrente-campo ( $J \times A$ ) na física foi Schwinger, primeiramente introduzindo o formalismo de integração funcional e análise de Green por meio do princípio variacional da ação quântica e posteriormente, de maneira inabitual e talvez excêntrica, apimentando a discussão da dinâmica dos campos via sua Teoria das Fontes. Por meio da Teoria das fontes, Schwinger também esculpiu a dinâmica quântica associada ao efeito Casimir em termos de fontes (correntes), campos e

o conceito de espalhamento e se livrando das partículas virtuais associadas aos diagramas bolhas na visualização de Feynman. É válido ressaltar que Deser ressuscita a metodologia de Shaw aplicando a ideia de implementarmos em uma lagrangiana de interesse termos do tipo corrente conservada-campo ( $J \times A$ ) advindo de uma simetria de calibre global e com o intuito de obtermos iterativamente e algebricamente uma simetria de calibre local, deduzindo e moldando os aspectos não lineares associados aos acoplamentos e auto-acoplamentos entre os campos não somente para a teoria de Yang-Mills mas também para teoria da gravidade de Einstein. [48–70]. Problemas envolvendo a quantização covariante da gravidade e que exploram a relação entre gravidade e teorias de calibre estão na fronteira de pesquisa atual na Física, sendo um assunto moderno e inspirador, e dessa forma criam um ambiente desafiador e estimulante, incentivando o pensamento livre e rigor científico além da formação de valiosos recursos humanos para comunidade.

Reforçando, é possível dizer de maneira geral que podemos descrever as interações e o diálogo das partículas no feitiço da simetria de calibre, sendo possível deduzir de forma consistente as interações e auto-interações que satisfaçam esse pré-requisito de simetria, e neste caso formulando e prevendo as teorias ou lagrangianas que descrevem corretamente essa dinâmica de interação entre as partículas na natureza. No trabalho que se sucede iremos investigar o papel da simetria de calibre na construção de uma teoria que descreva a interação forte. Na Sec. 2 estudamos a simetria de calibre  $SU(2)$  global no contexto da hadrodinâmica. Na Sec. 3 exploramos o conceito de isospin e a física de sabores. Na Sec. 4 implementamos uma dinâmica de cores via simetria de calibre  $SU(3)$  local. Por fim, temos as conclusões na Sec. 5. Tendo em vista um caráter iniciante do estudante no tema proposto (Modelo Padrão das partículas, gravidade e suas interações), e a complexidade e dimensão do tema para um aluno de graduação, separamos uma literatura introdutória com um certo viés metodológico, a qual setores dessas referências contém tópicos necessários para o entendimento da monografia em uma linguagem elementar envolvendo apenas Teoria Clássica de Campos:

- a) Teoremas de Noether e correntes conservadas [1–6]
- b-) Simetrias de calibre globais e locais [7, 8, 18, 19]
- c-) Simetria de calibre, acoplamentos e interações na dinâmica de sabor e cor [70, 71]
- d) Gravidade na leitura das simetrias e auto-interações entre gravitons [58, 67].

## 2 Hadrodinâmica e a simetria de calibre SU(2) global (isospin)

A teoria de hadrodinâmica e a simetria de calibre SU(2) global (isospin), introduzida por Werner Heisenberg, propõem uma densidade de Lagrangiana que considera as contribuições dos bárions e mésons, além de uma interação específica que conserva o isospin e a carga elétrica. Essa simetria permite tratar prótons e nêutrons como dois estados diferentes de uma mesma partícula, essencial para a descrição das interações nucleares.

Inspirado pelo modelo de Yukawa, que introduz partículas massivas (mésons) para explicar a força nuclear de curto alcance entre núcleons, desenvolvemos uma compreensão mais aprofundada das interações entre dubletos de bárions (prótons e nêutrons), tripletos de mésons (píons) e singletos de fótons. Essas interações, mediadas pela troca de mésons, são cruciais para a estrutura e estabilidade dos núcleos atômicos. O potencial de Yukawa implica no decaimento exponencial da força entre núcleons, limitando a força nuclear a distâncias nucleares (da ordem de 1 femtômetro).

A simetria SU(2) global é fundamental para a conservação do isospin e da carga elétrica nos processos de interação hadrônica. Nos dubletos de bárions e tripletos de mésons, essas simetrias garantem a invariância das interações sob transformações de isospin, permitindo uma descrição unificada das forças nucleares e eletromagnéticas.

O modelo de Heisenberg-Tamm propõe que as interações entre bárions ocorrem via troca de mésons e fótons. Essa troca implica uma força de curto alcance, compatível com a observação de que a força nuclear é muito forte a distâncias nucleares mas decai rapidamente além disso. Esse modelo fornece uma base teórica sólida para a compreensão das forças nucleares, integrando a troca de partículas mediadoras com as interações de campo.

### 2.1 Partículas massivas de Yukawa e a interação de curto alcance

Hideki Yukawa, em 1935, propôs uma teoria para explicar a força nuclear forte que mantém os prótons e nêutrons juntos no núcleo atômico, essa força é mediada por uma nova partícula, posteriormente identificada como o pión.

Essa força é definida por sua lagrangiana, que por sua vez depende de um termo cinético, que descreve a dinâmica do campo escalar  $\Phi$  e através do operador d'alembertiano, define

a métrica no espaço tempo e depende da massa  $m$  desse campo escalar.

Definimos então, tal lagrangiana que descreve o comportamento de um campo escalar  $\Phi$  com massa  $m$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Phi(\square + m^2)\Phi + J\Phi \quad (1)$$

Onde definimos a equação de movimento como:

$$(\square + m^2)\Phi = J \quad (2)$$

E lembrando que Box ( $\square$ ) é definido como:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu \quad (3)$$

Em um regime estático onde consideramos  $t = 0$ , temos:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \approx -\vec{\nabla}^2 \quad (4)$$

Portanto, a equação torna-se:

$$(-\vec{\nabla}^2 + m^2)\Phi(t = 0, \vec{X}) = J \quad (5)$$

Pelo método de Green, a solução  $\Phi(\vec{x})$  pode ser expressa como:

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3\vec{y} G(\vec{x}, \vec{y}) J(\vec{y}) \quad (6)$$

onde  $G(\vec{x}, \vec{y})$  é a função de Green que satisfaz a equação diferencial:

$$(-\vec{\nabla}^2 + m^2)G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (7)$$

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados:

$$(-\vec{\nabla}^2 + m^2)\tilde{G}(\vec{K}) = 1 \quad (8)$$

Resolvendo para  $\tilde{G}(\vec{K})$ :

$$\tilde{G}(\vec{K}) = \frac{1}{-\vec{K}^2 + m^2} \quad (9)$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa para encontrar  $G(\vec{x}, \vec{y})$ :

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \int \frac{d^3\vec{K}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{K}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{-\vec{K}^2 + m^2} \quad (10)$$

Reconhecendo a expressão para  $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ :

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3 \vec{K}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{K} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \quad (11)$$

A partir da função de Green  $G(\vec{k})$ , podemos calcular o potencial  $\Phi(\vec{x})$  gerado por uma carga pontual representada pela densidade de corrente  $J(\vec{y}) = g\delta^3(\vec{y})$ :

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3 \vec{y} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} G(\vec{k}) g\delta^3(\vec{y}) \quad (12)$$

Onde  $G(\vec{k})$  é a transformada de Fourier da função de Green  $G(\vec{x}, \vec{y})$ , Substituindo-o temos:

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3 \vec{y} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{-\vec{K}^2 + m^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} g\delta^3(\vec{y}) \quad (13)$$

E resolvendo temos:

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{-\vec{K}^2 + m^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (14)$$

Para prosseguir, fazemos a mudança para coordenadas esféricas no espaço de  $\vec{k}$ . A integral em  $d^3 \vec{k}$  se torna:

$$d^3 \vec{k} = k^2 \sin \theta d\theta d\psi \quad (15)$$

A integral então se transforma em:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{-k^2 + m^2} e^{-ikx \cos \theta} \quad (16)$$

A integral angular  $d\psi$  pode ser resolvida:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} d\psi = 2\pi e^{-ikx \cos \theta} \quad (17)$$

E a integral  $d\theta$  pode ser resolvida usando a simetria esférica:

$$\int_0^\pi \sin \theta e^{-ikx \cos \theta} d\theta = \frac{2 \sin(kx)}{kx} \quad (18)$$

Assim, a equação fica:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2 - m^2} \frac{2 \sin(kx)}{kx} \quad (19)$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2 x} \int_0^\infty \frac{k \sin(kx) dk}{k^2 - m^2} \quad (20)$$

Agora, vamos considerar a integral no plano complexo e aplicar o teorema dos resíduos.

Definimos uma função complexa:

$$f(k) = \frac{ke^{ikx}}{k^2 - m^2} \quad (21)$$

Para encontrar os polos da função  $f(k)$ , resolvemos:

$$k^2 - m^2 = 0 \Rightarrow k = \pm m \quad (22)$$

Os polos são  $k = \pm m$ .

Consideramos o contorno no plano complexo que é um semi-círculo superior de raio  $R$  com a linha real de  $-R$  a  $R$ . De acordo com o teorema dos resíduos, a integral ao longo deste contorno fechado é  $2\pi i$  vezes a soma dos resíduos dentro do contorno.

A função  $f(k)$  tem um polo simples em  $k = m$  no semi-círculo superior. Calculamos o resíduo neste ponto:

$$\text{Res}(f, k = m) = \lim_{k \rightarrow m} (k - m) \frac{ke^{ikx}}{k^2 - m^2} = \lim_{k \rightarrow m} \frac{ke^{ikx}}{k + m} = \frac{me^{imx}}{2m} = \frac{e^{imx}}{2} \quad (23)$$

Assim, pelo teorema dos resíduos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ikx}}{k^2 - m^2} dk = 2\pi i \frac{e^{imx}}{2} = \pi i e^{imx} \quad (24)$$

Portanto, a integral original se torna:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2 x} \cdot \pi i \cdot e^{imx} \quad (25)$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{i}{2\pi x} e^{imx} \quad (26)$$

Ao considerar que a função física deve ser real, tomamos a parte real da expressão:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi x} e^{-mx} \quad (27)$$

Assim, obtivemos o potencial de Yukawa:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{e^{-mx}}{4\pi x} \quad (28)$$

onde:

- $x$  é a distância entre duas partículas,
- $m$  é a massa da partícula mediadora da força (no caso da força nuclear forte, o

píon).

### 1. Alcance Finito da Força:

- O termo exponencial  $e^{-mx}$  no potencial de Yukawa implica que a força decai exponencialmente com a distância.
- Isso significa que a força nuclear forte tem um alcance finito, aproximadamente igual a  $\frac{1}{m}$ .
- Para píons, isso é da ordem de  $10^{-15}$  metros (1 fermi), que é aproximadamente o tamanho do núcleo atômico.
- Este comportamento é em contraste com a força eletrostática descrita pela lei de Coulomb, que decai como  $\frac{1}{r}$  e tem alcance infinito.

### 2. Intensidade da Força:

- No limite de curtas distâncias ( $x \rightarrow 0$ ), o potencial de Yukawa se comporta aproximadamente como  $\frac{1}{x}$ , semelhante ao potencial de Coulomb.
- Isso implica que, a curtas distâncias, a força nuclear forte é extremamente poderosa, suficiente para superar a repulsão eletrostática entre prótons e manter o núcleo coeso.

### 3. Dependência da Massa do Méson:

- A massa  $m$  do píon determina o alcance da força.
- Píons são partículas relativamente leves em comparação com outras partículas mediadoras de forças (como os glúons no contexto da QCD - Cromodinâmica Quântica).
- A presença da massa no denominador do expoente significa que partículas mediadoras mais pesadas resultariam em um alcance ainda menor para a força.

Dada a solução da equação de Klein-Gordon, definimos:

$$(\square + m^2)\Phi = 0 \quad (29)$$

No regime estático, temos:

$$\vec{\nabla}^2\Phi = m^2\Phi \quad (30)$$

Portanto, podemos escrever a equação acima em coordenadas esféricas como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = m^2\Phi \quad (31)$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} - m^2\Phi = 0 \quad (32)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\Phi + r\frac{d\Phi}{dr}\right) = 2\frac{d\Phi}{dr} + r\frac{d^2\Phi}{dr^2} \quad (33)$$

Sendo assim:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} = m^2\frac{U}{r} \quad (34)$$

Onde:

$$\frac{d^2U}{dr^2} = m^2U \quad (35)$$

A solução geral desta equação diferencial é:

$$U(r) = U_0e^{mr} + U_1e^{-mr} \quad (36)$$

Portanto, para grandes valores de  $r$ , a solução que decresce exponencialmente é:

$$\Phi(r) \approx \frac{U_1e^{-mr}}{r} \quad (37)$$

### 1. Decaimento Exponencial e Alcance da Força:

- A solução  $\Phi(r) \approx \frac{Ae^{-mr}}{r}$  mostra que o campo  $\Phi$  decai exponencialmente com a distância  $r$ .
- O termo  $e^{-mr}$  indica que a força associada ao campo  $\Phi$  tem um alcance finito. O alcance característico da força é dado por  $\frac{1}{m}$ .
- Para partículas mediadoras com massa  $m$ , a força decai rapidamente além de uma distância de ordem  $\frac{1}{m}$ . Por exemplo, se  $m$  é grande, o alcance é curto, e se  $m$  é pequeno, o alcance é longo.

### 2. Comparação com o Potencial de Yukawa:

- A forma da solução  $\Phi(r) \approx \frac{Ae^{-mr}}{r}$  é similar ao potencial de Yukawa encontrado anteriormente,  $\Phi(\vec{x}) = \frac{e^{-mx}}{4\pi x}$ .
- Isso confirma que a equação de Klein-Gordon, em regime estático e sem fontes externas, leva ao mesmo tipo de decaimento exponencial encontrado na solução com fontes, reforçando a natureza de curto alcance das interações mediadas por partículas massivas.

### 3. Implicações para a Física Nuclear:

- No contexto da física nuclear, onde o campo  $\Phi$  pode representar o campo de um méson como o pión, a equação de Klein-Gordon mostra por que as forças nucleares têm um alcance finito.
- O alcance típico da força nuclear forte é da ordem de 1 fermi ( $10^{-15}$  metros), que corresponde à massa do pión ( $\approx 140 \text{ MeV}/c^2$ ).

## 2.2 Interação entre dubleto de bárions, tripleto de mésons e singlete de fótons

Agora que definimos a ordem de grandeza das forças que regem o núcleo atômico, vamos entender como cada partícula interage entre si no núcleo.

Para isso, vamos definir a lagrangiana que estuda a interação entre os núcleons (Bárions) e o mediador de suas forças, o méson.

### Campo dos Bárions

A lagrangiana livre para os bárions é dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{bárion}} = \bar{\psi}_B (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_B) \psi_B \quad (38)$$

onde:

- $\psi_B$  representa o campo do bárion (spinor).
- $\bar{\psi}_B = \psi_B^\dagger \gamma^0$  é o spinor adjunto do bárion.
- $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac.
- $m_B$  é a massa do bárion.

### Campo dos Mésons

A lagrangiana livre para os mésons é dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{méson}} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m_M^2 \phi^2) \quad (39)$$

onde:

- $\phi$  é o campo do méson.
- $m_M$  é a massa do méson.

### Interação Bárion-Méson

A interação entre bárions e mésons na lagrangiana pode ser modelada por termos que envolvem acoplamentos entre os campos dos bárions e mésons, de modo que é possível

prótons se transformarem em nêutrons pela troca de partículas carregadas  $\phi_{\pm}^+$ . Pela conservação de carga elétrica dividimos três partículas mediadoras, logo:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_{bm} \sum_{i=1}^3 \bar{\psi} \theta_i \psi \phi_i \quad (40)$$

onde  $g_{bm}$  é a constante de acoplamento que descreve a força da interação entre bárions e mésons.

## Lagrangiana Total QHD

A lagrangiana total da hadrodinâmica quântica é a soma das lagrangianas dos bárions, dos mésons e da interação:

$$\mathcal{L}_{\text{hadro}} = \bar{\psi}_B (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_B) \psi_B + \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m_M^2 \phi^2) + g_{bm} \sum_{i=1}^3 \bar{\psi} \theta_i \psi \phi_i \quad (41)$$

Seja os Bárions estudados, os Prótons e os Nêutrons, definimos:

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}_8 \quad \text{Dubleto.} \quad (42)$$

Propagadores:

$$p \longrightarrow p \quad (43)$$

$$n \longrightarrow n \quad (44)$$

$$\phi - - - \phi \quad (45)$$

Vértices:

$$\begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \phi \quad (46)$$

Ou podemos escreve-los assim:

$$\bar{p}p\phi + \bar{n}n\phi \quad (47)$$

De modo que iremos usar  $\phi$  para representar um Méson em sua representação geral, e usaremos  $\pi$  para representarmos o Méson Píon especificamente.

Para exemplificar vamos estudar tais processos no núcleo do Hélio-3 ( ${}^3He$ ), partícula que possui três bárions: ou dois prótons e um nêutron ou um próton e dois nêutrons, vamos entender como isso acontece:

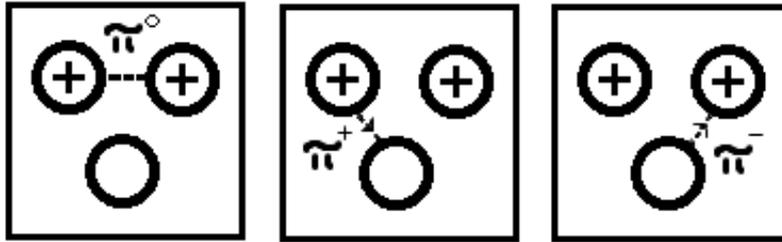


Figura 1: Representação do núcleo do átomo de Hélio-3 ( ${}^3He$ ) sob trocas de mésons (píons) caracterizada pela força forte (responsável por manter a estrutura do núcleo do atômico)

Então, podemos explicar tal processo pelos diagramas de Feynmann:

### Processos formados por tais vértices.

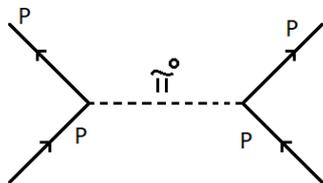


Figura 2: Interação do Próton com um Píon sem carga e a invariância do próton.

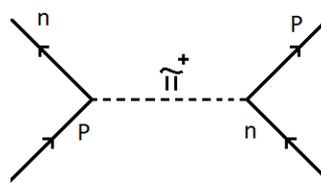


Figura 3: Interação de um Próton com um Píon<sup>+</sup> e a consequente transformação em nêutron.

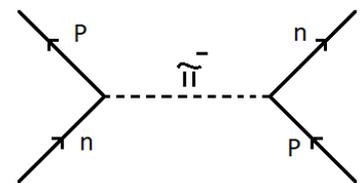


Figura 4: Interação de um Nêutron com um Píon<sup>-</sup> e a consequente transformação em Próton

Concluimos assim que é possível prótons se transformarem em nêutrons pela troca de campos escalares, neste caso, os píons. Tais campos são carregados  $\pi_{\pm}$ , portanto, pela conservação de carga elétrica precisamos dividir os píons em três, surgindo três partículas mediadoras, o que nos caracteriza um tripleto:

$$\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} \quad (48)$$

Definidos os dubletos e tripletos vamos introduzir agora um conceito primordial para avançarmos na compreensão das interações hadrônicas, o acoplamento mínimo. Ele consiste na substituição da derivada parcial na derivada covariante, presentes nas equações de movimento e nas lagrangianas, com isso as mesmas permanecem invariantes sob transformações de calibre locais.

$$D_\mu = \partial_\mu + iQA_\mu \quad (49)$$

onde:

- $\partial_\mu$  é a derivada parcial usual.
- $A_\mu$  é o potencial do campo de calibre.
- $Q$  é operador carga elétrica.
- $i$  é a unidade imaginária, necessária para a consistência das equações em mecânica quântica.

Esta formulação garante que a lagrangiana da teoria seja invariante sob transformações de calibre locais. O termo adicional  $iqA_\mu$  representa o acoplamento do campo de matéria com o campo de calibre.

Portanto, a interação entre o dupletto de núcleons e os fótons via acoplamento mínimo é dada pela lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{dubletto} = \bar{p}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)p + \bar{n}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)n = \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ie(\frac{I}{2} + T_3)A_\mu)\psi] \quad (50)$$

Onde  $T_3$  é a matriz de Pauli que representa o isospin do núcleon.

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

O operador de carga elétrica ( $Q$ ) determina como uma partícula específica interage com o campo eletromagnético, tal introdução da carga através do termo  $iQA_\mu$  na derivada covariante garante que a teoria seja invariante sob transformações de calibre.

Definimos como :

$$Q = e(\frac{I}{2} + T_3) = e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$\frac{Q}{e} = \frac{N}{2} + T_3 \quad (53)$$

$$Q \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

Logo,  $e$  é o autovalor da matriz operador elétrico.

$$\frac{N}{2} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

Portanto, definimos que o autovalor da matriz  $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$  é  $\frac{1}{2}$ , deduzindo seu isospin,  $\frac{1}{2}$ .

### 2.3 Simetria SU(2) global e a conservação de isospin e carga elétrica nos dubletos e tripletos

Sob a simetria SU(2), as partículas como prótons ( $p$ ) e nêutrons ( $n$ ) podem ser agrupadas em dubletos. A transformação de um campo de partículas  $\psi$  sob SU(2) é dada por:

$$\psi \Rightarrow \psi' = U\psi \quad (56)$$

E o campo adjunto se transforma como:

$$\bar{\psi} \Rightarrow \bar{\psi}' = U^\dagger \bar{\psi} \quad (57)$$

onde  $\psi$  é o dubleto de partículas:

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (58)$$

As matrizes  $U$  do grupo SU(2) são unitárias ( $U^\dagger = U^{-1}$ ) e têm determinante igual a 1 ( $\det U = 1$ ):

$$U^\dagger U = \mathbb{I} \quad (59)$$

Uma matriz unitária  $U$  pode ser escrita como:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (60)$$

Para ser especial ( $\det U = 1$ ), a matriz deve satisfazer:

$$\det U = ad - bc = 1 \quad (61)$$

E, por definição,  $U^{-1} = U^\dagger$ :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \quad (62)$$

De forma geral, uma matriz  $U$  pode ser decomposta em termos de suas partes real e imaginária:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} = (\text{Re})a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\text{Im})b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + (\text{Re})b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (\text{Im})a \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

As matrizes  $U$  podem ser expressas em termos de um operador exponencial:

$$U = e^{iH} \quad (64)$$

Com a condição de unitariedade  $U^\dagger U = 1$ , obtemos:

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H} \quad (65)$$

Portanto,  $\mathbf{H}$  é uma matriz hermitiana. Além disso, a condição  $\det U = 1$  implica que o traço da Hamiltoniana seja zero:

$$\det U = e^{\ln \text{tr} U} = 1 \implies \text{tr} \mathbf{H} = 0 \quad (66)$$

Seja  $\mathbf{H}$  uma Hermitiana de traço zero, pode ser escrita como:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} \quad (67)$$

Para que  $\mathbf{H}$  tenha traço zero ( $\text{tr} = 0$ ):

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1 \end{pmatrix} = h_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (\text{Re})h_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (\text{Im})h_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

Isso leva às matrizes de Pauli,  $T_i$ :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (69)$$

Portanto, a Hermitiana pode ser expressa em termos das matrizes de Pauli:

$$\mathbf{H} = \sum_i \alpha_i T_i \quad (70)$$

onde  $\alpha_i$  são coeficientes reais.

Contextualizando-nos em um espaço vetorial e, portanto, interno, definimos:

$$\text{tr}(T_i T_j) = 2\delta_{ij} \quad (71)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, que vale 1 se  $i = j$  e 0 caso contrário. Isso estabelece a ortogonalidade das bases  $T_i$ .

## Representação da Hermitiana

A Hermitiana  $\mathbf{H}$  pode ser expressa em termos de uma base ortogonal  $T_i$ :

$$\mathbf{H} = \sum_i \frac{(\mathbf{H}, T_i)}{2} T_i \quad (72)$$

onde o produto interno é definido como:

$$(\mathbf{H}, T_i) = \text{tr}(\mathbf{H} T_i) \quad (73)$$

Substituindo:

$$\mathbf{H} = \sum_i \frac{\text{tr}(\mathbf{H} T_i)}{2} T_i \quad (74)$$

Para um vetor  $\vec{X}$  em termos de uma base  $\vec{x}_i$ :

$$\vec{X} = \sum_i (\vec{X}, \vec{x}_i) \vec{x}_i \quad (75)$$

E o produto interno de matrizes  $A$  e  $B$  é dado por:

$$(A, B) = \text{tr}(AB) \quad (76)$$

Para um elemento  $U$  do grupo  $\text{SU}(2)$ :

$$U = e^{i \sum_i \alpha_i T_i} \quad (77)$$

Para valores pequenos de  $\alpha_i$ :

$$U \approx I + i \sum_i \alpha_i T_i \quad (78)$$

## Comutadores e Constantes de Estrutura

Considerando  $P$  um elemento do grupo  $G$ :

$$P = e^{i\alpha_i T_i} e^{i\alpha_j T_j} e^{-i\alpha_i T_i} e^{-i\alpha_j T_j} \quad (79)$$

A expansão de Taylor para o operador exponencial  $e^{i\alpha T}$  em torno de  $\alpha = 0$  é dada por:

$$e^{i\alpha T} = 1 + i\alpha T - \frac{\alpha^2}{2}T^2 + \mathcal{O}(\alpha^3), \quad (80)$$

e, similarmente:

$$e^{-i\alpha T} = 1 - i\alpha T - \frac{\alpha^2}{2}T^2 + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (81)$$

Substituimos essas expansões na definição de  $P$ :

$$P = e^{i\alpha_i T_i} e^{i\alpha_j T_j} e^{-i\alpha_i T_i} e^{-i\alpha_j T_j}. \quad (82)$$

Expandindo os fatores:

$$e^{i\alpha_i T_i} \approx 1 + i\alpha_i T_i - \frac{\alpha_i^2}{2}T_i^2, \quad (83)$$

$$e^{-i\alpha_i T_i} \approx 1 - i\alpha_i T_i - \frac{\alpha_i^2}{2}T_i^2, \quad (84)$$

$$e^{i\alpha_j T_j} \approx 1 + i\alpha_j T_j - \frac{\alpha_j^2}{2}T_j^2, \quad (85)$$

$$e^{-i\alpha_j T_j} \approx 1 - i\alpha_j T_j - \frac{\alpha_j^2}{2}T_j^2. \quad (86)$$

Substituindo essas expressões em  $P$  e mantendo apenas termos até a ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , temos:

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + i\alpha_i T_i - \frac{\alpha_i^2}{2}T_i^2\right) \left(1 + i\alpha_j T_j - \frac{\alpha_j^2}{2}T_j^2\right) \\ &\quad \cdot \left(1 - i\alpha_i T_i - \frac{\alpha_i^2}{2}T_i^2\right) \left(1 - i\alpha_j T_j - \frac{\alpha_j^2}{2}T_j^2\right). \end{aligned} \quad (87)$$

Agora expandimos o produto, lembrando que descartamos termos de ordem superior a  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ :

$$\begin{aligned} P &\approx 1 + i\alpha_i T_i + i\alpha_j T_j - i\alpha_i T_i - i\alpha_j T_j \\ &\quad - \alpha_i \alpha_j [T_i, T_j] + \text{termos de ordem superior}. \end{aligned} \quad (88)$$

Os termos lineares em  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  se cancelam devido à simetria do problema. Assim, o termo dominante de segunda ordem é o comutador:

$$P \approx 1 - \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j [T_i, T_j]. \quad (89)$$

Portanto:

$$U = P = 1 + i \sum_i \alpha_i T_i \quad (90)$$

Os comutadores das matrizes  $T_i$  são definidos como:

$$[T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k \quad (91)$$

onde  $f_{ijk}$  são as constantes de estrutura da álgebra de Lie.

## Correntes Conservadas e Isospin

Transformações de  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ :

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi + \delta\psi \quad (92)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} + \delta\bar{\psi} \quad (93)$$

Com as variações:

$$\delta\psi = i\alpha_i T_i \psi \quad (94)$$

$$\delta\bar{\psi} = -i\alpha_i \bar{\psi} T_i \quad (95)$$

## Variação da Ação

A ação para um dubleto de campos é dada por:

$$S_{\text{Dubleto}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{Dubleto}} \quad (96)$$

com a lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{\text{Dubleto}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (97)$$

Sob uma transformação de isospin, a variação da ação é:

$$\delta S_{\text{Dubleto}} = \int d^4x \delta \mathcal{L}_{\text{Dubleto}}. \quad (98)$$

Utilizando o teorema de Noether, temos:

$$\delta S_{\text{Dubleto}} = \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta\psi \right]. \quad (99)$$

Substituindo  $\delta\psi = i\alpha_i T_i \psi$ :

$$\delta S_{\text{Dubleto}} = \int d^4x \partial_\mu [i\alpha_i \bar{\psi} \gamma^\mu T_i \psi]. \quad (100)$$

## Definição da Corrente Conservada

A corrente associada à simetria  $SU(2)$  é definida como:

$$J_i^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu T_i \psi \quad (101)$$

e satisfaz a equação de continuidade:

$$\partial_\mu J_i^\mu = 0. \quad (102)$$

## Invariância de Corrente

Sob uma transformação, a corrente transforma-se como:

$$J_i'^\mu = J_i^\mu + \delta J_i^\mu. \quad (103)$$

Expandindo:

$$J_i'^\mu = (\bar{\psi} - i\alpha_j \bar{\psi} T_j) \gamma^\mu T_i (\psi + i\alpha_k T_k \psi) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (104)$$

A variação da corrente, mantendo apenas termos lineares em  $\alpha$ , é:

$$\delta J_i^\mu = i\alpha_j \bar{\psi} \gamma^\mu [T_i, T_j] \psi. \quad (105)$$

Usando a álgebra de Lie:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k, \quad (106)$$

temos:

$$\delta J_i^\mu = -\alpha_j \epsilon_{ijk} J_k^\mu. \quad (107)$$

## Tripletos $SU(2)$

Para tripletos de  $SU(2)$ , como os píons, temos:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Sob uma transformação  $SU(2)$ , o triplo transforma como:

$$\phi'_i = U_{ij}\phi_j, \quad (109)$$

onde:

$$U^\dagger = U^{-1}, \quad \det(U) = 1. \quad (110)$$

$U$  é dado por:

$$U = e^{i\mathbf{H}}, \quad (111)$$

com:

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}, \quad \text{tr}(\mathbf{H}) = 0. \quad (112)$$

A matriz hermitiana  $\mathbf{H}$  tem:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{pmatrix}, \quad \dim(\mathbf{H}) = 9. \quad (113)$$

Como  $U^\dagger U = \mathbb{I}$ , a matriz  $\mathbf{H}$  reduz-se para:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2^* & h_5 & h_6 \\ h_3^* & h_6^* & h_9 \end{pmatrix}, \quad \dim(\mathbf{H}) = 3. \quad (114)$$

### Espaço Vetorial de Dimensão 3 (Subespaço)

Podemos escrever o tripleto de píons em função de sua carga elétrica como:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}. \quad (115)$$

O gerador  $T_3$ , associado à terceira componente do isospin, é dado por:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (116)$$

Supondo condições específicas para os parâmetros de  $\mathbf{H}$ , temos:

$$h_1 = -h_3, \quad (117)$$

$$h_5 = 0. \quad (118)$$

A matriz hermitiana  $\mathbf{H}$  é então expressa como:

$$\mathbf{H} = h_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h_2 & h_3 \\ h_2^* & 0 & h_6 \\ h_3^* & h_6^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \dim(\mathbf{H}) = 7. \quad (119)$$

Com  $h_2 = h_6$  e  $h_3 = 0$ , a matriz reduz-se a:

$$\mathbf{H} = h_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + (\text{Re}h_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (\text{Im}h_2) \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (120)$$

## Matrizes Geradoras de $SU(2)$

Os geradores do grupo  $SU(2)$  podem ser definidos como:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (121)$$

O comutador dos geradores satisfaz a álgebra de Lie:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k, \quad (122)$$

onde  $\epsilon_{ijk}$  é o símbolo de Levi-Civita.

## Autovalores e Autovetores dos Geradores

Para calcular os autovalores e autovetores das matrizes  $T_i$ , usamos:

$$\det(T_i - \lambda\mathbb{I}) = 0. \quad (123)$$

Os autovalores resultantes são:

$$\lambda = 1, 0, -1. \quad (124)$$

## Corrente Conservada e Isospin (Méson)

Consideremos a lagrangiana para um triplo de píons:

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(\vec{\phi}, \partial_\mu \vec{\phi}), \quad (125)$$

onde  $\vec{\phi}$  transforma sob uma rotação  $SU(2)$  como:

$$\vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi} + \delta\vec{\phi}, \quad \delta\vec{\phi} = i\alpha_i T_i \vec{\phi}. \quad (126)$$

A variação da ação é:

$$\delta\mathcal{S}_m = \int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\phi}} \delta\vec{\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\vec{\phi})} \delta(\partial_\mu\vec{\phi}) \right]. \quad (127)$$

Pela aplicação das equações de movimento, reorganizamos a expressão:

$$\delta\mathcal{S}_m = \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\vec{\phi})} \delta\vec{\phi} \right]. \quad (128)$$

A corrente associada a essa transformação é dada por:

$$J_\mu^i = i(\partial_\mu\vec{\phi}) T_i \vec{\phi}, \quad (129)$$

com a conservação da corrente:

$$\partial^\mu J_\mu^i = 0. \quad (130)$$

Para a terceira componente ( $T_3$ ), temos a conservação da carga elétrica:

$$q = eT_3, \quad (131)$$

e a corrente associada:

$$J_3^\mu = (\partial_\mu\phi^-)\phi^+ - (\partial_\mu\phi^+)\phi^-. \quad (132)$$

## Representação Adjunto de $SU(2)$

A representação adjunto é definida como:

$$T_{(i)jk} = -i\epsilon_{ijk}, \quad (133)$$

e satisfaz:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k. \quad (134)$$

Os autovalores dos geradores na representação adjunto são:

$$\lambda = 0, \pm 1. \quad (135)$$

## Interação com Corrente e Campo

Finalmente, a interação entre a corrente  $\vec{J}$  e o campo  $\vec{\phi}$  é dada por:

$$\vec{J} \cdot \vec{\phi} = I_{\text{interação}}. \quad (136)$$

Sob uma transformação, temos:

$$\vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi} + i\alpha_i T_i \vec{\phi}. \quad (137)$$

Assim, a invariância da interação implica:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{J})\vec{\phi} + \vec{J}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\phi}) = 0. \quad (138)$$

## 2.4 O modelo de Heisenberg-Tamm para interação entre bárions via troca de mésons e fótons

### Investigações anteriores

Lagrangiana Física Nuclear.

$$\mathcal{L}_{FN} = \mathcal{L}_{\text{doubleto}} + \mathcal{L}_{\text{tripleto}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{Interação nuclear}} \quad (139)$$

Para  $\mathcal{L}_{\text{doubleto}}$  temos 38, que pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{\text{dub}} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu \left(\frac{\pi}{2} + T_2\right) A_\mu]_x \psi + m\bar{\psi}\psi \quad (140)$$

Seja:

$$D^\mu \partial_\mu + ieq \quad (141)$$

$$q = \frac{N}{2} + T_3 \quad (142)$$

Pensando em Núcleons de Hádrons, onde  $\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$

Para  $\mathcal{L}_{\text{tripleto}}$  temos 39 que pode ser escrita como :

$$\mathcal{L}_{\text{méson}} = \frac{1}{2} D^\mu \vec{\phi} D_\mu \pi - \frac{1}{2} m^2 \vec{\phi}^2 \quad (143)$$

Seja:

$$D_\mu = (\partial_\mu - eT_3) A_\mu \quad (144)$$

$$q = -eT_3 \quad (145)$$

Pensando agora em Píons, onde  $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}$

Para  $\mathcal{L}_{Maxwell}$  temos:

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\gamma}F^{\gamma\mu} \quad (146)$$

Seja:

$$F_{\mu\gamma} = \partial_\mu A_\gamma - \partial_\gamma A_\mu \quad (147)$$

Para  $\mathcal{L}_{Interação\ nuclear}$  temos:

$$\mathcal{L}_{Interação\ nuclear} = \vec{J} \cdot \vec{\phi} \quad (148)$$

Seja:

$$\vec{J} = \bar{\psi} \vec{T} \psi \quad (149)$$

$$\bar{\psi} T_3 \psi = \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \bar{p}p - \bar{n}n \cdot \phi_3 \quad (150)$$

$$\bar{\psi} T_2 \psi = \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = i\bar{p}n - i\bar{n}p \cdot \phi_2 \quad (151)$$

$$\bar{\psi} T_1 \psi = \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \bar{p}n - \bar{n}p \cdot \phi_1 \quad (152)$$

Somar e organizar:

$$\bar{\psi} \vec{T} \psi \cdot \vec{\phi} = \bar{p}n(\phi_1 + i\phi_2) + \bar{n}p(\phi_1 - i\phi_2) + \bar{p}p\phi_3 + \bar{n}n\phi_3 \quad (153)$$

Onde:

$$(\phi_1 + i\phi_2) = \pi^+ (\text{píon}) \quad (154)$$

## Representação dos vértices da teoria

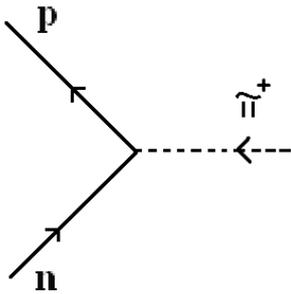


Figura 5: Nêutron adquirindo um píon<sup>+</sup> e virando um próton

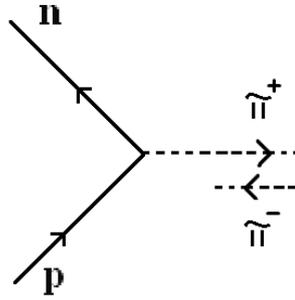


Figura 6: Próton adquirindo um píon<sup>-</sup> ou perdendo um píon<sup>+</sup> e virando um nêutron.

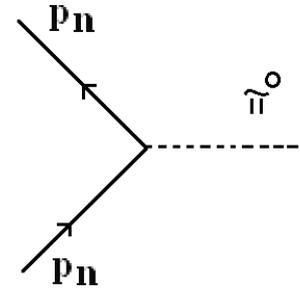


Figura 7: Invariância do próton e nêutron ao adquirir um píon sem carga.

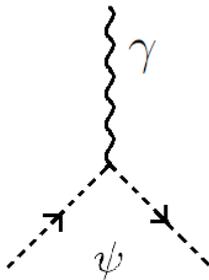


Figura 8: Um campo escalar Psi absorvendo um fóton.

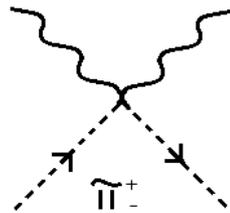


Figura 9: Um píon<sub>±</sub> absorvendo dois fótons

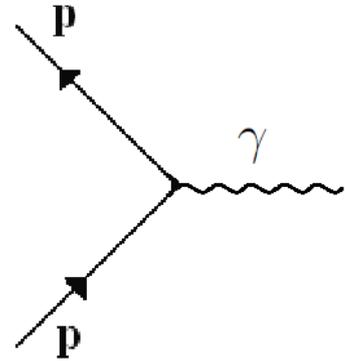


Figura 10: Um próton interagindo com um fóton.

Os vértices são responsáveis por formar as estruturas que usamos para construir os processos de interações de partículas na física nuclear.

## Processos formados por tais vértices.

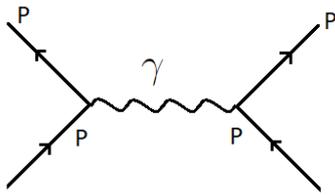


Figura 11: Interação do próton com o fóton e a invariância do próton

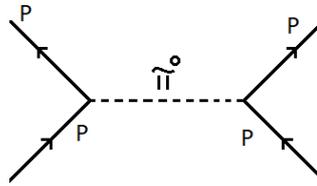


Figura 12: Interação do Próton com um Píon sem carga e a invariância do próton.

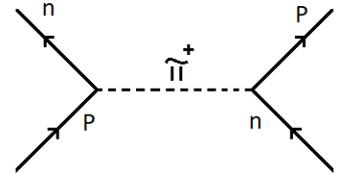


Figura 13: Interação de um Próton com um Píon<sup>+</sup> e a consequente transformação em nêutron.

### 3 Isospin e a física de sabores up e down dos quarks

O isospin é uma ferramenta conceitual fundamental na física de partículas, usada para descrever simetrias e interações entre prótons e nêutrons, as partículas constituintes do núcleo atômico. A ideia do isospin surge da similaridade nas massas e interações dessas partículas, permitindo tratá-las como dois estados de um mesmo sistema descrito pelo grupo  $SU(2)$ . Este grupo simétrico fundamenta a álgebra que governa as transformações entre prótons e nêutrons.

Os operadores de isospin definem propriedades intrínsecas, como a projeção  $T_3$ , que diferencia prótons ( $T_3 = +\frac{1}{2}$ ) de nêutrons ( $T_3 = -\frac{1}{2}$ ). Além disso, o isospin está intimamente ligado a propriedades fundamentais, como carga elétrica ( $Q$ ) e número bariônico ( $B$ ), conforme descrito pela equação

$$Q = e \left( T_3 + \frac{1}{2} B \right).$$

Essa relação unifica a carga elétrica e a simetria de isospin no contexto das partículas nucleares.

A descoberta dos quarks, proposta por Gell-Mann e Zweig na década de 1960, revelou que prótons e nêutrons não são partículas fundamentais, mas combinações de quarks up ( $u$ ) e down ( $d$ ). O próton é formado por dois quarks  $u$  e um quark  $d$  ( $uud$ ), enquanto o nêutron contém dois quarks  $d$  e um  $u$  ( $udd$ ). Essa composição determina suas propriedades de isospin e carga elétrica.

Para descrever matematicamente essas propriedades, utilizamos ferramentas como o produto tensorial e diagramas de peso. Estes ilustram como as combinações de quarks produzem partículas com diferentes valores de isospin e carga. Por exemplo, os mésons  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  e  $\pi^-$  formam um triplo de isospin, enquanto os bárions  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^0$ ,  $\Delta^-$  correspondem a um quadruplete.

O isospin também estabelece um elo com a álgebra de  $SU(2)$ , cujas propriedades matemáticas e operadores específicos serão explorados detalhadamente na próxima seção. Este aprofundamento fornecerá as bases formais para compreender a organização das partículas nucleares e suas interações no contexto da simetria  $SU(2)$ .

#### Álgebra de Isospin

Recapitulando as matrizes de Pauli temos:

$$[T_1, T_2] = iT_3 \tag{155}$$

$$[T_2, T_3] = iT_1 \tag{156}$$

$$[T_3, T_1] = iT_2 \quad (157)$$

Processos cíclicos que obedecem a Álgebra de Lie. Portanto:

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (158)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (159)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (160)$$

$$\vec{T} = T_1 \hat{x}_1 + T_2 \hat{x}_2 + T_3 \hat{x}_3 \quad (161)$$

$$\vec{T}^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \mathbb{I} \quad (162)$$

Portanto:

$$[\vec{T}^2, T_3] = 0 \quad (163)$$

CSCO (conjunto completo de observadores que comutam)

Definimos então os operadores:

$$T_{\pm} = T_1 \pm iT_2 \quad (164)$$

$$[T_3, T_{\pm}] = [T_3, T_1] \pm i[T_3, T_2] = \pm T_{\pm} \quad (165)$$

$$[T_+, T_-] = [T_1 + iT_2, T_1 - iT_2] = -i[T_1, T_2] + i[T_2, T_1] = 2T_3 \quad (166)$$

Auto estado  $|\lambda\rangle$

$$\vec{T}^2 |\lambda_m\rangle = \lambda |\lambda_m\rangle \quad (167)$$

$$T_3 |\lambda_m\rangle = m |\lambda_m\rangle \quad (168)$$

$$T_3 T_{\pm} |\lambda_m\rangle = [T_3, T_{\pm}] |\lambda_m\rangle + T_{\pm} T_3 |\lambda_m\rangle = (m \pm 1) T_{\pm} |\lambda_m\rangle \quad (169)$$

$$T_{\pm} |\lambda_m\rangle = |\lambda_m \pm 1\rangle \quad (170)$$

$$T_+^{\dagger} = T_- \quad (171)$$

Projeção e normalização:

$$\langle \lambda_m | T_+^{\dagger} T_{\pm} | \lambda_m \rangle = \langle \lambda_m | T_1^2 + T_2^2 \pm i[T_1, T_2] | \lambda_m \rangle \quad (172)$$

$$\langle \lambda_m | T_+^{\dagger} T_{\pm} | \lambda_m \rangle = \langle \lambda_m | \vec{T}^2 - T_3(T_3 \pm 1) | \lambda_m \rangle \quad (173)$$

$$\lambda - m(m \pm 1) \geq 0 \quad (174)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) - m(m \pm 1) \geq 0 \quad (175)$$

Seja

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) - m(m \pm 1) = 0 \quad (176)$$

Temos:

$$m = \frac{1}{2} \quad (177)$$

Ou:

$$m = -\frac{1}{2} \quad (178)$$

Notação:

$$|\lambda = t(t+1)m\rangle = |t, t_3\rangle \quad (179)$$

$$t = \frac{1}{2} \quad (180)$$

$$\langle t, t_3 | T_{\pm}^+ T_{\pm} | t, t_3 \rangle = t(t+1) - t_3(t_3 \pm 1) \quad (181)$$

$$T_{\pm} | t, t_3 \rangle = \sqrt{t(t+1) - t_3(t_3 \pm 1)} | t t_3 \pm 1 \rangle \quad (182)$$

Operadores escada

$$t = \frac{1}{2} \quad (183)$$

$$\langle 1 | 2, -1 | 2 \rangle, \langle 1 | 2, +1 | 2 \rangle \quad (184)$$

$$\vec{T}^2 \langle 1 | 2, -1 | 2 \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) \langle 1 | 2, -1 | 2 \rangle \quad (185)$$

Operadores de criação e destruição nos estados de prótons e nêutrons ( $|p\rangle, |n\rangle$ )

$$T_3 |p\rangle = \frac{1}{2} |p\rangle \quad (186)$$

$$T_3 |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle \quad (187)$$

$$T_+ |n\rangle = |p\rangle \quad (188)$$

$$T_- |p\rangle = |n\rangle \quad (189)$$

$$T_+ |p\rangle = 0 \quad (190)$$

$$T_- |n\rangle = 0 \quad (191)$$

$$a_p^+ a_n |n\rangle = |p\rangle \quad (192)$$

$$a_n^+ a_p |p\rangle = |n\rangle \quad (193)$$

$$a_p^+ a_p |p\rangle = |p\rangle \quad (194)$$

$$a_n^+ a_n |n\rangle = |n\rangle \quad (195)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(a_p^+ a_p - a_n^+ a_n) \quad (196)$$

$$T_+ = a_n^+ a_n \quad (197)$$

$$T_- = a_n^+ a_p \quad (198)$$

Para satisfazer a álgebra:

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm \quad (199)$$

$$[T_+, T_-] = 2T_3 \quad (200)$$

Demonstrada em (164).

$$[a, b]_\pm = ab \pm ba \quad (201)$$

$$a_p, a_p^+ = 1 = [a_n, a_n^+] \quad (202)$$

Anti-comutadores.

$$\begin{aligned} [T_+, T_-] &= [a_p^+ a_n, a_n^+ a_p] \\ &= a_p^+ a_n a_n^+ a_p - a_n^+ a_p a_p^+ a_n + a_p^+ a_n a_n^+ a_p - a_p^+ a_n a_n^+ a_p \\ &= a_p^+ [a_n, a_n^+]_+ a_p - a_n^+ a_n + a_n^+ a_p^+ a_p a_n - a_p^+ a_n^+ a_n a_p \\ &= a_p^+ a_p = a_n^+ a_n \\ &= 2T_3 \end{aligned} \quad (203)$$

Agora a questão da carga elétrica  $Q$  e o número bariônico  $B$ . Como só o próton tem carga elétrica:

$$Q = e a_p^+ a_p \quad (204)$$

$$Q |p\rangle = e |p\rangle \quad (205)$$

$$Q |n\rangle = 0 |n\rangle \quad (206)$$

Por outro lado  $B = a_p^+ a_p + a_n^+ a_n$  que representa o número de bárions. Sendo:

$$T_3 = \frac{1}{2}(a_p^+ a_p - a_n^+ a_n) \quad (207)$$

Portanto, a relação entre carga elétrica, Isospin e número Bariônico é:

$$\frac{Q}{2} = T_3 + \frac{1}{2}B \quad (208)$$

## U(1) Global e número bariônico

Dada  $\mathcal{L}_{\text{doubleto}}$  97 e as transformações 94, foi deduzido a conservação da corrente 101, lembrando:

$$\partial_\mu J_i^\mu = 0 \quad (209)$$

A componente temporal da corrente ( $J^0$ ) para os bárions (prótons e nêutrons) é dada por::

$$J^0 = \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{n} \end{pmatrix} \gamma^0 \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = p^* p + n^* n \quad (210)$$

Aqui,  $p^*$  e  $n^*$  representam os estados conjugados complexos dos campos de próton (p) e nêutron (n) e  $\gamma^0$  é uma matriz de Dirac. Seja:

$$\bar{p} = p^* \gamma^0 \quad (211)$$

$$\gamma^{0^2} = \mathbb{I} \quad (212)$$

Portanto:

$$B = \int \partial^3 x (p^* p + n^* n) \quad (213)$$

O número de Bárions é conservado assim como a corrente  $J^0$ .

## Operadores de Criação e Destruição

Relembrando os possíveis estados do Píon:  $\pi^+, \pi^-, \pi^0$

$$T_3 |\pi^+\rangle = |\pi^+\rangle \quad (214)$$

$$T_3 |\pi^0\rangle = 0 \quad (215)$$

$$T_3 |\pi^-\rangle = -|\pi^-\rangle \quad (216)$$

Esse estados são rotulados como  $|t, t_3\rangle$ , onde:

$$t = 1 \quad (217)$$

$$t_3 = [+1, 0, -1] \quad (218)$$

Dessa forma, os operadores  $T_3$  e  $T_{\pm}$  são dados por:

$$T_3 = a^+ \pi a \pi - a^+ \pi - a \pi^- \quad (219)$$

$$T_+ = \sqrt{2}(a^+ \pi_0 a \pi^- + a^+ \pi^+ - a \pi^0) \quad (220)$$

$$T_- = \sqrt{2}(a^+ \pi_0 a \pi^+ + a^+ \pi^- - a \pi^0) \quad (221)$$

Onde:

$$[a \pi^-, a^+ \pi] = [a \pi^0, a^+ \pi^0] = [a \pi^+, a^+ \pi^+] \quad (222)$$

Uma vez que os comutadores dão 1.

Aplicando os operadores, temos:

$$T_-^+ |t, t_3\rangle = \sqrt{t(t+1) - t_3(t_3+1)} |t, t_3+1\rangle \quad (223)$$

$$T^+ |\pi^-\rangle = \sqrt{2} a^+ \pi^0 a \pi^- |\pi^-\rangle = \sqrt{2} a^+ \pi^0 \quad (224)$$

Criação e destruição.

$$\sqrt{2} a^+ \pi^0 |0\rangle \quad (225)$$

Neste caso, a operação representa a criação de um pión  $\pi^0$  a partir do vácuo.

## A Hipótese dos Quarks

A hipótese dos quarks foi proposta na década de 1960 por Murray Gell-Mann e George Zweig para explicar a estrutura interna dos hádrons, como prótons e nêutrons, que são as partículas que compõem o núcleo atômico. A ideia central dessa hipótese é que essas partículas, antes consideradas indivisíveis, na verdade, são formadas por constituintes mais fundamentais chamados quarks. Trataremos dos quarks up( $\mu$ ) e down( $d$ ) para construir os diagramas que formam os núcleons e suas interações.

## Diagramas de peso para partículas no SU(2), simetria de calibre local (isospin)

$$|t, t_3\rangle \quad (226)$$

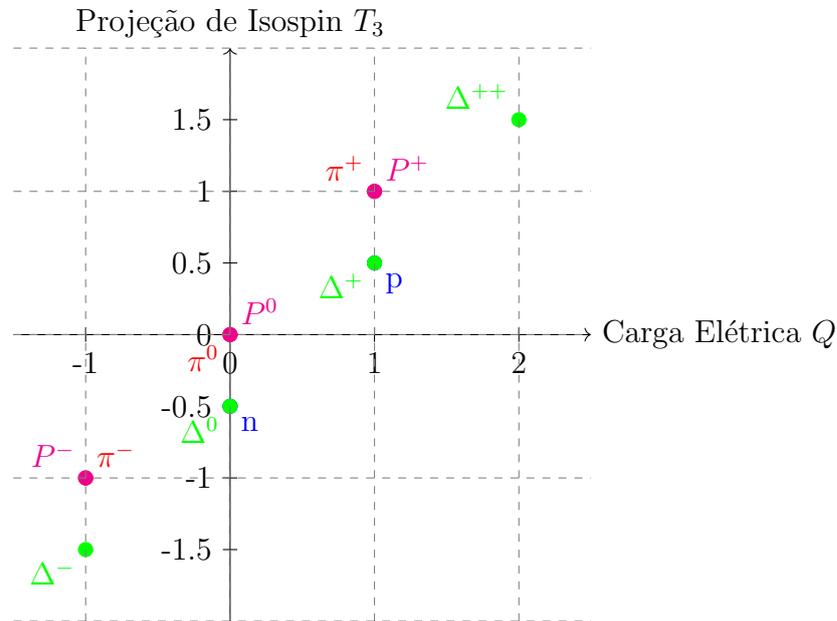
$$t = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{t_3} \\ \bullet \quad \bullet \\ t_3 = -\frac{1}{2} \quad t_3 = +\frac{1}{2} \end{array}$$

$$t = 1 \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{t_3} \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ t_3 = -1 \quad t_3 = 0 \quad t_3 = +1 \end{array}$$

$$t = \frac{3}{2} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{t_3} \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ t_3 = -\frac{3}{2} \quad t_3 = -\frac{1}{2} \quad t_3 = +\frac{1}{2} \quad t_3 = +\frac{3}{2} \end{array}$$

$$t = 1 \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{t_3} \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ t_3 = -1 \quad t_3 = 0 \quad t_3 = +1 \end{array}$$

Diagrama relacionando o Isospin com a carga das partículas estudadas.



Os diagramas ilustram as relações entre várias partículas hadrônicas, representando-as em termos de carga elétrica  $Q$  e projeção de isospin  $T_3$ .

### Partículas Representadas:

- **Bárion** (em azul): Próton ( $p$ ) e nêutron ( $n$ ), que formam um dublete de isospin.
- **Bárion  $\Delta$**  (em verde):  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^0$ , e  $\Delta^-$ , compondo um quadruplete com valores de  $I_3$  que variam de  $+\frac{3}{2}$  a  $-\frac{3}{2}$ .
- **Mésons  $\pi$**  (em vermelho):  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  e  $\pi^-$ , formando um triplo com projeções de isospin  $+1$ ,  $0$ , e  $-1$ .
- **Mésons  $P$**  (em magenta):  $P^+$ ,  $P^0$ , e  $P^-$ , hipotéticos em algumas teorias, representados aqui como um conjunto simétrico com projeções de isospin similares aos mésons  $\pi$ .

Aplicando a equação de carga elétrica

$$Q = e \left( T_3 + \frac{1}{2}B \right) \quad (227)$$

a cada uma das partículas representadas no diagrama, temos:

Para o próton,  $T_3 = +\frac{1}{2}$  e  $B = 1$ , resultando em

$$Q = e \left( +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = e \quad (228)$$

que corresponde à carga +1.

Para o nêutron,  $T_3 = -\frac{1}{2}$  e  $B = 1$ , então

$$Q = e \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (229)$$

indicando que ele é eletricamente neutro.

$\Delta^{++}$ : Para o estado  $\Delta^{++}$ ,  $T_3 = +\frac{3}{2}$  e  $B = 1$ , portanto

$$Q = e \left( +\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2e \quad (230)$$

correspondendo à carga +2.

$\Delta^+$ : Para  $\Delta^+$ , temos  $T_3 = +\frac{1}{2}$  e  $B = 1$ , então

$$Q = e \left( +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = e \quad (231)$$

correspondendo à carga +1.

$\Delta^0$ : Para  $\Delta^0$ ,  $T_3 = -\frac{1}{2}$  e  $B = 1$ , então

$$Q = e \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (232)$$

correspondendo à carga neutra.

$\Delta^-$ : Para  $\Delta^-$ ,  $T_3 = -\frac{3}{2}$  e  $B = 1$ , portanto

$$Q = e \left( -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) = -e \quad (233)$$

correspondendo à carga -1.

$\pi^+$ : Para o méson  $\pi^+$ ,  $T_3 = +1$  e  $B = 0$ , então

$$Q = e (+1 + 0) = e \quad (234)$$

resultando em carga +1.

$\pi^0$ : Para  $\pi^0$ ,  $T_3 = 0$  e  $B = 0$ , portanto

$$Q = e (0 + 0) = 0 \quad (235)$$

indicando carga neutra.

$\pi^-$ : Para  $\pi^-$ ,  $T_3 = -1$  e  $B = 0$ , então

$$Q = e (-1 + 0) = -e \quad (236)$$

resultando em carga -1.

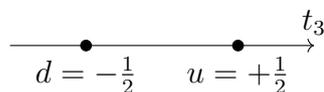
Assim, vemos que a carga elétrica  $Q$  de cada partícula é determinada pela combinação de sua projeção de isospin  $T_3$  e seu número bariônico  $B$ , ilustrando a simetria  $SU(2)$  e a organização das partículas no diagrama de peso.

Relembramos a definição de hádrons, compostos por bárions e mésons:

$$\text{Bárions : } p, n, \Delta \quad (237)$$

$$\text{Mésons : } \pi^+, \pi^-, \pi^0, P^+, P^-, P^0 \quad (238)$$

Podemos gerar essas partículas a partir da combinação de duas partículas de isospin  $t = \frac{1}{2}$ , como mostrado no diagrama abaixo:



### 3.1 Produto tensorial, soma direta e representações

Para combinar partículas de isospin  $t = \frac{1}{2}$ , utilizamos o produto tensorial ( $\otimes$ ) e a soma direta ( $\oplus$ ), conforme mostrado abaixo:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad (239)$$

Essa expressão significa que, ao combinar dois estados de isospin  $t = \frac{1}{2}$ , obtemos dois possíveis estados:

- Um estado singuleto com  $t = 0$ .
- Um estado triplo com  $t = 1$ , que possui projeções de isospin  $t_3 = +1, 0, -1$ .

Esses estados correspondem aos mésons.

Para partículas compostas por três quarks de isospin  $t = \frac{1}{2}$ , como os bárions, o produto tensorial gera:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \quad (240)$$

Isso significa que, ao combinar três estados de isospin  $t = \frac{1}{2}$ , obtemos:

- Um estado com  $t = \frac{3}{2}$ , correspondendo aos quatro estados  $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$  do quadrupeto Delta.
- Dois estados com  $t = \frac{1}{2}$ , correspondendo ao próton e ao nêutron.

Portanto, temos:

$$\frac{3}{2} : \quad \Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^- \quad (241)$$

$$\frac{1}{2} : \quad p, n \quad (242)$$

Esses resultados mostram como diferentes valores de isospin são gerados a partir de combinações de quarks, permitindo construir os bárions e mésons observados, conforme a simetria SU(2).

Portanto, podemos construir uma tabela que relaciona os quarks  $u$ ,  $d$ ,  $\bar{u}$  e  $\bar{d}$  com seus valores de  $t$ ,  $t_3$  e número bariônico  $B$

Quark/Antiquark	$t$	$t_3$	$B$
$u$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$d$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

Tabela 1: Tabela relacionando os quarks  $u$ ,  $d$ ,  $\bar{u}$  e  $\bar{d}$  com seus valores de  $t$ ,  $t_3$  e número bariônico  $B$ .

Uma vez que:

$$2q\mu + qd = 1 \quad (243)$$

$$2qd + q\mu = 0 \quad (244)$$

Temos:

$$p = 2\mu + d \quad (245)$$

Seja  $t_3 = +\frac{1}{2}$

$$n = 2d + \mu \quad (246)$$

Seja  $t_3 = -\frac{1}{2}$ , portanto:

$$q\mu = \frac{2}{3}e \quad (247)$$

$$qd = -\frac{1}{3} \quad (248)$$

Concluindo que, o Próton é formado por dois up's e um down, já o Nêutron é formado por dois down's e um up.

### 3.2 Diagramas de Feymann na representação Hadrônica por quarks:

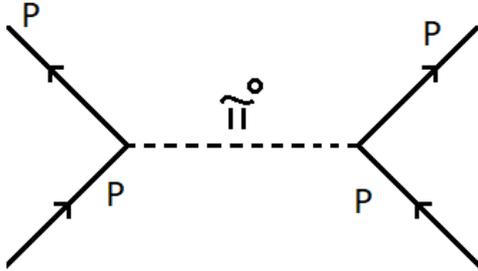


Figura 14: Invariância do Próton perante  $\pi^0$

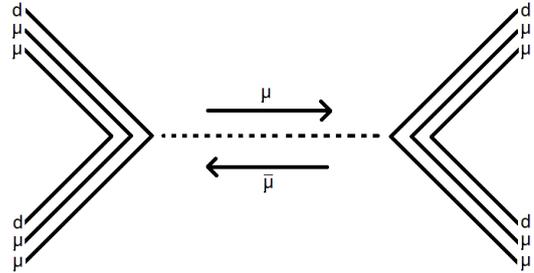


Figura 16: Invariância do Próton perante  $\pi^0$  (representação em quarks)

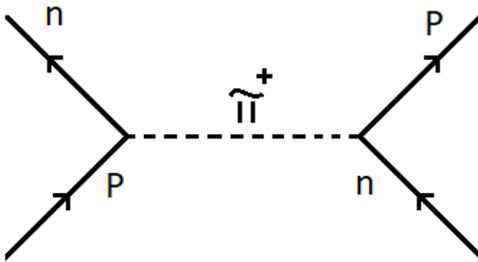


Figura 15: Próton virando Nêutron perante  $\pi^+$

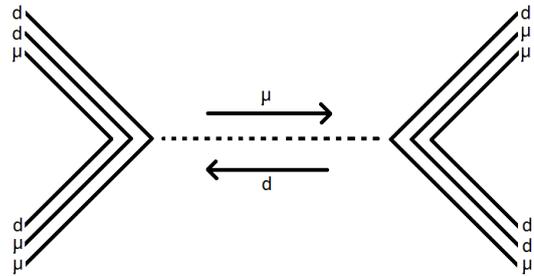


Figura 17: Próton virando Nêutron perante  $\pi^+$  (representação em quarks)

## 4 Cromodinâmica e a simetria de calibre SU(3) local na física das cores red, blue e green

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria que descreve a interação forte entre quarks e glúons, baseando-se no grupo de simetria SU(3) local. Os quarks, constituintes fundamentais dos hádrons, possuem uma propriedade chamada "cor", representada pelas três cargas: vermelho, azul e verde. A QCD é responsável por explicar como essas cores interagem por meio da troca de glúons, as partículas mediadoras dessa força.

A estrutura matemática da QCD é derivada da ideia de mínima ação, onde o lagrangiana  $\mathcal{L}$  descreve os quarks e suas interações. A simetria SU(3) local é uma extensão

da simetria global SU(2), permitindo que os parâmetros de transformação dependam da posição no espaço-tempo. Isso implica a necessidade de introduzir glúons como campos de calibre para garantir a invariância da teoria sob transformações locais.

Os glúons, por sua vez, são representados matematicamente por  $A_{a\mu}$ , onde  $a$  varia de 1 a 8, refletindo os oito geradores independentes da álgebra SU(3). Esses campos de calibre obedecem a relações específicas de transformação, garantindo a consistência com as equações da derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - igT_{(a)}A_{a\mu},$$

onde  $T_{(a)}$  são os geradores da álgebra SU(3),  $g$  é a constante de acoplamento, e  $A_{a\mu}$  representa os glúons.

A introdução de simetria SU(3) local requer que os campos de calibre sejam dinâmicos, o que resulta em interações entre os próprios glúons, além de interações entre quarks e glúons. Essas interações são representadas graficamente por vértices nos diagramas de Feynman, onde os glúons podem ser emitidos ou absorvidos por quarks, alterando sua cor.

Além disso, o formalismo matemático da álgebra SU(N) estabelece a dimensão do grupo de simetria como  $N^2 - 1$ . Para SU(3), isso resulta em 8 glúons distintos, enquanto para SU(2), temos 3 geradores associados. A construção desse espaço algébrico garante a invariância da teoria sob transformações locais e define as propriedades fundamentais das interações fortes.

A QCD explica como os quarks permanecem confinados dentro de hádrons devido à propriedade de confinamento de cor, uma consequência direta da simetria SU(3) local. Essa teoria também fundamenta fenômenos como a transformação de quarks de uma cor para outra durante interações mediadas por glúons, representada pela emissão e absorção de glúons em processos descritos por:

$$\mathcal{L}_{quarks} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi.$$

Esses conceitos e suas representações matemáticas serão explorados em detalhe na seção subsequente, incluindo a dedução formal das transformações de calibre, propriedades dos glúons e a estrutura lagrangiana que fundamenta a interação forte.

Seja a equação da mínima ação S:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\psi_A, \partial_\mu \psi_A) \tag{249}$$

Com  $A \in \mathbb{N}$

Pela simetria Global SU(2), deduzimos 77, portanto:

$$\psi_A = \psi'_A = [e^{iT_{(a)}\mathcal{E}^a}] \quad (250)$$

Para  $\mathcal{E} \approx 0$ , logo chegamos em:

$$\psi'_A \approx \delta_{AB}\psi_B + iT_{(a)}AB\mathcal{E}^a\psi_b = \psi_A + \delta\psi_A \quad (251)$$

## Corrente conservada.

Aplicando a noção de corrente conservada já discutida anteriormente, deduzimos que:

$$\delta S = 0 \quad (252)$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A}\delta\psi_A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\mu\psi_A)}\delta(\partial\mu\psi_A) \quad (253)$$

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\mu\psi_A)}\right]\delta\psi_A + \partial\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\mu\psi_A)}\delta\psi_A\right] \quad (254)$$

Onde definimos  $\delta\mu J_{(a)}^\mu = 0$

$$J_{(a)}^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\mu\psi_A)}iT_{(a)}AB\psi_B \quad (255)$$

Definindo assim a corrente.

## Álgebra de SU(N)

$$U = e^{iT_{(a)}\mathcal{E}^a}e^{iT_{(b)}\mathcal{E}^b}e^{-iT_{(a)}\mathcal{E}^a}e^{-iT_{(b)}\mathcal{E}^b} \quad (256)$$

$$\approx 1 + \mathcal{E}_a\mathcal{E}_b[T_{(a)}, T_{(b)}] = 1 + iT_{(c)}\mathcal{E}_c \quad (257)$$

Seja:

$$[T_{(a)}, T_{(b)}] = if_{abc}T_{(c)} \quad (258)$$

Para definirmos um espaço algébrico (Dimensão) usamos novamente U:

$$U = e^{iH} \quad (259)$$

Onde  $\dim H = 2N^2(\text{real+ima})$ , e relembrando 2.3 podemos eliminar não apenas um setor triangular na N elementos da diagonal, pois:

$$2N^2 = 2N + 2D \quad (260)$$

Dim  $H = 2N - \Delta - N = N^2$ , portanto, pela condição de determinantes já definida em 2.3 o traço de  $H$ ,  $TrH = 0$ , neste caso, eliminamos 1 variável:

$$\dim H = N^2 - 1 \quad (261)$$

Portanto:

$$SU(2) \rightarrow N = 2 \rightarrow \dim = 3 \quad (262)$$

$$SU(3) \rightarrow N = 3 \rightarrow \dim = 8 \quad (263)$$

$$SU(n) \rightarrow N = n \rightarrow \dim = n^2 - 1 \quad (264)$$

### Simetria de Calibre SU(N) local:

$$U = e^{iT_{(a)}\mathcal{E}^a} \quad (265)$$

Seja:  $N \in \mathbb{N}$ ,  $a = N^2 - 1$ , e  $U\psi$  com  $N$  Quarks.

$$\mathcal{E}_a \rightarrow \mathcal{E}_a(x) \quad (266)$$

$$\mathcal{L}(\psi_A, \partial_\mu \psi_A) = (\bar{\psi}_A(i\gamma^\mu d_\mu - m)\psi_A) \quad (267)$$

$$D'_\mu(e^{iT_{(a)}\mathcal{E}^a}\psi) = e^{iT_{(a)}\mathcal{E}^a}D_\mu\psi \quad (268)$$

Aplicando a derivada covariante, temos:

$$D_\mu = \partial_\mu - igT_{(a)}Aa_\mu \quad (269)$$

$$Aa_\mu \rightarrow A'ar = Aa_\mu + \delta Aa_\mu \quad (270)$$

Portanto:

$$\partial_\mu - igT_{(a)}(Aa_\mu + \delta Aa_\mu)e^{iT_{(b)}\mathcal{E}^b} = e^{iT_{(b)}\mathcal{E}^b}[\partial_\mu - igT_{(a)}Aa_\mu]\psi \quad (271)$$

Logo, pela transformação local, temos:

$$\delta Aa_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu\mathcal{E}^a + f_{abc}\mathcal{E}^b Aa_\mu \quad (272)$$

Deduzindo assim, a transformação de calibre dos Glúons  $Aa_\mu$ , portanto:

$$\mathcal{L}_{quarks} = \bar{\psi}(i\gamma^4 D_\mu - m)\psi_N \quad (273)$$

Para  $N$  cores de quarks

$$D\mu = \partial\mu - igT(a)Aa\mu \quad (274)$$

Deduzido em 269. De modo que podemos mais uma vez representar a equação deduzida em vértices:

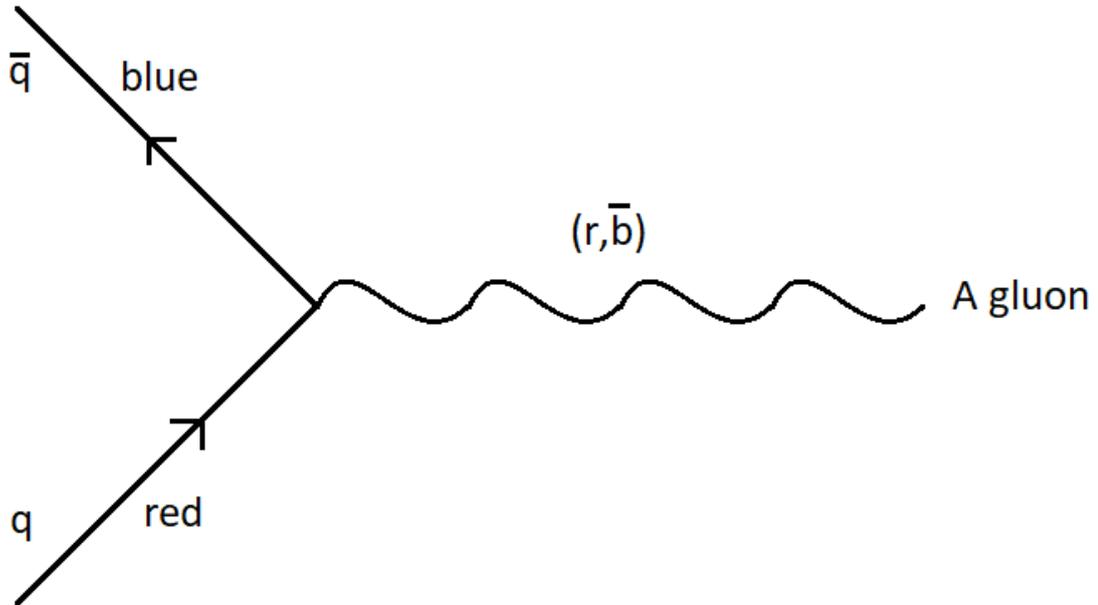


Figura 18: quark red se transformando em quark blue e emitindo um Glúon A.

## Representação da matéria pelos conceitos fundamentais.

Portanto, juntando todos os conceitos vistos até então podemos montar os diagramas de Feynmann usando a representação fundamental da matéria:

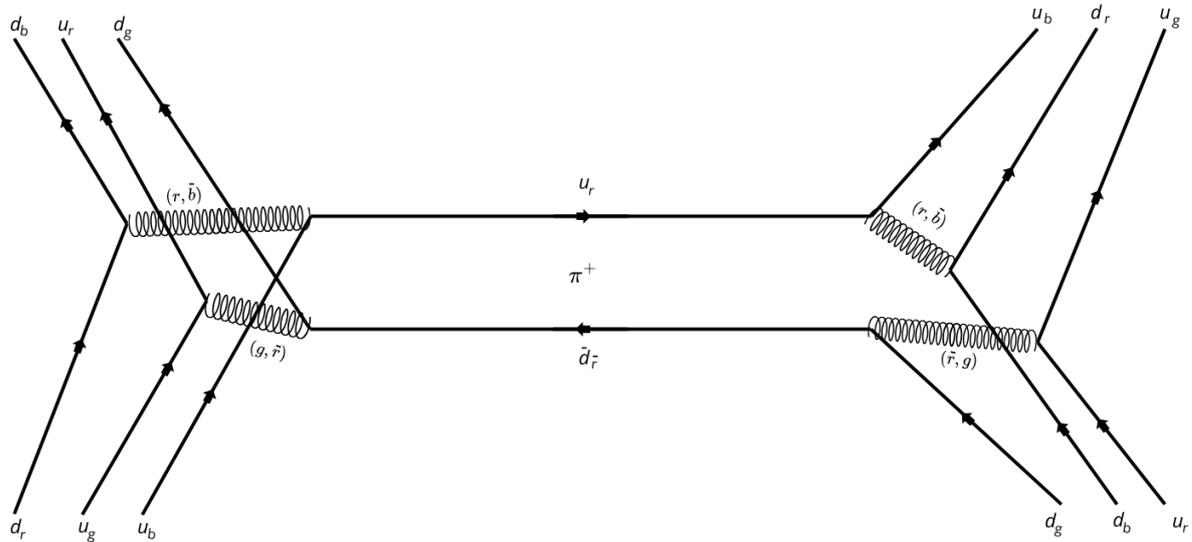


Figura 19: Próton virando Nêutron perante  $\pi^+$  (representação em quarks e suas respectivas cores).

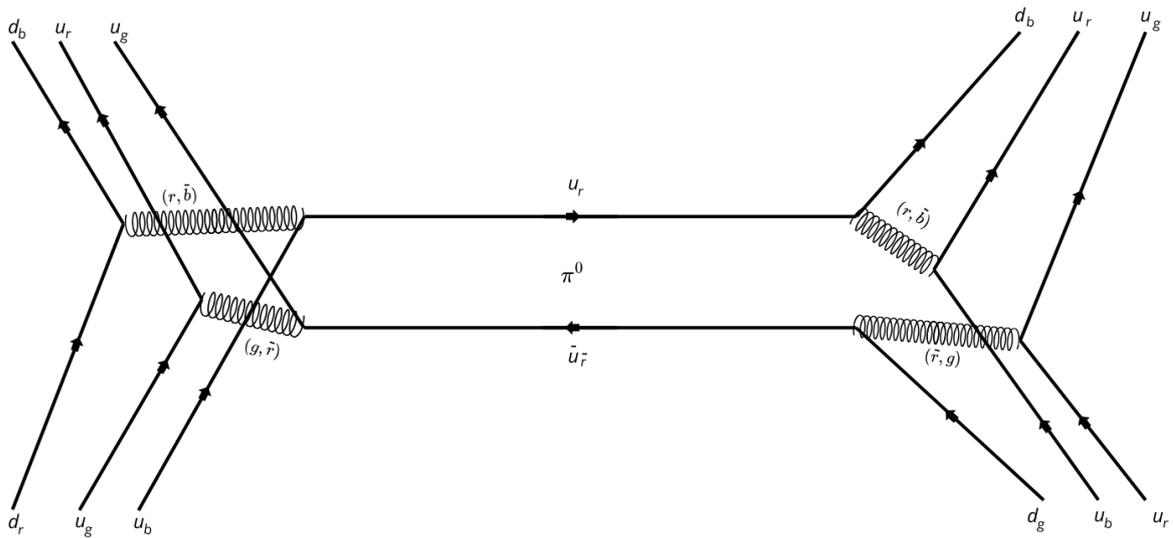


Figura 20: Invariância do Próton perante  $\pi^0$  (representação em quarks e suas respectivas cores).

Note que, como demonstrado anteriormente, a característica da cor carregada pelos quarks garantem sua existência isolada, uma vez que, para isso é preciso que a "soma" das cores resulte em branco, ou seja, vermelho com azul com verde, da branco, e isso é demonstrado nos diagramas.

## 5 Considerações finais (resultados e perspectivas)

Neste trabalho, exploramos a profunda relação entre simetrias de calibre, estruturas algébricas e a descrição fundamental das interações nucleares e de partículas. Através de uma abordagem sistemática e matemática, analisamos desde a hadrodinâmica baseada na simetria SU(2) global até a cromodinâmica quântica fundamentada na simetria SU(3) local, passando pela hipótese dos quarks e a física de sabores up e down.

Reforçando, é possível perceber no presente trabalho a importância das simetrias de calibre nas interações nucleares, de modo que com rigoroso, porém resumido, desenvolvimento matemático, podemos analisar as forças presentes no núcleo atômico, desde um olhar mais amplo, medindo os limites desta força, até um olhar fundamental, entendendo como tais partículas foram formadas. E tudo isso foi possível através dos diagramas de Feynman presentes, onde por eles conseguimos esclarecer as interações que são descritas por grandes e complicadas lagrangianas com simples ligações de setas e espirais, mas que fazem toda a física nuclear fazer sentido.

### Hadrodinâmica e a Simetria SU(2) Global

Inicialmente, abordamos a teoria hadrodinâmica considerando a simetria de isospin SU(2) global, conforme introduzida por Heisenberg. A Lagrangiana proposta incorpora contribuições de bárions (prótons e nêutrons) e mésons (píons), essenciais para descrever as interações nucleares fortes. A simetria SU(2) permite tratar prótons e nêutrons como diferentes estados de uma mesma partícula, caracterizada pelo isospin.

Matematicamente, demonstramos que a Lagrangiana da interação bárion-méson pode ser expressa como:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = gbm \sum_{i=1}^3 \bar{\psi} \gamma^\mu T_i \psi \phi_i, \quad (275)$$

onde  $T_i$  são as matrizes de Pauli representando os geradores da álgebra SU(2),  $\psi$  é o dubleto de núcleons e  $\phi_i$  são os campos dos píons.

Derivamos o potencial de Yukawa a partir da Lagrangiana dos mésons massivos de Yukawa:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Phi (\square + m^2) \Phi + J \Phi, \quad (276)$$

onde  $\Phi$  é o campo escalar e  $J$  representa a fonte. Utilizando métodos analíticos, chegamos à expressão do potencial:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{e^{-mx}}{4\pi x}, \quad (277)$$

indicando que a força nuclear decai exponencialmente com a distância, justificando o alcance finito da interação forte.

## Isospin e a Física de Sabores Up e Down

Prosseguimos explorando a álgebra de isospin e sua aplicação na física de partículas. Utilizando as matrizes de Pauli, estabelecemos os comutadores fundamentais:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k, \quad (278)$$

e definimos os operadores de escalonamento  $T_{\pm} = T_1 \pm iT_2$ , que atuam como operadores de criação e aniquilação entre estados de isospin. Aplicamos esses operadores aos estados de prótons e nêutrons:

$$T_+ |n\rangle = |p\rangle, \quad T_- |p\rangle = |n\rangle, \quad (279)$$

demonstrando matematicamente as transições possíveis entre essas partículas.

Além disso, estabelecemos a relação entre carga elétrica  $Q$ , isospin  $T_3$  e número bariônico  $B$ :

$$Q = e \left( T_3 + \frac{1}{2}B \right), \quad (280)$$

mostrando que a carga das partículas pode ser derivada diretamente de suas propriedades de isospin e número bariônico.

## A Hipótese dos Quarks e Representações SU(2)

A hipótese dos quarks, proposta por Gell-Mann e Zweig, foi fundamental para explicar a estrutura interna dos hádrons. Identificamos que prótons e nêutrons são compostos por quarks up ( $u$ ) e down ( $d$ ), com combinações específicas:

$$\text{Próton (p) : } uud, \quad \text{Nêutron (n) : } udd. \quad (281)$$

Construímos diagramas de peso no contexto da simetria SU(2), relacionando os valores de  $T_3$  e carga elétrica  $Q$  das partículas. Utilizando o produto tensorial de estados de isospin, mostramos que:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1, \quad (282)$$

gerando estados singletos e triplos correspondentes aos mésons observados.

Analisamos também a composição de bárions através do produto tensorial de três estados de isospin:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}, \quad (283)$$

onde identificamos que  $t = \frac{3}{2}$  corresponde aos quatro estados  $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$  do quadrupeto Delta e os dois estados com  $t = \frac{1}{2}$ , correspondendo ao próton e ao nêutron.

## Cromodinâmica Quântica e a Simetria SU(3) Local

Finalmente, estendemos nossa análise para a cromodinâmica quântica (QCD), que descreve a interação forte entre quarks e glúons, fundamentada na simetria de calibre SU(3) local. Introduzimos a propriedade de cor dos quarks, representada pelas cargas vermelho, azul e verde, e mostramos que a QCD requer a introdução de campos de calibre dinâmicos (glúons) para garantir a invariância local.

Matematicamente, definimos a derivada covariante na simetria SU(3):

$$D_\mu = \partial_\mu - igT_{(a)}A_{a\mu}, \quad (284)$$

onde  $T_{(a)}$  são os geradores da álgebra SU(3) e  $A_{a\mu}$  são os campos dos glúons. Demonstramos que as transformações de calibre dos glúons são dadas por:

$$\delta A_{a\mu} = \frac{1}{g} \partial_\mu \mathcal{E}a + f_{abc} \mathcal{E}b A_{c\mu}, \quad (285)$$

garantindo a consistência da teoria sob transformações locais.

Além disso, discutimos a álgebra SU(N) em geral, estabelecendo que a dimensão do grupo é  $N^2 - 1$ . Para SU(3), isso resulta em oito glúons diferentes, essenciais para mediar as interações fortes entre quarks.

## Integração dos Resultados e Implicações Físicas

Através das seções desenvolvidas, observamos uma progressão lógica e matemática que conecta a simetria de isospin SU(2) à simetria de cor SU(3), passando pela compreensão da estrutura interna dos hádrons via a hipótese dos quarks. Os desenvolvimentos matemáticos apresentados permitiram:

- Justificar o alcance finito da força nuclear através do potencial de Yukawa e a troca de mésons.

- Descrever as transições entre prótons e nêutrons utilizando operadores de isospin, explicando fenômenos como decaimentos e reações nucleares.
- Entender a organização das partículas em multipletos de isospin, visualizados através de diagramas de peso e produtos tensoriais.
- Fundamentar a QCD como a teoria que descreve a interação forte, incorporando a necessidade de campos de calibre dinâmicos e a introdução dos glúons.

Os cálculos detalhados e as deduções matemáticas fornecem uma base sólida para a compreensão das interações fundamentais na física de partículas. A utilização das simetrias  $SU(2)$  e  $SU(3)$  não apenas simplifica a descrição dessas interações, mas também revela propriedades intrínsecas das partículas, como confinamento de cor e conservação de cargas.

## Perspectivas Futuras

Este trabalho abre caminho para estudos mais aprofundados em teorias de gauge não abelianas e suas aplicações na física de altas energias. A compreensão das simetrias de calibre é crucial para o desenvolvimento de teorias unificadas que buscam integrar as forças fundamentais. Além disso, a investigação de fenômenos como o confinamento de quarks e a geração de massa através do mecanismo de Higgs permanece como fronteiras desafiadoras e excitantes na física teórica.

## Conclusão

Concluimos que as simetrias  $SU(2)$  e  $SU(3)$  desempenham papéis fundamentais na descrição das interações nucleares e de partículas. Através de desenvolvimentos matemáticos rigorosos, conseguimos conectar conceitos teóricos a observáveis físicos, enriquecendo nossa compreensão do mundo subatômico. Este trabalho reforça a importância das simetrias e da matemática na construção das teorias físicas que explicam a natureza em seus níveis mais fundamentais. O trabalho aqui apresentado completa uma trilogia envolvendo o estudo do papel das simetrias, em especial a simetria de calibre, na construção e descrição das interações da natureza (eletromagnética, fraca, forte e gravitacional) [6,71].

## Referências

- [1] E. Noether, Invariant Variation Problems, Math-phys. Klasse 1918, 235 (1918); translated by M.A. Tavel, arXiv: 0503066v2 (2005).
- [2] O. A. Acevedo and B. M. Pimentel, Teoremas de Nöether: um estudo, Rev. Bras. Ens. Fis. 45, e20230091, (2023).
- [3] Nivaldo A. Lemos, Mecânica Analítica, (Livraria da Física, 2007).
- [4] W. Greiner and Reinhardt, Field Quantization, (Springer, Berlin, 1996).
- [5] Aldrovandi and J. G. Pereira, An Elementary Introduction to Classical Fields, IFT-Unesp (2019).
- [6] L. F. Alves, Teoria de Campos e simetrias no vies conceitual de Mecânica Analítica: Um breve estudo no formalismo lagrangiano e hamiltoniano, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Alfenas (2023).
- [7] L. O’Raifeartaigh, The Dawning of Gauge Theory (Princeton University Press, Princeton, 1997).
- [8] B. Neto, Eletrodinâmica Quântica, notas de curso (IF/UFRJ, Rio de Janeiro, 1988); Teoria de Campos e a Natureza-parte quântica, (Livraria da Física, São Paulo, 2017)
- [9] M.E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction To Quantum Field Theory, (Perseus Books, New York, 1995).
- [10] Ashok Das, Lectures on Quantum Field Theory, (World Scientific, Singapore, 2008).
- [11] H. Weyl, Gravitation and Electricity, Preuss Akad. Wiss. 465, 29 (1918).
- [12] W. Heisenberg, On the Structure of Atomic Nuclei. I, I. Z. Physik 77, 1 (1932).
- [13] I. G. Tamm, Interaction of Neutrons and Protons, Nature 133, 981 (1934).
- [14] H. Yukawa, On the Interaction of Elementary Particles. I, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn. 17, 48 (1935).
- [15] H. Weyl, Electrons and gravitation. I, Zeit. f. Physik 330, 56 (1929).
- [16] C.N. Yang e R. Mills, Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance, Phys. Rev. 96, 191 (1954).
- [17] N. Straumann, em The Ninth Marcel Grossmann Meeting, editado por V.G Gurzadyan, R.T Jantzen e R. Ruffini (World Scientific, Singapore, 2002).

- [18] R. Utiyama, Invariant Theoretical Interpretation of Interaction, *Phys. Rev.* 101, 1597 (1957).
- [19] O. A. Acevedo, R. R. Cuzinatto, B. M. Pimentel e P. J. Pompeia, Teorias de gauge a la Utiyama, *Rev. Bras. Ens. Fis.* 40, e4302 (2018).
- [20] P.A.M. Dirac, A new meaning for gauge transformations in electrodynamics, *Il Nuovo Cim.* 7, 925 (1950).
- [21] J. Schwinger, The theory of quantized fields. II, *Phys. Rev.* 91, 713 (1953).
- [22] A. Salam, Overlapping divergences and the S matrix. *Phys. Rev.* 82, 217 (1951).
- [23] P. T. Matthews and Abdus Salam, The Renormalization of Meson Theories, *Rev. Mod. Phys.* 23, 311 (1951).
- [24] Abdus Salam, *Development in Quantum Theory of Fields*, (University of Cambridge, 1952).
- [25] P.K. Kuo and D.R. Yennie, Renormalization theory, *Annals Phys.* 51, 496 (1969).
- [26] R. Shaw, *Problem of Particle Types and Other Contributions to the Theory of Elementary Particles*. Tese de Doutorado, Cambridge University, Cambridge (1955).
- [27] J. C. Taylor, *Gauge Theories In The Twentieth Century* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 2001).
- [28] J. C. Ward, The Scattering of Light by Light, *Phys. Rev.* 77, 293 (1950).
- [29] J. C. Ward, An Identity in Quantum Electrodynamics, *Phys. Rev.* 78, 182 (1950).
- [30] Y. Takahashi, On the generalized ward identity, *Il Nuovo Cimento* 6, 371 (1957).
- [31] C. Becchi, A. Router, and R. Store, Renormalization of gauge theories *Ann. Phys.* 98, 287 (1976).
- [32] I.V. Tyutin, I. V. Tyutin, Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism, Preprint of P. N. Lebedev Physical Institute 39, (1975); arXiv: 0812.0580 (2008).
- [33] A. A. Slavnov, Ward identities in gauge theories, *Theor. Math. Phys.* 10, 99 (1972).
- [34] J. C. Taylor, Ward identities and charge renormalization of the Yang-Mills field, *Nucl. Phys. B* 33, 436 (1971).
- [35] P. A. M. Dirac, Generalized Hamiltonian Dynamics, *Canad. J. Math.* 2, 129 (1950); *Lectures on Quantum Mechanics*, 1st edn. (Belter Graduate School of Science, New York, 1964).

- [36] P. A. M. Dirac, The Lagrangian in Quantum Mechanics, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* 3, 64 (1933). J. Schwinger, *Symbolism of Atomic Measurements*, 1st edn. (Springer, New York 2001). R. Feynman, *A New Approach to Quantum Theory*, 1st edn. (World Scientific, New Jersey 2005).
- [37] L. D. Faddeev, Feynman integral for singular Lagrangians, *Teor. Mat. Fiz.* 1, 3 (1969); *Theor. Math. Phys.* 1, 1 (1969). P. Senjanovic, Path integral quantization of Field theories with second-class constraints, *Ann. Phys.* 100, 227 (1976); K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, 1st edn. (Springer-Verlag, Berlin, 1982); D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, 1st edn. (Springer-Verlag, Berlin, 1990). 173; H. J. Rothe and K. D. Rothe, *Classical and quantum dynamics of constrained Hamiltonian systems*, 1st edn. (World Scientific, New Jersey, 2010).
- [38] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, Quantization of relativistic systems with constraints. Equivalence of canonical and covariant formalisms in quantum theory of gravitational Field, CERN report TH 2332 (1977).
- [39] Roberto Percacci, Gravity as a Quantum Field Theory, *Symmetry* 15, 449 (2023).
- [40] N. Nakanishi e I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, *Lecture Notes in Physics* (World Scientific, Singapore, 1990), v. 27.
- [41] B. S. De Witt, Quantum theory of gravity II The manifestly covariant theory, *Phys. Rev* 162, 1195 (1967).
- [42] G. 't Hooft *Acta Univ. Wratisl.* no. 38, 17th Winter School of theoretical physics in Karpacz: Functional and probabilistic methods in quantum field theory, vol. 1 (1976).
- [43] S. Weinberg, Effective Gauge Theories, *Physics Letters Volume 91B*, number 1 (1980).
- [44] L. F. Abbott, The Background Field Method Beyond One Loop, *Nucl. Phys B* 185, 189-203 (1981).
- [45] L. F. Abbott, Introduction to the Background Field Method, *Acta Physica Polonica B* 13, (1982).
- [46] L. F. Abbott, M.T.Grisaru and R.K. Schaefer, The Background Field Method and the S-Matrix, *Nucl. Phys B* 229, 372 (1983).
- [47] H. Ruegg and M. R. Altaba, The Stueckelberg Field, *International Journal of Modern Physics A* 19, 3265 (2004).
- [48] R. H. Kraichnan, *Quantum Theory of the Linear Gravitational Field*, (MIT, 1947).

- [49] S. N. Gupta, Gravitation and Electromagnetism, Phys. Rev. 96, 1683 (1954).
- [50] R. H. Kraichnan, Special-Relativistic Derivation of Generally Covariant Gravitation Theory, Phys. Rev. 98, 1118 (1955).
- [51] S. Weinberg, Derivation of gauge invariance and the equivalence principle from Lorentz invariance of the S- matrix, Phys. Lett. 9, 357 (1964).
- [52] S. Weinberg, Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's equations, Phys. Rev. 138, B988 (1965).
- [53] J. Schwinger, Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation, Phys. Rev. 74, 1439 (1948).
- [54] C. A. M. Melo, B.M. Pimentel e J.A. Ramirez, Princípio da Ação Quântica de Schwinger, Rev. Bra. Ens. Fís. 35, 4302 (2013).
- [55] J. Schwinger, Particles, Sources and Fields (Perseus Books, Boston, 1973), v. 1, 2 e 3.
- [56] A. F. Ferrari, A. A. Nogueira e C. Palechor, Mínimo teórico para descrever campos quânticos em equilíbrio termodinâmico, Rev. Bras. Ens. Fís. 40, e3315 (2018).
- [57] F. A. Barone, A. A. Nogueira e B. M. Pimentel, O Efeito Casimir em Teoria das Fontes, Rev. Bras. Ens. Fis. 38, e3317 (2016).
- [58] S. Deser, Self-Interaction and Gauge Invariance, General Relativity and Gravitation 1, 9 (1970).
- [59] D. G. Boulware. and S. Deser, Classical general relativity derived from quantum gravity, Annals of Physics, 89, 193 (1975).
- [60] R. M. Wald, Spin-2 Fields and General Covariance, Phys. Rev. D 33, 3613 (1986).
- [61] S. Deser, Gravity from self-interaction in a curved background, Classical and Quantum Gravity 4, L99 (1987).
- [62] S. Deser, Gravity from self-interaction redux, Gen Relativ Gravit 42, 641 (2010).
- [63] T. Padamanabhan. From gravitons to gravity-myths and reality, International Journal of Modern Physics D 17, 367 (2008).
- [64] J. Foster and J.D. Nightingale, A Short Course in General Relativity, 3<sup>a</sup> ed. (Springer, New York, 2006).
- [65] Carlos Barceló et all, Unimodular gravity and general relativity from graviton self-interactions, Phys. Rev. D 89, 124019 (2014).

- [66] S. Okubo, Introduction To General Relativity, U. Rochester UR-695, (1978).
- [67] M. Blagojevic, Gravitation and gauge symmetries (Routledge, Abingdon, 2001).
- [68] M. D. Maia and B. Bezerra, The Impact of the Higgs on Einstein's Gravity, International Journal of Modern Physics A 35, 2040012 (2020).
- [69] R. Androvandi and J. G. Pereira, Natural Poincaré gauge model, Phys. Rev. D 33, 2788 (1986); Existence of Lagrangians for the Yang-Mills equations, Rep. Math. Phys 26, 237 (1987); On the quantization of Poincaré and de Sitter gauge models, J. Math. Phys. 29, 1472 (1988).
- [70] A. Nogueira e D. R. da Silva, Teorias de calibre a la Shaw-Deser, Rev. Bras. Ens. Fis. 42, e20200137, (2020).
- [71] J. P. P. Leal, Campos Intermediadores na Leitura da Quebra Espontânea de Simetria: Implicações no Modelo Padrão e Além, Monografia de graduação da UNIFAL (2024).