UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

DAVI ANTONIO ASSUNÇÃO

ANÁLISE DO DESLOCAMENTO ORTOGONAL À DIREÇÃO DO MOVIMENTO NA TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

ALFENAS/MG

2025

DAVI ANTONIO ASSUNÇÃO

ANÁLISE DO DESLOCAMENTO ORTOGONAL À DIREÇÃO DO MOVIMENTO NA TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como parte dos requisitos para obtenção
do título de Licenciatura em Física,
pela Universidade Federal de Alfenas.
Orientador(a): Prof. Dr. S.B. Soltau

ALFENAS/MG

2025

Resumo

Os problemas de Relatividade Restrita envolvendo a transformação de Lorentz propostos em manuais de Física alinham o movimento dos projéteis e dos observadores que o descrevem numa única coordenada, ou seja, na mesma direção e sentido. Contudo, estudar a situação na qual o movimento de um projétil é ortogonal à direção dos referenciais dos observadores permite graduar a dificuldade na análise até enfrentar a situação de movimentos em qualquer direção. Neste contexto, apresentamos aqui um caso simples, bidimensional ao estudarmos a quantidade de movimento de um projétil lançado perpendicularmente contra um alvo conforme descrito na perspectiva de observadores em dois referenciais distintos com a intenção de desenvolver a intuição física a respeito de fenômenos relativísticos e aprimorar a habilidade no uso das equações e conceitos Relatividade Restrita.

Palavras-chave: *Física. Teoria da Relatividade Restrita. Transformação de Lorentz. Referenciais.*

Abstract

The Special Relativity problems involving the Lorentz transformation proposed in Physics textbooks align the projectiles motion and the observers describing it in a single coordinate in the same direction. However, studying the situation in which the motion of a projectile is perpendicular to the direction of the observers' reference frames allows to graduate the difficulty in the analysis until facing the situation of motion in any direction. In this context, we present here a simple, two-dimensional case of studying the momentum of a projectile launched perpendicularly against a target as described from the perspective of observers in two different reference frames with the intention of developing physical intuition about relativistic phenomena and improving the ability to use Special Relativity equations and concepts.

Keywords: *Physics. Theory of Special Relativity. Lorentz Transformation. Reference Frames.*

I. Introdução

Na maioria dos manuais de Física que abordam a Teoria da Relatividade Restrita (1, 2, 3) o movimento de um objeto estudado está alinhado paralelamente ao eixo x que, via de regra, é o mesmo da direção do deslocamento dos referenciais envolvidos. Esta é uma escolha conveniente pois em tal situação as coordenadas que restam, i. e., y e z são invariantes sob as transformações de Lorentz uma vez que $y = y'$ e $z = z'$. Contudo, é interessante estudar o caso em que o movimento do objeto não coincide com a mesma coordenada do movimento dos referenciais.

Apresentamos aqui uma situação na qual ocorre o movimento espacial bidimensional de uma massa no eixo ortogonal ao deslocamento dos referenciais. O propósito é estudar um caso simples, bidimensional, antes de abordar situações mais complexas nas quais as linhas de mundo de observadores e do fenômeno descrito por eles seguem direções arbitrárias, como é discutido e.g. (4), (5) ou (6). Com este estudo esperamos contribuir para desenvolver e aprimorar a intuição física a respeito de fenômenos relativísticos e a habilidade no uso das equações e conceitos da Relatividade Restrita.

A Relatividade Restrita afirma que a massa de um objeto e, por extensão, a sua quantidade de movimento (*momentum*), depende dos referenciais inerciais nos quais são medidas (1). Propomos examinar a relação entre as quantidades de movimento de um projétil lançado contra um alvo fixo em relação ao seu referencial próprio por meio da solução analítica deste problema balístico como percebido na perspectiva de dois observadores situados em referenciais distintos e ambos ortogonais ao disparo do projétil.

O artigo está organizado como segue. Na Seção II, apresentamos os conceitos e ideias da Teoria da Relatividade Restrita necessárias para abordar o presente estudo. Na Seção III, o problema em estudo é descrito e analisado sob a perspectiva dos conceitos apresentados na seção anterior e, na Seção IV, expomos a solução analítica do problema estudado. Por fim, na Seção V, apresentamos as considerações finais e apontamos alguns desdobramentos e possibilidades de explorar problemas similares porém mais complexos.

II. Alguns conceitos da Teoria da Relatividade Restrita

A Teoria da Relatividade Restrita possui dois postulados centrais como pressupostos que dão consistência aos conceitos e formulações da teoria. No primeiro, temos que as leis da Física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais, ou seja, todos os sistemas referenciais são equivalentes, não há referenciais privilegiados. O outro postulado, relacionado à causalidade dos eventos, é o princípio da constância da velocidade da luz que estabelece a velocidade da luz no vácuo como um limite universal, intransponível sendo a mesma para todos os observadores em referenciais inerciais, independentemente da velocidade relativa entre eles. Isso significa que os efeitos da Relatividade Restrita começam a se tornar relevantes quando os objetos se movem em velocidades comparáveis à da luz (1).

Contudo, para que a velocidade da luz seja constante em qualquer sistema de referência inercial, o tempo e o espaço não podem ser tomados como grandezas absolutas. Como consequência disso, as velocidades altas comparadas com a da luz no vácuo apresentam medidas variáveis conforme o referencial. Uma vez que não há referenciais absolutos cada referencial tem seus valores observáveis próprios, e.g., tempo próprio, comprimento próprio, velocidade própria etc., relativos a cada observador em seu referencial próprio (3).

Para estabelecer conexões entre as coordenadas de tempo e espaço, i.e., espaço-tempo, em diferentes referenciais utilizamos as *Transformações de Lorentz*, (2) dadas pelas equações em (1):

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

e, a *inversa da Transformação de Lorentz* dadas pelas equações em (2),

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

onde x, y, z são as coordenadas espaciais e t, o tempo no referencial inercial de observador, via de regra vinculado ao *referencial do laboratório* e, x', y', z', t' são as coordenadas espaço-temporal em outro referencial de observador em movimento relativo em relação ao primeiro, em geral denominado *referencial da partícula*. O *fator de Lorentz*, designado por γ, é dado pela equação (3) definida como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{onde} \quad \beta = \frac{v}{c}, \tag{3}$$

onde v é a velocidade relativa entre os dois referenciais e c é a velocidade da luz no vácuo[1].

A seguir apresentamos mais alguns conceitos da Relatividade Restrita relevantes para analisar e discutir o problema abordado neste estudo.

II.1. Contração de Lorentz

A *contração de Lorentz* descreve como a dimensão de um objeto muda quando ele se move com velocidades próximas à da luz no vácuo em relação a um observador e é descrita pela Eq. (4):

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{4}$$

onde L' é a dimensão de um objeto em movimento como medida por um observador num referencial distinto do referencial próprio do objeto, v é a velocidade do objeto em relação ao observador, L é a dimensão do objeto quando ele está em repouso no seu referencial próprio e c é a velocidade da luz no vácuo (3).

[1]A velocidade da luz no vácuo é 299 792 458 m/s (7)

A contração de Lorentz é uma consequência direta do primeiro postulado da Teoria da Relatividade Restrita. A equação (4) mostra que a dimensão de um objeto aparenta ser menor quando ele se move a velocidades próximas à da luz em relação a um observador, o que é conhecido na literatura também como efeito de *contração na direção do movimento* (2).

II.2. Velocidades relativísticas

A velocidade de um móvel é um observável mensurável na perspectiva de dois referenciais distintos. Um primeiro referencial que se move ao longo de uma única coordenada com velocidade constante v em relação a um segundo referencial que observa o movimento do primeiro. Cada observador em seu respectivo referencial mede a velocidade do móvel. No primeiro referencial as componentes da velocidade são u'_x, u'_y e u'_z. No segundo referencial as componentes da velocidade são u_x, u_y e u_z. Com estas definições e a partir das transformações de coordenadas de Lorentz, Eqs. (1), encontramos as seguintes transformações de velocidade de Lorentz como medidas no primeiro referencial:

$$
\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x - v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}} \\
u'_y &= \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \\
u'_z &= \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

A velocidade v é positiva se o segundo referencial se mover na direção $+x$ e negativa se, ao contrário, se mover na direção $-x$. Como nas Eqs. (2), se as Eqs. (5) são invertidas, obtemos

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}} \\
u_y &= \frac{u'_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \\
u_z &= \frac{u'_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Ressaltamos que as componentes da velocidade nas coordenadas y, z e y', z' como medidas em seus respectivos referenciais não envolvem o valor de v ou $-v$ no numerador das Eqs. (5) e (6), pois o movimento relativo ocorre somente ao longo da coordenada x. Sendo assim, precisamos descontar a contribuição da velocidade $\pm v$. Vale notar que devido à simetria presente no postulado da Relatividade Restrita que estabelece que as leis da Física são invariantes para todos os referenciais inerciais, ambos os referenciais são completamente equivalentes.

II.3. Massa relativística

Assim como o comprimento e as velocidades, a massa de um objeto também está submetida aos efeitos relativísticos. Quando um objeto se move com velocidades próximas a da velocidade da luz no vácuo, a sua massa mensurada aumenta e, consequentemente, sua energia também aumenta. Assim, quanto mais a velocidade de um objeto se aproxima da velocidade luz, mais energia será necessário fornecer para acelerar o objeto.

A Eq. (7) fornece a massa m de um objeto como medida em um referencial inercial que se move com velocidade próxima à da luz no vácuo em relação ao referencial próprio do objeto

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{7}$$

onde m_0 é a massa inercial do objeto medida, portanto, quando o objeto está em repouso em seu referencial próprio, v é a velocidade do objeto em relação ao observador e c, como esperado, é a velocidade da luz no vácuo (3).

III. O problema em estudo

O presente estudo examina o problema representado na Figura 1 e descrito a seguir.

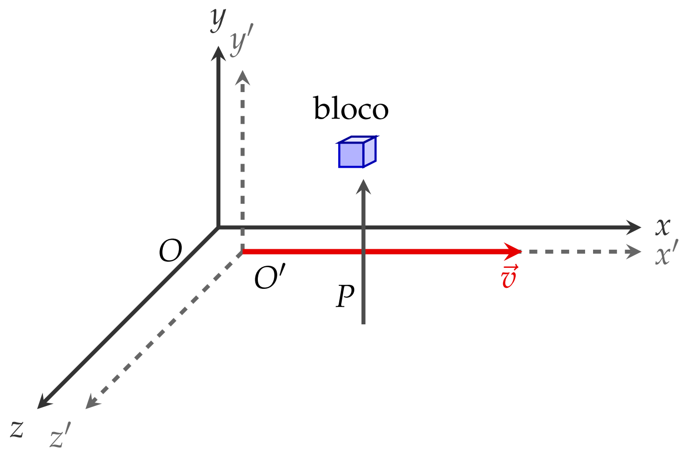

Figura 1: *Diagrama representando o problema descrito.*

Sejam dois referenciais inerciais distintos. Um referencial, denotado por O, com coordenadas x, y, z e t e outro referencial, denotado por O', com coordenadas x', y', z', t' e que se move ao longo das coordenadas paralelas $x \parallel x'$ com velocidade constante v em relação a outro referencial O.

A partir do referencial O' é disparado um projétil de massa de repouso m_0, cuja massa relativística observada neste referencial O' é m', na direção da coordenada y' até atingir um bloco fixo em relação ao referencial O'. Do ponto de vista de um observador em repouso neste mesmo referencial O', o projétil irá se mover em linha reta com uma velocidade constante u'_y.

É razoável supor que a profundidade que o projétil penetrará no bloco é determinada pela componente y' da quantidade de movimento (*momentum*), dado por

$$p'_y = m' u'_y \tag{8}$$

onde m' é a massa relativística do projétil como medida no referencial O'.

Porém, consideremos o mesmo evento a partir do ponto de vista de um observador situado no referencial O que mede o referencial O' se movendo na direção $x \parallel x'$ com velocidade v_x. Como a profundidade alcançada pelo projétil é perpendicular à direção do movimento relativo, os observadores situados em ambos os referenciais concordariam quanto à medida da profundidade da penetração do projétil no bloco e, portanto, esperariam encontrar o mesmo valor para a quantidade de movimento do projétil calculado a partir de seus respectivos referenciais.

Entretanto, no referencial O, a quantidade de movimento é

$$p_y = m u_y \tag{9}$$

onde m é a massa do projétil e u_y é a velocidade do projétil como medida no referencial O.

A partir das Eqs. (5) e (6) e dado que $u'_x = 0$ temos que

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 - \frac{u'_x v}{c^2}\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 - \frac{(0)v}{c^2}\right)} = \frac{u'_y}{\gamma} = u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{10}$$

e, substituindo (10) em (9), podemos escrever que

$$p_y = m u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{11}$$

Vale ressaltar que se assumirmos que ambos os observadores atribuem a mesma massa inercial, $m' = m$, ao projétil disparado por conta da profundidade que penetrou no bloco, da concordância em relação à massa, surge uma diferença entre a quantidade de movimento, $p'_y \neq p_y$, do projétil medida em cada referencial em contradição com o esperado. Nesta inconsistência é que reside o problema.

IV. Solução

Os conceitos e equações da Teoria da Relatividade Restrita descritas na Seção II aplicadas ao problema apresentado na Seção III soluciona a aparente contradição[2]. Para aplicá-las, uma análise da Fig. 1 basta para notarmos que o movimento de O' – e portanto do projétil e do bloco – na direção da velocidade v como observado no referencial O, embora estejam submetidos à contração de Lorentz, esta condição não tem relevância para a solução do problema uma vez que o projétil é disparado e penetra no bloco na direção da coordenada $y \parallel y'$. Embora o bloco e o canal perfurado nele pelo projétil sofram contração de Lorentz na

[2]Cf. Apêndice A para detalhes dos cálculos e análise.

direção do movimento, é o comprimento da perfuração longitudinal que é relevante para solucionar o problema e não sua dimensão em $x \parallel x'$.

Como há concordância entre os observadores em seus respectivos referenciais em relação à massa do projétil, recorremos, então, a Eq. (7) conforme aplicada para o observador no referencial O', que está em repouso em relação ao disparo do projétil e, portanto, $u'_x = 0$. Assim,

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u'^2_y}{c^2}}} \tag{12}$$

Entretanto, para o observador no referencial O, o projétil está em movimento com velocidade $u_x = v$. Logo, ao aplicarmos a Eq. (7) temos

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2 + u_y^2}{c^2}}} \tag{13}$$

Partindo de que $m' = m$ nota-se que, exceto pelos termos dos radicandos, as Eqs. (12) e (13) são iguais. Por isso extraímos o radicando de (13), aplicamos a Eq. (10) e encontramos:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{c^2}\left(u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u'^2_y}{c^2}\right), \tag{14}$$

Vale ressaltar que o referencial O' é o único em relação ao qual se pode medir a massa inercial do projétil. Logo, podermos assumir que $m_0 = m'$ para simplificar (14) e obter:

$$m = \frac{m'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{15}$$

para finalmente mostrar que $p_y = p'_y$.

Assim, a componente y' da quantidade de movimento do projétil medida por O' e por O é a mesma, solucionando a dificuldade da suposta inconsistência na situação descrita.

V. Conclusões

O exame analítico do problema do movimento do projétil na perspectiva de observadores em referenciais inerciais distintos e ortogonais à linha de mundo do projétil mostrou-se adequada como uma primeira aproximação para o estudo de problemas mais desafiadores envolvendo, por exemplo, linhas de mundo em referenciais que seguem direções arbitrárias.

A matemática empregada nos cálculos prescindiu de um tratamento mais sofisticado sem entretanto abrir mão do rigor e estando ao alcance de estudantes principiantes em Física que desejam iniciar os estudos da Teoria da Relatividade Restrita e avançar gradualmente para tópicos mais elaborados.

Em estudos futuros, pretendemos analisar problemas cuja abordagem exijam a utilização de tensores e assim prosseguir na investigação teórica dos fenômenos que surgem quando se adotam direções arbitrárias no movimento quadridimensional no espaço-tempo, em especial em relação à variação da massa.

Referências

1 SARTORI, L. *Understanding relativity: a simplified approach to Einstein's theories*. Berkeley: Univ of California Press, 1996. ISBN 9780520916241. 4

2 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Ótica, relatividade, física quântica*. São Paulo: Editora Blucher, 2014. v. 4. ISBN 9788521208044. 4, 5, 6

3 YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Sears e Zemansky física IV: Ótica e física moderna*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016. ISBN 9788543018164. 4, 5, 7

4 IYER, C.; PRABHU, G. M. Lorentz transformations with arbitrary line of motion. *European Journal of Physics*, v. 28, n. 2, p. 183, jan 2007. 4

5 COSTA, P. C. d. S. *Transformações de Lorentz e seus invariantes*. 38 p. Monografia (Monografia de Bacharelado) — Instituto de Física Teórica – Universidade Estadual Paulista (IFT – Unesp), São Paulo, SP, Brasil, 2011. 4

6 LIN, D.-H. The 2+1-dimensional special relativity. *Symmetry*, v. 14, n. 11, 2022. ISSN 2073-8994. 4

7 WORKMAN, R. L.; OTHERS. Review of particle physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, v. 2022, p. 083C01, 2022. 5

A. Cálculos em detalhe

Apresentamos em detalhe neste Apêndice A os cálculos efetuados para o presente estudo acompanhados da argumentação física quando conveniente.

As velocidades no referencial O são dadas por suas componentes (u_x, u_y, u_z) e no referencial O' por (u'_x, u'_y, u'_z).

Como a direção do movimento estudado se dá somente na direção da coordenada x e do ponto de vista do referencial O' não há movimento (em x), então podemos assumir, sem perda de generalidade, que:

$$u'_x = 0. \tag{16}$$

Como para o observador no referencial O o projétil está em movimento com velocidade v na direção x (devido ao movimento do referencial O'), podemos escrever o vínculo para a componente x da velocidade do projétil no referencial O:

$$u_x = v. \tag{17}$$

Partindo das condições expressas em (16) e (17), a componente u_y, do referencial O fornece, portanto, a seguinte expressão (aplicando a transformação de velocidade de Lorentz e substituindo $u'_x = 0$):

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{(0)v}{c^2}\right)} = \frac{u'_y}{\gamma} = u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{18}$$

Dada a Eq. (18), podemos estudar o evento do disparo do projétil na perspectiva de ambos os referenciais. A aparente contradição entre a perspectiva dos observadores em seus respectivos referenciais pode ser equacionada como segue:

- Para o observador no referencial O', a quantidade de movimento do projétil para penetrar o bloco é $p'_y = m' \cdot u'_y$.

- Para o observador no referencial O, temos que a quantidade de movimento do projétil é $p_y = m \cdot u_y$.

Inicialmente, pode-se ter a impressão que $m = m'$, mas $p'_y \neq p_y$, o que seria uma aparente violação do postulado da Relatividade Restrita que prescreve que todos os referenciais inerciais são equivalentes, ou seja, as leis da Física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais.

Usando a Eq. (18), podemos reescrever a quantidade de movimento observada em O como:

$$p_y = m \cdot u_y = m \cdot u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{19}$$

Para resolver essa aparente inconsistência, precisamos aplicar corretamente a dependência da massa com a velocidade. Partimos da massa de repouso (m_0) do projétil.

Referencial O': Usando a Eq. (16) ($u'_x = 0$), a massa m' do projétil medida no referencial O' é:

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(u'_x)^2 + (u'_y)^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{0^2 + (u'_y)^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(u'_y)^2}{c^2}}}. \tag{20}$$

Referencial O: Usando as condições (16) e (17), a massa m do projétil medida no referencial O (onde o projétil possui componentes de velocidade $u_x = v$ e u_y) é:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2 + u_y^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2 + u_y^2}{c^2}}}. \tag{21}$$

Por inspeção, notamos que as Eqs. (20) e (21) são similares a menos os termos nos radicandos. Portanto trabalharemos somente com estes termos, mostrando que o argumento da raiz quadrada em m é equivalente a um produto de termos:

$$\begin{aligned} 1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{u_y^2}{c^2} &= 1-\frac{u_y'^2}{c^2} \\ 1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{c^2}\left(u_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2 &= 1-\frac{u_y'^2}{c^2} \\ &= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u_y'^2}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

Retornamos a expressão encontrada em (22) para o radicando da Eq. (21). Usamos ainda o fato de que o único referencial no qual a massa inercial de repouso do projétil (m_0) pode ser medida é o referencial O' em relação à componente y do movimento, ou seja, conforme Eq. (20). Assim, a massa m observada no referencial O é:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{(u_y')^2}{c^2}\right)}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{(u_y')^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{(u_y')^2}{c^2}}}\right)=\frac{m'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23}$$

Finalmente, retomando a Eq. (19), substituímos a massa m encontrada na Eq. (23):

$$p_y=m\cdot u_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\left(\frac{m'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\cdot u_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=m'u_y'=p_y'. \tag{24}$$

O que permite concluir que há coincidência entre as quantidades de movimento medidas em ambos os referenciais e a inconsistência inicial é apenas aparente.