Universidade Federal de Alfenas

Ailton Cezar Alves

Teoria das Curvas Planas para Métricas Diferenciáveis

Alfenas/MG

2021

Ailton Cezar Alves

Teoria das Curvas Planas para Métricas Diferenciáveis

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Geometria Diferencial. Orientador: Angela Leite Moreno.

Alfenas/MG

2021

Ailton Cezar Alves

Teoria das Curvas Planas para Métricas Diferenciáveis

A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Monografia apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovado em: 08 / 03 / 2021

Banca Examinadora:

Profª Drª Angela Leite Moreno
Instituto de Ciências Exatas
Orientadora

Profª Drª Andréa Cardoso
Instituto de Ciências Exatas
Avaliador 1

Prof Dr José Carlos de Souza Júnior
Instituto de Ciências Exatas
Avaliador 2

À minha amada tia/mãe, Cleonice, por estar sempre presente nos meus momentos mais difíceis.

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus por ter me mantido na trilha certa durante esta monografia com saúde e forças para chegar até o final.

Aos meus pais, Cleuza e Pedro pelo apoio e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações.

À minha orientadora Angela Leite Moreno que apesar da intensa rotina de sua vida acadêmica aceitou me orientar nesta monografia. As suas valiosas indicações fizeram toda a diferença. Obrigado do fundo do coração pela sua dedicação e paciência durante toda essa minha jornada.

Ao meu irmão, Cleiton, cunhada Lucia e meus sobrinhos Abner e Afrânio, que tanto amo, pela amizade e atenção dedicadas quando sempre precisei.

Ao meu namorado Higor Mateus pelo seu amor incondicional e por compreender minha dedicação ao TCC.

À minha querida amiga Marina Rosa pelas palavras de incentivo e por acreditar em meu potencial.

Também agradeço a todos os meus colegas de curso, pela oportunidade do convívio e pela cooperação mútua durante estes anos. Juntos conseguimos avançar e ultrapassar todos os obstáculos.

A todos os meus professores do curso de Matemática da Universidade Federal de Alfenas pela excelência da qualidade de ensino, dedicação e principalmente por terem a capacidade de visualizar as necessidades e dificuldades que cada um dos alunos passávamos e com isso vocês contribuíram da melhor forma possível tanto para nossa formação profissional, quanto para meu crescimento pessoal.

Um agradecimento incomum, mas necessário, à minha pequena Bella, minha companheira de madrugadas à dentro estudando, minha preciosidade que por muitas vezes acalentou os meus choros, um ser de luz que a mim, foi confiado.

Enfim agradeço aos funcionários da Universidade Federal de Alfenas que contribuíram direta e indiretamente para a conclusão desta jornada.

Gratidão!!

Resumo

A Geometria Diferencial aplica conceitos e técnicas do Cálculo Diferencial em problemas geométricos, sendo essa uma área relativamente nova dentro da Matemática. Iniciada em 1828 com o artigo intitulado *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*, no qual Carl Friedrich Gauss apresenta métodos para se estudar curvas e superfícies. Neste trabalho Gauss enunciou e demonstrou o Teorema Egregium, estabelecendo uma importante propriedade das superfícies. Bernhard Riemann estendeu a teoria de Gauss para espaços de dimensões superiores e introduziu a noção de variedade de maneira a terem diversas propriedades geométricas, revolucionando a geometria e conduzindo à moderna Geometria Diferencial. Todavia, a área se torna completamente autônoma com a descoberta das Geometrias Não Euclidianas no século XIX por Bolyai, Lobatchevski e, sobretudo, Gauss e Riemann. A linguagem e os modelos da Geometria Diferencial têm encontrado aplicações em áreas como a Relatividade e a Mecânica Celeste, e em áreas tão diversas quanto Economia, Estatística, Engenharia e Computação Gráfica, Engenharia Cartográfica, Medicina, entre outras, demonstrando seu caráter interdisciplinar, vitalidade e se desenvolvido em várias direções, resultando em um considerável volume de pesquisas nos dias atuais. Assim, o objetivo deste trabalho é fazer uma releitura do trabalho *Teoria de Curvas para Métricas Não-Euclidianas*, restringindo o estudo ao plano cartesiano de modo a torna-lo acessível a graduandos e licenciandos em Matemática. Aqui discutimos a Teoria Local das Curvas Planas em uma Métrica Diferenciável, constante ou diagonal, pleiteando a influência da métrica sobre os vetores, tanto em relação ao seu comprimento, quanto em relação ao ângulo formado entre dois vetores, exibindo exemplos que contrariam as ideias formadas quando trabalhamos com a métrica Euclidiana. Deste modo, a Teoria Local das Curvas Planas em uma Métrica Diferenciável serve de pretexto para introduzir ferramentas matemáticas, das quais muitas envolvem ideias ou conceitos que podem ser generalizados em outros contextos, como, por exemplo, para curvas em superfícies ou para dimensões mais altas.

Palavras-chave: Matemática. Geometria Diferencial. Espaços com Produto Interno. Fórmulas de Frenet. Curvatura.

Abstract

Differential Geometry applies concepts and techniques of Differential Calculus to geometric problems, which is a relatively new area within Mathematics. Started in 1828 with the article entitled *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*, in which Carl Friedrich Gauss presents methods for studying curves and surfaces. In this work Gauss enunciated and demonstrated the Egregium Theorem, establishing an important property of surfaces. Bernhard Riemann extended Gauss's theory to spaces of higher dimensions and introduced the notion of variety to have different geometric properties, revolutionizing geometry and leading to modern Differential Geometry. However, the area becomes completely autonomous with the discovery of Non-Euclidean Geometries in the 19th century by Bolyai, Lobatchevski, and, above all, Gauss and Riemann. The language and models of Differential Geometry have found applications in areas such as Relativity and Celestial Mechanics, and in areas as diverse as Economics, Statistics, Engineering, and Computer Graphics, Cartographic Engineering, Medicine, among others, demonstrating its interdisciplinary character, vitality, and developed in several directions, resulting in a considerable volume of research today. Thus, the objective of this work is to revised the work *Curve Theory for Non-Euclidean Metrics*, restricting the study to the Cartesian Plane to make it accessible to undergraduate and undergraduate students in Mathematics. Here we discuss the Local Theory of Flat Curves in a Differentiable Metric, constant or diagonal, claiming the influence of the metric on the vectors, both about their length and concerning the angle formed between two vectors, showing examples that contradict the ideas construct when we work with the Euclidean metric. Thus, the Local Theory of Flat Curves in a Differentiable Metric serves as a pretext to introduce mathematical tools, many of which involve ideas or concepts that can be generalized in other contexts, such as, for example, curves on surfaces or for higher dimensions.

Keywords: Mathematics. Differential Geometry. Spaces with Internal Product. Frenet Formulas. Curvature.

Lista de ilustrações

Sumário

1 *Introdução*

A Geometria Diferencial consiste no estudo de problemas geométricos através dos conceitos e técnicas do Cálculo Diferencial, sendo esta uma área relativamente nova dentro da Matemática, cujos pioneiros em seu estudo foram Pierre de Fermat, Christiaan Huygens e Isaac Newton, ainda no século XVII . A Geometria Diferencial compreende o estudo das propriedades das curvas e superfícies no Espaço Euclidiano, entretanto recentemente outras geometrias vem ganhando destaque no estudo de Geometria Diferencial [1]. A linguagem e os modelos da Geometria Diferencial tem encontrado aplicações em domínios afins, como a Relatividade e a Mecânica Celeste, e em áreas tão diversas quanto Economia, Estatística, Engenharia e Computação Gráfica, entre outras, demonstrando seu caráter interdisciplinar, mostrando grande vitalidade e se desenvolvendo em várias direções, tendo como resultado um aceitável volume de pesquisas nos dias atuais.

A história da Geometria Diferencial começa com o estudo de curvas. Num apanhado histórico desde os primeiros rudimentos da Geometria Diferencial, os principais teóricos que contribuíram para o seu desenvolvimento, ressaltando as contribuições mais valiosas para a atual teoria de Geometria Diferencial. Noções como retas tangentes a curvas já são encontradas entre os pensadores Euclides, Arquimedes e Apolônio, mas que apenas no século XVII, os franceses P. Fermat (1601-1665) e R. Descartes (1596-1650) criam o método das coordenadas enquanto que o alemão G. Leibniz (1646-1716) e o inglês I. Newton (1643-1727) descobrem os algoritmos do cálculo infinitesimal, os quais permitiram o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais [2].

Embora se possam achar teoremas geométricos deduzidos do estudo de figuras evanescentes no trabalho de Arquimedes sobre áreas e volumes, no tratamento de Apolônio das normais às secções cônicas e bastante posteriormente no método dos indivisíveis de Cavalieri e no trabalho de Huygens sobre curvatura e evolutas, provavelmente é mais correto dizer-se que a Geometria Diferencial, pelo menos em sua forma moderna, começou nas décadas iniciais do século XVIII, com aplicações do Cálculo Diferencial e Integral à Geometria Analítica. Porém, o primeiro estímulo ao assunto, ultrapassando as situações planas, veio de Gaspard Monge (1746-1818), considerado o pai da Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies do Espaço [3].

Em linhas mais gerais, Monge inspirou vários jovens a entrar para o campo da Geometria Diferencial, dentre os quais pode-se citar J. B. Meusnier (1754-1793), E. L. Malus (1775-1812), C. Dupin (1784-1873) e O. Rodrigues (1794-1851), todos com importantes teoremas da Geometria Diferencial associados a seus nomes [4]. Ainda afirma que foram Monge e seus discípulos que deram início à escola francesa de especialistas em Geometria

Diferencial, que posteriormente incluiria nomes como A. L. Cauchy (1789-1857), B. de Saint-Venant (1796-1886) que em 1845, introduziu o nome binormal associado a um dos conceitos que acompanham o triedro local de um ponto de uma curva espacial, F. Frenet (1816-1888) e J. A. Serret (1819-1885), responsáveis pelas Fórmulas de Frenet-Serret cujo papel é importante no estudo analítico das curvas do espaço e J. Bertrand (1822-1900), cujo nome se liga à partes de curvas do espaço tais que as normais principais de uma são as normais principais de outra e vice-versa.

Com o trabalho de Cauchy em Geometria Diferencial, um dos últimos marcos de grande importância que veio a ser o término do primeiro período da Geometria Diferencial [5]. O segundo período é inaugurado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), com o método de estudar a Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies por meio de representações parametrizadas de objetos. Nesse período há também as contribuições de G. Mainardi (1800-1879) e D. Codazzi (1824-1875) para o avanço da Geometria Diferencial, cujos nomes estão ligados a importantes equações sobre Geometria Diferencial, o físico belga J. Plateau (1801-1883); C. G. J. Jacob (1804-1851); O. Bonnet (1819-1892); E. B. Christoffel (1829-1901); E. Beltrami (1835-1900); J. D. Darboux (1842-1917) em homenagem a quem se deu nome a um vetor especial associado a cada ponto de uma curva do espaço e completou o trabalho realizado por Dupin com as Famílias de Superfícies Triplamente Ortogonais, em que cada família é ortogonal às outras duas.

O terceiro grande período da história da Geometria Diferencial teve início com Georg Bernhard Riemann (1826-1866) [4]. Época essa em que o espaço tridimensional usual é deixado para trás, levando então os estudos dessa área a um novo patamar da Matemática Moderna, como o estudo de variedades m-dimensionais imersas em espaços n-dimensionais. Para isso, tornou-se necessário levar em consideração dois aspectos primordiais para esse desenvolvimento adicional: o primeiro é a notação aperfeiçoada e, o segundo um procedimento que dependesse apenas da natureza da variedade e não do particular sistema de coordenadas usado. Para tanto engendrou-se o Cálculo Tensorial, área de caráter geral que foi desenvolvida por matemáticos como G. Ricci-Curbastro (1853-1925), T. Levi-Civita (1873-1941) e A. Einstein (1879-1955). Exploraram-se então intensivamente Geometrias Diferenciais Generalizadas, conhecidas como Geometrias Riemannianas, as quais, por sua vez, abriram caminho para as Geometrias Não-Riemannianas. As pesquisas de hoje em Geometria Diferencial guardam pouca semelhança com o estudo clássico, a Geometria Diferencial foi desenvolvida com base no concreto, entretanto, atualmente ela pode ser vista de uma outra forma mais abstrata.

Podemos analisar uma superfície de duas maneiras, como a fronteira de um corpo sólido ou como uma película bidimensional destacada. Inicialmente, a Geometria Diferencial era vista de uma maneira extrínseca, curvas e superfícies eram consideradas dentro de um espaço euclidiano de dimensão maior. Começando com o trabalho de Riemann, a maneira intrínseca de se tratar a geometria foi desenvolvida, na qual não se pode "sair" do objeto geométrico. É interessante que Monge e Gauss, os grandes nomes da Geometria Diferencial das Superfícies, entre os percussores de seus períodos, viam uma superfície primária, respectivamente, da primeira e da segunda maneira acima. Monge é conhecido, entre outras coisas, por seu trabalho como engenheiro especializado em construções militares enquanto que Gauss é conhecido, entre outras coisas, por seu trabalho em Geodésia e Agrimensura Geodésica.

Atualmente diversos estudos são realizados com base nesses conceitos. Por exemplo, a dissertação que traz como proposta organizar, discutir e apresentar de maneira precisa os conceitos matemáticos de variedade diferenciável e de tensores envolvidos no estudo da Cosmologia sob o ponto de vista da Teoria da Relatividade Geral para o modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [6]. Buscando assim apresentar um texto didático que possa ser utilizado tanto nos cursos de graduação em Matemática como de Física. Enquanto que estudos com o objetivo de fazer uma introdução rápida, mas não trivial, à Teoria da Relatividade Geral, na qual fosse possível transmitir a beleza da interligação entre Geometria e Física nesta teoria [7].

Outro estudo, faz uma breve exposição das ideias e dos resultados fundamentais da Geometria Diferencial de curvas visando aplicações à dinâmica de uma partícula [8]. As propriedades geométricas fundamentais da trajetória são expressas em termos da força sobre a partícula e de outras grandezas dinâmicas associadas ao movimento. Essa abordagem torna possível enunciar de forma clara certos problemas cuja formulação matemática seria obscura no tratamento convencional. Em particular, são encontradas as condições gerais que uma força deve satisfazer para que a trajetória seja plana quaisquer que sejam as condições iniciais.

A pesquisa desenvolvida por [9] utiliza a função potencial para promover a restrição de curvatura na trajetória de robôs. Utilizando a curvatura, conceito essencial da Geometria Diferencial, o autor simulou o problema de controle de formação de robôs móveis não-holonômicos para diversos tipos de curvatura de trajetória e de dinâmica.

Uma análise de modelos cosmológicos para um universo espacialmente plano cujos constituintes são os campos de matéria e de energia escura, sendo que o primeiro inclui os bárions e a matéria escura [10]. Os constituintes estão em interação e os processos irreversíveis são levados em conta através da inclusão de uma pressão fora do equilíbrio. Esta, por sua vez, é descrita dentro das estruturas teóricas das teorias termodinâmicas de primeira e segunda ordens. Os campos de matéria e energia escura são acoplados através de seus índices barotrópicos, os quais são considerados como funções da razão entre suas densidades de energia. Uma análise bayesiana é realizada, a fim de se estabelecer os vínculos cosmológicos nos parâmetros livres do modelo.

Levando em consideração o interesse que muitos modelos da Física tem em manter a matéria usual confinada em uma certa região do espaço-tempo, com a possibilidade da utilização de campos com origem geométrica para realizar este confinamento [11]. Para isso, utilizaram uma das vertentes definidas por Kleinert, que consiste em postular que partículas seguem auto paralelas e outra vertente que segue a linha de Hehl, Gasperini e outros, que diz que a equação de movimento de uma partícula não pode ser postulada, mas sim obtida a partir da lei de conservação associada ao tensor de energia-movimento da partícula.

Ao discutir cristais líquidos do tipo nemático, que apresentam diversos defeitos na configuração de suas moléculas, o que faz com que a luz seja desviada na proximidade dos mesmos, o autor apresenta que um dos motivos da importância do estudo do comportamento da luz em tais estruturas reside na semelhança que os defeitos em nemáticos possuem com defeitos cosmológicos, permitindo que experimentos sejam realizados com o cristal líquido, a fim de estudar fenômenos cosmológicos inacessíveis [12]. Para se obter as trajetórias da luz foi usada a métrica dos cristais líquidos nemáticos, obtida na literatura, e que foi calculada usando a generalização do Princípio de Hess que afirma que as propriedades anisotrópicas dos cristais líquidos podem ser obtidas a partir da deformação das moléculas de líquidos ordinários. As equações diferenciais foram obtidas a partir da equação geodésica e suas soluções, as trajetórias de luz, foram plotadas juntamente com os seus defeitos. O comportamento da luz foi analisado levando-se em conta o tipo de defeito e os parâmetros microscópicos envolvidos.

Outro trabalho interessante, que discute a incompatibilidade da Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG) com a Mecânica Quântica apresentando a necessidade de se discutir sobre a formulação de uma teoria de gravitação que seja compatível com esta. Uma teoria que seja mais ampla do que a TRG, e que possa ser aplicada a nível atômico e subatômico. Essa possível teoria de gravitação é muitas vezes chamada Gravitação Quântica [13]. Nesse contexto, muitos pesquisadores têm se empenhado na busca por uma formulação consistente, física e matematicamente, nesta perspectiva alguns modelos têm sido propostos. No entanto, esse não é um trabalho simples, pois, embora já se tenha avançado bastante, muita coisa ainda permanece obscura. Na ausência de teoria completa de gravidade quântica, qualquer generalização consistente de Relatividade Geral pode ser útil, porque poderia dar indicativos de como essa nova teoria pode ser. Portanto, a proposta que o autor traz consiste em um modelo de gravitação bimétrica fundamentado em geometria Finsler e ressalta que as vantagens de uma formulação fundamentada nessa geometria consistem no fato de que a Geometria Finsler é uma geometria Riemanniana sem a limitação quadrática, e assim, a recuperação de dados obtidos a partir da aplicação da TRG se torna teoricamente mais simples.

Ao longo do último século, acompanhando uma tendência geral em Matemática, a Geometria Diferencial tornou-se uma área com inúmeras especializações com complexidade teórica, com várias subáreas importantes, dentre elas podemos destacar a Geometria Riemanniana e pseudo-Riemanniana, Geometria Simplética, Geometria Complexa e Kahleriana, Topologia Diferencial e Grupos de Lie, propiciando interligações com outros domínios da Matemática, tais como Equações Diferenciais Parciais (subvariedades mínimas); Topologia (Teoria de Morse e classes características); Funções Analíticas Complexas (variedades complexas); Sistemas Dinâmicos (fluxo geodésico) e Teoria dos Grupos (variedades homogêneas).

É relevante destacar que, nos últimos anos, métricas não Euclidianas, e, em particular, não constantes vêm sendo utilizadas como foco de pesquisa em Geometria Diferencial. Especialmente para explicar fenômenos que não podem ser explicados via Geometria Diferencial com a métrica Euclidiana, que a partir de agora será designada como Geometria Diferencial Clássica. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar a Teoria Local das Curvas Planas em uma Métrica Diferenciável.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

Capítulo 2: Apresenta sucintamente alguns conceitos e resultados essenciais que serão utilizados no decorrer do texto, como alguns resultados não triviais de espaço vetorial, dependência e independência linear, mudança de base e produto interno.

Capítulo 3: É dedicado a discussão de alguns resultados essenciais de métricas, iniciando com as definições e propriedades de métricas, discutindo sobre a norma Euclidiana, demonstramos a desigualdade de Cauchy-Schwartz e norma no espaço tangente.

Capítulo 4: Defini uma curva parametrizada diferenciável, a reparametrização pelo comprimento de arco e derivada covariante.

Capítulo 5: É dedicado a teoria local de curvas, abordando sobre o referencial de Frenet, por fim, estudar a teoria de curvas numa parametrização qualquer.

Capítulo 6: O último capítulo desta monografia é dedicado às considerações finais deste trabalho.

2 *Conceitos Preliminares*

Neste trabalho, conceitos básicos de Geometria, de Álgebra Linear e de Cálculo Diferencial e Integral, em especial de Cálculo Vetorial, não serão apresentados, mas podem ser encontrados em [14].

Como precisamos fortemente do conceito de Bases Orientadas, discutiremos brevemente alguns resultados, a teoria pode ser encontrada nas obras [15] e [14].

2.1 Bases Orientadas

Em Álgebra Linear já vimos que todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base. Uma base de um espaço vetorial V é um subconjunto finito de vetores de V, $\mathscr{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right\} \subset V$, linearmente independente, que gera qualquer vetor de V, em que

$$V = [\mathscr{B}] = \left\{\sum_{i=1}^{n} c_i\vec{b}_i : c_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ao considerarmos outra base $\mathscr{B}_1$ de V, temos que o número de vetores em $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}_1$ é o mesmo, com isso temos que a dimensão de um espaço é exatamente o número de vetores de uma base qualquer desse espaço. E, ao tomarmos um conjunto qualquer que possua mais do que o número de vetores da base, temos que esse conjunto é linearmente dependente, ou seja, pelo menos um de seus vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais. Uma base orientada é um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial. Assim, ao trocarmos dois vetores de posição em uma base orientada, ela já não é a mesma. Por exemplo, as bases

$$\mathscr{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \qquad \text{e} \qquad \mathscr{B} = \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$$

são diferentes bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$. Neste trabalho apenas utilizaremos bases ordenadas.

Como o foco do trabalho é o estudo de curvas no plano, todas as discussões serão feitas apenas para dimensão dois, no entanto, os resultados são válidos para espaços de dimensão finita.

Retomando nossa discussão, no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, temos que a base canônica é $\mathscr{C} = \left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$, em que $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$. Vale ressaltar que quaisquer dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ linearmente independentes no plano, ou seja, tais que não existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$, geram uma base do plano. Por exemplo $\mathscr{B} = \{(1,2),(3,2)\}$ é uma base do plano.

Suponhamos que $\mathscr{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ e $\mathscr{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ sejam bases ordenadas de um espaço vetorial V. Dado o vetor $\vec{v} \in V$ podemos escrevê-lo como

$$[\vec{v}]_{\mathscr{B}_1} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{u}_n \tag{2.1}$$

e

$$[\vec{v}]_{\mathscr{B}_2} = \gamma_1 \vec{w}_1 + \gamma_2 \vec{w}_2 + \ldots + \gamma_n \vec{w}_n. \tag{2.2}$$

Queremos relacionar as coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base $\mathscr{B}_1$ $\left([\vec{v}]_{\mathscr{B}_1}\right)$ com as coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base $\mathscr{B}_2$ $\left([\vec{v}]_{\mathscr{B}_2}\right)$, isto é,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [I]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix},$$

em que $[I]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}$, que representa a matriz mudança de base da base $\mathscr{B}_2$ para a base $\mathscr{B}_1$ é a matriz que queremos encontrar e que torna a igualdade válida.

Como $\mathscr{B}_1$ é base de V então podemos escrever os $\vec{w}_i \in \mathscr{B}_2$ com $i = 1, \ldots, n$, como combinação linear de $\vec{u}_j$, isto é

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = a_{11}\vec{u}_1 + a_{12}\vec{u}_2 + \ldots + a_{1n}\vec{u}_n \\ \vec{w}_2 = a_{21}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + \ldots + a_{2n}\vec{u}_n \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{w}_n = a_{n1}\vec{u}_1 + a_{n2}\vec{u}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{u}_n \end{cases}. \tag{2.3}$$

Substituindo (2.3) em (2.2) obtemos

$$\vec{v} = \gamma_1 \left(a_{11}\vec{u}_1 + \ldots + a_{1n}\vec{u}_n\right) + \gamma_2 \left(a_{21}\vec{u}_1 + \ldots + a_{2n}\vec{u}_n\right) + \ldots + \gamma_n \left(a_{n1}\vec{u}_1 + \ldots + a_{nn} + \vec{u}_n\right)$$

Agrupando os termos em $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ obtemos

$$\begin{aligned} \vec{v} = \;& \left(a_{11}\gamma_1 + a_{21}\gamma_2 + \ldots + a_{n1}\gamma_n\right)\vec{u}_1 + \\ & + \left(a_{12}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \ldots + a_{n2}\gamma_n\right)\vec{u}_2 + \cdots + \\ & +. \left(a_{1n}\gamma_1 + a_{2n}\gamma_2 + \ldots + a_{nn}\gamma_n\right)\vec{u}_n \end{aligned}$$

e da Equação (2.1), como as coordenadas de $\vec{v}$ em relação a uma base são únicas, temos que

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\gamma_1 + a_{21}\gamma_2 + \ldots + a_{n1}\gamma_n \\ \alpha_2 = a_{12}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \ldots + a_{n2}\gamma_n \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = a_{1n}\gamma_1 + a_{2n}\gamma_2 + \ldots + a_{nn}\gamma_n \end{cases}$$

ou na notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

e denotaremos

$$[\vec{v}]_{\mathscr{B}_1} = [I]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} [\vec{v}]_{\mathscr{B}_2}.$$

A matriz $[I]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}$ é denominada matriz de mudança da base $\mathscr{B}_2$ para a base $\mathscr{B}_1$ (é a transposta da matriz dos coeficientes em (2.3).

Exemplo 2.1 *Sejam $\mathscr{B}_1 = \{(2,-1),(3,4)\}$ e $\mathscr{B}_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Queremos determinar $[I]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}$ e $[I]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1}$.*

(a) *Para isso, primeiramente precisamos escrever os vetores de $\mathscr{B}_2$ como combinação linear dos vetores de $\mathscr{B}_1$, ou seja,*

$$\vec{w}_1 = (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{12}(3,4)$$
$$\vec{w}_2 = (0,1) = a_{21}(2,-1) + a_{22}(3,4).$$

Observe que isso nos leva a dois sistemas a serem resolvidos:

$$\begin{cases} 2a_{11} + 3a_{12} = 1 \\ -a_{11} + 4a_{12} = 0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} 2a_{21} + 3a_{22} = 0 \\ -a_{21} + 4a_{22} = 1 \end{cases}$$

cuja solução é

$$a_{11} = \frac{4}{11}, \qquad a_{12} = \frac{1}{11}, \qquad a_{21} = -\frac{3}{11}, \qquad a_{22} = \frac{2}{11}.$$

Com isso temos que

$$[(1,0)]_{\mathscr{B}_1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} \end{bmatrix} \qquad e \qquad [(0,1)]_{\mathscr{B}_1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

e, assim

$$[I]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}.$$

(b) *Agora, precisamos escrever os vetores de $\mathscr{B}_2$ como combinação linear dos vetores de $\mathscr{B}_2$, ou seja,*

$$\vec{v}_1 = (2,-1) = a_{11}(1,0) + a_{12}(0,1)$$
$$\vec{v}_2 = (3,4) = a_{21}(1,0) + a_{22}(0,1)$$

que nos levam a

$$\begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{12} = -1 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} a_{21} = 3 \\ a_{22} = 4 \end{cases}.$$

Com isso temos que

$$[(2,-1)]_{\mathscr{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad [(3,4)]_{\mathscr{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e, assim

$$[I]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Agora, o que acontece se pegarmos um vetor, por exemplo, $\vec{u} = (5, -8) \in \mathbb{R}^2$ *e escrevermos eles nestas bases?*
Observe que, na base $\mathscr{B}_2$ *o trabalho é simples pois*

$$[(5, -8)]_{\mathscr{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Agora, ao pensarmos na base $\mathscr{B}_1$*, com os conhecimentos que temos até aqui, precisaríamos resolver novamente o sistema. Entretanto, podemos utilizar a matriz mudança de base que já determinamos para isso. Assim*

$$[(5, -8)]_{\mathscr{B}_1} = [I]_{\mathscr{B}1}^{\mathscr{B}_2} [\vec{u}]_{\mathscr{B}_2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Apenas lembrando que poderíamos ter feito diretamente:

$$(5, -8) = \alpha_1 (2, -1) + \alpha_2 (3, 4) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}.$$

Proposição 2.1 (Propriedades da matriz de mudança de base) [1] *Sejam* $\mathscr{B}_1$*,* $\mathscr{B}_2$ *e* $\mathscr{B}_3$ *bases de um espaço vetorial* V *e* $\dim V = n$*. Valem as seguintes propriedades :*

1. *Se* $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$*, então* $[I]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} = I \in M_n(\mathbb{R})$*;*

2. $[M]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_3} = [M]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} \, [M]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_3}$*;*

3. $\det [M]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} \neq 0$*;*

4. $[M]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1} = ([M]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2})^{-1}$.

Proposição 2.2 (Propriedades do determinante) [2] *Sejam* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $c \in \mathbb{R}$*. Valem as seguintes propriedades:*

1. *Se* $A = 0_n$ *e* $B = I \in M_n(\mathbb{R})$*, então* $\det A = 0$ *e* $\det B = 1$*;*

2. $\det A = \det A^T$*;*

3. *Se* B *é a matriz obtida por multiplicar uma linha ou uma coluna de* A *por* c*, então,* $\det B = c \det A$*;*

[1] Demonstração em [15], página 91 e [14], páginas 125 e 126.
[2] Demonstração em [15], página 203, e [14], páginas 68.

4. *Se* B *difere de* A *somente pela posição de duas linhas (ou colunas), que estão trocadas, então* $\det B = -\det A$*;*

5. *Se* A *tem duas linhas (ou colunas) iguais, então* $\det A = 0$*;*

6. $\det(AB) = \det A \det B$*;*

7. *Se* B *é obtida de* A *somando a uma linha outra multiplicada por uma constante, então* $\det B = \det A$*;*

8. *Se* A *é inversível, ou seja, se existe* B *tal que* $AB = I \in M_n(\mathbb{R})$*, então* $\det A \det B = 1$ *(*B *nestas condições é denotada por* A^{-1}*).*

Definição 2.1 *Sejam* V *um espaço vetorial com* $\dim V = n$*,* $\mathscr{B}_1$ *e* $\mathscr{B}_2$ *bases de* V*. Diremos que* $\mathscr{B}_1$ *e* $\mathscr{B}_2$ ***têm mesma orientação*** *se* $\det [I]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1} > 0$*. Esta relação é denotada por* $\mathscr{B}_1 \sim \mathscr{B}_2$*. Caso contrário, se* $\det [I]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1} < 0$ *diz-se que* $\mathscr{B}_1$ *e* $\mathscr{B}_2$ ***tem orientação contrária.***

Proposição 2.3 *A relação* $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}_1$ *da Definição 2.1 é uma relação de equivalência.*

Demonstração:

Reflexiva: Para qualquer base $\mathscr{B}$, temos que $[I]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = I$ e, como $\det I = 1$, segue que $\det [I]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} > 0$ e, portanto $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}$.

Simétrica: Sejam $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}_1$ bases de V. Se $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}_1$ então $\det\left([I]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}}\right) > 0$ e, como $\det\left([I]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_1}\right) = \dfrac{1}{\det\left([I]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}}\right)} > 0$, segue que $\mathscr{B}_1 \sim \mathscr{B}$.

Transitiva: Sejam $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ bases de V. Se $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_1 \sim \mathscr{B}_2$ então $\det\left([I]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}}\right) > 0$ e $\det\left([I]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1}\right) > 0$. Agora, do fato de $[I]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}} = [I]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1} \cdot [I]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$, segue que

$$\det\left([I]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}}\right) = \det\left([I]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1}\right) \cdot \det\left([I]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}\right)$$

e, com isso $\det\left([I]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}}\right) > 0$ e, portanto $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}_2$. ■

Considerando $\mathscr{C}$ como a base canônica de V temos que existem apenas duas classes de equivalência provindas da relação de equivalência apresentada na Definição 2.1. Então, fixaremos $\mathfrak{U}$ como sendo o conjunto das bases de V com a mesma orientação da base canônica e $\mathfrak{W}$ como sendo o conjunto das bases de V com orientação contrária à base canônica. E, com isso, temos a seguinte definição:

Definição 2.2 *Suponhamos que V seja um espaço vetorial com dimensão finita e que $\mathscr{C}$ seja a base canônica de V. Suponhamos ainda que $\mathfrak{U}$ seja o conjunto das bases de V com a mesma orientação da base canônica e que $\mathfrak{W}$ seja o conjunto das bases de V com orientação contrária à base canônica. Diremos que todas as bases pertencentes à classe $\mathfrak{U}$ são bases de orientação positiva, ou simplesmente, bases positivas; enquanto que todas as bases pertencentes à classe $\mathfrak{W}$ são bases de orientação negativa, ou simplesmente, bases negativas.*

Exemplo 2.2 *Ao considerarmos as bases $\mathscr{B}_1 = \{(2,-1),(3,4)\}$ e $\mathscr{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ do plano $\mathbb{R}^2$, temos que a matriz mudança de base é*

$$[I]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

e $\det\left([I]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}_1}\right) = 11 > 0$. *Portanto as bases $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{C}$ têm a mesma orientação, ou seja, a base $\mathscr{B}_1$ tem orientação positiva. No entanto, se considerássemos a base $\mathscr{B} = \{(3,4),(2,-1)\}$ teríamos que a mudança de base para a base canônica seria*

$$[I]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},$$

temos que $\det\left([I]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}_1 2}\right) = -11 < 0$. *Portanto as bases $\mathscr{B}_2$ e $\mathscr{C}$ têm orientação contrária, ou seja, a base $\mathscr{B}_2$ tem orientação negativa.*

2.2 Produto Interno

Definição 2.3 (Produto Interno) *Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função que a cada par de vetores (v_1, v_2) associa um número real denotado por $\langle v_1, v_2\rangle$, isto é,*

$$\begin{aligned} \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (\vec{v}_1, \vec{v}_2) &\mapsto \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Para todo $v \in V$ temos que

$$\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \geq 0$$

sendo que

$$\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v} = 0.$$

(ii) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, temos que

$$\langle \alpha\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle = \alpha\,\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle\,.$$

(iii) *Para quaisquer* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$, *temos que*

$$\langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle .$$

(iv) *Para quaisquer* $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, *temos que*

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle .$$

Exemplo 2.3 *Temos que a função dada por*

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{n=1}^{n} x_i y_i$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^n$. *Esse produto interno é chamado de produto interno canônico, ou usual. Assim o produdo interno em* $\mathbb{R}^2$ *é*

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Exemplo 2.4 *Sejam* $\vec{u} = (x_1, y_1)$ *e* $\vec{v} = (x_2, y_2)$ *vetores em* $\mathbb{R}^2$. *Temos que a função* $\langle u, v \rangle = x_1 x_2 - 2x_1 y_2 - 2y_1 x_2 + 6y_1 y_2$ *define um produto interno sobre* $\mathbb{R}^2$. *pois,*

- *para todo* $\vec{u} = (x_1, y_1)$ *temos que*

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle &= x_1 x_1 - 2x_1 y_1 - 2y_1 x_1 + 6y_1 y_1 \\ &= (x_1)^2 - 4x_1 y_1 + 4(y_1)^2 + 2(y_1)^2 \\ &= (x_1 - y_1)^2 + 2(y_1)^2 \geq 0; \end{aligned}$$

- *para quaisquer* $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *temos que*

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1 - y_1)^2 + 2(y_1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

  e, assim, $\vec{u} = (0, 0)$;

- *para quaisquer* $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *temos que*

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= x_1 x_2 - 2x_1 y_2 - 2y_1 x_2 + 6y_1 y_2 \\ &= x_2 x_1 - 2x_2 y_1 - 2y_2 x_1 + 6y_2 y_1 \\ &= \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle ; \end{aligned}$$

- *para quaisquer* $\vec{u} =, (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2), \vec{w} = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, *temos que*

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= (x_1 + x_2) x_3 - 2(x_1 + x_2) y_3 - 2(y_1 + y_2) x_3 + 6(y_1 + y_2) y_3 \\ &= x_1 x_3 + x_2 x_3 - 2x_1 y_3 - 2x_2 y_3 - 2y_1 x_3 - 2y_2 x_3 + 6y_1 y_3 + 6y_2 y_3 \\ &= (x_1 x_3 - 2x_1 y_3 - 2y_1 x_3 + 6y_1 y_3) + (x_2 x_3 - 2x_2 y_3 - 2y_2 x_3 + 6y_2 y_3) \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle ; \end{aligned}$$

- *para quaisquer* $\vec{u} =, (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2), \vec{w} = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *um escalar qualquer, temos que*

$$\begin{aligned} \langle \alpha\vec{u}, \vec{u} \rangle &= \alpha x_1 x_2 - 2\alpha x_1 y_2 - 2\alpha y_1 x_2 + 5\alpha x_2 y_2 \\ &= \alpha\left(x_1 x_2 - 2x_1 y_2 - 2y_1 x_2 + 6y_1 y_2\right) \\ &= \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle . \end{aligned}$$

Logo $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2 + 6y_1y_2$ *define um produto interno sobre* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.5 *Sejam* $u = (x_1, y_1)$ *e* $v = (x_2, y_2)$ *vetores em* $\mathbb{R}^2$. *A função*

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2 + y_1y_2$$

não define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.
De fato, tomemos $u = (1, 1)$, *como podemos ver*

$$\langle (1, 1), (1, 1) \rangle = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 - 2 - 2 + 1 = -2 < 0.$$

2.3 Matriz de um Produto Interno

Proposição 2.4 *Suponhamos que* V *seja um espaço vetorial e* $\mathscr{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ *uma base ordenada de* V. *Suponhamos que*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{b}_i \qquad e \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i$$

sejam vetores de V *escritos em termos de* $\mathscr{B}$, *denotados por*

$$[\vec{u}] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \qquad e \qquad [\vec{v}] = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

e, consideremos

$$\begin{aligned} \langle \cdot , \cdot \rangle : \ V \times V &\to \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

um produto interno qualquer de V. *Então existe uma única matriz* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *que depende da base* $\mathscr{B}$, *tal que*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}] \cdot A \cdot [\vec{v}]^T .$$

Demonstração: Notemos que, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in V$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \left\langle \vec{u}, \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{b}_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \left\langle \vec{u}, \vec{b}_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_i \left\langle \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{b}_i, \vec{b}_i \right\rangle , \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \sum_{j=1}^{n} v_j \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \left\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \right\rangle \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j \left(u_1 \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_j \right\rangle + u_2 \left\langle \vec{b}_n, \vec{b}_j \right\rangle + \cdots + u_n \left\langle \vec{b}_n, \vec{b}_j \right\rangle \right) \\
&= \left(u_1 \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \right\rangle v_1 + u_2 \left\langle \vec{b}_2, \vec{b}_1 \right\rangle v_1 + \cdots + u_n \left\langle \vec{b}_n, \vec{b}_1 \right\rangle v_1 \right) + \\
&\quad + \left(u_1 \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \right\rangle v_2 + u_2 \left\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \right\rangle v_2 + \cdots + u_n \left\langle \vec{b}_n, \vec{b}_2 \right\rangle v_2 \right) + \cdots + \\
&\quad + \left(u_1 \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_n \right\rangle v_n + u_2 \left\langle \vec{b}_2, \vec{b}_1 \right\rangle v_n + \cdots + u_n \left\langle \vec{b}_n, \vec{b}_n \right\rangle v_n \right) \\
&= \sum_{1 \leq i,j \leq n} u_i \left\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \right\rangle v_j,
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} u_i \left\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \right\rangle v_j. \tag{2.4}$$

Agora, se considerarmos $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i,j \leq n} u_i a_{ij} v_j &= [u_1 (a_{11}) v_1 + u_2 (a_{21}) v_1 + \ldots + u_n (a_{n1}) v_1] + \\
&\quad [u_1 (a_{12}) v_2 + u_2 (a_{22}) v_2 + \ldots + u_n (a_{n2}) v_2] + \cdots + \\
&\quad [u_1 (a_{1n}) v_n + u_2 (a_{2n}) v_n + \ldots + u_n (a_{nn}) v_n] \\
&= [u_1 (a_{11}) + u_2 (a_{21}) + \ldots + u_n (a_{n1})] v_1 + \\
&\quad [u_1 (a_{12}) + u_2 (a_{22}) + \ldots + u_n (a_{n2})] v_2 + \cdots + \\
&\quad [u_1 (a_{1n}) + u_2 (a_{2n}) + \ldots + u_n (a_{nn})] v_n \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} u_i (a_{i1}) \right] v_1 + \left[\sum_{i=1}^{n} u_i (a_{i2}) \right] v_2 + \cdots + \left[\sum_{i=1}^{n} u_i (a_{in}) \right] v_n \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} u_i (a_{i1}) & \sum_{i=1}^{n} u_i (a_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} u_i (a_{in}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} u_i a_{ij} v_j = D \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^T. \tag{2.5}$$

Mas, a matriz $D \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ é tal que

$$\begin{aligned}
D &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} u_i (a_{i1}) & \sum_{i=1}^{n} u_i (a_{i2}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} u_i (a_{in}) \end{bmatrix} \\
&= [u_1 (a_{11}) + u_2 (a_{21}) + \ldots + u_n (a_{n1})] v_1 + \\
&= \begin{bmatrix} u_1 (a_{11}) + \cdots u_n (a_{n1}) & \cdots u_n (a_{n2}) & \cdots & u_1 (a_{1n}) + \cdots u_n (a_{nn}) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

daí,

$$D = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e, com isso

$$D = [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot A \tag{2.6}$$

e, deste modo o resultado da Equação 2.5 nos leva a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} u_i a_{ij} v_j = [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^T \ . \tag{2.7}$$

Comparando os resultados das Equações (2.4) e (2.7), temos que

$$A = (a_{ij}) = \left(\left\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \right\rangle\right),$$

com isso provamos tanto a existência da matriz A, como também sua dependência em relação à escolha da base $\mathscr{B}$.

Agora, para provarmos a unicidade, vamos supor a existência de outra matriz $G = (g_{ij})$ tal que

$$[\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^T = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot G \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^T \ .$$

E consideremos os seguintes polinômios

$$\begin{aligned} p_A\left(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\right) &= [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^T \\ &= u_1\left(a_{11}\right) v_1 + \cdots + u_n\left(a_{n1}\right) v_1 + \cdots + \\ &\quad + u_1\left(a_{1n}\right) v_n + \cdots + u_n\left(a_{nn}\right) v_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_G\left(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\right) &= [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot G \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^T \\ &= u_1\left(g_{11}\right) v_1 + \cdots + u_n\left(g_{n1}\right) v_1 + \cdots + \\ &\quad = u_1\left(g_{1n}\right) v_n + \cdots + u_n\left(g_{nn}\right) v_n \ . \end{aligned}$$

Mas, por hipótese, temos que

$$p_A\left(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\right) = p_G\left(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\right)$$

e, pelo Princípio da Igualdade de Polinômios, segue que $(a_{ij}) = (g_{ij})$, ou seja, $A = G$. ■

Exemplo 2.6 *Vimos que o produto interno canônico no* $\mathbb{R}^2$ *foi definido para a base canônica* $\mathscr{C} = \{(1,0), (0,1)\}$ *e é dado por*

$$\langle\left(u_1, u_2\right), \left(v_1, v_2\right)\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Assim, podemos representar o produto interno em relação à base canônica utilizando a matriz

$$A_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tendo em vista que

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = [\vec{v}]_{\mathscr{C}} \cdot A_{\mathscr{C}} \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{C}}^T.$$

Por outro lado, ao utilizarmos a base $\mathscr{B} = \{(2,-1),(3,4)\}$*, temos que*

$$A_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \langle (2,-1),(2,-1)\rangle & \langle (2,-1),(3,4)\rangle \\ \langle (3,4),(2,-1)\rangle & \langle (3,4),(3,4)\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 25 \end{bmatrix}$$

Ao considerarmos $[\vec{u}]_{\mathscr{B}} = (u_1, u_2)$ *e* $[\vec{v}]_{\mathscr{B}} = (v_1, v_2)$ *vetores em* $\mathbb{R}^2$*, o produto interno fica*

$$\langle [\vec{u}]_{\mathscr{B}}, [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \rangle = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5v_1 + 2v_2 \\ 2v_2 + 25v_2 \end{bmatrix}$$

$$= 5u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 25u_2v_2.$$

ou seja,

$$\langle [\vec{u}]_{\mathscr{B}}, [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \rangle = 5u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 25u_2v_2.$$

Com isso, ao calcularmos o produto interno dos vetores $[\vec{u}]_{\mathscr{B}} = \left(\frac{4}{11}, \frac{1}{11}\right)$ *e* $[\vec{v}]_{\mathscr{B}} = \left(-\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right)$*, temos que*

$$\langle [\vec{u}]_{\mathscr{B}}, [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} \end{bmatrix} = 0.$$

Note que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais em relação à base $\mathscr{B}$, entretanto em relação à base canônica teríamos que seu produto interno seria $-\frac{10}{11}$, ou seja, eles não seriam ortogonais.

Definição 2.4 *Diremos que* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *é uma matriz simétrica se* $A^T = A$*.*

Definição 2.5 *Diremos que* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *é positiva definida se, para todo vetor não nulo* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$*, tivermos que*

$$[\vec{v}]\, A\, [\vec{v}]^T > 0.$$

Lema 2.1 *Suponhamos que* V *seja um espaço vetorial, que* $\mathscr{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ *seja uma base ordenada de* V *e que* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *seja uma matriz simétrica e positiva definida. Então a matriz* A *define um produto interno do seguinte modo*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^T.$$

Demonstração:

(i) Como A é uma matriz positiva, para todo vetor não nulo $v \in V$ temos que

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^{T} > 0.$$

Além disso temos que

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^{T} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v} = 0,$$

pois A é uma matriz positiva.

(ii) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha\vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle &= [\alpha\vec{v}_1]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}_2]_{\mathscr{B}}^{T} \\ &= \alpha\, [\vec{v}_1]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}_2]_{\mathscr{B}}^{T} \\ &= \alpha \left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

(iii) Para quaisquer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle &= [\vec{v}_1 + \vec{v}_2]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}_3]_{\mathscr{B}}^{T} \\ &= ([\vec{v}_1]_{\mathscr{B}} + [\vec{v}_2]_{\mathscr{B}}) \cdot A \cdot [\vec{v}_3]_{\mathscr{B}}^{T} \\ &= [\vec{v}_1]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}_3]_{\mathscr{B}}^{T} + [\vec{v}_2]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}_3]_{\mathscr{B}}^{T} \\ &= \left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \right\rangle + \left\langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \right\rangle. \end{aligned}$$

(iv) Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in V$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= [\vec{v}_1]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}_2]_{\mathscr{B}}^{T} \\ &= u_1\,(a_{11})\,v_1 + \cdots + u_n\,(a_{n1})\,v_1 + \cdots + \\ &\quad + u_1\,(a_{1n})\,v_n + \cdots + u_n\,(a_{nn})\,v_n \\ &= v_1\,(a_{11})\,v_1 + \cdots + v_1\,(a_{n1})\,u_n + \cdots + \\ &\quad + v_n\,(a_{1n})\,u_1 + \cdots + v_n\,(a_{nn})\,u_n \\ &= v_1\,(a_{11})\,u_1 + \cdots + v_n\,(a_{n1})\,u_1 + \cdots + \\ &\quad + v_1\,(a_{1n})\,u_n + \cdots + v_n\,(a_{nn})\,u_n \\ &\quad [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{u}]_{\mathscr{B}}^{T} \\ &= \left\langle \vec{v}, \vec{u} \right\rangle. \end{aligned}$$

■

Lema 2.2 *Suponhamos que V seja um espaço vetorial e que $\mathscr{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ é uma base ordenada de V. Suponhamos que*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{b}_i \qquad e \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i$$

sejam vetores de V escritos em termos de $\mathscr{B}$, denotados por

$$[\vec{u}] = \left[\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{array}\right] \qquad e \qquad [\vec{v}] = \left[\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array}\right]$$

e, consideremos

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot , \cdot \rangle : & V \times V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{array}$$

um produto interno qualquer de V. Então a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, que depende da base $\mathscr{B}$, tal que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}] \cdot A \cdot [\vec{v}]^T$$

é simétrica e positiva definida.

Demonstração: Como o produto interno goza da simetria, temos que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

ou seja,

$$[\vec{u}]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^T = [\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{u}]_{\mathscr{B}}^T$$

ou melhor,

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} u_i \left(a_{ij}\right) v_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} v_i \left(a_{ji}\right) u_j$$

e, daí $(a_{ij}) = (a_{ji})$. Portanto A é simétrica.

Como, para todo vetor não nulo $\vec{v} \in V$, temos que

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$$

e, com isso,

$$[\vec{v}]_{\mathscr{B}} \cdot A \cdot [\vec{v}]_{\mathscr{B}}^T > 0.$$

Portanto A é uma matriz positiva definida. ■

Como consequência dos resultados dessa seção temos a seguinte Proposição:

Proposição 2.5 *Suponhamos que A seja um espaço vetorial, que $\mathscr{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ é uma base ordenada de V e que $A \in M_n(\mathbb{R})$. Para que a aplicação definida por*

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot , \cdot \rangle : & V \times V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}] \cdot A \cdot [\vec{v}]^T \end{array}$$

seja um produto interno sobre V é necessário e suficiente que a matriz A seja simétrica e positiva definida.

Pelo Lema 2.2 e pela Proposição 2.5 vimos que está diretamente ligado com a definição de produto interno, com isso temos a seguinte definição.

Definição 2.6 *Suponhamos que A seja um espaço vetorial, que* $\mathscr{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ *é uma base ordenada de* V *e que* $A \in M_n(\mathbb{R})$*. Ao considerarmos o produto interno*

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot , \cdot \rangle : & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}] \cdot A \cdot [\vec{v}]^T \end{array}$$

diremos que a matriz A *é a matriz do produto interno e que o produto interno está indexado pela matriz simétrica positiva definida de* $M_n(\mathbb{R})$ *que o define, ou seja,*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathscr{A}} = [\vec{u}] \cdot A \cdot [\vec{v}]^T \ .$$

2.4 O Espaço Tangente e suas Propriedades

Definição 2.7 *Um vetor tangente do* $\mathbb{R}^n$ *determinado por dois vetores deste espaço: um chamado de parte vetorial* $\vec{v}$ *e outro de ponto de aplicação* $\vec{p}$*, que é denotado por* $\vec{v}_{\vec{p}}$ *e consiste do vetor obtido ao colocar a origem de* $\vec{v}$ *em* $\vec{p}$*.*

Temos que valem as seguintes propriedades:

1. $\vec{v}_{\vec{p}} = \vec{w}_{\vec{q}}$ se, e somente se esses vetores tangentes têm o mesmo ponto de aplicação, $\vec{p} = \vec{q}$, e a mesma parte vetorial $\vec{v} = \vec{w}$;
2. $\vec{v}_{\vec{p}}$ e $\vec{v}_{\vec{q}}$, com $p \neq q$ são vetores tangentes paralelos e não são coincidentes;
3. $\vec{v}_{\vec{p}} \pm \vec{w}_{\vec{p}} = (\vec{v} \pm \vec{w})_{\vec{p}}$;
4. Se $c \in \mathbb{R}$, então $c\,(\vec{v}_{\vec{p}}) = (c\vec{v})_{\vec{p}}$.

Definição 2.8 *Sejam* $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ *um ponto e* $V \subset \mathbb{R}^n$ *um subespaço vetorial. O espaço tangente de* V *em* $\vec{p}$ *é definido como o conjunto de todos os vetores de* V *aplicados em* $\vec{p}$*, ou seja, com sua origem transladada para o ponto* $\vec{p}$*, e é denotador por*

$$T_{\vec{p}}(V) = \{\vec{v}_{\vec{p}} : \vec{v} \in V\}.$$

Proposição 2.6 $T_{\vec{p}}(V)$ *é um espaço vetorial, com* $\vec{0}_{\vec{p}} = \vec{p}$*.*

Demonstração: Consideremos a seguinte transformação linear

$$\begin{array}{rccl} F : & V & \to & T_{\vec{p}}(V) \\ & \vec{v} & \mapsto & \vec{v}_{\vec{p}} \ . \end{array}$$

Notemos que F é um isomorfismo, pois é linear e bijetora.
Como V é um espaço vetorial real, no qual estão definidas a soma e a multiplicação por escalar respectivamente por

$$\begin{array}{rccc} S: & V \times V & \to & V \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{w} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} M: & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & (\alpha, \vec{v}) & \mapsto & \alpha \cdot \vec{w} \end{array}$$

e que satisfazem os oito axiomas de espaço vetorial. Observe que, ao considerarmos a composta $F \circ S$ e $F \circ M$, temos que esses oito axiomas também são satisfeitos em $T_{\vec{p}}(V)$. Portanto $T_{\vec{p}}(V)$ é um espaço vetorial. ■

Definição 2.9 *Suponhamos que V seja um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e que $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$. Suponhamos ainda que $\mathscr{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ seja uma base ordenada de V. Definimos a base ordenada de $T_{\vec{p}}(\vec{v})$ como uma base de V aplicada a $\vec{p}$, ou seja, cada um dos vetores da base $\mathscr{B}$ é aplicado em $\vec{p}$. Assim,*

$$\mathscr{B}_{\vec{p}} = \{\vec{v}_{1\vec{p}}, \vec{v}_{2\vec{p}}, \ldots, \vec{v}_{m\vec{p}}\}.$$

Utilizando o isomorfismo tomado na demostração da Proposição 2.6, como F é bijetora e $\mathscr{B}$ é uma base de V, então temos que $F(\mathscr{B})$ é uma base de $T_{\vec{p}}(\vec{v})$, já que isomorfismo leva base em base, isto é, transforma uma base do domínio em uma base da imagem.

Exemplo 2.7 *Consideremos em $\mathbb{R}^3$ o plano xOy, cuja equação é $z = 0$ e o ponto $\vec{p} = (-2, 1, 1)$. Uma base para o plano xOy é $\mathscr{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, assim uma base para $T_{\vec{p}}$ é dada por $F(\mathscr{B}) = \mathscr{B}_{\vec{p}} = \{(1, 0, 0)_{\vec{p}}, (0, 1, 0)_{\vec{p}}\}$. Note que $T_{\vec{p}}$ é paralelo ao plano xOy e tem equação $z = -2$.*

3 Métricas

Neste capítulo desenvolvemos a ideia de métrica com base nos conceitos de produto interno que foi desenvolvido anteriormente. A palavra métrica é usada aqui no sentido de uma aplicação matricial ao contrário das métricas normalmente vistas nos cursos de licenciatura que quase sempre se restringem a funções constantes. Aqui discutimos métricas cuja função matricial varia de acordo com o ponto no qual ela está sendo calculada, pois trata-se de uma função matricial não necessariamente constante, no entanto ela satisfaz todas as condições de métricas estudadas no curso de Introdução aos Espaços Métricos. As referências para esse capítulo são: [16] e [17]

3.1 Métricas

Antes de iniciarmos a discussão sobre métricas do ponto de vista matricial, que é o foco de interesse deste trabalho, lembremos os conceitos de métrica, conjunto aberto e conjunto conexo vistos no curso de Introdução aos Espaços Métricos.

Definição 3.1 (Métrica) *Sejam M um conjunto não vazio e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma função, indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in M \times M$ através da função d. Diremos que d é uma **métrica sobre** $\mathbf{M}$ se as seguintes condições forem satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in M$:*

(M_1) $d(x, y) \geq 0$;

(M_2) $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$;

(M_3) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M_4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Nas condições da Definição 3.1 cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de **distância de x a y**.

Definição 3.2 (Espaço Métrico) *Sejam M um conjunto não vazio e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma métrica sobre M. Diremos que o par (M, d) é um espaço métrico.*

Definição 3.3 (Bola aberta) *Suponhamos que (M, d) seja um espaço métrico, que $p \in M$ e que $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$. Definimos a **bola aberta de centro** $\mathbf{p}$ **e raio** ε, que indicaremos por $B(p, \varepsilon)$, por*

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in M : d(x, p) < \varepsilon\}.$$

Definição 3.4 *Seja (M,d) um espaço métrico. Um conjunto $A \subset M$ se diz* ***aberto*** *se, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p,\varepsilon) \subset A$.*

Definição 3.5 (Espaço Desconexo) *Suponhamos que (M,d) seja um espaço métrico. Diremos que (M,d) é desconexo quando existirem dois conjuntos abertos G e H, ambos não vazios e disjuntos tais que $G \cup H = M$. Neste caso, diremos que o par de aberto G e H forma uma desconexão de M e indicamos tal fato por $M = G|H$. Quando M não for desconexo diremos que M é conexo.*

Como nesta monografia estamos interessados em trabalhar com métricas não Euclidianas do ponto de vista matricial, precisamos da seguinte definição

Definição 3.6 *O conjunto das matrizes quadradas, simétricas e positivas definidas é denotado por*

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \mathscr{A} \in M_n(\mathbb{R}) : \mathscr{A}^T = \mathscr{A} \quad e \quad [\vec{v}]\, \mathscr{A}\, [\vec{v}]^T > 0,\ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Claramente $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$.

Definição 3.7 *Sejam que $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação matricial $\mathscr{A} : V \to M_n(\mathbb{R})$, dada por*

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{A}: & V & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ & \vec{p} & \mapsto & (a_{ij}(\vec{p})) \end{array}$$

em que cada

$$\begin{array}{rccl} a_{in}: & V & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{p} & \mapsto & a_{ij}(\vec{p}) \end{array}$$

com $i,j = 1,2,\ldots,n$, é uma função diferenciável, que denominamos função entrada de $\mathscr{A}(\vec{p})$. Quando houver um aberto conexo $X \subset V$ tal que a restrição

$$\mathscr{A}\Big|_X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

diremos que $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\vec{p}}$ é uma métrica diferenciável em cada ponto $\vec{p} \in X$.

Quando falarmos de métrica, estamos considerando que $\vec{p}$ pertence ao conjunto dos pontos tais que $\mathscr{A}(\vec{p}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.1 *Observe que, para $n = 2$ temos que*

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{A}: & V & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & \vec{p} & \mapsto & (a_{ij}(\vec{p})) \end{array}$$

logo,

$$\mathscr{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\vec{p}) & a_{12}(\vec{p}) \\ a_{21}(\vec{p}) & a_{22}(\vec{p}) \end{bmatrix}$$

que, devido à simetria, nos leva a $a_{21}(\vec{p}) = a_{12}(\vec{p})$*. Assim, para simplificar a notação, temos que*

$$\mathscr{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a(\vec{p}) & b(\vec{p}) \\ b(\vec{p}) & c(\vec{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

com a, b, c *funções de* $\vec{p}$*.*

Uma métrica $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ é aplicada sobre $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ para se obter um produto interno neste espaço tangente. Assim temos a seguinte definição:

Definição 3.8 *Seja* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ *uma métrica sobre* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$*. Essa matriz define um produto interno dado por*

$$\begin{array}{rccl} \langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})}: & T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & [\vec{u}_{\vec{p}}]\,\mathscr{A}(\vec{p})\,[\vec{v}_{\vec{p}}]^T \end{array}.$$

Esta função é denominada de produto interno sobre $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ *segundo* $\mathscr{A}(\vec{p})$*.*

Definição 3.9 *Suponhamos que* $\mathscr{B}_{\vec{p}} = \{\vec{v}_{1\vec{p}}, \vec{v}_{2\vec{p}}, \ldots, \vec{v}_{m\vec{p}}\}$ *seja uma base de* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ *é uma métrica sobre* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$*.*

- *Diremos que* $\mathscr{B}_{\vec{p}}$ *é uma base ortogonal segundo* $\mathscr{A}(\vec{p})$ *se* $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} = 0$*, para* $i \neq j$*;*
- *Diremos que* $\mathscr{B}_{\vec{p}}$ *é uma base ortonormal segundo* $\mathscr{A}(\vec{p})$ *se* $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} = \begin{cases} 0, & se\ i \neq j, \\ 1, & se\ i = j. \end{cases}$

Uma matriz simétrica pode ser entendida como a matriz de um operador linear auto-adjunto numa base ortonormal. A base canônica do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, munido do produto interno canônico é ortonormal. Considerando a matriz $(\mathscr{A})_{\mathscr{C},\mathscr{C}}$ da função

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{A}: & V & \to & \mathbb{R}^n \\ & \vec{v} & \mapsto & \mathscr{A}\vec{v} \end{array}$$

em que $\mathscr{A}\vec{v} = \mathscr{A}\,[\vec{v}]^T$, temos que

$$\langle \mathscr{A}\vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathscr{C}} = \langle \vec{u}, \mathscr{A}\vec{v} \rangle_{\mathscr{C}},$$

para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Enquanto que um produto interno sobre $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ pode ser entendido como um produto interno canônico, para isto basta simplificar $\mathscr{A}(p)$ para $\mathscr{A}$ e teremos que

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = [\vec{u}_{\vec{p}}]\, I_n \left(\mathscr{A}\left[\vec{v}_{\vec{p}}^T\right]\right) = [\vec{u}_{\vec{p}}]\, I_n\, [\vec{v}_{\vec{p}}]^T = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \mathscr{A}\vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{C}},$$

ou seja,

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \langle \mathscr{A}\,\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{C}}.$$

Além disso, como toda matriz simétrica é diagonalizável, temos que em toda função o produto interno assim definido admite uma base de autovalores. Com isso também temos que a base de autovalores de uma matriz simétrica é ortogonal em relação ao produto interno canônico. Normalizando cada um dos vetores dessa base, encontramos uma base ortonormal em relação ao produto interno canônico.

Lema 3.1 *Suponhamos que $\mathscr{A} \in M_n(\mathbb{R})$ seja uma matriz simétrica. $\mathscr{A}$ é positiva definida se, e somente se, todos os autovalores de $\mathscr{A}$ são estritamente positivos.*

Demonstração: Seja $\mathscr{A} \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica.
($\Rightarrow$) Suponhamos que $\mathscr{A}$ seja positiva definida, logo $\mathscr{A}$ é diagonalizável. Suponhamos que λ seja um dos seus autovalores e que $\vec{v}$ o autovetor associado a este λ, logo $\vec{v} \neq \vec{0}$. Assim, como $\mathscr{A}$ é positiva definida, temos que

$$0 < [\vec{v}]\,\mathscr{A}\,[\vec{v}]^T = [\vec{v}]\,[\lambda\vec{v}]^T = \lambda\,[\vec{v}]\,[\vec{v}]^T = \lambda\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle_{\mathscr{C}},$$

e, como $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle_{\mathscr{C}} > 0$, segue que $\lambda > 0$. Portanto, todo autovalor λ da matriz $\mathscr{A}$ é positivo.
($\Leftarrow$) Agora, suponhamos que $\mathscr{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^n$, ortonormal segundo o produto interno canônico e composta por autovetores de $\mathscr{A}$, ou seja, cada autovetor $\vec{v}_i$ associado ao autovalor $\lambda_i > 0$. Como, cada vetor $\vec{u}$ é escrito como $\sum\limits_{1\leq i\leq n} \alpha_i\vec{v}_i$ e, assim,

$$\begin{aligned}
[\vec{u}]\,\mathscr{A}\,[\vec{u}]^T &= [\vec{u}]\,I_n\left(\mathscr{A}\,[\vec{u}]^T\right)\\
&= \left\langle \vec{u}, \mathscr{A}\sum_{1\leq i\leq n}\alpha_i\vec{v}_i \right\rangle_{\mathscr{C}}\\
&= \left\langle \vec{u}, \sum_{1\leq i\leq n}\alpha_i\left(\mathscr{A}\vec{v}_i\right) \right\rangle_{\mathscr{C}}\\
&= \left\langle \vec{u}, \sum_{1\leq i\leq n}\alpha_i\left(\lambda_i\vec{v}_i\right) \right\rangle_{\mathscr{C}}\\
&= \left\langle \sum_{1\leq i\leq n}\alpha_i\vec{v}_i, \sum_{1\leq i\leq n}\alpha_i\left(\lambda_i\vec{v}_i\right) \right\rangle_{\mathscr{C}}\\
&= \sum_{1\leq i\leq n}\alpha_i^2\lambda_i\left\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i\right\rangle_{\mathscr{C}}\\
&= \sum_{1\leq i\leq n}\alpha_i^2\lambda_i > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathscr{A}(\vec{p})$ é positiva definida. ■

Corolário 3.1 *Toda matriz simétrica e positiva definida é não singular.*

Demonstração: Como estamos interessados apenas no caso $n = 2$, mostraremos que este resultado é válido nesse caso.
Suponhamos que $\mathscr{A}$ seja simétrica e positiva definida e que, por absurdo, $\mathscr{A}$ seja singular. Logo $\det \mathscr{A} = 0$, assim, fazendo

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

temos que $ac - b^2 = 0$ e, com isso $b^2 = ac$. Além disso,

$$p_{\mathscr{A}} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = ac - a\lambda - c\lambda + \lambda^2 - ac = -a\lambda - c\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda.$$

O que nos leva a uma raiz nula para o polinômio característico, e consequentemente um autovalor nulo. Absurdo! Portanto $\det \mathscr{A} \neq 0$. ■

Portanto, sempre que $\mathscr{A}$ é simétrica e positiva definida, consequentemente ela será não singular, e, portanto, invertível.

Definição 3.10 *Considerando $\mathscr{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Definimos a submatriz principal de ordem k, com $1 \leq k \leq n$, como a matriz $\mathscr{A}_k = (a_{ij})$, com $1 \leq i, j \leq k$, portanto $\mathscr{A}_k \in M_k(\mathbb{R})$; e o menor principal de ordem k de $\mathscr{A}$ como sendo o determinante da submatriz principal $\mathscr{A}_k$.*

Observe que, quando $\mathscr{A}$ é positiva definida todos os seus menores principais são estritamente positivos. Com isso também temos que uma matriz em $\mathscr{M}_n$ não pode ter um elemento nulo na diagonal principal, pois, se isso acontecesse algum menor principal seria nulo ou negativo.

Exemplo 3.2 *A matriz $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}_2$ igual a*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

constante em todo $\vec{p}$ define o produto interno em $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot \, , \, \cdot \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} : & T\vec{p}(\mathbb{R}^n) \times T\vec{p}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & [\vec{u}_{\vec{p}}]\, \mathscr{A}(\vec{p})\, [\vec{v}_{\vec{p}}]^T \end{array}$$

todo $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)$, é dado algebricamente por

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \mathscr{A} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2.$$

Exemplo 3.3 *O produto interno usual também é aplicável no espaço tangente $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ e pode ser reescrito na forma matricial*

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot \, , \, \cdot \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} : & T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & [\vec{u}_{\vec{p}}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [\vec{v}_{\vec{p}}]^T \end{array}$$

e, como $I_2 \in \mathscr{M}_2$ é possível definirmos esse produto interno.

Assim, temos que o produto interno canônico em sua forma matricial é dado por

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{C}} = [\vec{u}_{\vec{p}}]\, I_2\, [\vec{v}_{\vec{p}}]^T$$

e, com isso, a matriz I_2 é chamada de matriz Euclidiana, ou canônica, ou ainda, usual.

Exemplo 3.4 *Considere* $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ *e consideremos a função*

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{A} : & Y & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ & \vec{p} & \mapsto & \mathscr{A}(\vec{p}) \end{array}$$

dada por

$$\mathscr{A}(\vec{p}) = \mathscr{A}(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

O conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \subset Y$ *é chamado de plano da Geometria de Lobatchevski. Para um ponto de função* $\vec{p} \in X$*, temos que* $\mathscr{A}$ *define uma métrica em* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ *dada por*

$$\begin{array}{rccl} \langle \,\cdot\, , \,\cdot\, \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} : & T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & [\vec{u}_{\vec{p}}]\, \mathscr{A}(\vec{p})\, [\vec{v}_{\vec{p}}]^T \end{array}$$

todo $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)$ *e* $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)$*, é dado algebricamente por*

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x_2}{y^2} & \dfrac{y_2}{y^2} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{y^2}. \end{aligned}$$

Esse produto interno é chamado de métrica da Geometria Não Euclidiana de Lobatchesvski.

Proposição 3.1 *Suponhamos que* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ *seja uma métrica de* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$*.*

1. *Existe uma base ordenada de* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$*, ortogonal segundo* $\mathscr{A}(\vec{p})$*;*

2. *Existe uma base ordenada de* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$*, ortonormal segundo* $\mathscr{A}(\vec{p})$*.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica de $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$.

(i) Ao considerarmos a matriz $\mathscr{A}$, temos que existe uma base $\mathscr{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ formada pelos autovalores de $\mathscr{A}$ e, a cada um dos autovetores dessa base está associado um autovalor λ_i. Logo temos que

$$\mathscr{A}\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i.$$

Além disso, podemos aplicar essa base em $\vec{p}$ para gerar uma base de $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, e, assim temos

$$\mathscr{B}_{\vec{p}} = \{\vec{v}_{1\vec{p}}, \vec{v}_{2\vec{p}}\}.$$

O produto interno de $\mathscr{A}$ dos vetores desta base pode ser descrito como

$$\langle \vec{v}_{1\vec{p}}, \vec{v}_{2\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \langle \vec{v}_{1\vec{p}}, \mathscr{A}\vec{v}_{2\vec{p}} \rangle_{\mathscr{C}} = \langle \vec{v}_{1\vec{p}}, \lambda_2\vec{v}_{2\vec{p}} \rangle_{\mathscr{C}} = \lambda_2 \langle \vec{v}_{1\vec{p}}, \vec{v}_{2\vec{p}} \rangle_{\mathscr{C}} = \lambda_2 0 = 0,$$

pois a base $\mathscr{B}$ é ortogonal e, com isso a base $\mathscr{B}_{\vec{p}}$ é ortogonal. Portanto a base procurada é exatamente a base dos autovetores de $\mathscr{A}$.

(ii) Para encontrarmos a base ortonormal segundo $\mathscr{A}$ basta normalizarmos a base encontrada no item anterior. Para isso, tomemos

$$\vec{u}_{1\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\vec{v}_{1\vec{p}} \qquad \text{e} \qquad \vec{u}_{2\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\vec{v}_{2\vec{p}}.$$

Resta-nos mostrar que a base de $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ assim construída é ortonormal segundo $\mathscr{A}(\vec{p})$. Para isso, observe que

$$\langle \vec{u}_{1\vec{p}}, \vec{u}_{2\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\vec{v}_{1\vec{p}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\vec{v}_{2\vec{p}} \right\rangle_{\mathscr{A}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \langle \vec{v}_{1\vec{p}}, \vec{v}_{2\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \cdot 0 = 0.$$

e, para $i = 1, 2$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u}_{i\vec{p}}, \vec{u}_{i\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\vec{v}_{i\vec{p}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\vec{v}_{i\vec{p}} \right\rangle_{\mathscr{A}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2}} \langle \vec{v}_{i\vec{p}}, \vec{v}_{i\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \\
&= \frac{1}{\lambda_i} \langle \vec{v}_{i\vec{p}}, \mathscr{A}\vec{v}_{i\vec{p}} \rangle_{\mathscr{C}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2}} \langle \vec{v}_{i\vec{p}}, \lambda_i\vec{v}_{i\vec{p}} \rangle_{\mathscr{C}} = \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_i} \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

Assim temos que a base $\mathscr{B}_{2\vec{p}} = \{\vec{u}_{1\vec{p}}, \vec{u}_{2\vec{p}}\}$ de $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ é ortonormal segundo $\mathscr{A}$. ■

Definição 3.11 *Uma métrica é denominada métrica diagonal se sua matriz for diagonal.*

Segue diretamente da definição que, se a matriz do produto interno é diagonal, então os elementos da diagonal principal são seus autovalores e, com isso, todos devem ser estritamente positivos.

Neste caso, também temos que a base canônica de $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, que é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ aplicada em $\vec{p}$, é ortogonal segundo qualquer métrica diagonal. *De fato,* temos que a base de $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ é dada por

$$\mathscr{C}_{\vec{p}} = \left\{\vec{i}_{\vec{p}}, \vec{j}_{\vec{p}}\right\}.$$

considerando a métrica diagonal

$$\mathscr{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a(\vec{p}) & 0 \\ 0 & b(\vec{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

temos que $\mathscr{A}(\vec{p}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}^2)$ sempre que $\vec{p} \in X$, com X sendo um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$. Assim, $\mathscr{A}(\vec{p})$ define um produto interno em cada $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$.

Além disso, ao considerarmos os vetores $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)_{\mathscr{C}_{\vec{p}}}$ e $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)_{\mathscr{C}_{\vec{p}}}$ em $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ temos que o produto interno induzido por $\mathscr{A}$ é dado por

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = a x_1 x_2 + b y_1 y_2 \ .$$

Com isso temos que

$$\left\langle \vec{i}_{\vec{p}}, \vec{j}_{\vec{p}} \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} = 0$$

e, portanto, $\mathscr{C}_{\vec{p}}$ é ortogonal segundo $\mathscr{A}$.

Definição 3.12 (Norma) *Consideremos a função*

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\| : & T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & \vec{v}_{\vec{p}} & \mapsto & \|\vec{v}_{\vec{p}}\| \ . \end{array}$$

Diremos que essa função é uma norma do espaço tangente $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ se, para quaisquer $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tivermos que

(N_1) $\|\vec{v}_{\vec{p}}\| = 0$ *se, e somente se,* $\vec{v}_{\vec{p}} = \vec{0}_{\vec{p}}$;

(N_2) $\|\alpha \vec{v}_{\vec{p}}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}_{\vec{p}}\|$;

(N_3) $\|\vec{v}_{\vec{p}} + \vec{u}_{\vec{p}}\| \leq \|\vec{v}_{\vec{p}}\| + \|\vec{u}_{\vec{p}}\|$.

A propriedade N_3 é chamada de desigualdade triangular.

Lema 3.2 *Nas condições da última definição,* $\left\|\vec{0}_{\vec{p}}\right\| = 0$.

Demonstração: Seja $\vec{u} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ um vetor qualquer, então

$$\vec{0}_{\vec{p}} = \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}} = (1-1).\vec{u}_{\vec{p}} = 0.\vec{u}_{\vec{p}} \ .$$

Assim, pela propriedade (N_2) da definição de norma, segue que

$$\left\|\vec{0}_{\vec{p}}\right\| = \|0.\vec{u}_{\vec{p}}\| = 0. \|\vec{u}_{\vec{p}}\| = 0.$$

■

Dados os pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, ambos em $\in \mathbb{R}^2$, e definido um vetor de extremidade inicial em P e final em Q por

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

é possível medir o comprimento do vetor $\overrightarrow{PQ}$ pela função do *Teorema de Pitágoras* ao triângulo PQR da Figura 1, em que $R = (x_2, y_1)$:

$$PQ^2 = PR^2 + RP^2$$

onde XY denota o comprimento do segmento de extremos em X e Y; os segmentos horizontais PR e vertical RQ têm seus comprimentos facilmente calculados por $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$ nessa ordem; então

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

e, com isso, obtemos

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

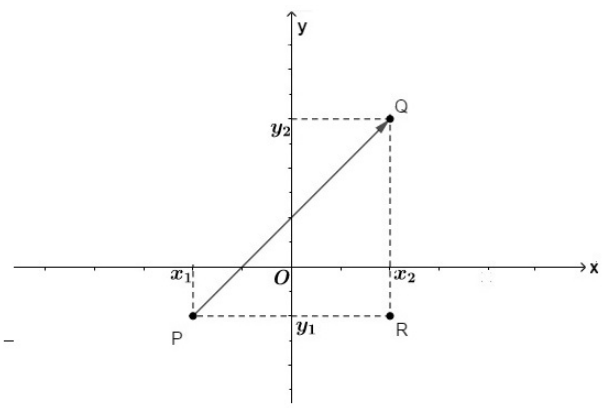

Figura 1 – Coordenadas do vetor $\overrightarrow{PQ}$ em $\mathbb{R}^2$.

Mas

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_1)\\ &= \langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\rangle_{\mathscr{C}}\\ &= \langle \vec{PQ}, \vec{PQ}\rangle_{\mathscr{C}}.\end{aligned}$$

Portanto, $PQ = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}\rangle_{\mathscr{C}}}$.

Um conceito decorrente do conceito de distância é o conceito de norma:

Definição 3.13 *Seja $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. A* ***norma Euclidiana*** *de $\vec{v}$ (**norma canônica** ou **norma usual**) é uma função*

$$\| \quad \|_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

que mede o comprimento do vetor $\vec{v}$ e é definida da seguinte forma

$$\|\vec{v}\|_C = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle_C}\ .$$

Veremos que, um produto interno sempre define uma norma, mas, para que possamos discutir sobre isso, precisamos inicialmente provar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Lema 3.3 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Seja $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ uma métrica definida no espaço tangente $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$. Se $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}^2 \leq \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \cdot \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \tag{3.1}$$

e, a igualdade ocorre se, e somente se, $\{\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\}$ for um conjunto linearmente dependente.

Demonstração: Notemos primeiramente que, se $\vec{u}_{\vec{p}} = \vec{v}_{\vec{p}} = \vec{0}_{\vec{p}}$ então, teremos que

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = 0$$

e, portanto a Desigualdade 3.1 é satisfeita, do mesmo modo que se um deles for nulo também o é. Assim resta analisarmos apenas o caso em que $\vec{u}_{\vec{p}} \neq \vec{0}_{\vec{p}}$ e $\vec{v}_{\vec{p}} \neq \vec{0}_{\vec{p}}$.
Consideremos

$$\vec{w}_{\vec{p}} = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{v}_{\vec{p}} - \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{u}_{\vec{p}} \,.$$

Como $\langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} &= \Big\langle \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{v}_{\vec{p}} - \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{u}_{\vec{p}}, \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{v}_{\vec{p}} - \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{u}_{\vec{p}} \Big\rangle_{\mathscr{A}} \\
&= \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}^2 \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle - 2 \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}^2 \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \\
&= \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}^2 \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle - \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Como $\vec{u}_{\vec{p}} \neq \vec{0}_{\vec{p}}$ temos que $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle > 0$, assim podemos simplificar a inequação

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}^2 \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle - \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}^2 \geq 0$$

tornando-a

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle - \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}^2 \geq 0,$$

ou seja,

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}^2 \leq \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle \,.$$

Note que a igualdade acontece se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{w}_{\vec{p}} = \vec{0}_{\vec{p}} \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{v}_{\vec{p}} - \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{u}_{\vec{p}} = \vec{0}_{\vec{p}} \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{v}_{\vec{p}} = \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{u}_{\vec{p}} \\
&\Leftrightarrow \quad \vec{v}_{\vec{p}} = \frac{\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}}{\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}} \vec{u}_{\vec{p}}
\end{aligned}$$

e, isso é equivalente a dizer que o conjunto $\{\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\}$ é linearmente dependente. ■

Agora estamos em condição de estudarmos algumas métricas no espaço tangente $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$. Porém, antes de continuarmos observemos que a Desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser enunciada de forma equivalente à apresentada no Lema 3.3 por

$$\left|\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\rangle_{\mathscr{A}}^2\right| \leq \|\vec{u}_{\vec{p}}|_{\mathscr{A}} \cdot |\vec{v}_{\vec{p}}|_{\mathscr{A}}\,. \tag{3.2}$$

Proposição 3.2 (Norma no Espaço Tangente) *Seja $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ uma métrica definida no espaço tangente $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$. A função $\|\cdot\|_{\mathscr{A}} : T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\|\vec{v}\|_{\mathscr{A}} = \sqrt{\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\rangle_{\mathscr{A}}}\ ,$$

para todo $\vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, é uma norma e é chamada de norma de $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ segundo então $\mathscr{A}(\vec{p})$.

Demonstração: Seja $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ uma métrica definida no espaço tangente $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ e tomemos $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(N_1) Como,

$$\begin{aligned}\|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} = 0 \ &\Leftrightarrow\ \sqrt{\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\rangle_{\mathscr{A}}} = 0\\ &\Leftrightarrow\ \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\rangle_{\mathscr{A}} = 0\\ &\Leftrightarrow\ \vec{v}_{\vec{p}} = \vec{0}_{\vec{p}}\,.\end{aligned}$$

(N_2) Aqui temos que,

$$\begin{aligned}\|\alpha\cdot\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} &= \sqrt{\langle \alpha\cdot\vec{v}_{\vec{p}}, \alpha\cdot\vec{v}_{\vec{p}}\rangle_{\mathscr{A}}}\\ &= \sqrt{\alpha^2\cdot\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\rangle_{\mathscr{A}}}\\ &= \sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\rangle_{\mathscr{A}}}\\ &= |\alpha|\cdot\|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}\,.\end{aligned}$$

(N_3) Como

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_{\vec{p}}+\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}^2 &= \langle \vec{u}_{\vec{p}}+\vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}}+\vec{v}_{\vec{p}}\rangle_{\mathscr{A}}\\ &= \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}}\rangle_{\mathscr{A}}^2 + 2\,\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}},\rangle_{\mathscr{A}} + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}}\rangle_{\mathscr{A}}^2\end{aligned}$$

que, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}},\rangle_{\mathscr{A}} \leq \left|\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}},\rangle_{\mathscr{A}}\right| \leq \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}\cdot\|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}$$

que nos leva a

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_{\vec{p}}+\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}^2 &= \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}^2 + 2\,\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}},\rangle_{\mathscr{A}} + \langle \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}^2\\ &= \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}^2 + 2\,\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}\cdot\|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} + \langle \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}^2\\ &= \left(\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}\right)^2\end{aligned}$$

e, portanto

$$\|\vec{u}_{\vec{p}}+\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \leq \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}\,.$$

Portanto, $|\cdot|_{\mathscr{A}}$ é de fato uma norma sobre $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$. ■

Assim vimos que um produto interno sempre define uma norma, entretanto existem normas que não provêm de um produto interno, como veremos através do próximo exemplo.

Exemplo 3.5 *Notemos que a norma do máximo dada por*

$$\begin{array}{rccl} \max: & T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{v}_{\vec{p}} = (x_1, x_2) & \mapsto & \|\vec{v}_{\vec{p}}\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} \end{array}$$

não é definida por um produto interno.

Com efeito, suponhamos que esta norma seja definida por um produto interno qualquer, então teríamos que

$$\|\vec{v}_{\vec{p}}\| = \sqrt{\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle}$$

e, com isso

$$\|\vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} = \langle \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} + 2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}, \rangle_{\mathscr{A}} + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}$$

e

$$\|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} = \langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} - 2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}, \rangle_{\mathscr{A}} + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}$$

e, assim

$$\|\vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} + \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} = 2\left(\|\vec{u}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}}\right)$$

daí, para $\vec{p} = \vec{0}$ teríamos que $\vec{e}_1 = (1,0)$ e $\vec{e}_2 = (1,0)$ seriam vetores de $T_{\vec{0}}(\mathbb{R}^2)$, tais que

$$\|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\| + \|\vec{e}_1 - \vec{e}_2\| = 1 + 1 = 2,$$

enquanto que

$$2\left(\|\vec{e}_1\|^2 + \|\vec{e}_2\|^2\right) = 2(1+1) = 4.$$

A função $\| \quad \|_C$ estabelecida na Proposição 3.2 é um caso particular da norma generalizada na Definição 3.13, pois $\| \quad \|_C$ satisfaz os três axiomas da Definição 3.12.

Definição 3.14 *Suponhamos que $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$, que $\vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ e $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica definida neste espaço tangente. Diremos que $\vec{v}_{\vec{p}}$ é unitário segundo a métrica $\mathscr{A}$ se $\|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} = 1$.*

Segue diretamente da definição que $\vec{v}_{\vec{p}}$ é unitário segundo a métrica $\mathscr{A}$ se, e somente se,

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \|\vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} = 1.$$

Proposição 3.3 *Suponhamos que $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$, que $\vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ e $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica definida neste espaço tangente. Então $\vec{u}_{\vec{p}} = \dfrac{1}{\|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}}\vec{v}_{\vec{p}}$ é unitário.*

Demonstração: $\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} = \left\| \frac{1}{\|\vec{v}_{\vec{p}}\ \|_{\mathscr{A}}} \vec{v}_{\vec{p}} \right\|_{\mathscr{A}} = \frac{1}{\|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}} \cdot \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} = 1.$ ■

Definição 3.15 *Suponhamos que $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$, que $\vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ e $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica definida neste espaço tangente. Então o vetor $\vec{u}_{\vec{p}} = \frac{1}{\|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}} \vec{v}_{\vec{p}}$ é chamado de versor de $\vec{v}_{\vec{p}}$ segundo a métrica $\mathscr{A}$.*

Exemplo 3.6 *Consideremos o produto interno definido pela matriz $\mathscr{A} \in \mathscr{M}_2$ dada por*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que define o produto interno em $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ para quaisquer $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, com $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)$, dado por

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2.$$

Quando tomamos $\vec{p} = \vec{0}$, temos que o vetor $\vec{u} = (-1, 1)$ é tal que

$$\langle \vec{u}_{\vec{0}}, \vec{u}_{\vec{0}} \rangle_{\mathscr{A}} = 2(-1)(-1) + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1,$$

ou seja, o vetor $\vec{u}_{\vec{0}}$ é unitário em na métrica $\mathscr{A}$, mas, em relação à métrica Euclidiana isso não acontece tendo em vista que

$$\langle \vec{u}_{\vec{0}}, \vec{u}_{\vec{0}} \rangle_{\mathscr{C}} = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 2.$$

Agora, ao considerarmos o vetor $\vec{v} = (1, 2)$ temos que

$$\langle \vec{v}_{\vec{0}}, \vec{v}_{\vec{0}} \rangle_{\mathscr{A}} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10,$$

e, com isso,

$$\|\vec{v}_{\vec{0}}, \vec{v}_{\vec{0}}\|_{\mathscr{A}} = \sqrt{10}$$

e, portanto, seu versor segundo a métrica $\mathscr{A}$ é

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|_{\mathscr{A}}} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2).$$

No entanto, em relação à métrica Euclidiana esse versor seria

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|_{\mathscr{C}}} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2).$$

Proposição 3.4 *Suponhamos que $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$, que $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ e $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica definida neste espaço tangente. Então $\vec{u}_{\vec{p}} \perp \vec{v}_{\vec{p}}$ segundo a métrica $\mathscr{A}$ se, e somente se, $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = 0$.*

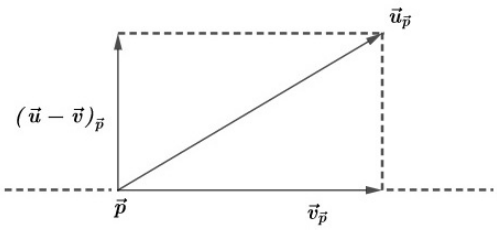

Figura 2 – Perpendicularismo entre vetores tangente.

Demonstração: Os vetores $\vec{u}_{\vec{p}}$, $\vec{v}_{\vec{p}}$ e $\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}$ são coplanares. No triângulo de lados que são estes vetores ($\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}$ aplicado ao ponto $\vec{p}_{\vec{v}}$ - Figura 2), é possível aplicar o *Teorema de Pitágoras* para se ter uma condição necessária e suficiente do perpendicularismo destes dois vetores:

$$\vec{u}_{\vec{p}} \perp \vec{v}_{\vec{p}} \Leftrightarrow \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}}.$$

Explorando as propriedades do produto interno temos que:

$$\|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} = \langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} - 2\left\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}, \right\rangle_{\mathscr{A}}.$$

Então

$$\|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|^2_{\mathscr{A}} \Leftrightarrow -2\left\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}, \right\rangle_{\mathscr{A}} = 0.$$

donde segue a tese. ■

Exemplo 3.7 *O perpendicularismo entre dois vetores $\vec{u}_{\vec{p}}$ e $\vec{v}_{\vec{p}}$* ***depende da métrica adotada para*** *$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$.*

Os vetores

$$\vec{u} = (x, y) \quad e \quad \vec{v} = (-y, x)$$

de $T_{\vec{0}}(\mathbb{R}^2)$ são vetores perpendiculares segundo a métrica canônica:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathscr{C}} = -xy + xy = 0.$$

Para uma métrica qualquer deste espaço tangente isso nem sempre acontece, pois

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathscr{A}} &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y & x \end{bmatrix}^T \\ &= (c-a)xy + b(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

que só é nulo em casos especiais, tais como $a = c$ e $b = 0$ ou $x = y$ e $a = c$.

Vetores deste espaço tangente da forma $\vec{u} = (x, 0)$ e $\vec{v} = (0, y)$ são perpendiculares segundo qualquer métrica que tenha $b(\vec{0}) = 0$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} = \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & y \end{bmatrix}^T = bxy.$$

Apenas para ilustrar, $\vec{u} = (2,1)$ *e* $\vec{v} = (-1,2)$ *são perpendiculares segundo a métrica canônica, mas*

$$\langle (2,1), (-1,2) \rangle_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T = 2.$$

Lema 3.4 *Seja* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p}) \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ *matriz de um produto interno definido em* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$*. Dado um vetor não-nulo* $\vec{u}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$*, existe uma direção em* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ *perpendicular ao vetor* $\vec{u}_{\vec{p}}$*.*

Demonstração: Consideremos $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)$ e $\mathscr{A} = \begin{bmatrix} a(\vec{p}) & b(\vec{p}) \\ b(\vec{p}) & c(\vec{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, tem-se o produto interno de $\vec{u}_{\vec{p}}$ com um vetor $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)$ dado por

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T \\ &= ax_1x_2 + b(y_1x_2 + x_1y_2) + cy_1y_2. \end{aligned}$$

Se for possível obter $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ de modo que $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = 0$, terá sido encontrada a direção perpendicular a $\vec{u}_{\vec{p}}$ como a direção de $\vec{v}_{\vec{p}}$.

$$0 = ax_1x_2 + b(y_1x_2 + x_1y_2) + cy_1y_2 = x_2(ax_1 + by_1) + y_2(bx_1 + cy_1).$$

Como $\mathscr{A}$ não pode ter um elemento nulo na diagonal principal, temos que $ax_1 + by_1 \neq 0$ ou $bx_1 + cy_1 \neq 0$.

- Se $bx_1 + cy_1 \neq 0$, daí permite escrever y_2 como variável dependente de x_2,

  $$y_2 = -x_2 \frac{ax_1 + by_1}{bx_1 + cy_1}.$$

  Variando x_2 em $\mathbb{R}$ obtém-se o respectivo y_2 e $\vec{u}_{\vec{p}} \perp \vec{v}_{\vec{p}}$.

- Analogamente, se $ax_1 + by_1 \neq 0$, conseguimos escrever x_2 em função de y_2. ■

Proposição 3.5 *Suponhamos que* $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$*, que* $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) - \left\{\vec{0}\right\}$*,* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ *seja uma métrica definida neste espaço tangente e que* θ *seja o ângulo entre os vetores* $\vec{u}_{\vec{p}}$ *e* $\vec{v}_{\vec{p}}$*. Então*

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot cos\ \theta.$$

Demonstração:

Caso 1 $\vec{u}_{\vec{p}} \perp \vec{v}_{\vec{p}}$. Pela Proposição 3.4 temos que $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = 0$ isso, juntamente com o fato de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, garante nosso resultado.

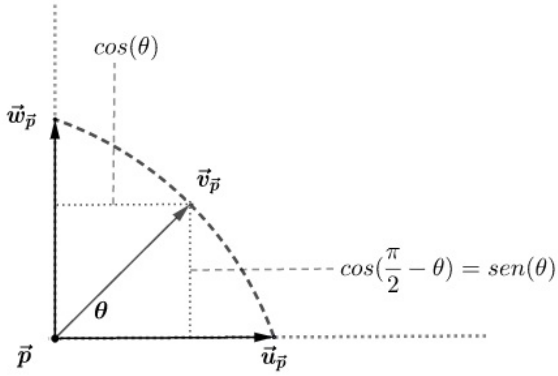

Figura 3 – $\vec{u}_{\vec{p}}$ e $\vec{v}_{\vec{p}}$ são unitários.

Caso 2 $\vec{u}_{\vec{p}}$ e $\vec{v}_{\vec{p}}$ são não perpendiculares e unitários, assim $\theta \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Consideremos

$$\vec{w}_{\vec{p}} = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{v}_{\vec{p}} - \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{u}_{\vec{p}} \ .$$

Como a dimensão de $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ é dois, temos que $\vec{u}_{\vec{p}}$, $\vec{v}_{\vec{p}}$ e $\vec{w}_{\vec{p}}$ estão no mesmo plano e que $\vec{u}_{\vec{p}} \in [\vec{v}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}}]$ e, por serem unitários, temos que existe um ângulo θ tal que

$$\vec{u}_{\vec{p}} = (\cos\,\theta) \cdot \vec{v}_{\vec{p}} + (\operatorname{sen}\theta) \cdot \vec{w}_{\vec{p}}$$

e, com isso

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} &= \langle (\cos\,\theta) \cdot \vec{v}_{\vec{p}} + (\operatorname{sen}\theta) \cdot \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \\ &= (\cos\,\theta) \cdot \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} + (\operatorname{sen}\theta) \langle \cdot \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \\ &= \cos\,\theta \end{aligned}$$

e o resultados segue.

Caso 3 $\vec{u}_{\vec{p}}$ e $\vec{v}_{\vec{p}}$ são não perpendiculares e não unitários, assim $\theta \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Consideremos $\vec{w}_{\vec{p}}$ e $\vec{z}_{\vec{p}}$, os versores de $\vec{u}_{\vec{p}}$ e $\vec{v}_{\vec{p}}$ segundo a métrica $\mathscr{A}$, respectivamente. Assim,

$$\vec{u}_{\vec{p}} = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot \vec{w}_{\vec{p}} \qquad \text{e} \qquad \vec{v}_{\vec{p}} = \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot \vec{z}_{\vec{p}}$$

e, com isso

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} &= \left\langle \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot \vec{w}_{\vec{p}}, \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot \vec{z}_{\vec{p}} \right\rangle_{\mathscr{A}} \\ &= \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot \langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{z}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \\ &= \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot \cos\,\theta \end{aligned}$$

e o resultados segue. ■

Corolário 3.2 *Suponhamos que $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$, que $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) - \left\{\vec{0}\right\}$, $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica definida neste espaço tangente. A função*

$$\begin{array}{rccl} cos\ (\ \ ,\ \ )\Big|_{\mathscr{A}} : & T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & \dfrac{\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}}{\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}} \cdot \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}} \end{array}$$

mede o cosseno do ângulo entre os vetores $\vec{u}_{\vec{p}}$ e $\vec{v}_{\vec{p}}$ segundo a métrica $\mathscr{A}$.

Definição 3.16 *Suponhamos que $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$, que $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) - \left\{\vec{0}\right\}$, $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica definida neste espaço tangente. Definimos a projeção ortogonal de $\vec{u}_{\vec{p}}$ sobre a reta de $\vec{v}_{\vec{p}}$ segundo a métrica $\mathscr{A}$ como*

- *sendo o vetor que faz o cateto sobre a reta de $\vec{v}_{\vec{p}}$ do triângulo retângulo de hipotenusa $\vec{u}_{\vec{p}}$ e, no caso destes vetores serem linearmente independentes;*
- *sendo o próprio vetor $\vec{u}_{\vec{p}}$ no caso de serem linearmente dependentes.*

A projeção ortogonal é denotada por

$$proj_{\vec{v}_{\vec{p}}} \vec{u}_{\vec{p}} \Big|_{\mathscr{A}} .$$

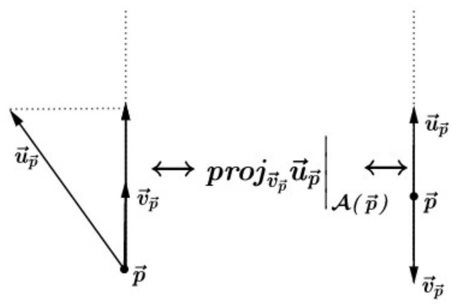

Figura 4 – Exemplos de projeções.

Proposição 3.6 *Suponhamos que $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$, que $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) - \left\{\vec{0}\right\}$, $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica definida neste espaço tangente. Então,*

1. $proj_{\vec{v}_{\vec{p}}} \vec{u}_{\vec{p}} \Big|_{\mathscr{A}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$;
2. $proj_{\vec{v}_{\vec{p}}} \vec{u}_{\vec{p}} \Big|_{\mathscr{A}} = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{v}_{\vec{p}}$.

Demonstração:

1. Como $\vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, temos que $\mathrm{proj}_{\vec{v}_{\vec{p}}} \vec{u}_{\vec{p}} \big|_{\mathscr{A}}$ está na reta determinada por $\vec{v}_{\vec{p}}$, mas claramente esta reta está contida em $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$. Portanto $\mathrm{proj}_{\vec{v}_{\vec{p}}} \vec{u}_{\vec{p}} \big|_{\mathscr{A}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$.
2. Suponhamos que $\vec{u}_{\vec{p}}$ e $\vec{v}_{\vec{p}}$ são linearmente independente. Observando a Figura 5, temos que

$$P = \vec{p} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}_{\vec{p}} = \vec{u}_{\vec{p}} \Rightarrow \overrightarrow{PR}_{\vec{p}} = \vec{v}_{\vec{p}} \Rightarrow \mathrm{proj}_{\vec{v}_{\vec{p}}} \vec{u}_{\vec{p}} \Big|_{\mathscr{A}} = \overrightarrow{PM}_{\vec{p}} \Rightarrow \overrightarrow{MQ}_{\vec{p}} = \overrightarrow{PN}_{\vec{p}} .$$

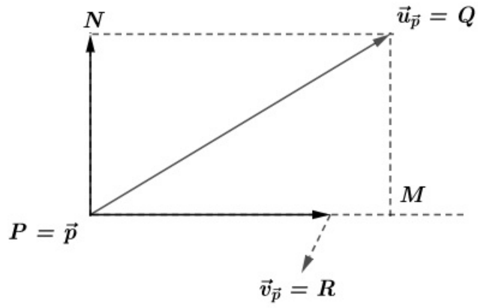

Figura 5 – Projeção de $\vec{u}_{\vec{p}}$ sobre $\vec{v}_{\vec{p}}$.

Logo,

$$\overrightarrow{MQ}_{\vec{p}} = \lambda \vec{v}_{\vec{p}}.$$

O coeficiente de proporcionalidade λ deve ser obtido. Então,

$$\vec{u}_{\vec{p}} = \overrightarrow{PM}_{\vec{p}} + \overrightarrow{MQ}_M = \overrightarrow{PM}_{\vec{p}} + \overrightarrow{PN}_{\vec{p}}\ .$$

Porém,

$$\overrightarrow{PM}_{\vec{p}} = \lambda \vec{v}_{\vec{p}};$$

e segue que

$$\vec{u}_{\vec{p}} = \lambda \vec{v}_{\vec{p}} + \overrightarrow{PN}_{\vec{p}}$$

e

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \left\langle \lambda \vec{v}_{\vec{p}} + \overrightarrow{PN}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \right\rangle_{\mathscr{A}} = \lambda \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} + \left\langle \overrightarrow{PN}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \right\rangle_{\mathscr{A}}.$$

Mas, por construção, $\overrightarrow{PN}_{\vec{p}} \perp \vec{v}_{\vec{p}}$, com isso

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \lambda \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} = \lambda.$$

Portanto,

$$\lambda = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}$$

como desejado.

Suponhamos agora, que $\vec{u}_{\vec{p}}$ e $\vec{v}_{\vec{p}}$ são linearmente dependentes, então $\vec{u}_{\vec{p}} = r\vec{v}_{\vec{p}}$ com $r \in \mathbb{R}$. Pelo resultado obtido anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_{\vec{v}_{\vec{p}}} \vec{u}_{\vec{p}} \Big|_{\mathscr{A}} &= \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{v}_{\vec{p}} \\ &= r \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}} \vec{v}_{\vec{p}} \\ &= r\vec{v}_{\vec{p}} \\ &= \vec{u}_{\vec{p}}\ , \end{aligned}$$

conforme definido. ■

Definição 3.17 *Uma função*

$$\begin{array}{rccl}\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})}: & T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)\times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R}\\ & (\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & d\,(\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}})\end{array}$$

tal que, para quaisquer $\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}}\in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, *cumpre os seguintes axiomas:*

1. $d\,(\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}})=0\Leftrightarrow\vec{u}_{\vec{p}}=\vec{v}_{\vec{p}}$;
2. $\vec{u}_{\vec{p}}\neq\vec{v}_{\vec{p}}\Rightarrow d\,(\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}})>0$;
3. $d\,(\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}})=d\,(\vec{v}_{\vec{p}},\vec{u}_{\vec{p}})$;
4. $d\,(\vec{u}_{\vec{p}},\vec{w}_{\vec{p}})\leq d\,(\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}})+d\,(\vec{v}_{\vec{p}},\vec{w}_{\vec{p}})$

é chamada de ***função distância de*** $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$.

Proposição 3.7 *Seja* $\mathscr{A}=\mathscr{A}(\vec{p})$ *uma métrica definida no espaço tangente* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$. *A função*

$$\begin{array}{rccl}d_{\mathscr{A}(\vec{p})}: & T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)\times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R}\\ & (\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & \|\vec{u}_{\vec{p}}-\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}(\vec{p})}\end{array}$$

satisfaz a Definição 3.17 *e é definida como função distância de* $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ *segundo a métrica* $\mathscr{A}(\vec{p})$.

Demonstração:

(i) Temos que $\vec{0}_{\vec{p}}=0.\vec{0}_{\vec{p}}$, sabemos pelo axioma da Definição 3.12 que

$$\left\|0-\vec{0}_{\vec{p}}\right\|=|0|\left\|\vec{0}_{\vec{p}}\right\|=0,$$

logo,

$$d(\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}})_{\mathscr{A}}=\|\vec{u}_{\vec{p}}-\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathscr{A}}=\left\|\vec{0}_{\vec{p}}\right\|_{\mathscr{A}}=0.$$

(ii) Para quaisquer $\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}}\in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, temos que, se $\vec{u}_{\vec{p}}\neq\vec{v}_{\vec{p}}$, então $\vec{u}_{\vec{p}}-\vec{v}_{\vec{p}}\neq\vec{0}_{\vec{p}}$ e, com isso,

$$\langle\vec{u}_{\vec{p}}\ -\ \vec{v}_{\vec{p}},\vec{u}_{\vec{p}}\ -\ \vec{v}_{\vec{p}}\ \rangle_{\mathscr{A}}>0$$

e, portanto,

$$d\,(\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}})_{\mathscr{A}}=\sqrt{\langle\vec{u}_{\vec{p}}\ -\ \vec{v}_{\vec{p}},\vec{u}_{\vec{p}}\ -\ \vec{v}_{\vec{p}}\ \rangle_{\mathscr{A}}>0}.$$

(iii) Para quaisquer $\vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}}\in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ temos que

$$\begin{aligned}\langle\vec{u}_{\vec{p}}\ -\ \vec{v}_{\vec{p}},\vec{u}_{\vec{p}}\ -\ \vec{v}_{\vec{p}}\ \rangle_{\mathscr{A}}&=\langle-(\vec{v}_{\vec{p}}\ -\ \vec{u}_{\vec{p}}),-(\vec{v}_{\vec{p}}\ -\ \vec{u}_{\vec{p}})\ \rangle_{\mathscr{A}}\\&=\langle\vec{v}_{\vec{p}}\ -\ \vec{u}_{\vec{p}},\vec{v}_{\vec{p}}\ -\ \vec{u}_{\vec{p}}\ \rangle_{\mathscr{A}}\end{aligned}$$

daí

$$\sqrt{\langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}} = \sqrt{\langle \vec{v}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}}}$$

e, com isso

$$d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\right)_{\mathscr{A}} = d\left(\vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}}\right)_{\mathscr{A}}.$$

(iv) Agora, aplicando a desigualdade triangular da norma, temos que

$$\begin{aligned} d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}}\right)_{\mathscr{A}} &= \left\|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{w}_{\vec{p}}\right\|_{\mathscr{A}} \\ &= \left\|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}} - \vec{w}_{\vec{p}}\right\|_{\mathscr{A}} \\ &\leq \left\|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\right\|_{\mathscr{A}} + \left\|\vec{v}_{\vec{p}} - \vec{w}_{\vec{p}}\right\|_{\mathscr{A}} \\ &= d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\right)_{\mathscr{A}} + d\left(\vec{v}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}}\right)_{\mathscr{A}}. \end{aligned}$$

■

Com isso temos que toda norma define uma função distância, no entanto a reciproca pode não ser válida, ou seja, existem funções distância que não provém de uma norma como pode ser observado no exemplo a seguir.

Exemplo 3.8 *Considere a métrica discreta sobre o espaço $d : T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\right) = \begin{cases} 0, & se\ \vec{u}_{\vec{p}} = \vec{v}_{\vec{p}} \\ 1, & se\ \vec{u}_{\vec{p}} \neq \vec{v}_{\vec{p}} \end{cases}.$$

Esta é uma função distância em $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, mas não provém de nenhuma norma do espaço tangente, pois, se houvesse uma norma em $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ de tal modo que $d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\right) = \left\|\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\right\|$, teríamos que

$$\left(d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\right)\right)^2 = \langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle - 2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle$$

e

$$\left(d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, -\vec{v}_{\vec{p}}\right)\right)^2 = \langle \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}} \rangle = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle + 2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle$$

o que implicaria em

$$\left(d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\right)\right)^2 + \left(d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, -\vec{v}_{\vec{p}}\right)\right)^2 = 2\left(\left\|\vec{u}_{\vec{p}}\right\|^2 + \left\|\vec{v}_{\vec{p}}\right\|^2\right).$$

e, tomando $\vec{u}_{\vec{p}} = \vec{v}_{\vec{p}} \neq \vec{0}$ teríamos que

$$\left(d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\right)\right)^2 + \left(d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, -\vec{v}_{\vec{p}}\right)\right)^2 = 1 = 4\left\|\vec{u}_{\vec{p}}\right\|^2,$$

e, com isso

$$\left\|\vec{u}_{\vec{p}}\right\|_{\mathscr{A}} = \frac{1}{2},$$

o que é um absurdo.

Exemplo 3.9 *A métrica Euclidiana define a função distância Euclidiana ou canônica, cuja função é dada por*

$$
\begin{aligned}
d\left(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\right) &= \left\|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\right\|_{\mathscr{C}} \\
&= \left\|\left(x_1 - x_2, y_1 - y_2\right)\right\|_{\mathscr{C}} \\
&= \sqrt{\left(x_1 - x_2\right) + \left(y_1 - y_2\right)} \;.
\end{aligned}
$$

4 Teoria das Curvas Planas em uma Métrica Diferenciável

Neste capítulo iniciamos o estudo de curvas do modo como é normalmente feito nos livros de Geometria Diferencial, cuja métrica utilizada para desenvolver os conceitos é a canônica (Euclidiana), no entanto aqui apresentamos sob o ponto de vista das métricas generalizadas. O texto base para o desenvolvimento desse capítulo foi [18], no entanto são utilizadas como referências auxiliares os trabalhos de [3], [19] e [20], sendo que os gráficos foram elaborados em [22].

4.1 Curva Parametrizada Diferenciável

Definição 4.1 *Seja* $\mathscr{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^2$*. Definimos uma curva parametrizada no plano como sendo uma função*

$$\begin{array}{rccl} \vec{\alpha}: & I & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t))^{\mathscr{B}} \end{array}$$

em que $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$*. A imagem dessa função é denotada por* $\vec{\alpha}(I)$ *e é chamada de traço da curva. Cada função* f_i *é denominada de função coordenada da curva, enquanto que a variável* t *é chamada de parâmetro da curva.*

Como os resultados discutidos nessa seção servem para uma base $\mathscr{B}$ qualquer, não mencionaremos a base adotada na notação da curva. Deste modo, denotaremos simplesmente por

$$\begin{array}{rccl} \vec{\alpha}: & I & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}.$$

Entretanto, quando o resultado depender da base adotada, mencionaremos tal base no enunciado do resultado para não sobrecarregar a notação utilizada neste texto.

Definição 4.2 *Uma curva* $\vec{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ *é contínua no ponto* $t_0 \in I$ *se*

$$\lim_{t \to t_0} \vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}(t_0).$$

Diremos que $\vec{\alpha}$ *é contínua no intervalo* $J \subset I$ *se for contínua para todo* $t \in J$*.*

Como $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{\alpha}(t) = \left(\lim\limits_{t \to t_0} x(t), \lim\limits_{t \to t_0} y(t)\right)$, a curva $\vec{\alpha}$ será contínua em t_0 se, e somente se, as funções componentes x e y forem contínuas em t_0. O mesmo acontece em relação à continuidade em um intervalo qualquer.

Definição 4.3 *Se a partir de uma curva $\vec{\alpha}$ for possível definir, para todo $t \in I$, uma função $\vec{\alpha}^j : I \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\vec{\alpha}^j(t) = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{\alpha}(t+\Delta t) - \vec{\alpha}(t)}{\Delta t}, & se\ j = 1, \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{\alpha}^{j-1}(t+\Delta t) - \vec{\alpha}^{j-1}(t)}{\Delta t}, & se\ j > 1, \end{cases}$$

então $\vec{\alpha}$ é chamada de curva diferenciável parametrizada até ordem j, em que o expoente j denota o maior número natural para o qual existem todas as $\vec{\alpha}^k$, com $1 \leq k \leq j$. Quando $\vec{\alpha}$ for diferenciável em todas as ordens será chamada de curva parametrizada infinitamente diferenciável, ou simplesmente, curva diferenciável. Cada $\vec{\alpha}^j$ é chamada de derivada de ordem j. Convencionaremos que $\vec{\alpha}^0(t) = \vec{\alpha}(t)$ e, para $j = 1, 2, 3$ temos $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$, $\vec{\alpha}'''(t)$.

Observação 4.1 (Primeira convenção sobre os domínios das curvas) *Curvas diferenciáveis são de grande interesse para a Geometria Diferencial. E como a diferenciabilidade implica a existência de um limite e este a existência e igualdade dos limites laterais no ponto fica convencionado que, sempre que $\vec{\alpha}$ for uma curva diferenciável, o domínio I é um aberto da reta real.*

Do mesmo modo como definimos a derivada de uma curva (Definição 3.7) definimos a integral de uma função $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$ por

$$\int_a^b \vec{\alpha}(t)dt = \left(\int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt \right).$$

A curva $\vec{\alpha}$ será integrável se suas funções coordenadas forem integráveis.

Proposição 4.1 *Se $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ for uma curva diferenciável até ordem j, então $\vec{\alpha}^{j-1}$ será contínua e*

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\alpha}^{j-1}(t)\right] = \vec{\alpha}^j(t).$$

Demonstração: Do fato de $\vec{\alpha}$ ser uma curva diferenciável até ordem j, segue que $\vec{\alpha}^{j-1}(t)$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\alpha}^{j-1}(t)\right] = \vec{\alpha}^j(t).$$

Agora, $\vec{\alpha}^{j-1}(t)$ é diferenciável no ponto $t_0 \in I$ se, e somente se, existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que se $t_0 + h \in I$ então

$$\vec{\alpha}^{j-1}(t+h) = \vec{\alpha}^{j-1}(t) + \vec{v}h + \vec{\beta}(h),$$

em que $\vec{\beta}(h)$ é uma curva tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \vec{0}.$$

Afirmação: $\vec{v} = \vec{\alpha}^j(t_0)$.
De fato, consideremos $J = \{h \in \mathbb{R} : t_0 + h \in I\}$ e

$$\begin{array}{rccl} \vec{\beta}: & J & \to & \mathbb{R}^2 \\ & h & \mapsto & \vec{\alpha}^{j-1}(t_0+h) - \vec{\alpha}^{j-1}(t_0) - \vec{\alpha}^j(t_0)h \end{array},$$

daí

$$\frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \frac{\vec{\alpha}^{j-1}(t_0+h) - \vec{\alpha}^{j-1}(t_0) - \vec{\alpha}^j(t_0)h}{h} = \frac{\vec{\alpha}^{j-1}(t_0+h) - \vec{\alpha}^{j-1}(t_0)}{h} - \vec{\alpha}^j(t_0)$$

e, daí

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\vec{\alpha}^{j-1}(t_0+h) - \vec{\alpha}^{j-1}(t_0)}{h} - \vec{\alpha}^j(t_0) \right) = \vec{\alpha}^j(t_0) - \vec{\alpha}^j(t_0) = \vec{0}.$$

Por outro lado, se $t_0 + h \in I$ então

$$\vec{\alpha}^{j-1}(t+h) = \vec{\alpha}^{j-1}(t) + \vec{v}h + \vec{\beta}(h),$$

com $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \vec{0}$, então $\vec{\alpha}^{j-1}(t)$ é diferenciável em t_0 e $\vec{v} = \vec{\alpha}^j(t_0)$, pois

$$\vec{0} = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\vec{\alpha}^{j-1}(t_0+h) - \vec{\alpha}^{j-1}(t_0)}{h} \right) - \vec{v} = \vec{\alpha}^j(t_0) - \vec{v}.$$

Com isso temos que $\vec{\alpha}^{j-1}(t)$ é contínua em todo $t_0 \in I$, pois

$$\vec{\alpha}^{j-1}(t_0+h) = \vec{\alpha}^{j-1}(t_0) + \vec{\alpha}^j(t_0)h + \frac{\vec{\beta}(h)}{h}h$$

e, como $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \vec{0}$, segue que

$$\lim_{h\to 0} \vec{\alpha}^{j-1}(t_0+h) = \lim_{h\to 0} \left(\vec{\alpha}^{j-1}(t_0) + \vec{\alpha}^j(t_0)h + \frac{\vec{\beta}(h)}{h}h \right) = \vec{\alpha}^{j-1}(t_0).$$

■

Observação 4.2 *A recíproca desse resultado não é válida. Para verificarmos isso basta tomarmos a curva*

$$\begin{array}{rccl} \vec{\alpha}: & (-1,1) & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, |t|) \end{array}$$

que é contínua em $(-1,1)$*, mas não admite* $\vec{\alpha}'(0)$*.*

Observação 4.3 (Segunda convenção sobre os domínios das curvas) *Outro fator importante sobre as curvas é que seu traço seja um conjunto conexo do plano, para isso é necessário que o domínio da curva seja conexo, além de aberto. Como aqui apenas trabalharemos com curvas contínuas e a imagem de conexos por funções contínuas é conexo [16] - teremos traços conexos. Além disso, todo conexo da reta é um intervalo, assim temos que o domínio* I *da curva será sempre um intervalo aberto.*

Definição 4.4 *Consideremos $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável. Todo ponto $t_0 \in I$ tal que $\vec{\alpha}^j(t_0) = \vec{0}$ é denominado ponto singular de ordem j. Quando não existe ponto singular de ordem j em todo o domínio I, diremos que a curva $\vec{\alpha}$ é regular de ordem j.*

Por exemplo, se não existe t_0 tal que $\vec{\alpha}''(t_0) = \vec{0}$, então $\vec{\alpha}$ é uma curva parametrizada diferenciável regular de ordem 2.

Observação 4.4 *Uma curva parametrizada de classe C^∞ e regular de ordem 1 é chamada somente de curva parametrizada diferenciável regular. Devido à extensão desses três atributos utilizaremos a abreviação parametrizada diferenciável regular.*

Definição 4.5 (Difeomorfismo) *Sejam I e J abertos em $\mathbb{R}$ e $h : I \to J$ uma função bijetora. Diremos que f é um difeomorfismo se h e h^{-1} forem funções diferenciáveis. Além disso, diremos que h é um difeomorfismo de Classe C^∞ se h e h^{-1} forem funções de Classe C^∞.*

Segue diretamente da definição que:

- a composta de difeomorfismos é um difeomorfismo;
- a inversa de difeomorfismos é um difeomorfismo.

Lema 4.1 [1] *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua injetiva definida num intervalo I. Então f é monótona, sua imagem $J = f(I)$ é um intervalo e sua inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Lema 4.2 [2] *Sejam $f : I \to J$ uma bijeção contínua, onde I e J são intervalos, tal que $f^{-1} : J \to I$ é contínua. Se f for derivável em $t_0 \in I$, então f^{-1} será derivável em $f(t_0) = s_0$ se, e somente se, $f'(t_0) \neq 0$. Neste caso*

$$\left(f^{-1}\right)'(s_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(s_0))}.$$

Definição 4.6 *Sejam I e J intervalos abertos de $\mathbb{R}$, $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, $h : J \to I$ um difeomorfismo, com $h'(s) \neq 0$, para todo $s \in J$. Definimos uma reparametrização de $\vec{\alpha}$ por h a curva*

$$\begin{array}{rccl} \vec{\beta}: & J & \to & \mathbb{R}^2 \\ & s & \mapsto & \vec{\beta}(s) = (\vec{\alpha} \circ h)(s) = \vec{\alpha}(h(s)) \end{array}.$$

A função h é chamada de função mudança de parâmetro.

[1] Demonstração em [21], página 237.

[2] Demonstração em [21], página 263.

Proposição 4.2 *Sejam I e J intervalos abertos de $\mathbb{R}$, $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, $h : J \to I$ um difeomorfismo, com $h'(s) \neq 0$, para todo $s \in J$, e $\vec{\beta} = (\vec{\alpha} \circ h)$ a reparametrização de $\vec{\alpha}$ por h. Então:*

1. $\vec{\alpha}(I) = \vec{\beta}(J)$;

2. ***(Regra da Cadeia para Curvas)*** *Se a curva $\vec{\alpha}$ for diferenciável, então $\vec{\beta}$ será diferenciável e sua função derivada de ordem 1 será dada por*

$$\begin{array}{rccl} \vec{\beta}' : & J & \to & \mathbb{R}^2 \\ & s & \mapsto & \vec{\beta}'(s) = \vec{\alpha}'\left(h(s)\right) h'(s) \end{array}$$

e, se $\vec{\alpha}$ for uma curva parametrizada diferenciável regular então $\vec{\beta}$ também será uma curva parametrizada diferenciável regular.

3. *É possível escrever $\vec{\alpha}$ como reparametrização de $\vec{\beta}$ por $h^{-1} : I \to J$.*

Demonstração:

(i) Como $h : I \to J$ é um difeomorfismo, temos que $h^{-1}(J) = I$ e, com isso,

$$\vec{\alpha}(I) = \vec{\beta}(J) = \left(\vec{\alpha} \circ h\right)(J) = \vec{\alpha}\left(h(J)\right) = \vec{\alpha}\left(h\left(h^{-1}(I)\right)\right) = \vec{\alpha}(I).$$

(ii) Como $\vec{\beta} = (\vec{\alpha} \circ h)$ segue que

$$\begin{aligned} \vec{\beta}'(s) &= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{\beta}(s + \Delta s) - \vec{\beta}(s)}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left(\vec{\alpha} \circ h\right)(s + \Delta s) - \left(\vec{\alpha} \circ h\right)(s)}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{\alpha}\left(h(s + \Delta s)\right) - \vec{\alpha}\left(h(s)\right)}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{\alpha}\left(h(s + \Delta s)\right) - \vec{\alpha}\left(h(s)\right)}{h(s + \Delta s) - h(s)} \cdot \frac{h(s + \Delta s) - h(s)}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{\alpha}\left(h(s + \Delta s)\right) - \vec{\alpha}\left(h(s)\right)}{h(s + \Delta s) - h(s)} \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{h(s + \Delta s) - h(s)}{\Delta s} \\ &= \vec{\alpha}'\left(h(s)\right) \cdot h'(s). \end{aligned}$$

Deste modo, se $\vec{\alpha}$ for uma curva parametrizada diferenciável regular então $\vec{\beta}$ também será uma curva parametrizada diferenciável regular.

(iii) Segue diretamente do Lema 4.1. ■

Definição 4.7 *Consideremos $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada. A orientação de $\vec{\alpha}$ é o sentido de percurso dos pontos de $\vec{\alpha}(I)$.*

Definição 4.8 *Consideremos $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada e seja $\vec{\beta}$ uma reparametrização de $\vec{\alpha}$ por h. Diremos que $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ têm a mesma orientação se a função mudança de parâmetro h for estritamente crescente e diremos que têm orientação contrária se a função mudança de parâmetro h for estritamente decrescente.*

Definição 4.9 *Consideremos $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada. Definimos um campo de vetores tangentes sobre $\vec{\alpha}(I)$ como sendo uma função da forma $\vec{\gamma} : I \to T_{\alpha(\vec{t})}(\mathbb{R}^2)$. Isto significa que, para cada $t \in I$ o vetor $\vec{\gamma}(t)$ está aplicado no ponto $\vec{\alpha}(t)$ e é escrito como $\vec{\gamma}_{\alpha(\vec{t})}$.*

Os conceitos de campo de vetores diferenciável e campo de vetores contínuo são os mesmos que os elaborados para curvas parametrizadas nas Definições 4.2 e 4.3.

Observação 4.5 *Na Definição 3.7 foi discutido que as funções entrada de uma métrica são diferenciáveis. Como a composição destas com uma curva diferenciável $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ produz uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ diferenciável, temos que cada função componente $a_{ij} \circ \vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Até esse momento, todos os conceitos citados independeram da métrica adotada. O próximo resultado é o primeiro que dependerá disso.

Proposição 4.3 *Consideremos $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada. Suponhamos que $\vec{\gamma} : I \to T_{\alpha(\vec{t})}(\mathbb{R}^2)$ e $\vec{\lambda} : I \to T_{\alpha(\vec{t})}(\mathbb{R}^2)$ sejam campos de vetores tangentes contínuos (ou, diferenciáveis) não-nulos sobre uma curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ e que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica diferenciável definida no espaço vetorial $T_{\alpha(\vec{t})}(\mathbb{R}^2)$. Então as funções*

$$\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} \qquad e \qquad \|\vec{\gamma}(t)\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}$$

são contínuas (diferenciáveis).

Demonstração: Como a função matricial $\mathscr{A}(\vec{p})$ tem funções entrada contínuas e os campos $\vec{\gamma}(t)_{\alpha(t)} = (f(t), g(t))$ e $\vec{\lambda}(t)_{\alpha(t)} = (u(t), v(t))$ têm suas funções coordenadas contínuas (diferenciáveis), considerando

$$\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t)) = \begin{bmatrix} a(\vec{\alpha}(t)) & b(\vec{\alpha}(t)) \\ b(\vec{\alpha}(t)) & c(\vec{\alpha}(t)) \end{bmatrix}$$

que, para simplificarmos a notação escreveremos

$$\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t)) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} &= \begin{bmatrix} f(t) & g(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f(t) & g(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a(t)u(t) + b(t)v(t) \\ b(t)u(t) + c(t)v(t) \end{bmatrix} \\
&= a(t)f(t)u(t) + b(t)f(t)v(t) + b(t)g(t)u(t) + c(t)g(t)v(t) \\
&= a(t)f(t)u(t) + b(t)\left[f(t)v(t) + g(t)u(t)\right] + c(t)g(t)v(t)
\end{aligned}$$

ou seja, obtemos a função

$$\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} = a(t)f(t)u(t) + b(t)\left[f(t)v(t) + g(t)u(t)\right] + c(t)g(t)v(t)$$

que, por tratar-se de produto e soma de funções contínuas (diferenciáveis) também é contínua (diferenciável).

Pelo item anterior temos que

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} &= a(t)f(t)f(t) + b(t)\left[f(t)g(t) + g(t)f(t)\right] + c(t)g(t)g(t) \\
&= a(t)f^2(t) + 2b(t)f(t)g(t) + c(t)g^2(t)
\end{aligned}$$

é contínua (diferenciável) e, como a função

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{\ } : (0, +\infty) & \to & \mathbb{R}_+ \\
t & \mapsto & \sqrt{t}
\end{array}$$

é contínua (diferenciável), e composição de funções contínuas (diferenciáveis) também é contínua (diferenciável), o resultado segue. ■

Definição 4.10 *Consideremos $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável regular, com I sendo aberto e conexo. Definimos um arco de $\vec{\alpha}$ como sendo a imagem por $\vec{\alpha}$ de um subconjunto conexo $J \subset I$.*

Observemos que a definição faz com que um arco seja um conjunto conexo de pontos do plano.

Definição 4.11 *Suponhamos que $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva de classe C^1 e regular de primeira ordem. Suponhamos ainda que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma função diferencial tal que $\mathscr{A}\Big|_{\vec{\alpha}(I)} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, ou seja, $\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))$ define um produto interno em $T_{\alpha(\vec{t})}(\mathbb{R}^2)$. O comprimento de arco de $\vec{\alpha}(I)$, medindo de a até b, com $a, b \in I$ e $a \leq b$, segundo a métrica $\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))$ por*

$$L = \int_a^b \left\| \vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)} \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} dt.$$

A função dada por

$$\begin{array}{rccl} s: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\int_a^t \left\|\vec{\alpha}'(\xi)_{\vec{\alpha}(\xi)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi \end{array}$$

é chamada função de comprimento de arco de $\vec{\alpha}$ segundo a métrica $\mathscr{A}$. O número

$$s(b) = \int_a^b \left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} dt$$

é chamado de comprimento total de arco de $\vec{\alpha}$ em $[a,b]$.

Observemos que, como é exigido a conexidade em I o torna um intervalo. Assim, dados $a, b \in I$, temos que $[a,b] \subset I$ e o respectivo arco de $\vec{\alpha}$ por $[a,b]$ será um subconjunto conexo do traço $\vec{\alpha}(I)$, de extremos $\vec{\alpha}(a)$ e $\vec{\alpha}(b)$, para o qual calculará o comprimento de L.

Agora, consideremos $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ números reais e definamos $A = (a_1, a_2)$ e (b_1, b_2). Consideremos $I = A \cup B$ e $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua. Como A e B são disjuntos, o traço de $\vec{\alpha}$ é a união de dois traços disjuntos, $\vec{\alpha}(I) = \vec{\alpha}(A) \cup \vec{\alpha}(B)$, e, assim, seu traço não é conexo.

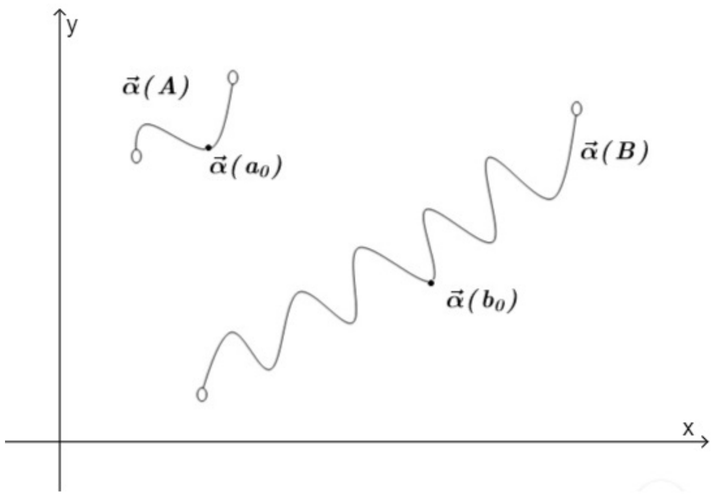

Figura 6 – Traço desconexo de uma curva contínua

Tomando $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$, teremos que $[a_0, b_0] \notin I$, logo não é possível calcular o comprimento de a_0 até b_0, ou seja,

$$\int_{a_0}^{b_0} \left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} dt \ .$$

Proposição 4.4 *Suponhamos que $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva de classe C^1 e regular de primeira ordem e que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma função diferencial tal que $\mathscr{A}\Big|_{\vec{\alpha}(I)} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$. Então, fixada a métrica, o comprimento de arco total é invariante sob reparametrizações.*

Demonstração: Suponhamos que I e J sejam intervalos abertos da reta e seja $h : J \to I$ um difeomorfismo. Consideremos a reparametrização $\vec{\beta}$ de $\vec{\alpha}$ por h e tomemos $a, b \in I$. Agora, usando a regra da cadeia, Proposição 4.2 (2), temos que

$$\vec{\beta}'(t) = \vec{\alpha}'(h(s))h'(s).$$

Dividiremos a prova em dois casos: primeiro supomos que ambas as parametrizações têm a mesma orientação e depois que têm orientações contrárias. Suponhamos que $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ tenham a mesma orientação, ou seja, que $h(s)$ é crescente e que $h'(s) > 0$, para todo $s \in J$. Assim, quando consideramos

$$\mathscr{A}\left(\vec{\beta}(s)\right) = \mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(h(s))\right) = \mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(t)\right),$$

temos que

$$\left\|\vec{\beta}'(s)\right\|_{\mathscr{A}\left(\vec{\beta}(s)\right)} = \left\|\vec{\alpha}'(h(s))h'(s)\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} = h'(s)\left\|\vec{\alpha}'(h(s))\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}.$$

E, como h é um difeomorfismo, existem $u, v \in I$ tais que $h(u) = a$ e $h(v) = b$, além disso, pelo fato de h ser crescente, temos que $h(u) = a \leq b = h(v)$ nos leva a $u \leq v$. Assim, usando o Teorema de Mudança de Variável na Integral [21], página 326, segue que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} dt &= \int_{h(u)}^{h(v)} \left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} dt \\
&= \int_u^v h'(s)\left\|\vec{\alpha}'(h'(s))_{\vec{\alpha}(h(s))}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(h'(s)))} ds \\
&= \int_u^v \left\|\vec{\beta}'(s)_{\vec{\beta}(s)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\beta}(s))} ds\ .
\end{aligned}$$

Suponhamos que $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ tenham orientação contrária, ou seja, que $h(s)$ é decrescente e que $h'(s) < 0$, para todo $s \in J$. Assim, quando consideramos

$$\mathscr{A}\left(\vec{\beta}(s)\right) = \mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(h(s))\right) = \mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(t)\right),$$

temos que

$$\left\|\vec{\beta}'(s)\right\|_{\mathscr{A}\left(\vec{\beta}(s)\right)} = \left\|\vec{\alpha}'(h(s))h'(s)\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} = -h'(s)\left\|\vec{\alpha}'(h(s))\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}.$$

E, como h é um difeomorfismo, existem $u, v \in I$ tais que $h(u) = a$ e $h(v) = b$, além disso, pelo fato de h ser decrescente, temos que $h(u) = a \leq b = h(v)$ nos leva a $v \leq u$. Assim, usando o Teorema de Mudança de Variável na Integral, segue que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} dt &= \int_{h(u)}^{h(v)} \left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} dt \\
&= \int_u^v -h'(s)\left\|\vec{\alpha}'(h'(s))_{\vec{\alpha}(h(s))}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(h'(s)))} ds \\
&= \int_v^u \left\|\vec{\beta}'(s)_{\vec{\beta}(s)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\beta}(s))} ds\ .
\end{aligned}$$

E o nosso resultado está provado. ∎

Exemplo 4.1 *Sejam* $u = (x_1, y_1)$ *e* $v = (x_2, y_2)$ *vetores em* $\mathbb{R}^2$*, com o produto interno*

$$\langle\ (x_1, y_1)\ ,\ (x_2, y_2)\ \rangle_{\mathscr{A}} = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$$

a curva parametrizada diferenciável regular dada por

$$\begin{array}{rccl} \vec{\alpha}: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \vec{\alpha}(s) = \left(\dfrac{t}{\sqrt{14}}, \dfrac{2t}{\sqrt{14}}\right) \end{array}$$

é tal que $\vec{\alpha'}(s) = \left(\dfrac{t}{\sqrt{14}}, \dfrac{2t}{\sqrt{14}}\right)$ *tem norma*

$$\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathscr{A}} = \sqrt{\frac{2}{14} + 3\frac{4}{14}} = 1.$$

Para um $t_0 < t_1$*, ambos* I*, a curva tem comprimento dado por*

$$L_{\vec{\alpha}} = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathscr{A}}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0.$$

Tomando, por exemplo,

$$\begin{array}{rccl} \vec{h}: & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & h(t) = t\sqrt{14}\ , \end{array}$$

a reparametrização de $\vec{\alpha}(t)$ *por* $h(t)$ *fica*

$$\begin{array}{rccl} \vec{\beta}: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \vec{\beta}(t) = (t, 2t)\ . \end{array}$$

Os extremos de integração recalculados para a curva $\vec{\beta}(t)$ *são* $\dfrac{t_0}{\sqrt{14}}$ *e* $\dfrac{t_1}{\sqrt{14}}$*, assim*

$$h\left(\frac{t_0}{\sqrt{14}}\right) = t_0 \quad e \quad h\left(\frac{t_1}{\sqrt{14}}\right) = t_1\ .$$

Se $\vec{\beta}'(t) = (1, 2)$ *então*

$$\left\|\vec{\beta}'(t)\right\|_{\mathscr{A}} = \sqrt{2.1.1 + 3.2.2} = \sqrt{14}$$

e com isso, teremos

$$L_{\vec{\beta}} = \int_{\frac{t_0}{\sqrt{14}}}^{\frac{t_1}{\sqrt{14}}} \left\|\vec{\beta}'(t)\right\|_{\mathscr{A}} dt = \sqrt{14}\int_{\frac{t_0}{\sqrt{14}}}^{\frac{t_1}{\sqrt{14}}} dt = \sqrt{14} \cdot \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{14}} = L_{\vec{\alpha}}\ .$$

Definição 4.12 *Diremos que a curva* $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^2$ *está parametrizada pelo comprimento de arco segundo a métrica* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))$*, ou simplesmente, está parametrizada pelo comprimento de arco segundo* $\mathscr{A}$*, se*

$$\int_a^b \left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} dt = b - a,$$

para todo $[a, b] \subset I$*.*

Proposição 4.5 *Suponhamos que $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva de classe C^1 e regular de primeira ordem, que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma função diferencial tal que $\mathscr{A}\Big|_{\vec{\alpha}(I)} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$. A curva $\vec{\alpha}$ está parametrizada pelo comprimento de arco segundo a métrica $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))$ se, e somente se, para todo $t \in I$ tivermos que*

$$\left\| \vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)} \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} = 1.$$

Demonstração: Suponhamos que $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva de classe C^1 e regular de primeira ordem, que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma função diferencial tal que $\mathscr{A}\Big|_{\vec{\alpha}(I)} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$.
($\Rightarrow$) Suponhamos que a curva curva $\vec{\alpha}$ está parametrizada pelo comprimento de arco segundo a métrica $\mathscr{A}$ e consideremos a função

$$\begin{array}{rccl} s: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\int_a^t \left\| \vec{\alpha}'(\xi)_{\vec{\alpha}(\xi)} \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi \ . \end{array}$$

Como $a \leq t$, temos que, $s(t) = t - a$. Agora, como $\vec{\alpha}$ é parametrizada diferenciável regular e $\mathscr{A}$ é uma métrica diferenciável, segue pela Proposição 4.3, com $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}'$ que

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|: & I & \to & \mathbb{R}_+ \\ & t & \mapsto & \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} \end{array}$$

é contínua. Além disso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que $s(t)$ é diferenciável e

$$s'(t) = \left\| \vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)} \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))},$$

mas $s(t) = t - a$, daí $s'(t) = 1$ e, com isso, temos que

$$\left\| \vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)} \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} = 1.$$

($\Leftarrow$) Se $\left\| \vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)} \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} = 1$, então

$$\int_a^b \left\| \vec{\alpha}'(\xi)_{\vec{\alpha}(\xi)} \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi = \int_a^b d\xi = b - a$$

e, portanto a curva $\vec{\alpha}$ está parametrizada pelo comprimento de arco segundo $\mathscr{A}$. ■

Exemplo 4.2 *A curva*

$$\begin{array}{rccl} \vec{\alpha}: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \vec{\alpha}(s) = \left(\dfrac{t}{\sqrt{14}}, \dfrac{2t}{\sqrt{14}} \right) \end{array}$$

do Exemplo 4.1 está parametrizada pelo comprimento de arco segundo a sua métrica $\mathscr{A}$, como foi possível ver pelo cálculo da norma de seu vetor derivada primeira. Porém, a curva

$$\begin{array}{rccl} \vec{\beta}: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \vec{\beta}(t) = (t, 2t) \ . \end{array}$$

do mesmo exemplo, não está parametrizada pelo comprimento de arco.

Exemplo 4.3 *Sejam* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^*_+$, $I = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ *e*

$$\begin{array}{rccl} \vec{\alpha}: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & s & \mapsto & \vec{\alpha}(s) = \left(c_1 + c_2 cos\dfrac{s}{c_2}, c_3 + c_2 sen\dfrac{s}{c_2} \right) \end{array} .$$

Segundo a métrica canônica, esta curva está parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\vec{\alpha}'(s) = \left(-sen\frac{s}{c_2}, cos\frac{s}{c_2} \right) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(s)\|_{\mathscr{C}} = \sqrt{sen^2\frac{s}{c_2} + cos^2\frac{s}{c_2}} = 1.$$

Uma curva pode estar parametrizada pelo comprimento de arco em uma métrica, mas não estar em outra. O que vem a acontecer neste caso. De fato, escolhemos adequadamente c_1, c_2 *e* c_3, *o traço de* $\vec{\alpha}$ *fica no conjunto* $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$, *e faz com que a função matricial*

$$\mathscr{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{y} \end{bmatrix},$$

com $\vec{p} = (x, y) \in \vec{\alpha}(I)$, *defina um produto interno em cada* $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$, *essa métrica é dada por*

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})}: & T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & [\vec{u}_{\vec{p}}]\, \mathscr{A}(\vec{p})\, [\vec{v}_{\vec{p}}]^T \end{array} .$$

Segundo este produto interno, a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco. Com efeito,

$$\|\vec{\alpha}'(s)\|_{\mathscr{A}(\alpha)(s)} = \sqrt{\frac{sen^2\dfrac{s}{c_2} + cos^2\dfrac{s}{c_2}}{c_3 + c_2 sen\dfrac{s}{c_2}}} \neq 1$$

para todo $s \in I$.

Proposição 4.6 (Reparametrização pelo comprimento de arco) *Toda curva parametrizada diferenciável regular* $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ *admite uma reparametrização*

$$\begin{array}{rccl} \vec{\beta}: & J & \to & \mathbb{R}^2 \\ & s & \mapsto & \vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}\,(h(s)) \end{array}$$

de tal modo que $\vec{\beta}$ *é parametrizada pelo comprimento de arco segundo a métrica* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))$.

Demonstração: Suponhamos que $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva parametrizada diferenciável regular e consideremos a função

$$\begin{array}{rccl} s: & [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\int_a^t \left\|\vec{\alpha}'(\xi)_{\vec{\alpha}(\xi)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi \end{array} .$$

Notemos que,

$$s'(t) = \left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}.$$

Consideremos agora $J = s([a,b])$. Como $\vec{\alpha}$ é regular, temos que $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in I$, e, como $s'(t) > 0$, para todo $t \in I$, segue que s é uma função estritamente crescente. Portanto s é bijetora e admite inversa diferenciável. Seja $r : J \to I$ a inversa de s. Então, pelos Lemas 4.1 e 4.2, segue que

$$r'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}} > 0$$

ou seja, r é estritamente crescente. Deste modo, podemos considerar a reparametrização de $\vec{\alpha}$ por r em segundo $\mathscr{A}$, isto é,

$$\begin{array}{rccl} \vec{\beta}: & J & \to & \mathbb{R}^2 \\ & s & \mapsto & \vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}\left(r(s)\right) \end{array}.$$

Além disso, pela Proposição 4.2 (1), temos que

$$\vec{\alpha}\left([a,b]\right)\vec{\beta}(J),$$

e, como r é estritamente crescente, temos que $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ têm a mesma orientação. Além disso, ainda pela Proposição 4.2 (2), temos que

$$\vec{\beta}'(s) = \vec{\alpha}'(r(s))r'(s) = \vec{\alpha}'(t)\frac{1}{\left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}}$$

daí, lembrando que $r(s) = t$, temos que

$$\begin{aligned} \left\|\vec{\beta}'(s)\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\beta}(s))} &= \left\|\vec{\alpha}'(t)\frac{1}{\left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\beta}(s))} \\ &= \frac{\left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\beta}(s))}}{\left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}} \\ &= \frac{\left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(r(s)))}}{\left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}} \\ &= \frac{\left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}}{\left\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

e, pela Proposição 4.5, segue que $\vec{\beta}(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco segundo $\mathscr{A}$. ■

Exemplo 4.4 *Consideremos a curva* $\vec{\alpha} : (0; +\infty) \to \mathbb{R}^2$, *dada por*

$$\vec{\alpha}(t) = \left(\frac{2}{5}t^{5/2}, t^2\right)$$

cujo traço está contido no plano de Lobatchevski, ou seja, no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ *e é mostrado na Figura 7.*

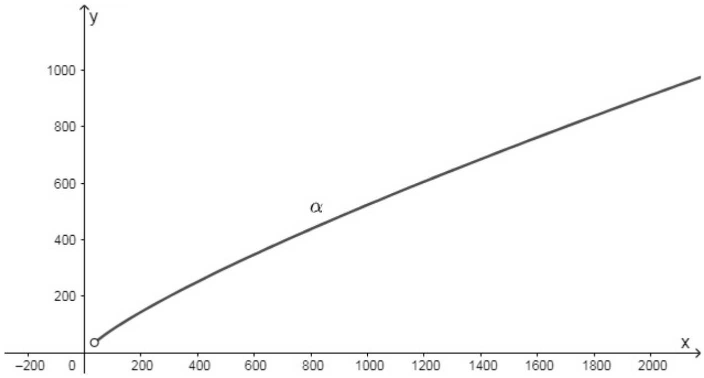

Figura 7 – Traço da curva $\vec{\alpha}(t)$

Consideremos o plano de Lobatchevski munido com a Geometria de Lobatchevski

$$\mathscr{A}\,(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix}$$

cujo produto interno é dado por

$$\begin{array}{rccl} \langle\ ,\ \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} : & T_{\vec{p}}\,(\mathbb{R}^2) \times T_{\vec{p}}\,(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{y} \end{array} .$$

Notemos que

$$\vec{\alpha}'(t) = \left(t^{5/2}, 2t\right)$$

daí

$$\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathscr{A}\vec{\alpha}(t)} = \sqrt{\frac{t^5 + 4t^2}{t^2}} = \sqrt{t+4} \neq 1$$

para todo $t \in (0, +\infty)$. *Daí, a função comprimento de arco* $s : I \to \mathbb{R}_+$ *é dada por*

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{\alpha}'(\xi)\|_{\mathscr{A}\vec{\alpha}(\xi)}\, d\xi = \int_0^t \sqrt{t+4}d\xi = \frac{2}{3}(t+4)^{3/2} - \frac{20}{3}\sqrt{10}\ .$$

Note que

$$s(6) = 0 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} s(t) = +\infty$$

e, como a função comprimento de arco é uma função estritamente crescente, segue que $s([6, +\infty)) = [0, +\infty)$. *Como precisamos de um aberto convexo, tomamos* $J = (0, +\infty)$, *também temos que o domínio é* $[6-\varepsilon,+\infty)$. *Com isso, temos que a função inversa do comprimento de arco, aqui designada* r, *é dada por*

$$\begin{array}{rccl} r: & J & \to & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & \left(\frac{3}{2}s+10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}}-4\ . \end{array}$$

Logo a reparametrização procurada é $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\circ r$, *dada por*

$$\vec{\gamma}(s)=\left(\frac{2}{5}\left(\left(\frac{3}{2}s+10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}}-4\right)^{5/2},\left(\left(\frac{3}{2}s+10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}}-4\right)^{2}\right)$$

e, com isso, temos que o vetor tangente unitário é dado por

$$\vec{\gamma}'(s)=\left(\frac{\left(\left(\frac{3}{2}s+10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}}-4\right)^{3/2}}{\left(\frac{3}{2}s+10\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{3}}},\frac{2\left(\left(\frac{3}{2}s+10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}}-4\right)}{\left(\frac{3}{2}s+10\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Observe que este campo de vetores é tal que

$$\|\vec{\gamma}'(s)\|_{\mathscr{A}(\vec{\gamma}(s))}=1.$$

4.2 A Derivada Covariante

Normalmente, quando se trabalha com a métrica Euclidiana em Geometria Diferencial temos que toda curva parametrizada pelo comprimento de arco $\vec{\lambda}:I\to\mathbb{R}^2$ é tal que $\vec{\lambda}'(s)\perp\vec{\lambda}''(s)$, pois

$$\begin{aligned} \left\|\vec{\lambda}'(s)\right\|_{\mathscr{C}}=1 \ &\Rightarrow \left\langle\vec{\lambda}'(s),\vec{\lambda}'(s)\right\rangle_{\mathscr{C}}=1 \\ &\Rightarrow \frac{d}{ds}\left[\left\langle\vec{\lambda}'(s),\vec{\lambda}'(s)\right\rangle_{\mathscr{C}}\right]=\frac{d}{ds}[1] \\ &\Rightarrow \left\langle\vec{\lambda}'(s),\vec{\lambda}''(s)\right\rangle_{\mathscr{C}}+\left\langle\vec{\lambda}''(s),\vec{\lambda}'(s)\right\rangle_{\mathscr{C}}=0 \end{aligned}$$

e, portanto

$$\left\langle\vec{\lambda}'(s),\vec{\lambda}''(s)\right\rangle_{\mathscr{C}}=0 \tag{4.1}$$

e esta é a condição necessária e suficiente para o perpendicularismo destes vetores e isso ocorre com todas as curvas parametrizada pelo comprimento de arco que tem $\left\|\vec{\lambda}'(s)\right\|_{\mathscr{C}}=1$, para todo $s\in I$. Entretanto, ao se tentar fazer o mesmo para uma métrica geral não constante isso pode não ocorrer.
De fato, tomando a métrica

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}(\vec{p})=\begin{bmatrix} a(\vec{p}) & b(\vec{p}) \\ b(\vec{p}) & c(\vec{p}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

uma função matricial tal que restrita aos pontos da curva parametrizada diferenciável regular $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ define um produto interno em cada $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$, dado por

$$\begin{aligned}\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= a x_1 x_2 + b\,(y_1 x_2 + x_1 y_2) + c y_1 y_2\end{aligned}$$

e consideremos os campos de vetores tangentes $\vec{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ e $\vec{\lambda} : I \to \mathbb{R}^2$, dados por

$$\vec{\gamma}(t) = (f_1(t), g_1(t)) \qquad \text{e} \qquad \vec{\lambda}(t) = (f_2(t), g_2(t)).$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}\right] &= \frac{d}{dt}\left[a f_1 f_2 + b\,(g_1 f_2 + f_1 g_2) + c g_1 g_2\right] \\ &= a' f_1 f_2 + b'\,(g_1 f_2 + f_1 g_2) + c' g_1 g_2 + a\,(f_1' f_2 + f_1 f_2') + \\ &\quad + b\,(g_1' f_2 + g_1 f_2' + f_1' g_2 + f_1 g_2') + c\,(g_1' g_2 + g_1 g_2') \\ &= (a' f_1 f_2 + b'\,(g_1 f_2 + f_1 g_2) + c' g_1 g_2) + \\ &\quad + (a f_1' f_2 + b\,(g_1' f_2 + g_1 f_2') + c g_1' g_2) + \\ &\quad + (a f_1 f_2' + b\,(f_1' g_2 + f_1 g_2') + c g_1 g_2') \\ &= \begin{bmatrix} f_1 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1' & g_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ g_2 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} f_1 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2' \\ g_2' \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}\right] &= [\vec{\gamma}(t)] \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} \cdot \left[\vec{\lambda}'(t)\right]^T + \\ &\quad + [\vec{\gamma}'(t)] \cdot \mathscr{A} \cdot \left[\vec{\lambda}(t)\right]^T + [\vec{\gamma}(t)] \cdot \mathscr{A} \cdot \left[\vec{\lambda}'(t)\right]^T.\end{aligned} \tag{4.2}$$

A primeira parcela desta igualdade nos impede de concluir o mesmo resultado da Equação (4.1), ou seja, não podemos concluir o perpendicularismo destes campos de vetores.

Observação 4.6 *Consideremos* $Y \subset \mathbb{R}^2$. *Consideremos a função matricial* $\mathscr{A} : Y \to M_2(\mathbb{R})$, *dada por*

$$\mathscr{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\vec{p}) & a_{12}(\vec{p}) \\ a_{21}(\vec{p}) & a_{22}(\vec{p}) \end{bmatrix}$$

tal que sua restrição aos pontos do traço da curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$, *determina uma métrica em cada* $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$. *A matriz obtida por*

$$\frac{d}{dt}\left[\mathscr{A}\,(\vec{\alpha}(t))\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dt}\left[a\,(\vec{\alpha}(t))\right] & \dfrac{d}{dt}\left[b\,(\vec{\alpha}(t))\right] \\ \dfrac{d}{dt}\left[b\,(\vec{\alpha}(t))\right] & \dfrac{d}{dt}\left[c\,(\vec{\alpha}(t))\right] \end{bmatrix}$$

nem sempre determina um produto interno. Por exemplo, ao considerarmos $X = \{(x,y) : x > 0\}$ e tomarmos $\mathscr{A} : X \to M_2(\mathbb{R})$, dada por

$$\mathscr{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e a curva $\vec{\alpha} : \mathbb{R}_+^* \to X$ dada por

$$\vec{\alpha}(t) = (t^2, t)$$

teremos que

$$\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t)) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e, consequentemente

$$\frac{d}{dt}\left[\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))\right] = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{t^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que não é uma matriz positiva definida e, portanto, não define um produto interno.

Assim, se a curva $\vec{\alpha}(t)$ está parametrizada pelo comprimento de arco e a métrica adotada sobre os pontos de $\vec{\alpha}$ não for constante, então não é possível concluirmos que os campos de vetores $\vec{\alpha}'_{\vec{\alpha}}$ e $\vec{\alpha}''_{\vec{\alpha}}$ são perpendiculares e essa relação é fundamental para a construção do Referencial de Frenet que veremos mais à frente.

Assim, precisamos que a relação apresentada na Equação (4.2) o termo

$$[\vec{\gamma}(t)] \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} \cdot \left[\vec{\lambda}'(t)\right]^T$$

esteja dentro da soma

$$[\vec{\gamma}'(t)] \cdot \mathscr{A} \cdot \left[\vec{\lambda}(t)\right]^T + [\vec{\gamma}(t)] \cdot \mathscr{A} \cdot \left[\vec{\lambda}'(t)\right]^T.$$

E, com isso, temos a necessidade de uma nova ideia de derivada de uma função vetorial, pois a usual do Cálculo Diferencial e Integral não satisfaz esse quesito. Mas como faremos isso? Primeiramente, consideremos

$$D\vec{\gamma}(t) = (v_1(t), v_2(t)) \qquad \text{e} \qquad D\vec{\lambda}(t) = (w_1(t), w_2(t)).$$

Queremos que o novo conceito de derivada seja de tal forma que os campos de vetores $\vec{\gamma}$ e $\vec{\lambda}$ sejam tais que

$$\frac{d}{dt}\left[\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}\right] = \left\langle D\vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} + \left\langle \vec{\gamma}(t), D\vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}. \tag{4.3}$$

Para que consigamos isso, vamos analisar ambos os lados da igualdade 4.3. Primeiramente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\left\langle\vec{\gamma}(t),\vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}\right] &= \frac{d}{dt}\left[af_1f_2+b\left(g_1f_2+f_1g_2\right)+cg_1g_2\right]\\
&= a'f_1f_2+af_1'f_2+af_1f_2'+b'\left(g_1f_2+f_1g_2\right)+b\left(g_1'f_2+g_1f_2'\right)+\\
&\quad +b\left(f_1'g_2+f_1g_2'\right)+c'g_1g_2+cg_1'g_2+cg_1g_2'
\end{aligned}$$

e, com isso,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\left\langle\vec{\gamma}(t),\vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}\right] &= g_1\left(\frac{a'f_1}{2}+af_1'+\frac{b'f_2}{2}+bf_2'\right)+\\
&\quad +g_2\left(\frac{b'f_1}{2}+bf_1'+\frac{c'f_2}{2}+cf_2'\right)+\\
&\quad +f_1\left(\frac{a'g_1}{2}+ag_1'+\frac{b'g_2}{2}+bg_2'\right)+\\
&\quad +f_2\left(\frac{b'g_1}{2}+bg_1'+\frac{c'g_2}{2}+cg_2'\right).
\end{aligned}\tag{4.4}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle D\vec{\gamma}(t),\vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2\end{bmatrix}\cdot\left[\mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(t)\right)\right]\cdot\begin{bmatrix} g_1 & g_2\end{bmatrix}^T\\
&= ag_1w_1+bg_2w_1+bg_1w_2+cg_2w_2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{\gamma}(t),D\vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2\end{bmatrix}\cdot\left[\mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(t)\right)\right]\cdot\begin{bmatrix} v_1 & v_2\end{bmatrix}^T\\
&= af_1v_1+bf_2v_1+bf_1v_2+cf_2v_2
\end{aligned}$$

que nos dá

$$\begin{aligned}
&\left\langle D\vec{\gamma}(t),\vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}+\left\langle \vec{\gamma}(t),D\vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}\\
&= ag_1w_1+bg_2w_1+bg_1w_2+cg_2w_2+af_1v_1+bf_2v_1+bf_1v_2+cf_2v_2.
\end{aligned}\tag{4.5}$$

Para que consigamos ter

$$\frac{d}{dt}\left[\left\langle\vec{\gamma}(t),\vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}\right]=\left\langle D\vec{\gamma}(t),\vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}+\left\langle \vec{\gamma}(t),D\vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}$$

devemos igualar as Equações (4.4) e (4.5), assim

$$\begin{aligned}
&g_1\left(\frac{a'f_1}{2}+af_1'+\frac{b'f_2}{2}+bf_2'\right)+g_2\left(\frac{b'f_1}{2}+bf_1'+\frac{c'f_2}{2}+cf_2'\right)+\\
&+f_1\left(\frac{a'g_1}{2}+ag_1'+\frac{b'g_2}{2}+bg_2'\right)+f_2\left(\frac{b'g_1}{2}+bg_1'+\frac{c'g_2}{2}+cg_2'\right)=\\
&= ag_1w_1+bg_2w_1+bg_1w_2+cg_2w_2+af_1v_1+bf_2v_1+bf_1v_2+cf_2v_2
\end{aligned}$$

que nos leva ao seguinte sistema

$$\mathfrak{G} = \begin{cases} aw_1 + bw_2 = \dfrac{a'f_1}{2} + af_1' + \dfrac{b'f_2}{2} + bf_2' \Rightarrow \begin{cases} w_1 = f_1' + \dfrac{a'f_1}{2a} \\ w_2 = f_2' + \dfrac{b'f_2}{2b} \end{cases} \\ bw_1 + cw_2 = \dfrac{b'f_1}{2} + bf_1' + \dfrac{c'f_2}{2} + cf_2' \Rightarrow \begin{cases} w_1 = f_1' + \dfrac{b'f_1}{2b} \\ w_2 = f_2' + \dfrac{c'f_2}{2c} \end{cases} \\ av_1 + bv_2 = \dfrac{a'g_1}{2} + ag_1' + \dfrac{b'g_2}{2} + bg_2' \Rightarrow \begin{cases} v_1 = g_1' + \dfrac{a'g_1}{2a} \\ v_2 = g_2' + \dfrac{b'g_2}{2b} \end{cases} \\ bv_1 + cv_2 = \dfrac{b'g_1}{2} + bg_1' + \dfrac{c'g_2}{2} + cg_2' \Rightarrow \begin{cases} v_1 = g_1' + \dfrac{b'g_1}{2b} \\ v_2 = g_2' + \dfrac{c'g_2}{2c} \end{cases} \end{cases} .$$

Observe que

$$\begin{cases} w_1 = f_1' + \dfrac{a'f_1}{2a} \\ w_1 = f_1' + \dfrac{b'f_1}{2b} \end{cases}$$

sendo que o mesmo ocorre em relação às outras funções coordenadas de $D\vec{\gamma}$ e $D\vec{\lambda}$. Entretanto, quando temos que $b\left(\vec{\alpha(t)}\right) = 0$, temos que o sistema se torna

$$\mathfrak{G} = \begin{cases} aw_1 = \dfrac{a'f_1}{2} + af_1' \\ cw_2 = \dfrac{c'f_2}{2} + cf_2' \\ av_1 = \dfrac{a'g_1}{2} + ag_1' \\ cv_2 = \dfrac{c'g_2}{2} + cg_2' \end{cases}$$

o que contorna todos os problemas do sistema. Além disso, se $b\left(\vec{\alpha(t)}\right) = 0$, então, a positividade dos autovalores da matriz nos leva a $a\left(\vec{\alpha(t)}\right) > 0$ e $c\left(\vec{\alpha(t)}\right) > 0$. Então, para uma métrica diagonal não necessariamente constante, o sistema nos leva a

$$\mathfrak{G} = \begin{cases} w_1 = \dfrac{a'f_1}{2a} + f_1' \\ w_2 = \dfrac{c'f_2}{2c} + f_2' \\ v_1 = \dfrac{a'g_1}{2a} + g_1' \\ v_2 = \dfrac{c'g_2}{2c} + g_2' \end{cases}$$

e, com isso temos que

$$D\vec{\gamma}(t) = (w_1(t), w_2(t)) = \left(\frac{a' f_1}{2a} + f_1', \frac{c' f_2}{2c} + f_2'\right)$$

e

$$D\vec{\lambda}(t) = (v_1(t), v_2(t)) = \left(\frac{a' g_1}{2a} + g_1', \frac{c' g_2}{2c} + g_2'\right).$$

Isso motiva a seguinte definição:

Definição 4.13 *Suponhamos que $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva parametrizada diferenciável regular e que $\vec{\beta} : I \to T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$ dada por $\vec{\beta}(t) = (x(t), y(t))$ seja um campo de vetores tangente diferenciável a $\vec{\alpha}$. Suponhamos ainda que a métrica $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja tal que a restrição $\mathscr{A}\Big|_X \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, em que $\vec{\alpha}(I) \subset X$, ou seja, que $\mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(t)\right)$ estabelece uma métrica em $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$. Definimos a derivada covariante a $\vec{\beta}$ segundo a métrica $\mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(t)\right)$ como a função vetorial $D\vec{\beta} : I \to T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$ dada por*

$$D\vec{\beta}(t) = \left(x'(t) + \frac{a_{11}'\left(\vec{\alpha}(t)\right)}{2a_{11}\left(\vec{\alpha}(t)\right)} x(t), y'(t) + \frac{a_{22}'\left(\vec{\alpha}(t)\right)}{2a_{22}\left(\vec{\alpha}(t)\right)} y(t)\right).$$

para todo $[a, b] \subset I$.

Considerando $\mathscr{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}$ a base de $\mathbb{R}^2$ que define as curvas $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ quando aplicada em $\vec{\alpha}(t)$, para todo $t \in I$, define uma base para cada espaço tangente $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$, que é denotada por $\mathscr{B}_{\vec{\alpha}(t)} = \left\{\vec{b}_{1_{\vec{\alpha}(t)}}, \vec{b}_{2_{\vec{\alpha}(t)}}\right\}$. Assim, a derivada covariante a $\vec{\beta}$ segundo $\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))$ também pode ser escrita como

$$D\vec{\beta}(t) = \left(x'(t) + \frac{a_{11}'\left(\vec{\alpha}(t)\right)}{2a_{11}\left(\vec{\alpha}(t)\right)} x(t)\right) \vec{b}_{1_{\vec{\alpha}(t)}} + \left(y'(t) + \frac{a_{22}'\left(\vec{\alpha}(t)\right)}{2a_{22}\left(\vec{\alpha}(t)\right)} y(t)\right) \vec{b}_{2_{\vec{\alpha}(t)}}.$$

Se a matriz da métrica for constante, indiferentemente se diagonal ou não, então a derivada covariante torna-se a derivada usual do Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que $a_{ii}' = 0$.

Proposição 4.7 *Suponhamos que $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva parametrizada diferenciável regular, e consideremos $\vec{\gamma} : I \to T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$ e $\vec{\lambda} : I \to T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$ campos de vetores tangentes a $\vec{\alpha}(t)$ a cada t. Suponhamos ainda que $\mathscr{A} = \mathscr{A}\left(\vec{p}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}^2)$ seja tal que $\mathscr{A} = \mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(t)\right)$ defina uma métrica em cada $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$. Então, se $\vec{\gamma}(t)_{\vec{\alpha}(t)}$ e $\vec{\lambda}(t)_{\vec{\alpha}(t)}$ forem diferenciáveis, então a função $\langle\vec{\gamma}(t), \vec{\gamma}(t)\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}$ é diferenciável e*

1. *se $\mathscr{A}$ for uma matriz constante, então*

$$\frac{d}{dt}\left[\left\langle\vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}}\right] = \left\langle\vec{\gamma}'(t), \vec{\lambda}(t)\right\rangle_{\mathscr{A}} + \left\langle\vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}'(t)\right\rangle_{\mathscr{A}};$$

2. *se $\mathscr{A}\,(\vec{p})$ for uma matriz dada na forma diagonal, não necessariamente constante, então,*
$$\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathscr{A}} = [\vec{\gamma}(t)]\, \mathscr{A}\, [\vec{\gamma}(t)]^T = afu + b[gu + fv] + cgu,$$
daí
$$\frac{d}{dt}\left[\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}\right] = \left\langle D\vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} + \left\langle \vec{\gamma}(t), D\vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}.$$

Demonstração: Já vimos na Proposição 4.3 que a função $\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}$ é diferenciável, restando apenas mostrarmos as igualdades. Para isto, suponhamos que $\vec{\gamma}(t) = (f_1(t), g_1(t))$ e $\vec{\lambda}(t) = (f_2(t), g_2(t))$.

(i) Como $\mathscr{A}$ é uma matriz constante, então podemos escrever
$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
e, pela Equação (4.2), temos que
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}\right] &= [\vec{\gamma}(t)] \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} \cdot \left[\vec{\lambda}'(t)\right]^T + \\ &\quad + [\vec{\gamma}'(t)] \cdot \mathscr{A} \cdot \left[\vec{\lambda}(t)\right]^T + [\vec{\gamma}(t)] \cdot \mathscr{A} \cdot \left[\vec{\lambda}'(t)\right]^T \end{aligned}$$
o que nos leva a
$$\frac{d}{dt}\left[\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}}\right] = \left\langle \vec{\gamma}'(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}} + \left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}'(t) \right\rangle_{\mathscr{A}}.$$

(ii) Neste caso,
$$\mathscr{A} = \mathscr{A}\,(\vec{\alpha}(t)) = \begin{bmatrix} a\,(\vec{\alpha}(t)) & 0 \\ 0 & c\,(\vec{\alpha}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},$$
daí
$$\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}} = [\vec{\gamma}(t)]\, \mathscr{A} \left[\vec{\lambda}(t)\right]^T = af_1f_2 + cg_1g_2$$
e, assim,
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}} &= \frac{d}{dt}\left(af_1f_2 + cg_1g_2\right), \\ &= a'f_1f_2 + c'g_1g_2 + a\left(f_1'f_2 + f_1f_2\right) + c\left(g_1'g_2 + g_1g_2'\right) \\ &= \left(f_1a'f_2 + g_1c'g_2\right) + \left(f_1'af_2 + g_1'cg_2\right) + \left(f_1af_2' + g_1cg_2'\right) \\ &= \left(f_1'af_2 + f_1\frac{a'}{2}f_2 + g_1'cg_2 + g_1\frac{c'}{2}g_2\right) + \\ &\quad + \left(f_1af_2' + f_1\frac{a'}{2}f_2 + g_1cg_2' + f_1\frac{a'}{2}f_2\right), \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}} &= \begin{bmatrix} f_1' + \dfrac{a'}{2a}f_1 & g_1' + \dfrac{c'}{2c}g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ g_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} f_2 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2' + \dfrac{a'}{2a}f_2 \\ g_2' + \dfrac{c'}{2c}g_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\left\langle \vec{\gamma}(t), \vec{\lambda}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}} = [D\vec{\gamma}(t)]\, \mathscr{A}\, (\vec{\alpha}(t)) \left[\vec{\lambda}(t)\right]^T + [\vec{\gamma}(t)]\, \mathscr{A}\, (\vec{\alpha}(t)) \left[D\vec{\lambda}(t)\right]^T. \qquad \blacksquare$$

Observação 4.7 (Convenção das métricas adotadas) *Devido à motivação para a Derivada Covariante, neste trabalho utilizaremos apenas as que são representadas por matrizes constantes ou diagonais (não necessariamente constantes).*

Proposição 4.8 *Suponhamos que $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva parametrizada pelo comprimento de arco segundo uma métrica diferenciável, constante ou diagonal, $\mathscr{A} = \mathscr{A}\,(\vec{p})$ definida nos pontos de $\vec{\alpha}(I)$, então*

$$\vec{\alpha}'(s) \perp D\vec{\alpha}'(s),$$

ou seja, o vetor $\vec{\alpha}'(s)$ é perpendicular ao seu vetor derivada covariante segundo a métrica $\mathscr{A} = \mathscr{A}\,(\vec{\alpha}(s))$.

Demonstração: Como $\vec{\alpha}$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco segue que $\|\alpha'(s)\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = 1$, daí

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s), \rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = 1,$$

que, derivando nos dá

$$\frac{d}{ds}\left[\langle \alpha'(s), \alpha'(s), \rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))}\right] = 0,$$

que nos leva a

$$2\,[\vec{\alpha}'(s)]\, \mathscr{A}\, (\vec{\alpha}(s))\, [D\vec{\alpha}'(s)]^T = 0,$$

ou seja,

$$\langle \alpha'(s), D\alpha'(s), \rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = 0$$

e, portanto o vetor $\vec{\alpha}'(s)$ é perpendicular ao seu vetor derivada covariante segundo a métrica $\mathscr{A} = \mathscr{A}\,(\vec{\alpha}(s))$. $\blacksquare$

Exemplo 4.5 *Com o produto interno*

$$\begin{array}{rccl} \langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} : & T\vec{p}(\mathbb{R}^2) \times T\vec{p}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & [\vec{u}_{\vec{p}}]\, \mathscr{A}\,(\vec{p})\, [\vec{v}_{\vec{p}}]^T \end{array}$$

e $a, c \in (0, +\infty)$, *tomando* $I = (a, +\infty)$ *e a curva*

$$\begin{array}{rccl} \vec{\lambda}: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & s & \mapsto & \left(c, \dfrac{s^2}{4}\right) \end{array}$$

está parametrizada pelo comprimento de arco segundo $\mathscr{A}$, *pois*

$$\vec{\lambda}'(s) = \left(0, \frac{s}{2}\right) \Rightarrow \left\| \vec{\lambda}'(s) \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\lambda}(s))} = \sqrt{\frac{0 + \dfrac{s^2}{4}}{\dfrac{s^2}{4}}} = 1.$$

A derivada covariante de $\vec{\lambda}(s)$ *fica*

$$D\vec{\lambda}(s) = \left(0 + \frac{\dfrac{d}{ds}\left[4s^{-2}\right]}{8s^{-2}} \cdot 0, \frac{1}{2} + \frac{\dfrac{d}{ds}\left[4s^{-2}\right]}{8s^{-2}} \cdot \frac{s}{2} \right) = (0,0),$$

e assim o perpendicularismo segundo $\mathscr{A}$ *entre estes campos de vetores é verificado por*

$$\left\langle \vec{\lambda}'(s), D\vec{\lambda}'(s), \right\rangle_{\mathscr{A}\left(\vec{\lambda}(s)\right)} = 0.$$

Exemplo 4.6 *Voltando ao Exemplo 4.4, consideremos a curva* $\vec{\alpha} : (0; +\infty) \to \mathbb{R}^2$, *dada por*

$$\vec{\alpha}(t) = \left(\frac{2}{5}t^{5/2}, t^2\right),$$

cujo traço está contido no plano de Lobatchevski, munido com a Geometria de Lobatchevski

$$\mathscr{A}\left(\vec{p}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{y} \end{bmatrix},$$

cujo produto interno é dado por

$$\begin{array}{rccl} \langle\ ,\ \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})}: & T_{\vec{p}}\left(\mathbb{R}^2\right) \times T_{\vec{p}}\left(\mathbb{R}^2\right) & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) & \mapsto & \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{y} \end{array}.$$

Já sabemos que sua reparametrização por comprimento de arco $\vec{\gamma}$ *é dada por*

$$\vec{\gamma}(s) = \left(\frac{2}{5}\left(\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4 \right)^{5/2}, \left(\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4 \right)^{2} \right),$$

cujo vetor tangente unitário é dado por

$$\vec{\gamma}'(s) = \left(\frac{\left(\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4 \right)^{3/2}}{\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{3}}}, \frac{2\left(\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4 \right)}{\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{3}}} \right).$$

Nosso objetivo agora é encontrar a derivada covariante de tal curva. Para isto, primeiramente precisamos da derivada de $\vec{\gamma}\,'(s) = (f(s), g(s))$, que é dada por

$$f'(s) = \frac{3\left(\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4\right)^{1/2}\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4\right)^{3/2}}{2\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{4}{3}}}$$

e

$$g'(s) = \frac{\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} + 4}{\left(\frac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{4}{3}}}.$$

Agora, precisamos da métrica $\mathscr{A}$ aplicada na curva $\vec{\gamma}$, ou seja,

$$\mathscr{A}\left(\vec{\gamma}(s)\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\left(\left(\dfrac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\left(\left(\dfrac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4\right)^2} \end{bmatrix},$$

cuja derivada é

$$\frac{d}{ds}\left(\mathscr{A}\left(\vec{\gamma}(s)\right)\right) = \begin{bmatrix} \nu(s) & 0 \\ 0 & \nu(s) \end{bmatrix}$$

em que

$$\nu(s) = \frac{1}{\left(\dfrac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(\dfrac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4\right)^3}$$

e, com isso temos que

$$\frac{a_{11}\left(\vec{\gamma}(s)\right)}{2a'_{11}\left(\vec{\gamma}(s)\right)} = \frac{a_{22}\left(\vec{\gamma}(s)\right)}{2a'_{22}\left(\vec{\gamma}(s)\right)} = \frac{-1}{\left(\dfrac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(\dfrac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4\right)}.$$

Como a covariante de uma função $\vec{\beta}(t) = (x(t), y(t))$ é dada por

$$D\vec{\gamma}\,'(t) = \left(f'(t) + \frac{a'_{11}\left(\vec{\gamma}(t)\right)}{2a_{11}\left(\vec{\gamma}(t)\right)}f(t), g'(t) + \frac{a'_{22}\left(\vec{\gamma}(t)\right)}{2a_{22}\left(\vec{\gamma}(t)\right)}g(t)\right).$$

segue que

$$D\vec{\gamma}\,'(s) = \left(\frac{2\left(\left(\dfrac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 4\right)^{1/2}}{\left(\dfrac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{4}{3}}}, \frac{4 - \left(\dfrac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\dfrac{3}{2}s + 10\sqrt{10}\right)^{\frac{4}{3}}}\right).$$

Notemos que

$$\left\langle \vec{\gamma}\,'(s), D\vec{\gamma}\,'(s)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\gamma}(s))} = 0.$$

5 Teoria Local de Curvas Planas

Neste capítulo é feito o estudo das curvas planas sempre tomando a parametrização por comprimento de arco. Posteriormente, admitindo uma parametrização qualquer, alguns dos principais resultados, como, por exemplo, a curvatura, são refeitos para curvas planas. O texto base para o desenvolvimento desse capítulo foi [18] no entanto são utilizadas como referências auxiliares os trabalhos de [3], [19] e [20], sendo que os gráficos foram elaborados em [22].

5.1 Teoria Local de Curvas Planas

Definição 5.1 *Suponhamos que $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva parametrizada pelo comprimento de arco segundo uma métrica diferenciável $\mathscr{A} = \mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(s)\right)$, com $\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$. O vetor tangente unitário à curva no ponto $\vec{\alpha}(s)$ segundo a métrica $\mathscr{A}$ é a função $\vec{T}[\mathscr{A}] : I \to T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$, dado por*

$$\vec{T}\left[\mathscr{A}\right](s) = \frac{d}{ds}\left[\vec{\alpha}(s)\right] = \left(x'(s), y'(s)\right).$$

Definição 5.2 *Suponhamos que $\mathscr{A} = \mathscr{A}\left(\vec{p}\right)$ seja uma métrica diferenciável, constante ou diagonal, definida sobre os pontos do traço de uma curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco, com $\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$. Se $D\vec{T}\left[\mathscr{A}\right](s) \neq \vec{0}$, para todo $s \in I$, definimos o vetor normal unitário à curva no ponto $\vec{\alpha}(s)$ segundo a métrica $\mathscr{A}$ como sendo a função $\vec{N}[\mathscr{A}] : I \to T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$, dada por*

$$\vec{N}\left[\mathscr{A}\right](s) = \frac{D\vec{T}(s)}{\left\|D\vec{T}(s)\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))}}.$$

Quando estamos determinando os vetores tangente e normal utilizamos a mesma base que usamos para determinar $\vec{\alpha}(s)$.

Como sempre estamos utilizando uma métrica diferenciável, constante ou diagonal, $\mathscr{A} = \mathscr{A}\left(\vec{p}\right)$, sempre definida ao menos no conjunto de pontos de $\alpha(\vec{I})$, para simplificarmos a notação dos vetores tangente e normal, a partir de agora serão denotados por $\vec{T}(s)$, $D\vec{T}(s)$ e $\vec{N}(s)$, obtidos segundo a métrica $\mathscr{A}$, ou seja, usamos o fato da curva estar parametrizada pelo comprimento de arco segundo a métrica $\mathscr{A}$. Só denotaremos a métrica quando estivermos usando mais de uma para uma mesma curva.

Como a curva $\vec{\alpha}(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco temos que

$$\left\|\vec{T}(s)\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = 1$$

e, pela Proposição 4.8 segue que

$$\vec{T}(s) \perp D\vec{T}(s),$$

portanto,

$$\vec{T}(s) \perp \vec{N}(s).$$

A denominação vetor normal significa que $\vec{N}(s)$ é perpendicular ao vetor tangente unitário no ponto $\vec{\alpha}(s)$.

Com isso, temos que

$$D\vec{T}(s) = \left(x''(s) + \frac{a'(\vec{\alpha}(s))}{2a(\vec{\alpha}(s))} x'(s), y''(s) + \frac{c'(\vec{\alpha}(s))}{2c(\vec{\alpha}(s))} y'(s) \right),$$

em que

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{\alpha}(s)) = \begin{bmatrix} a(\vec{\alpha}(s)) & 0 \\ 0 & c(\vec{\alpha}(s)) \end{bmatrix}$$

é uma métrica diagonal. Agora, se a métrica $\mathscr{A}$ for constante então

$$D\vec{T}(s) = (x''(s), y''(s)) = \vec{\alpha}''(s) = \frac{d}{dt}\left[\vec{T}(s)\right].$$

Quando $D\vec{T}(s) \neq \vec{0}$, o vetor normal é o versor de $D\vec{T}(s)$.

Veremos mais à frente que, dependendo da métrica adotada, uma curva pode ter $D\vec{T}(s) = \vec{0}$, para algum s ou todo $s \in I$, mas isso não impossibilita de obtermos uma direção normal a $\vec{T}(s)$. Isso é possível devido ao Lema 3.4 que garante que para um vetor dado sempre existe um vetor perpendicular a este, independentemente da métrica adotada.

Exemplo 5.1 *Seja $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e consideremos a métrica $\mathscr{A} : X_1 \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dada por*

$$\mathscr{A}(\vec{p}) = \mathscr{A}(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{bmatrix}.$$

Observemos que, para $\vec{p} = (x,y) \in X_1$, $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, com $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)$, o produto interno estabelecido por essa métrica é dado na forma geral por

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathscr{A}(\vec{p})} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2+y^2}.$$

Se considerarmos $I = (-3,01; 3,01) \subset \mathbb{R}$ e tomarmos $\vec{\alpha} : I \to X_1$, dada por

$$\vec{\alpha}(s) = (senh(s), cosh(s)).$$

O traço da curva está na Figura 8.

Esta curva é parametrizada pelo comprimento de arco segundo $\mathscr{A}$ pois

$$\vec{\alpha}'(s) = (cosh(s), senh(s))$$

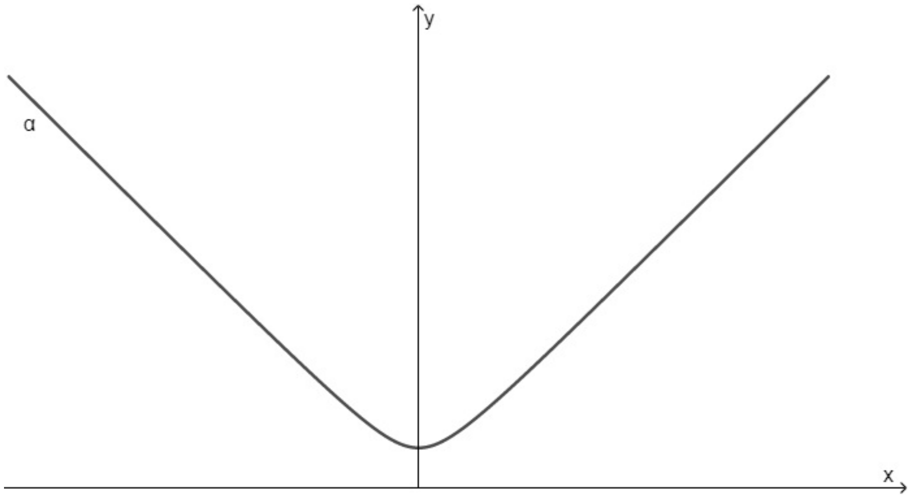

Figura 8 – Traço da Curva.

e, com isso temos que

$$\|\vec{\alpha}'(s)\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = \sqrt{\frac{cosh^2(s) + senh^2(s)}{senh^2(s) + cosh^2(s)}} = 1.$$

Além disso, seu vetor tangente $\vec{T} : I \to T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$ *é dado por*

$$\vec{T}(s) = (cosh\,(s), senh\,(s))\,, \tag{5.1}$$

e, a derivada covariante de $\vec{T}$ *segundo* $\mathscr{A}$ *é a função vetorial* $D\vec{T} : I \to T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$*, dada por*

$$D\vec{T}(s) = \frac{1}{2cosh^2(2s)}\,(senh\,(s) - senh\,(3s), cosh\,(s) + cosh\,(3s)) \tag{5.2}$$

esse campo de vetores é não nulo em todo seu domínio e sua norma é

$$\left\|D\vec{T}(s)\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = \frac{1}{cosh\,(2s)}. \tag{5.3}$$

Já o vetor normal a $\vec{\alpha}(s)$ *segundo a métrica* $\mathscr{A}$ *é a função vetorial* $\vec{N} : I \to T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$ *dada por*

$$\vec{N}(s) = (-senh\,(s), cosh\,(s))\,. \tag{5.4}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} &= \langle (cosh\,(s), senh\,(s))\,, (-senh\,(s), cosh\,(s))\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))}\\ &= \frac{cosh\,(s)\cdot(-senh\,(s)) + senh\,(s)\cdot cosh\,(s)}{senh^2(s) + cosh^2(s)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Definição 5.3 *Dada uma curva* $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$*, parametrizada pelo comprimento de arco segundo uma métrica* $\mathscr{A} = \mathscr{A}\,(\vec{p})$*, o conjunto* $\left\{\vec{T}(s), \vec{N}(s)\right\}$ *é denominado referencial de Frenet em* $\vec{\alpha}(s)$*.*

Como $\vec{T}(s) \perp \vec{N}(s)$, temos que $\left\{\vec{T}(s), \vec{N}(s)\right\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes e ortonormais, portanto, é uma base ortonormal de $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$.

Em decorrência do Lema 3.4, encontrar o referencial de Frenet não requer o uso de uma métrica constante ou diagonal, uma vez que o vetor tangente unitário independe da métrica usada e a obtenção do vetor normal unitário pode não depender da obtenção de $D\vec{T}(s)$.

Exemplo 5.2 *A Figura 9 ilustra o Referencial de Frenet nos pontos $\vec{\alpha}(-1), \vec{\alpha}(0)$ e $\vec{\alpha}(2)$ da curva $\vec{\alpha}(s) = (senh\,(s), cosh\,(s))$. Num primeiro momento, ao olhar essa figura um observador desatento pode pensar que os vetores sobre $\vec{\alpha}(-1)$ não são perpendiculares ou ainda que os vetores apresentados não são unitários. Isso porque estamos acostumados a trabalhar com métricas constantes, nas quais o tamanho do vetor e o ângulo entre dois vetores não dependem do ponto ao qual estes vetores estão sendo aplicados, o que acontece quando trabalhamos com métricas não constantes como a adotada no Exemplo 5.1.*

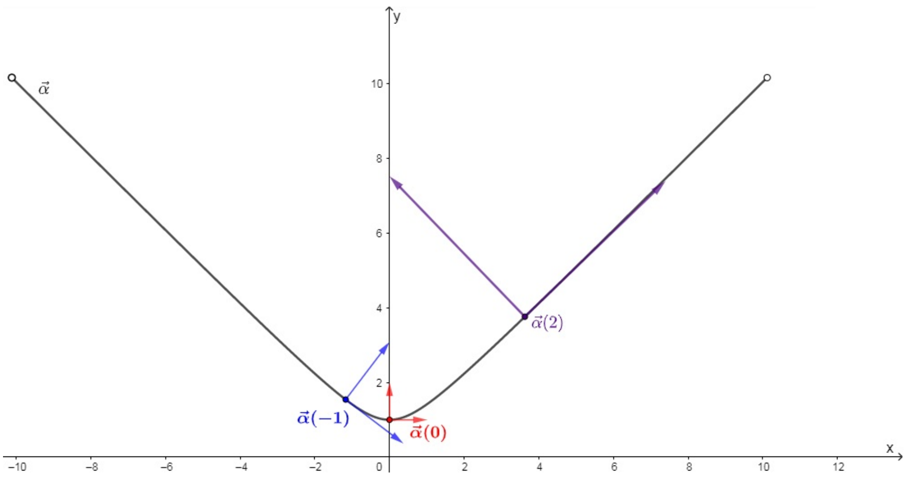

Figura 9 – Referenciais de Frenet em $\vec{\alpha}(-1)$, $\vec{\alpha}(0)$ e $\vec{\alpha}(2)$.

Definição 5.4 *Dada uma curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco, definimos a reta tangente à curva $\vec{\alpha}(s)$ como sendo a função $t_{\vec{\alpha}} : I \to T_{\vec{\alpha}}(\mathbb{R}^2)$ dada por*

$$t_{\vec{\alpha}}(r) = \vec{\alpha}(s) + r\vec{T}(s)$$

e a reta normal à curva $\vec{\alpha}(s)$ como sendo a função $n_{\vec{\alpha}} : I \to T_{\vec{\alpha}}(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$n_{\vec{\alpha}}(r) = \vec{\alpha}(s) + r\vec{N}(s).$$

Definição 5.5 *Suponhamos que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica diferenciável, constante ou diagonal, definida sobre os pontos do traço de uma curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco segundo $\mathscr{A}$. A função $\kappa\,[\mathscr{A}] : I \to \mathbb{R}_+$ dada por*

$$\kappa\,[\mathscr{A}]\,(s) = \left\|D\vec{T}(s)\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))}$$

é denominada função curvatura de $\vec{\alpha}$ em s segundo a métrica $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))$.

Observação 5.1 *Novamente, para facilitar a notação, utilizaremos $\kappa(s)$ quando estiver clara a métrica adotada e $\kappa[\mathscr{A}](s)$ ou $\kappa[\mathscr{B}](s)$, quando estivermos trabalhando com duas métricas simultaneamente e for necessário diferenciá-las.*

Proposição 5.1 *Suponhamos que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ é uma métrica diferenciável, constante ou diagonal, definida sobre os pontos do traço de uma curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco segundo $\mathscr{A}$. Se $D\vec{T}(s) \neq \vec{0}$, para todo $s \in I$, a curvatura de $\vec{\alpha}$ em s segundo a métrica $\mathscr{A}$ pode ser dada por*

$$\kappa(s) = \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))}. \tag{5.5}$$

Demonstração: Notemos que

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \left\| D\vec{T}(s) \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} \\
&= \frac{\left\| D\vec{T}(s) \right\|^2_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))}}{\left\| D\vec{T}(s) \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))}} \\
&= \frac{1}{\left\| D\vec{T}(s) \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))}} \left\langle D\vec{T}(s), D\vec{T}(s) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} \\
&= \left\langle D\vec{T}(s), \frac{D\vec{T}(s)}{\left\| D\vec{T}(s) \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))}} \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} \\
&= \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))}.
\end{aligned}$$

■

Como consequência desta proposição conseguimos atribuir uma interpretação geométrica para a curvatura. Nestas hipóteses, o campo de vetores $D\vec{T}(s)$ é não nulo em todo o domínio da curvatura e $\vec{N}(s)$ é obtido como o versor deste primeiro vetor segundo $\mathscr{A}$. Estes dois campos de vetores são linearmente dependentes. Pela Proposição 3.6, temos que a projeção de $D\vec{T}(s)$ sobre $\vec{N}(s)$ é

$$D\vec{T}(s) =_{\vec{N}(s)} D\vec{T}(s)\Big|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} \vec{N}(s)$$

daí

$$D\vec{T}(s) = \kappa(s)\vec{N}(s), \tag{5.6}$$

ou seja, a função que faz a proporcionalidade entre $D\vec{T}(s)$ e $\vec{N}(s)$ é a curvatura.

Exemplo 5.3 *Retomemos novamente o Exemplo 5.1, a derivada covariante a $\vec{T}(s)$ foi dada na Equação 5.2 e o vetor normal na Equação 5.4, daí sua curvatura κ :*

$(-3,01;3,01) \to \mathbb{R}_+$ *é dada por*

$$\kappa(s) = \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = \frac{1}{cosh\,(2s)}. \tag{5.7}$$

Na Figura 10 temos a representação da curvatura da curva.

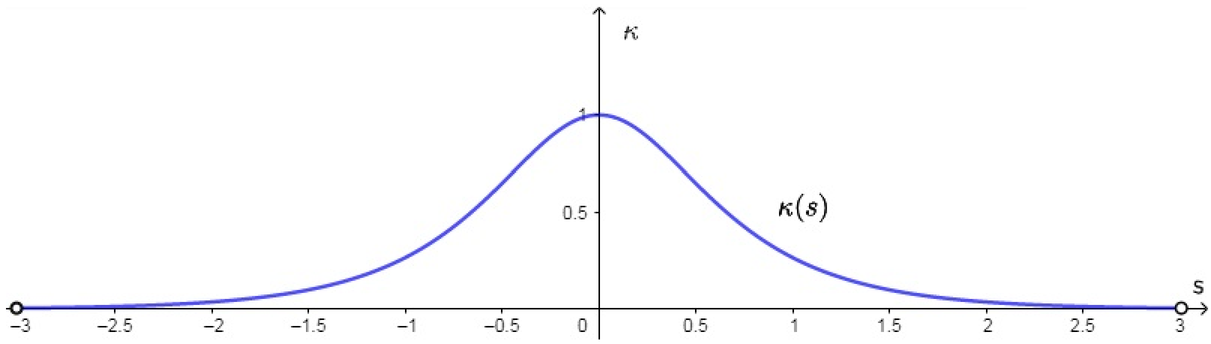

Figura 10 – Gráfico da curvatura da curva.

Exemplo 5.4 *Consideremos o primeiro quadrante do plano* $X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \quad e \quad y > 0\}$ *e, sobre esse conjunto, a métrica* $\mathscr{B} : X_2 \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *dada por*

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}\,(\vec{p}) = \mathscr{B}\,(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2y^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2x^2} \end{bmatrix}$$

que induz o seguinte produto interno sobre X_2

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle = \frac{x_1 x_2}{2y^2} + \frac{y_1 y_2}{2x^2}, \tag{5.8}$$

para quaisquer $\vec{p} \in X_2$, $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, *com* $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)\,, \vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)\,.$
Agora, consideremos o conjunto $J = (0,01;3,01) \subset (-3,01;3,01) = I$ *ao tomarmos* $\vec{\beta}(s)$ *como sendo a restrição da curva* $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ *do Exemplo 5.1, ou seja,* $\vec{\beta} = \vec{\alpha}\Big|_J : J \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}\Big|_J(s) = (x(s), y(s)) = (senh\,(s), cosh\,(s))\,,$$

quando restrita a $J = (0,01;3,01)$ *possui traço contido em* X_2 *e, por isso, conseguimos tratar a métrica* $\mathscr{B}$ *nos pontos deste traço. Além disso,*

$$\left\|\vec{\beta}(s)\right\|_{\mathscr{B}\left(\vec{\beta}(s)\right)} = \sqrt{\frac{cosh^2(s)}{2cosh^2(s)} + \frac{senh^2(s)}{2senh^2(s)}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1},$$

ou seja, a curva $\vec{\beta}$ *está parametrizada pelo comprimento de arco segundo* $\mathscr{B}$. *Agora, segundo a norma* $\mathscr{B}(\vec{\beta}(s))$, *a curva tem vetor derivada covariante* $D\vec{T}\,[\mathscr{B}]\,(s) = \vec{0}$ *e, por consequência, sua curvatura é*

$$\kappa\,[\mathscr{B}]\,(s) = \left\|D\vec{T}\,[\mathscr{B}]\,(s)\right\|_{\mathscr{B}\left(\vec{\beta}(s)\right)} = 0.$$

Entretanto, no Exemplo 5.3 quando utilizamos a métrica $\mathscr{A}$ isso não ocorreu, pois a restrição $\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}\Big|_J(s)$ segundo a métrica $\mathscr{A}$ continua tendo curvatura

$$\kappa\,[\mathscr{A}]\,(s) = \frac{1}{cosh\,(2s)},$$

para todo $s \in J$. Pela Definição 5.2 não é possível obter o vetor normal de $\vec{\alpha}(s)$, pois $\kappa\,[\mathscr{B}]\,(s)$ é identicamente nula em todo seu domínio. Porém, pelo Lema 3.4, existe a direção normal. O vetor tangente $\vec{T} : I \to T_{\vec{\beta}(s)}(\mathbb{R}^2)$ é o mesmo que o da Equação 5.1 e é dado por

$$\vec{T}(s) = (cosh\,(s), senh\,(s))\,,$$

Agora, consideremos a função vetorial $\vec{N} : I \to T_{\vec{\beta}(s)}(\mathbb{R}^2)$, dada por

$$\vec{N}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s))\,.$$

Esse campo de vetores deve satisfazer duas condições:

1. $\left\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathscr{B}\left(\vec{\beta}(s)\right)} = 0$;

2. $\left\| \vec{N}(s) \right\|_{\mathscr{B}\left(\vec{\beta}(s)\right)} = 1$.

Primeiramente vamos utilizar a Equação 5.8 para encontrar a direção do vetor procurado. Assim

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathscr{B}\left(\vec{\beta}(s)\right)} \\ &= \langle (cosh\,(s), senh\,(s))\,, (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \rangle_{\mathscr{B}\left(\vec{\beta}(s)\right)} \\ &= \frac{cosh\,(s)\bar{x}(s)}{2^2 cosh\,(s)} + \frac{senh\,(s)\bar{y}(s)}{2senh^2(s)} \\ &= \frac{\bar{x}(s)}{2cosh\,(s)} + \frac{\bar{y}(s)}{2senh\,(s)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\bar{x}(s)}{2cosh\,(s)} + \frac{\bar{y}(s)}{2senh\,(s)} = 0$$

e, daí

$$\bar{y}(s) = -tgh\,(s)\bar{x}(s)$$

e, fazendo $\bar{x}(s) = 1$ temos que $\bar{y}(s) = -tgh\,(s)$. Assim

$$\|(\bar{x}(s), \bar{y}(s))\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = \frac{1}{cosh\,(s)},$$

ou seja, não é unitário, para conseguirmos isso, teremos que tomar o versor do vetor encontrado, assim

$$\left\| \vec{N}(s) \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = \frac{(\bar{x}(s), \bar{y}(s))}{\|(\bar{x}(s), \bar{y}(s))\|_{\mathscr{B}\left(\vec{\beta}(s)\right)}} = (cosh\,(s), -senh\,(s))\,,$$

Na Figura 11 são colocadas os referências de Frenet em $\vec{\beta}(0,25)$, $\vec{\beta}(1,1)$ e em $\vec{\beta}(2)$.

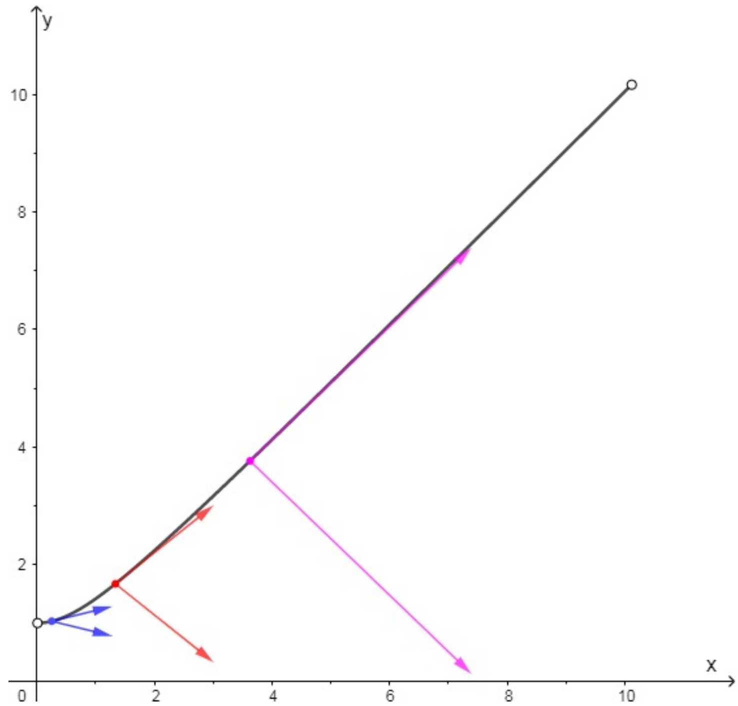

Figura 11 – Referenciais de Frenet sobre a curva.

Com esse exemplo temos que a exigência de termos $D\vec{T}(s)$ não nulo no domínio da curva é uma condição suficiente para definirmos o campo de vetores normal unitário (Definição 5.2), no entanto, essa condição não é necessária para definirmos o vetor normal como pode ser visto no Exemplo 5.4.

Vale ressaltar que, quando a métrica for dada por uma matriz constante, temos que

$$\begin{aligned}
\vec{T}(s) &= \vec{\alpha}'(s),\\
D\vec{T}(s) &= \vec{T}'(s),\\
\vec{N}(s) &= \frac{\vec{T}'(s)}{\left\|\vec{T}'(s)\right\|_{\mathscr{A}}},\\
D\vec{N}(s) &= \vec{N}'(s),\\
\kappa(s) &= \left\|\vec{T}'(s)\right\|_{\mathscr{A}}.
\end{aligned}$$

Assim, ao utilizarmos a métrica determinada pela matriz identidade toda a teoria desenvolvida até aqui retorna à teoria da Geometria Diferencial Clássica.

A Geometria Diferencial Clássica temos que

"Uma curva é uma reta se, e somente se, sua curvatura é identicamente nula."

Aqui a reta deve ser entendida como uma "reta Euclidiana", isto é, uma curva dada por um ponto mais os múltiplos de um vetor fixo. No entanto, quando se trata de uma métrica generalizada, esse resultado pode não valer. Vimos, no Exemplo 5.4, que uma curva pode ter curvatura identicamente nula sem que no entanto seja uma reta (Euclidiana). Mas quando tomamos uma métrica constante, essa afirmação sempre é válida.

Proposição 5.2 *Suponhamos que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica diferenciável, constante ou diagonal, definida sobre os pontos do traço de uma curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco segundo $\mathscr{A}$. Se $D\vec{T}(s) \neq \vec{0}$, para todo $s \in I$, então valem as igualdades*

$$D\vec{T}(s) = \kappa(s)\vec{N}(s) \qquad e \qquad D\vec{N}(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s).$$

Demonstração: Pela Equação 5.6 já temos que

$$D\vec{T}(s) = \kappa(s)\vec{N}(s),$$

assim precisamos apenas provar a segunda equação. Independentemente da métrica ser uma matriz constante ou diagonal, pela Proposição 4.8 temos que

$$\left\|\vec{N}(s)\right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = 1 \qquad \Rightarrow D\vec{N}(s) \perp \vec{N}(s),$$

e, com isso, $D\vec{N}(s)//\vec{T}(s)$ e

$$D\vec{N}(s) =_{\vec{T}(s)} D\vec{N}(s)\Big|_{\mathscr{A}} = \left\langle D\vec{N}(s), \vec{T}(s)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} \vec{T}(s)$$

e, como $\left\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = 0$, diferenciando, obtemos

$$\left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} + \left\langle \vec{T}(s), D\vec{N}(s)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = 0$$

e, com isso

$$\left\langle \vec{T}(s), D\vec{N}(s)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = -\left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s)\right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = -\kappa(s)$$

que, nos leva a

$$D\vec{N}(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s).$$

■

Definição 5.6 *As equações*

$$D\vec{T}(s) = \kappa(s)\vec{N}(s) \qquad e\ D\vec{T}(s).$$

são denominadas de Fórmulas de Frenet para $\vec{\alpha}(s)$ segundo $\mathscr{A} = \mathscr{A}\left(\vec{\alpha}(t)\right)$.

5.2 Teoria de Curvas numa Parametrização Qualquer

Lembremos que, a Proposição 4.6 nos garante que toda curva parametrizada diferencial regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco, porém, encontrar tal reparametrização requer encontrar a função comprimento de arco $s(t)$, e esta requer o cálculo de uma integral. Após isso, devemos encontrar a inversa da função $s(t)$. Com isso, temos alguns problemas: primeiro, a integral nem sempre é trivial, segundo, a inversa nem sempre é facilmente determinada.

Exemplo 5.5 *Consideremos a métrica dada pela matriz*

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

definida em $\mathbb{R}^2$ *e a curva* $\vec{\alpha} : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\vec{\alpha}(t) = (cos\ (t), sen\,(t))$. *Notemos que*

$$\vec{\alpha}'(t) = (-sen\,(t), cos\ (t))$$

e

$$\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(s))} = \sqrt{2sen^2(t) + 3cos^{\,2}(t)} = \sqrt{cos^{\,2}(t) + 2}$$

cuja função comprimento de arco em $J = [0,01; \pi - 0,01] \subset (0, \pi)$ *é* $s : J \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$s(t) = \int_{0,01}^{t} \sqrt{cos^{\,2}(\xi) + 2}d\xi$$

que é bem complicada de se resolver, ou seja, não possui uma solução analítica.

Assim, é interessante revisitar algumas definições e resultados da seção anterior para que consigamos rever os conceitos de curvatura e de Referencial de Frenet para curvas diferenciáveis regulares que não estejam necessariamente parametrizadas pelo comprimento de arco.

Definição 5.7 *Suponhamos que* $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ *seja uma curva parametrizada diferenciável regular segundo uma métrica diferenciável* $\mathscr{A} = \mathscr{A}\,(\vec{\alpha}(t))$, *constante ou diagonal, definida ao menos nos pontos de* $\vec{\alpha}(I)$. *O vetor tangente unitário à curva no ponto* $\vec{\alpha}(t)$ *segundo a métrica* $\mathscr{A}$ *é o campo de vetores* $\vec{T}[\mathscr{A}] : I \to T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$ *definido por*

$$\vec{T}\,[\mathscr{A}]\,(t) = \frac{\vec{\alpha}'(s)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}}.$$

Do mesmo modo como nas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, o vetor tangente unitário é unitário segundo a norma $\vec{\alpha}(t)$, $\vec{T}(t)$ e sua derivada covariante são perpendiculares. Com isso, assim como na Definição 5.2, o vetor normal pode ser tomado como o versor do vetor $D\vec{T}(t)$, segundo $\mathscr{A}\,(\vec{\alpha})$, quando este campo de vetores não é nulo para nenhum $t \in I$. Assim temos a seguinte definição:

Definição 5.8 *Suponhamos que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica diferenciável, constante ou diagonal, definida sobre os pontos do traço de uma curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada diferenciável e regular, com $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$. Se $D\vec{T}[\mathscr{A}](t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in I$, definimos o vetor normal unitário à curva no ponto $\vec{\alpha}(t)$ segundo a métrica $\mathscr{A}$ como sendo a função $\vec{N}[\mathscr{A}] : I \to T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$, dada por*

$$\vec{N}[\mathscr{A}](t) = \frac{D\vec{T}(t)}{\left\| D\vec{T}(t) \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}}.$$

Definição 5.9 *Suponhamos que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ seja uma métrica diferenciável, constante ou diagonal, definida sobre os pontos do traço de uma curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada diferenciável e regular segundo $\mathscr{A}$. A função $\kappa[\mathscr{A}] : I \to \mathbb{R}_+$ dada por*

$$\kappa[\mathscr{A}](s) = \left\| D\vec{T}(t) \right\|_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))}$$

é denominada função curvatura de $\vec{\alpha}$ em t segundo a métrica $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))$.

Como na seção anterior, esta não é a única forma de se obter o vetor normal. Também é possível obtê-lo, mesmo que o vetor $D\vec{T}(t)$ seja nulo em algum ponto, ou ainda em todos os pontos do intervalo I.

As Proposições 5.1 e 4.3 também são válidas para curvas parametrizadas diferenciáveis regulares que não estejam parametrizadas pelo comprimento de arco e, como suas provas são análogas às demonstrações, tendo em vista que os vetores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$ definidos nesta seção podem satisfazer as hipóteses dessas proposições. Com isso, se $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{p})$ for uma métrica diferenciável, constante ou diagonal, definida sobre os pontos do traço de uma curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada diferenciável e regular, com $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, e se $D\vec{T}[\mathscr{A}](t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in I$, então valem as seguintes igualdades:

$$\kappa(t) = \left\langle D\vec{T}(t), \vec{N}(t) \right\rangle_{\mathscr{A}(\vec{\alpha}(t))} \tag{5.9}$$

$$D\vec{T}(t) = \kappa(t)\vec{N}(t) \tag{5.10}$$

$$D\vec{N}(t) = -\kappa(t)\vec{T}(t). \tag{5.11}$$

Exemplo 5.6 *Voltando ao Exemplo 5.5, temos o vetor tangente*

$$\vec{T}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{cos\,(2t) + 5}} \left(-sen\,(t), cos\,(t)\right),$$

vetor normal

$$\vec{N}(t) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{24cos\,(2t) + 120}} \left(3cos\,(t), 2sen\,(t)\right)$$

e curvatura

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{6}}{cos\ (2t) + 5}.$$

O gráfico da função $\kappa(t)$ pode ser analisado na Figura 12:

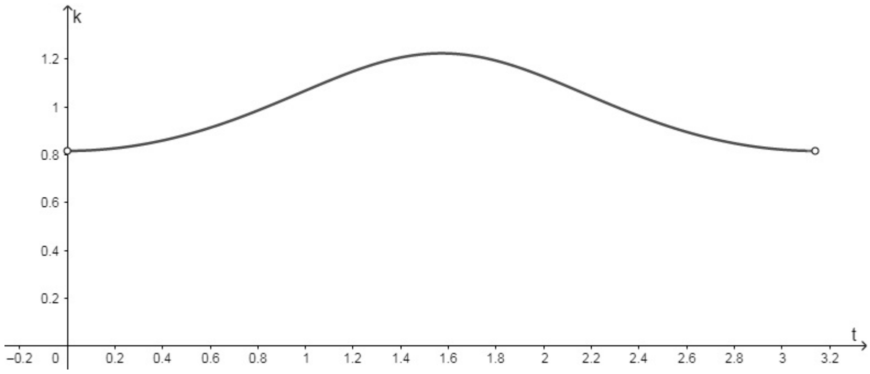

Figura 12 – Gráfico da curvatura.

Já o aspecto geral dessa curva e o Referencial de Frenet em alguns pontos pode ser analisado na Figura 13:

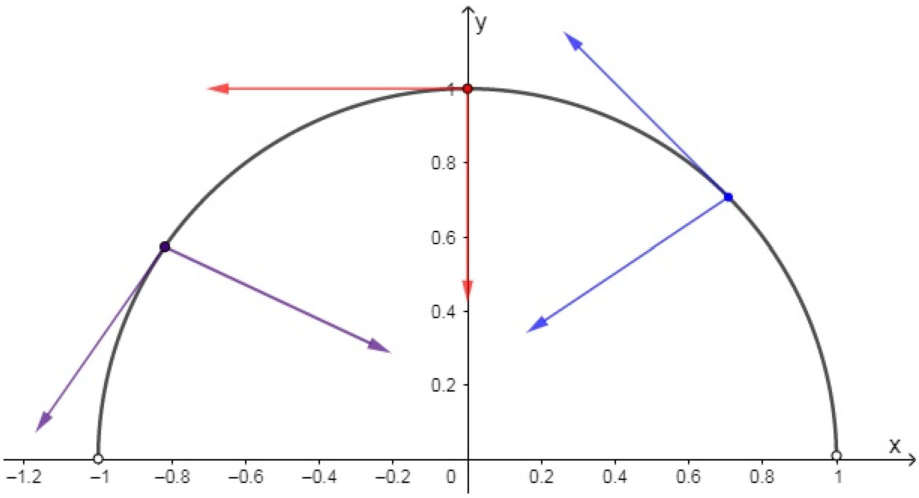

Figura 13 – A curva com alguns referenciais de Frenet.

6 *Considerações finais*

Neste trabalho foi desenvolvida inicialmente uma revisão de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Espaços Métricos, tendo em vista que o objetivo era estudar a Geometria Diferencial, utilizando métricas não Euclidianas. Particularmente, a Geometria Diferencial normalmente não é tratada nos cursos de Licenciatura em Matemática, entretanto ela fornece o aperfeiçoamento de algumas disciplinas, tais como Análise Real, Álgebra Linear, além de Cálculos Diferenciais e Integrais I, II e III, além disso, também não são discutidas métricas não constantes no curso, proporcionando não só uma revisão de tópicos estudados na disciplina de Introdução aos Espaços Métricas, como também a ampliação destes. Com isso, esse trabalho oportunizou a aquisição de conhecimentos que auxiliará durante um curso de pós-graduação em diversas áreas, como Matemática Pura e Matemática Aplicada, isto apenas para citar algumas das quais estão diretamente ligadas com os conteúdos estudados.

Ainda, pôde ser observado a importância do uso de métricas não Euclidianas, que permite obter alguns resultados que não ocorrem quando a métrica é a Euclidiana. Além disso, observa-se que, de acordo com a métrica, uma reta pode, ou não, ter curvatura nula e uma curva que não é uma reta pode ter curvatura nula. Como estudos subsequentes pode-se estudar o Teorema Fundamental de Curvas Planas para métricas constantes e verificar sua validade para métricas diagonais, ou ainda estender os resultados aqui estudados para espaços de dimensões maiores. Também, como sugestão de trabalho futuro, verificar a validade do Teorema dos Quatro Vértices para outras métricas.

Referências

[1] PICADO, J. **Apontamentos de Geometria Diferencial**. Notas de aula. Coimbra: Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2006.

[2] GORODSKI, C. Um breve panorama histórico da geometria, **Revista Matemática Universitária (SBM)**, n. 44, p. 14–29, 2008.

[3] COIMBRA, J. R. V. **Uma Introdução à Geometria Diferencial**. 2008. 135 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

[4] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[5] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Edgard Blücher: São Paulo, 1996.

[6] DELBEM, N. F. **Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos**. 2010. 144 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2010.

[7] NATÁRIO, J. **A Geometria da Relatividade**. Lisboa: ULisboa, 2010.

[8] PEREIRA JR., A. D.; LEMOS, N. A. Geometria Diferencial de Curvas e Dinâmica da Partícula. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 33, n. 2, 2306:01-07, 2011.

[9] GOUVÊA, J. A. **Controle de Formação de Robôs Não-Holonômicos com Restrição de Curvatura Utilizando Função Potencial**. 2011. 120 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Instituto Alberto Luiz Coimbra, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

[10] SOBREIRO, O. A. S. **Modelos Cosmológicos com Intenções no Setor Escuro**. 2011, 57 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

[11] FORMIGA, J. B. **Confinamento Clássico e Quântico de Partículas Introduzido pela Geometria**. 2011. 218 f. Tese (Doutorado em Física) - Centro de Ciência Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011.

[12] SANTOS, C. T. G. **Estudo da Propagação da Luz em Cristais Líquidos Nemáticos com Defeitos Por Meio de Geometria Diferencial**. 2014. 78 f. Dissertação (Mestrado em Ciência dos Materiais) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2014.

[13] CARMO, A. S. **Algumas Aplicações da Geometria de Finsler na Gravidade Bimétrica**. 2017. 62 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

[14] BOLDRINI, J. L.; COSTA R.I.S.; FIGUEIREDO, L. V.; WETZLER, H.G. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra, 1980.

[15] DOMINGUES, H. H.; CALLIOLI, C. A.; COSTA. R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. São Paulo: Atual, 2003

[16] DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[17] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

[18] MELO, F. S. **Teoria de curvas para métricas não-Euclidianas**. 2010. 130f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

[19] FRENSEL, J. D. K. **Geometria Diferencial**. Notas de Aula. Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2009.

[20] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

[21] LIMA, E. L. **Análise Real, Funções de Uma Variável**. Coleção Matemática Universitária. v 1. 9 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[22] GEOGEBRA. **GeoGebra:** Aplicativos Matemáticos. Disponível em <https://www.geogebra.org/?lang=pt>. Acesso em: 7 dez 2020.