Universidade Federal de Alfenas

Amanda de Melo Souza

Os Módulos Indecomponíveis sobre as Álgebras *Tree Oriented Pullback*

Alfenas - MG

2021

Amanda de Melo Souza

Os Módulos Indecomponíveis sobre as Álgebras *Tree Oriented Pullback*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Alfenas.
Área de concentração: Matemática Pura.
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira da Silva

Alfenas - MG

2021

Amanda de Melo Souza

Os Módulos Indecomponíveis sobre as Álgebras *Tree Oriented Pullback*

A banca examinadora abaixo-assinada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Alfenas.
Área de concentração: Matemática Pura.

Aprovado em: 04 de março de 2021.

Prof. Dr. Marcelo Moreira da Silva

Orientador

José Carlos de Souza Junior

Prof. Dr. José Carlos de Souza Júnior

Universidade Federal de Alfenas

Heily Wagner

Prof^a. Dr^a. Heily Wagner

Universidade Federal do Paraná

Cátia Quilles Queiroz

Prof^a. Dr^a. Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz (Suplente)

Universidade Federal de Alfenas

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus e a Mãe Rainha pela minha vida e por sempre estarem ao meu lado, me protegendo e me dando forças para continuar, mesmo que por muitas vezes afastada.

Agradeço aos meus pais, Suely e Divino Cássio, por sempre fazerem o possível e o impossível para me darem condições para prosseguir minha vida pessoal e acadêmica. Agradeço por me escutarem nos momentos de aflição, medo e angústia e sempre contornarem a situação com conselhos e palavras reconfortantes.

Agradeço à minha irmã Lívia, o verdadeiro amor da minha vida, que está comigo em todos os momentos, me empoderando e me dando forças para sempre ser mais do que posso.

Agradeço a toda minha família, em especial a vovó Maria, meus tios e tias, primos e primas, por confiarem no meu potencial e me instigarem a buscar sempre mais, vibrando com minhas vitórias e torcendo pelo que ainda está por vir.

Agradeço ao meu orientador Marcelo, por não ser apenas um professor, mas meu companheiro ao longo de toda minha graduação, me ensinando, me apoiando e me permitindo alcançar patamares nunca antes nem sonhados por mim.

Agradeço aos meus amigos de classe: Thales, Mariana, Edson, Augusto e Mesek, com quem convivi intensamente durante os últimos 4 anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer. Sempre estivemos e sempre estaremos juntos. Thales, em especial, te agradeço por me permitir fazer parte da sua vida e compartilhar a minha com você, você é o melhor amigo que alguém pode ter.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para minha formação, principalmente aos professores José Carlos e José Paulo, por me apoiarem nos momentos de dúvidas e incertezas e me incentivarem a sempre dar o melhor de mim. Agradeço de maneira especial, ao professor Fabrício e a professora Luciana, por me acolherem de forma tão paternal quando cheguei em Alfenas. Agradeço também aos professores Anderson, Luiz Beijo, Guilherme, Rejane e Cátia por me auxiliarem em projetos de extensão e iniciação científica, devo grande parte do meu crescimento crítico, acadêmico e extensionista a vocês.

Agradeço aos amigos e professores que conheci durante essa jornada da graduação, seja em congressos ou em cursos de verão: Bruna, Mayumi, Fernando S., Gabriella, Julia, Marina, Letícia, Fernando L. e professora Heily.

Agradeço aos meus amigos da vida, que acompanharam não só o processo do TCC, como toda minha trajetória no curso: Fernanda, Mariane, Andréia, Diego, Luis, Guilherme, Juliana, Daiene, Vitória, Rafael, Téo, Fabrício, Vinícius, Flávio e Ronan. Sem vocês nada disso seria possível. Amo cada um.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para minha chegada até aqui, desejando meu bem e torcendo por mim.

“Deixa eu me apresentar
Que eu acabei de chegar
Depois que me escutar
Você vai lembrar meu nome”

(AnaVitória)

Resumo

A Teoria de Representação de Álgebras tem como um dos objetivos fundamentais classificar determinadas álgebras a partir de seu conjunto de módulos. Neste trabalho, busca-se compreender de forma introdutória a teoria de álgebras e módulos, com o objetivo de estudar especificamente o conjunto de módulos indecomponíveis sobre as álgebras *tree oriented pullback*. O trabalho foi desenvolvido por meio de um estudo teórico. Dado dois homomorfismos sobrejetores de álgebras $f : A \to B$ e $g : C \to B$, o *pullback* R é uma subálgebra de $A \times C$ definida por $\{(a, c) \in A \times C \mid f(a) = g(c)\}$, o *quiver* de R pode ser determinado a partir dos *quivers* de A e C. A partir dessas informações, é possível compreender os módulos sobre a álgebra. O principal resultado estudado revela que os módulos indecomponíveis sobre R, a álgebra *tree oriented pullback*, se restringem aos módulos indecomponíveis existentes sobre as álgebras A e C envolvidas. A importância de se estudar os módulos sobre essa determinada álgebra é que a partir dos resultados relacionados aos módulos é possível descobrir características sobre a álgebra, sem a necessidade de conhecê-la essencialmente.

Palavras-chave: Representação de álgebra. Álgebra associativa. *Quivers*.

Abstract

Representation Theory of Algebras has as one of its fundamental objectives to classify certain algebras from their set of modules. In this work, we seek to understand the theory of algebras and modules in an introductory way, with the objective of specifically studying the set of non-compose modules on algebras tree oriented pullback. The work was developed through a theoretical study. Given two homomorphisms of algebras f of A onto B and g of C onto B, the pullback R is a subalgebra of $A \times C$ defined by $\{(a, c) \in A \times C \mid f(a) = g(c)\}$, the quiver of R can be determined from the quivers of A and C. From this information, it is possible to understand the modules on algebra. The main result studied reveals that the non-component modules on R, the algebra tree oriented pullback, are restricted to the non-component modules already existing on the A and C algebras involved. The importance of studying the modules on this given algebra is that from the results related to the modules it is possible to discover characteristics about algebra, without the need to know it essentially.
Keywords: Algebra representation. Associative algebra. Quivers.

Sumário

1 Introdução

Durante muito tempo, o termo Álgebra se referia a parte da Matemática em que as equações algébricas eram o principal objeto de estudo. Ao longo do desenvolvimento dessa área em busca de padrões e sedimentação teórica, houve a necessidade da construção de uma linguagem simbólica devido ao surgimento de conceitos algébricos cada vez mais abstratos [1]. Só assim a Álgebra se consolidou como uma área de conhecimento, fruto de um desenvolvimento histórico e não inata ao ser humano [2].

Desde o início da Álgebra Abstrata, já se trabalhava com conjuntos definidos a partir de elementos básicos munidos de operações binárias, como a soma de forma natural e o produto a partir da multiplicação de elementos. Esses conjuntos são chamados de Estruturas Algébricas. Alguns exemplos são: grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais, álgebras e módulos.

Neste trabalho serão apresentados elementos da Teoria de Representação de Álgebras. Essa se originou com o estudo de algumas estruturas algébricas como os grupos de permutação e álgebras de matrizes. Um dos objetivos fundamentais nessa área é classificar álgebras a partir de uma análise aprofundada de suas respectivas categorias de módulos. A teoria, em particular, teve um salto na década de 1970, quando a linguagem dos *quivers* e os métodos da álgebra homológica mudaram a maneira em como são abordados os problemas teóricos da área [3].

Atualmente, a teoria tem diversas ferramentas a serem estudadas como: a estrutura do *Quiver* de Auslander-Reiten, a Variedade da Representação, as Categorias Trianguladas, a Homologia e Cohomologia de Hochschild, entre outras. Esse campo de estudos tem também conexões com a Teoria de Lie, Grupos Quânticos, Teoria de Singularidade e Álgebras de Cluster, além de aparecer em estudos na área de Combinatória, Teoria dos Números, Inteligência Artificial e Criptografia.

Neste trabalho, o estudo será direcionado para as álgebras *Tree Oriented Pullback*. Para isso, primeiro devemos estudar alguns elementos da teoria de representações de álgebras, como álgebras, que são estruturas algébricas com certas propriedades, e módulos, que são considerados uma generalização de espaço vetorial onde os escalares são os elementos da álgebra. Esses conceitos estão presentes na Seção 2, onde nossas principais referências são [4] e [5].

Na Seção 3 estudaremos com mais profundidade alguns módulos especiais: módulos indecomponíveis, simples, projetivos e injetivos. Esses tipos de módulos fazem um papel importante quando olhamos para a família de todos os módulos sobre uma álgebra. Para essa seção as principais referências são [4], [5], [6] e [7].

Em seguida, para estudar álgebras de uma forma mais prática, usa-se o Teorema de Gabriel provado na década de 70, presente na Seção 4. O enunciado desse teorema prova que toda álgebra de dimensão finita é isomorfa a uma representação gráfica chamada de *quiver* com relações. Trabalhar com o *quiver* com relações, significa trabalhar com a álgebra associada a esse *quiver*, e vice-versa. As principais referências para essa seção, são [7] e [8].

Por fim, na Seção 5 buscamos compreender os módulos indecomponíveis sobre as álgebras *Tree Oriented Pullback*. O principal resultado revela que os módulos indecomponíves sobre o *pullback* se restringem aos módulos indecomponíveis existentes sobre as álgebras envolvidas. A importância de se estudar os módulos sobre essa determinada álgebra é que a partir dos resultados relacionados aos módulos é possível descobrir características sobre a álgebra, sem a necessidade de conhecê-la essencialmente. Para isso, foram usadas as referências [9] e [10].

2 Elementos de Representações de Álgebras

Nesta seção, apresentaremos definições, propriedades e proposições sobre conceitos básicos e necessários para a construção deste trabalho e para a compreensão das futuras seções.

2.1 Álgebras

Para compreender a definição da estrutura algébrica álgebra, necessitamos de três conceitos fundamentais: espaço vetorial, anel e corpo. A definição desses conceitos estão presentes em [11]. Ao longo deste trabalho, daremos foco para álgebras sobre corpos algebricamente fechados, geralmente denotados por K, um dos vários motivos é a exigência do Teorema de Gabriel, um dos principais resultados na Teoria de Representações de Álgebras.

Definição 2.1. *Seja K um corpo. Uma K-álgebra A ou uma álgebra A sobre K é uma estrutura que atende os seguintes axiomas:*

- *é um anel com unidade e as operações soma e multiplicação são denotadas da seguinte forma:*
  $(a, b) \mapsto a + b$ *e* $(a, b) \mapsto ab$ *para* $a, b \in A$*;*
- *é um espaço vetorial sobre K, com a adição acima e com a multiplicação pelo escalar:*
  $(\lambda, a) \mapsto \lambda \cdot a$ *para* $\lambda \in K,\ a \in A$*;*
- *e respeita a igualdade:*
  $\lambda \cdot (ab) = (\lambda \cdot a)b = a(\lambda \cdot b)$ *para todo* $\lambda \in K$ *e* $a, b \in A$*.*

Observação 2.2. *A álgebra A será associativa se a operação multiplicação no anel for associativa. O mesmo vale para a propriedade comutativa, a álgebra A será comutativa se a operação multiplicação no anel for comutativa.*

Definição 2.3. *A dimensão de uma K-álgebra A é a dimensão de A como um K-espaço vetorial.*

Neste trabalho, iremos considerar álgebras de dimensão finita e associativas.

Exemplo 2.4. *O espaço das $n\times n$-matrizes $M_n(K)$ com a adição e multiplicação matricial é uma K-álgebra, a qual tem dimensão n^2. As matrizes unitárias E_{ij} para $1 \leq i, j \leq n$ formam uma K-base, em que, E_{ij} são as matrizes que tem entrada 1 na posição (i, j) e 0 em todas as outras entradas.*

Exemplo 2.5. *Seja V um K-espaço vetorial e considere as transformações lineares sobre K em V:*

$$\mathrm{End}_K(V) \coloneqq \{\alpha : V \to V \ / \ \alpha \text{ é uma transformação linear sobre } K\}.$$

$\mathrm{End}_K(V)$ *se torna uma álgebra quando a multiplicação é dada pela composição de aplicações, a adição e a multiplicação por um escalar são feitas ponto a ponto, isto é: $(\alpha+\beta)(v) = \alpha(v)+\beta(v)$ e $(\lambda\alpha)(v) = \lambda\alpha(v)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_K(V)$, $\lambda \in K$ e $v \in V$.*

Na maioria das K-álgebras que iremos estudar, sua unidade será dada pela combinação linear de determinados elementos, chamados idempotentes. Além disso, esses elementos podem receber nomes especias relacionados a uma característica específica, os quais veremos na definição a seguir.

Definição 2.6. *Seja A uma K-álgebra. Um elemento $e \in A$ é dito idempotente se $e^2 = e$. Além disso, dizemos que:*

- *o elemento e é um idempotente central se $ea = ae$ para todo $a \in A$;*
- *dois idempotentes $e_1, e_2 \in A$ são ortogonais se $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$;*
- *um idempotente $e \in A$ é primitivo se e não pode ser escrito como uma soma $e = e_1 + e_2$, onde e_1 e e_2 são idempotentes ortogonais não nulos de A;*
- *um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos de A é um conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset A$ de idempotentes, ortogonais dois à dois, primitivos tais que*

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

Exemplo 2.7. *Considere o conjunto $M_2(\mathbb{R})$. O elemento $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ é idempotente pois $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Porém não é primitivo, visto que $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, onde $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ são idempotentes ortogonais.*

Definição 2.8. *Uma K-álgebra é dita conexa quando* 0 *e* 1 *são os únicos idempotentes centrais de A.*

Observação 2.9. *A menos de menção em contrário, as álgebras presentes neste trabalho serão conexas.*

Uma forma de construir novas álgebras é fazendo o produto cartesiano de álgebras já existentes, conforme definido a seguir:

Definição 2.10. *Se $A_1, \ldots, A_n$ são K-álgebras, seu produto direto é definido como uma álgebra*

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \;/\; a_i \in A_i \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

em que a adição e a multiplicação são feitas componente a componente.

Observação 2.11. *A álgebra definida acima não é conexa.*

2.1.1 Subálgebras

Assim como temos subespaços de espaços vetoriais, subgrupos de grupos, definimos a noção de subálgebra. Considere A uma K-álgebra e B um subconjunto de A. Uma subálgebra B de A é uma álgebra com as respectivas operações de A.

Definição 2.12. *Seja K um corpo e A uma K-álgebra. Um subconjunto B de A é chamado de K-subálgebra (ou somente subálgebra) de A, se satisfaz as seguintes condições:*

(i) B é um K-subespaço de A, isto é, para cada $\lambda, \mu \in K$ e $b_1, b_2 \in B$, nós temos $\lambda b_1 + \mu b_2 \in B$;

(ii) B é fechado para a multiplicação, isto é, para todo $b_1, b_2 \in B$, o produto $b_1 b_2 \in B$;

(iii) O elemento neutro 1_A de A pertence a B.

Exemplo 2.13. *A K-álgebra $M_n(K)$ das $n \times n$-matrizes sobre K tem algumas subálgebras:*

(i) O conjunto das matrizes triangulares superiores

$$T_n(K) := \{a = (a_{ij}) \in M_n(K) \;/\; a_{ij} = 0 \text{ para } i > j\}$$

é uma subálgebra de $M_n(K)$. Analogamente, podemos definir o conjunto das matrizes triangulares inferiores que também será uma subálgebra de $M_n(K)$.

(ii) As matrizes diagonais $D_n := \{a = (a_{ij}) \in M_n(K) \ / \ a_{ij} = 0$ *para* $i \neq j\}$ *formam uma subálgebra de* $M_n(K)$.

(iii) Existem também subálgebras tais como

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & u \end{pmatrix} \ / \ a, b, c, d, x, y, z, u, \in K \right\} \subseteq M_4(K).$$

Exemplo 2.14. *As matrizes* $M_n(\mathbb{Z}) \subset M_n(\mathbb{R})$ *são fechadas para a adição e multiplicação, porém* $M_n(\mathbb{Z})$ *não é uma* $\mathbb{R}$*-subálgebra de* $M_n(\mathbb{R})$*, pois* $M_n(\mathbb{Z})$ *não é um* $\mathbb{R}$*-subespaço vetorial.*

2.1.2 Ideais

Sabemos que para uma estrutura algébrica ser considerada álgebra, ela precisa atender alguns axiomas, inclusive de anéis, sendo assim também possuem o conceito de ideal. Um ideal apresenta uma propriedade bem interessante: dado um elemento da álgebra e um elemento do ideal, o resultado da multiplicação entre esses elementos também pertencerá ao ideal.

Definição 2.15. *Sejam* A *uma* K*-álgebra e* I *um subconjunto de* A*. Um ideal à esquerda* I *de* A *é um subgrupo* $(I, +)$ *de* $(A, +)$ *tal que* $ax \in I$ *para todo* $x \in I$ *e* $a \in A$*. De maneira análoga,* I *é um ideal à direita de* A *se* $(I, +)$ *é um subgrupo tal que* $xa \in I$ *para todo* $x \in I$ *e* $a \in A$*. Um subconjunto* I *de* A *é um ideal se é ideal à direita e à esquerda.*

Observação 2.16. *Em geral, um ideal não é uma subálgebra, pois o elemento neutro não precisa pertencer a* I*. Na realidade, um ideal* $I \subseteq A$ *contém* 1_A *se, e somente se,* $I = A$*.*

Ao longo deste trabalho usaremos a notação de $\operatorname{span} G$ para determinar o espaço vetorial gerado pelo conjunto G, e $\langle G \rangle$ para determinar o ideal gerado pelo conjunto G.

Exemplo 2.17. *Considere a* K*-álgebra* $T_n(K)$ *das matrizes triangulares superiores. O* K*-subespaço das matrizes estritamente triangulares superiores dado por:*

$$I_1 := \operatorname{span}\{E_{ij} \ / \ 1 \leq i < j \leq n\}$$

é um ideal de $T_n(K)$*.*

As próximas definições nos trazem algumas possíveis características dos ideais, como nilpotência e maximalidade.

Definição 2.18. *Se I é um ideal de A e $m \geq 1$ um número inteiro, definimos I^m como o ideal gerado por todos os elementos da forma $x_1 x_2 \cdots x_m$ em que $x_1, x_2, \ldots, x_m \in I$. Definimos $I^0 = A$. O ideal I é dito nilpotente se $I^m = 0$ para algum $m \geq 1$.*

Definição 2.19. *Um ideal I de uma K-álgebra A é dito maximal quando $I \subsetneq A$ e para todo ideal J de A tal que $I \subseteq J \subseteq A$, tem-se que $J = I$ ou $J = A$.*

Definição 2.20. *O radical de uma K-álgebra A, geralmente denotado por $\operatorname{rad} A$ é a interseção de todos os ideais maximais de A.*

Teorema 2.21. *Se A é uma K-álgebra de dimensão finita, então $\operatorname{rad} A$ é nilpotente.*

A demonstração deste resultado encontra-se em [4].

2.1.3 Homomorfismos de Álgebras

Assim como espaços vetoriais, grupos e anéis, nas álgebras também é necessário definir e estudar aplicações entre elas que "preservem" sua estrutura, chamadas de homomorfismos.

Definição 2.22. *Sejam A e B duas K-álgebras. Uma aplicação $\phi : A \to B$ é um homomorfismo de K-álgebras se:*

(i) *ϕ é uma transformação linear de espaços vetoriais;*

(ii) *$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, para todo $a, b \in A$;*

(iii) *$\phi(1_A) = 1_B$.*

A aplicação $\phi : A \to B$ é um isomorfismo de K-álgebras se ϕ é um homomorfismo de K-álgebras e é bijetora. Caso A e B sejam isomorfas, denotamos $A \cong B$.

Observação 2.23. *Para checar a condição (ii) da definição, é suficiente tomar a, b elementos quaisquer em alguma base fixada do espaço vetorial, então vale também para elementos arbitrários de A, pois ϕ é uma transformação linear.*

Observação 2.24. *Note que a definição de homomorfismo de álgebras requer mais que ser apenas um homomorfismo de anéis. De fato, um homomorfismo de anéis entre K-álgebras geralmente não é um homomorfismo de K-álgebras. O caso a seguir, exemplifica essa observação.*

Exemplo 2.25. *Considerando o conjunto dos números complexos* $\mathbb{C}$ *como uma* $\mathbb{C}$*-álgebra.*

Seja $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, dada por* $\phi(z) := \overline{z}$*, a aplicação de conjugação complexa.*

Pelas regras usuais da conjugação complexa ϕ *satisfaz os axiomas (ii) e (iii) da definição anterior, além disso* $\phi(z) + \phi(w) = \overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w} = \phi(z + w)$*, para* $z, w \in \mathbb{C}$*. Logo,* ϕ *é um homomorfismo de anéis. Porém,* ϕ *não satisfaz o axioma (i), note que:*

$$\phi(ii) = \phi(i^2) = \phi(-1) = -1.$$

Por outro lado, considerando i *como escalar,*

$$i\phi(i) = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1.$$

Então, ϕ *não é um homomorfismo de* $\mathbb{C}$*-álgebras. Contudo, se considerarmos* $\mathbb{C}$ *como uma* $\mathbb{R}$*-álgebra, então a conjugação complexa é um homomorfismo de* $\mathbb{R}$*-álgebras. De fato, para* $r \in \mathbb{R}$ *e* $z \in \mathbb{C}$*, temos:*

$$\phi(rz) = \overline{rz} = \overline{r}\,\overline{z} = r\overline{z} = r\phi(z).$$

2.2 Álgebras de Caminhos

Nesta seção, iremos tratar de uma representação gráfica, chamada *quiver*. Além disso, é possível através de um *quiver* Q obter um tipo especial de álgebra sobre K chamada álgebra de caminhos, geralmente denotada por KQ. A álgebra de caminhos KQ tem estrutura de espaço vetorial, em que sua base é dada por todos os caminhos em Q.

Definição 2.26. *Um quiver* Q *é dado por uma quádrupla* (Q_0, Q_1, s, t) *onde* Q_0 *é um conjunto de vértices,* Q_1 *um conjunto de flechas e* $s, t : Q_1 \to Q_0$ *funções que associam, para cada flecha* $\alpha \in Q_1$*, seu início* $s(\alpha)$ *e seu término* $t(\alpha)$*, respectivamente. Um quiver* Q *é dito finito se* Q_0 *e* Q_1 *são conjuntos finitos.*

Um caminho não trivial em Q é uma sequência $p = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r$ de flechas $\alpha_i \in Q_1$ tais que $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para todo $i = 1, \dots, r - 1$. O número r de flechas é chamado de comprimento p. O vértice inicial é definido por $s(p) = s(\alpha_1)$ e o final por $t(p) = t(\alpha_r)$. Para cada vértice $i \in Q_0$, existe o caminho trivial de comprimento 0, chamado e_i tal que $s(e_i) = i = t(e_i)$. Um caminho p em Q é chamado de ciclo orientado se p tem um comprimento positivo e $s(p) = t(p)$.

Exemplo 2.27. *Dado o quiver:*

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \ .$$

Podemos classificá-lo como finito, pois $Q_0 = \{1, 2, 3\}$ *e* $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$. *Além disso, o caminho* $\alpha\beta$ *em* Q *é de comprimento* 2*, pois é uma sequência de duas flechas tais que* $t(\alpha) = s(\beta)$.

Os próximos conceitos relacionados a *quiver* serão trabalhados nos resultados envolvendo álgebras *pullback* ao final do trabalho.

Definição 2.28. *Um subquiver* $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ *de* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ *é um quiver tal que* $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ *e as restrições de* s *e* t *são* s' *e* t' *respectivamente, ou seja,* $s|_{Q'_1} = s'$, $t|_{Q'_1} = t'$ *(em outras palavras, se* $\alpha : x \to y$ *pertence a* Q'_1*, então* $s'(\alpha) = s(\alpha)$ *e* $t'(\alpha) = t(\alpha)$*).*

Observação 2.29. *Um quiver* Q *é dito conexo se olhado como um grafo não orientado, o grafo é conexo, isto é, existe um caminho entre qualquer par de vértices do quiver. Um quiver não conexo, pode ser particionado em subquivers conexos, estes recebem o nome de componentes conexos.*

Observação 2.30. *Um subquiver* Q' *é denominado pleno se* $Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 \,|\, s(\alpha), t(\alpha) \in Q'_0\}$. *Assim, um subquiver pleno é completamente determinado por seu conjunto de vértices.*

Observação 2.31. *Um subquiver* Q' *é chamado de convexo quando para todo par de vértices de* Q'*, se existir um caminho* $p = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r$ *ligando esses vértices, então* $s(\alpha_i), t(\alpha_i)$ *estão em* $(Q')_0$*, para todo* $i \in \{1, \ldots, r\}$.

A definição a seguir é considerada uma das mais importantes deste trabalho, pois a partir dela conseguimos transformar uma representação gráfica em uma estrutura algébrica.

Definição 2.32. *A álgebra de caminhos* KQ *do quiver* Q *sobre o corpo* K *tem estrutura de espaço vetorial com base dada por todos os caminhos em* Q. *Para dois caminhos*

$p = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r$ e $q = \beta_1\beta_2\dots\beta_s$ em Q a multiplicação é dada da seguinte forma:

$$p \cdot q = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r\beta_1\beta_2\dots\beta_s, & \textit{se } t(\alpha_r) = s(\beta_1) \textit{ e} \\ \qquad\qquad 0 \qquad\qquad , & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

A multiplicação em KQ é definida na base por concatenação de caminhos (se possível) e é extendida linearmente para uma combinação linear. Para os caminhos triviais temos que $e_i \cdot p = p$ para $i = s(p)$ e $e_i \cdot p = 0$ para $i \neq s(p)$. Por outro lado, $p \cdot e_i = p$ para $i = t(p)$ e $p \cdot e_i = 0$ para $i \neq t(p)$.

Para Q finito, a multiplicação em KQ é associativa pois a concatenação de caminhos é associativa, e é distributiva pela definição de produtos para combinações lineares arbitrárias. Afirmamos que a identidade de KQ é dada pela soma de caminhos triviais, isto é:

$$1_{KQ} = \sum_{i \in Q_0} e_i.$$

De fato, para todo caminho p em KQ, temos

$$p \cdot \left(\sum_{i \in Q_0} e_i \right) = \sum_{i \in Q_0} p \cdot e_i = p \cdot e_{t(p)} = p.$$

Por outro lado,

$$p = e_{s(p)} \cdot p = \sum_{i \in Q_0} e_i \cdot p = \left(\sum_{i \in Q_0} e_i \right) \cdot p.$$

E para todo $a \in KQ$, usando a distributiva, segue que

$$a \cdot \left(\sum_{i \in Q_0} e_i \right) = a = \left(\sum_{i \in Q_0} e_i \right) \cdot a.$$

Observação 2.33. *Os caminhos triviais e_i são os elementos idempotentes da álgebra de caminhos KQ.*

Exemplo 2.34. *Considerando o quiver $1 \xrightarrow{\alpha} 2$, a álgebra de caminhos KQ tem dimensão 3, a base consiste nos caminhos $\{e_1, e_2, \alpha\}$. A tábua da multiplicação para KQ é* *dada por:*

$\cdot$	e_1	α	e_2
e_1	e_1	α	0
α	0	0	α
e_2	0	0	e_2

Exemplo 2.35. *Seja Q um quiver com um único vértice 1 e uma flecha α com $s(\alpha) = 1 = t(\alpha)$, isto é,*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd} .$$

Então a álgebra de caminhos KQ tem como base o conjunto $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots\}$, sendo assim, a álgebra é de dimensão infinita. Agora, considere $K[x]$ a álgebra de polinômios com coeficientes no corpo K. É fácil observar que KQ e $K[x]$ são álgebras isomorfas, utilizando a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : KQ &\to K[x] \\ e_1 &\mapsto 1 \\ \alpha &\mapsto x \end{aligned}$$

Exemplo 2.36. *Um quiver pode ter múltiplas flechas entre dois vértices, como a seguir:*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2 \end{tikzcd} .$$

Este é um caso chamado quiver de Kronecker.

Exemplo 2.37. *Seja $T_2(K)$ a álgebra das matrizes 2×2 triangulares inferiores e considere a álgebra de caminhos KQ do quiver $1 \xleftarrow{\alpha} 2$. Essas álgebras são isomorfas pela seguinte aplicação:*

$$\begin{aligned} \psi : T_2(K) &\to KQ \\ E_{11} &\mapsto e_1 \\ E_{21} &\mapsto \alpha \\ E_{22} &\mapsto e_2 \end{aligned}$$

2.2.1 Ideais e Quocientes

Ideais já foram introduzidos para quaisquer álgebra. Nesta seção, veremos exemplos de ideais em álgebras de caminhos e um caso particular de ideal, chamado admissível.

Exemplo 2.38. *Sejam Q um quiver e $KQ = A$ uma álgebra de caminhos. Para todo $p \in A$, o subconjunto $Ap = \{ap \mid a \in A\}$ é um ideal à esquerda de A. Analogamente, $pA = \{pa \mid a \in A\}$ é um ideal à direita de A para todo $p \in A$. Tomando o caminho trivial e_i de um vértice $i \in Q_0$, temos um ideal à esquerda Ae_i. Isso é gerado por todos os caminhos em Q que terminam no vértice i. Similarmente, o ideal à direita e_iA é gerado por todos os caminhos em Q que começam no vértice i.*

Exemplo 2.39. *Sejam KQ uma álgebra de caminhos e J o subconjunto de todas as flechas de Q. O ideal $\langle J \rangle$ é geralmente denotado por R_Q.*

Exemplo 2.40. *O conjunto R_Q^n representa o ideal gerado por todas os caminhos de comprimento maior ou igual a n em Q.*

Seja Q o quiver $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5$ associado a álgebra de caminhos KQ, o ideal $R_Q^3 = \langle \alpha\beta\gamma, \beta\gamma\delta \rangle$.

Definição 2.41. *Sejam Q um quiver finito e R_Q o ideal de KQ, gerado pelas flechas. Um ideal I de KQ é dito admissível se existir $m \geq 2$ tal que*

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2.$$

Observação 2.42. *Segue da definição acima que um ideal I de KQ, contido em R_Q^2, é admissível se, e somente se, I contém todos os caminhos cujo o comprimento é grande o suficiente.*

Exemplo 2.43. *Seja Q o quiver*

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

O ideal $I_1 = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ da K-álgebra KQ é admissível, mas $I_2 = \langle \alpha\beta - \lambda \rangle$ não é, pois $\alpha\beta - \lambda$ não pertence a R_Q^2.

Assim como em conjuntos, grupos e anéis, também é possível construir quocientes de álgebras. Neste trabalho, o quociente de álgebras de caminhos por ideais admissíveis é necessário para um importante resultado, através dele, conseguimos um isomorfismo entre uma álgebra que atende certas condições e um quociente de álgebras de caminhos.

Definição 2.44. *Se I é um ideal admissível de KQ, o par (Q, I) é dito um quiver com relações. O quociente KQ/I é chamado de álgebra do quiver com relações.*

Observação 2.45. *As relações são os geradores do ideal admissível.*

Exemplo 2.46. *Seja Q o quiver*

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 \arrow[rr, dash, dashed] & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

Pelo exemplo anterior, o ideal $I_1 = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ da K-álgebra KQ é admissível. Sendo assim, KQ/I_1 é um quociente de álgebra e o quiver acima com a relação $\alpha\beta - \gamma\delta$ é um par (Q, I_1), ou seja, um quiver com relações.

Como $\alpha\beta - \gamma\delta \in I_1$, no quociente KQ/I_1 temos que $\overline{\alpha\beta - \gamma\delta} = \overline{0}$. Logo, $\overline{\alpha\beta} - \overline{\gamma\delta} = \overline{0}$, e consequentemente, $\overline{\alpha\beta} = \overline{\gamma\delta}$. Através deste cálculo obtemos que o caminho $\overline{\alpha\beta}$ é igual ao caminho $\overline{\gamma\delta}$ em (Q, I_1).

O tracejado entre 1 e 4 indica uma relação comutativa, ou seja, percorrer o caminho $\alpha\beta$ é o mesmo que percorrer $\gamma\delta$.

2.3 Módulos

A teoria de representações estuda como álgebras podem atuar sobre espaços vetoriais. É necessário a noção fundamental de um módulo, ou equivalentemente, de uma representação. A forma mais elementar para a definição de módulos é vê-los como uma generalização de espaços vetoriais, onde os escalares são elementos da álgebra.

Um espaço vetorial sobre um corpo K é um grupo abeliano V junto com a multiplicação do escalar $K \times V \to V$, satisfazendo os axiomas usuais. Para termos a noção de um A-módulo devemos substituir o corpo K pela álgebra A.

Definição 2.47. *Seja A uma K-álgebra. Um A-módulo à esquerda é um grupo abeliano*

$(M,+)$ com a operação binária:

$$\begin{aligned} A \times M &\to M \\ (a,m) &\mapsto\ a \cdot m \end{aligned}$$

tais que para todo $a, b \in A$ e todo $m, n \in M$, temos:

i) $(a+b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$;

ii) $a \cdot (m+n) = a \cdot m + a \cdot n$;

iii) $a \cdot (b \cdot m) = ab \cdot m$;

iv) $1_A \cdot m = m$.

Exemplo 2.48. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Considere A uma subálgebra da álgebra $End_K(V)$ de todas as transformações lineares sobre V. Então V se torna um A-módulo, onde a ação de A é dada aplicando as transformações lineares em vetores, isto é:*

$$\begin{aligned} A \times V &\to V \\ (\varphi, v) &\mapsto\ \varphi \cdot v := \varphi(v). \end{aligned}$$

Agora, iremos verificar os quatro axiomas da definição anterior, sejam $\varphi, \psi \in A$ e $v, w \in V$:

(i) $(\varphi + \psi) \cdot v = (\varphi + \psi)(v) = (\varphi)(v) + (\psi)(v) = \varphi \cdot v + \psi \cdot v$;

(ii) $\varphi \cdot (v + w) = \varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w) = \varphi \cdot v + \varphi \cdot w$;

(iii) $\varphi \cdot (\psi \cdot v) = \varphi(\psi(v)) = (\varphi \circ \psi)(v) = (\varphi \circ \psi) \cdot v$;

(iv) $1_A \cdot v = id_V(v) = v$.

Exemplo 2.49. *Seja $A = KQ$ álgebra de caminhos de um quiver Q. Para um vértice fixado i, seja M o ideal gerado por todos os caminhos que terminam em i. Então $M = Ae_i$, que é um ideal à esquerda de A e assim é um A-módulo.*

Observação 2.50. *Todo A-módulo V é um K-espaço vetorial. Para isso, basta perceber que o elemento λv pode ser escrito como $\lambda 1_A v$, em que $\lambda \in K$ e $v \in V$.*

Definição 2.51. *Dizemos que um módulo M é finitamente gerado quando $\dim_K M$ é finita.*

2.3.1 Submódulos

Em analogia com as construções de espaços vetoriais, nos módulos, também é possível encontrar submódulos e módulos quociente de A-módulos. Um submódulo de um A-módulo M será um subconjunto U de M onde ele mesmo é um módulo com as operações herdadas de M. Neste caso, podemos transformar o grupo quociente M/U em A-módulo.

Definição 2.52. *Seja A uma K-álgebra e seja M um A-módulo. Um submódulo U sobre A de M é um subgrupo $(U, +)$, que é fechado sobre a ação de A, isto é, $au \in U$ para todo $a \in A$ e $u \in U$.*

Exemplo 2.53. *Considerando uma K-álgebra A como um A-módulo, com a ação dada pela multiplicação da álgebra. Então os A-submódulos de A são precisamente os ideais de A.*

Para módulos de K-álgebras, temos alguns exemplos específicos de submódulos:

Exemplo 2.54. *Sejam Q um quiver e $A = KQ$ a álgebra de caminhos de Q. Para qualquer $r \geq 1$, seja $A^{\geq r}$ o subespaço de A gerado pelos caminhos de comprimento maior ou igual a r, logo $A^{\geq r}$ é um submódulo de A, em que A pode ser vista como um A-módulo. Note que, Ae_i é um submódulo de A, se i é um vértice de Q, então $(Ae_i)^{\geq r} := Ae_i \cap A^{\geq r}$ também será um submódulo de A.*

Algumas vezes um módulo pode ser "quebrado" em pequenos pedaços, essa noção se refere a soma direta de submódulos.

Definição 2.55. *Sejam A uma K-álgebra, M um A-módulo e $U_1, U_2, \ldots, U_t$ submódulos sobre A de M. Dizemos que M é a soma direta de $U_1, U_2, \ldots, U_t$, denotada $M = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_t$ se as duas condições são satisfeitas:*

(i) $M = U_1 + U_2 + \cdots + U_t$, isto é, todo elemento de M pode ser expressado como a soma dos elementos dos submódulos U_i;

(ii) Para todo j com $1 \leq j \leq t$ temos $U_j \cap \sum_{i \neq j} U_i = 0$.

Observação 2.56. *A definição acima pode ser generalizada para soma direta de uma família infinita de submódulos.*

Agora, faremos uma importante construção sobre módulos quocientes. Considere U um submódulo de um A-módulo M, então as classes laterais

$$M/U := \{m + U \,|\, m \in M\}$$

formam um grupo abeliano com a adição $(m + U) + (n + U) = (m + n) + U$.

Proposição 2.57. *Sejam A uma K-álgebra, M um A-módulo e U um submódulo de M. Então as classes laterais M/U formam um A-módulo se definirmos*

$$a(m + U) := am + U \text{ para todo } a \in A \text{ e } m \in M.$$

Este módulo é chamado de módulo quociente de M módulo U.

Demonstração: Para demonstrar que M/U é um módulo, basta checar se a ação de A é bem definida, pois os axiomas de módulos são herdados de M.

Se $m + U = m' + U$ então $m - m' \in U$, e portanto, $am - am' = a(m - m') \in U$, pois U é submódulo. Logo, $am + U = am' + U$.

Portanto a ação de A está bem definida. ∎

2.3.2 Homomorfismos de Módulos

Nesta seção, iremos introduzir uma aplicação importante e conveniente entre módulos, chamada "homomorfismo de módulos". Através dessa aplicação é possível fornecer uma generalização direta do conceito de uma transformação linear sobre K de espaços vetoriais.

Definição 2.58. *Suponha que A seja uma K-álgebra, e M e N sejam A-módulos. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo de módulos sobre A se, para todo $m, m_1, m_2 \in M$ e $a \in A$, temos:*

(i) $\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$;

(ii) $\varphi(am) = a\varphi(m)$.

Dizemos que M é isomorfo a N, se existir uma aplicação $\varphi : M \to N$ bijetora que é um homomorfismo. Quando há um isomorfismo entre A-módulos usamos a notação $M \cong N$.

Agora, veremos um conceito definido em várias áreas da matemática, que será fundamental para nosso trabalho e em seguida dois tipos de homomorfismos muito utilizados.

Definição 2.59. *Uma sequência de A-módulos e homomorfismos*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0$$

é chamada de sequência exata curta quando φ é um homomorfismo injetor, ψ é um homomorfismo sobrejetor e $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$*.*

Exemplo 2.60. *Considere a sequência:*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\varphi} L \oplus N \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0\ .$$

Se φ é uma inclusão, ou seja, $\varphi : L \to L \oplus N$, em que $\varphi(l) = l + 0$, e ψ é uma projeção de N, ou seja, $\psi : L \oplus N \to N$, em que $\psi(l + n) = n$. Então a sequência é exata. Também podemos reescrever a sequência com a seguinte notação:

$$0 \longrightarrow L \hookrightarrow L \oplus N \twoheadrightarrow N \longrightarrow 0\ .$$

Em que, a seta $\hookrightarrow$ representa a inclusão (aplicação injetora) e a seta $\twoheadrightarrow$ a projeção (aplicação sobrejetora).

Definição 2.61. *Sejam $\varphi : L \to M$ e $\psi : M \to N$ homomorfismos de A-módulos. Chamamos um homomorfismo $s : N \to M$ de seção de ψ se $\psi s = 1_N$, e chamamos um homomorfismo $r : M \to L$ de retração de φ se $r\varphi = 1_L$.*

Proposição 2.62. *Dada uma sequência exata de A-módulos*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0$$

as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Existe uma retração $r : M \to L$ tal que $r\varphi = 1_L$.

(ii) Existe uma seção $s : N \to M$ tal que $\psi s = 1_N$.

Nestas condições, $M \cong L \oplus N$.

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [12].

Observação 2.63. *Quando a sequência exata de A-módulos atende uma das condições citadas acima, dizemos que a sequência cinde.*

2.4 Representações de Álgebras

As álgebras são estruturas abstratas com inúmeros elementos, sua compreensão se torna difícil quando olhamos somente para elas. O desenvolvimento da teoria de representações facilitou e otimizou o trabalho matemático sobre as estruturas algébricas. Podemos entender uma representação de álgebra como a transformação de um lugar turvo para um território bem conhecido. Esse ambiente familiar se encontra na Álgebra Linear, a partir de estruturas como espaços vetoriais e aplicações, como transformações lineares.

Definição 2.64. *Seja K um corpo e A uma K-álgebra. A representação de A é um K-espaço vetorial V com um homomorfismo de álgebras $\Theta : A \to \mathrm{End}_K(V)$.*

Exemplo 2.65. *Seja A uma K-subálgebra de $M_n(K)$, a álgebra das $n \times n$ matrizes, então a aplicação de inclusão é um homomorfismo de álgebras e consequentemente uma representação matricial A. Similarmente, seja A uma subálgebra da K-álgebra $\mathrm{End}_K(V)$, então a aplicação de inclusão de A para $\mathrm{End}_K(V)$ é um homomorfismo de álgebras e consequentemente uma representação de A.*

Na seção sobre módulos, em um exemplo, introduzimos módulos para uma álgebra como um espaço vetorial em que as álgebras atuam como transformações lineares. O resultado a seguir, nos mostra que módulos e representações de uma álgebra são os mesmos.

Teorema 2.66. *Seja K um corpo e A uma K-álgebra.*

(i) Suponha que V seja um A-módulo com a ação de A.

$$\begin{aligned} A \times V &\to V \\ (a, v) &\mapsto a \cdot v. \end{aligned}$$

A representação de A é dada por:

$$\begin{aligned} \theta : A &\to \mathrm{End}_K(V) \\ a &\mapsto \theta(a)(v) = a \cdot v \end{aligned}$$

para todo $a \in A$ e $v \in V$.

(ii) Suponha que $\theta : A \to \mathrm{End}_K(V)$ seja uma representação de A. Então V se torna um

A-módulo

$$\begin{aligned} A \times V &\to V \\ a \cdot v &\mapsto \theta(a)(v) \end{aligned}$$

para todo $a \in A$ e $v \in V$.

A grosso modo, a representação θ corresponde a um A-módulo V que descreve como cada elemento $a \in A$ atua linearmente no espaço vetorial V e vice versa.

Demonstração: A prova consiste em traduzir os axiomas de módulo para a nova linguagem de representações e vice versa. Iremos demonstrar o item *i)*, o item *ii)* é demonstrado analogamente, onde o argumento é reverso.

Primeiro, iremos mostrar que $\theta(a) \in \mathrm{End}_K(V)$ para todo $a \in A$. Pela Observação 2.50, todo A-módulo é um K-espaço vetorial, então para todo $\lambda, \mu \in K$ e $v, w \in V$, temos:

$$\theta(a)(\lambda v + \mu w) = \theta(a)(\lambda 1_A v + \mu 1_A w) = (a\lambda 1_A)v + (a\mu 1_A)w = (\lambda a)v + (\mu a)v =$$
$$= \lambda(av) + \mu(aw) = \lambda\theta(a)(v) + \mu\theta(a)(w),$$

em diversos momentos, foi usada a definição de álgebra.

Vamos verificar que θ é um homomorfismo de álgebra.

Sejam $\lambda, \mu \in K$, $a, b \in A$ e $v \in V$, temos:

$$\begin{aligned} \theta(\lambda a + \mu b)(v) &= (\lambda a + \mu b)(v) = \lambda(av) + \mu(bv) = \lambda(\theta(a)(v)) + \mu(\theta(b)(v)) \\ &= (\lambda\theta(a))(v) + (\mu\theta(b))(v) = (\lambda\theta(a) + \mu\theta(b))(v), \end{aligned}$$

isto é, $\theta(\lambda a + \mu b) = \lambda\theta(a) + \mu\theta(b)$. Logo, θ é uma transformação linear sobre K.

Agora, para todo $a, b \in A$ e $v \in V$, temos:

$$\theta(ab)(v) = (ab)v = a(bv) = (\theta(a)\theta(b))(v),$$

consequentemente, $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$.

É imediato da definição que $\theta(1_A) = id_v$, portanto θ é um homomorfismo. ∎

Exemplo 2.67. *Seja V um K-espaço vetorial, $A \subseteq \mathrm{End}_K(V)$ uma subálgebra e a aplicação de inclusão $\theta : A \to \mathrm{End}_K(V)$ uma representação, em que V é interpretado como um A-módulo. Desta forma, obtemos precisamente o "módulo natural" com a ação de A dada* *por:*

$$\begin{aligned} A \times V &\to V \\ (\varphi, v) &\mapsto \varphi(v). \end{aligned}$$

Exemplo 2.68. *Se A é uma K-álgebra, então A é um A-módulo com a ação de A dada pela multiplicação em A. A representação correspondente de A é dada por:*

$$\begin{aligned} \theta : A &\to \mathrm{End}_K(A) \\ \theta(a)(x) &= ax. \end{aligned}$$

A representação θ é chamada de representação regular de A.

Definição 2.69. *Seja K um corpo. Suponha que são dadas duas representações θ_1, θ_2 de uma K-álgebra A onde $\theta_1 : A \to \mathrm{End}_K(V_1)$ e $\theta_2 : A \to \mathrm{End}_K(V_2)$. Então θ_1 e θ_2 são ditas equivalentes se existir um isomorfismo de espaços vetoriais $\psi : V_1 \to V_2$ tal que $\theta_1(a) = \psi^{-1} \circ \theta_2(a) \circ \psi$, para todo $a \in A$.*

Proposição 2.70. *Seja K um corpo e A uma K-álgebra. Então duas representações $\theta_1 : A \to \mathrm{End}_K(V_1)$ e $\theta_2 : A \to \mathrm{End}_K(V_2)$ de A são equivalentes se, e somente se, os A-módulos correspondentes V_1 e V_2 são isomorfos.*

Demonstração: Vamos supor que as representações θ_1 e θ_2 são equivalentes por um isomorfismo de espaços vetoriais $\varphi : V_1 \to V_2$. Precisamos provar que φ é um homomorfismo de A-módulos, e consequentemente será um isomorfismo de A-módulos. Por definição, $\varphi : V_1 \to V_2$ é K-linear, mais ainda, para $v \in V_1$ e $a \in A$, temos:

$$\varphi(av) = \varphi(\theta_1(a)(v)) = \theta_2(a)(\varphi(v)) = a\varphi(v).$$

Portanto, V_1 e V_2 são isomorfos.

Agora, vamos supor que $\varphi : V_1 \to V_2$ é um isomorfismo de A-módulos. Então para todo $a \in A$ e $v \in V_1$, temos:

$$\varphi(\theta_1(a)(v)) = \varphi(av) = a\varphi(v) = \theta_2(a)(\varphi(v)).$$

Como dito anteriormente, isso é verdade para todo $v \in V_1$, isto é, para todo $a \in A$, temos:

$$\varphi \circ \theta_1(a) = \theta_2(a) \circ \varphi.$$

Sendo assim, as representações de θ_1 e θ_2 são equivalentes.

■

2.5 Representação de *Quivers*

Uma álgebra de caminhos KQ tem como base os caminhos de Q, isso nos permite definir uma representação de Q e relacioná-la com KQ-módulos. De forma geral, uma representação é como se segue: um *quiver* consiste em vértices e flechas, para compreender isso na configuração de espaços vetoriais, iremos representar vértices como espaços vetoriais e flechas como transformações lineares, quando as flechas são concatenadas as aplicações serão compostas.

Definição 2.71. *Seja Q um quiver finito. Uma K-representação linear, ou uma representação M de Q é definida da seguinte forma:*

- *Cada vértice a em Q_0 é associado a um K-espaço vetorial M_a;*
- *Cada flecha $\alpha : a \to b$ em Q_1 é associada a uma K-transformação linear $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.*

Tal representação é denotada por $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a\in Q_0, \alpha\in Q_1}$, ou simplesmente, $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. Esta representação é de dimensão finita se cada espaço vetorial M_a é de dimensão finita.

Seja $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ e $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ duas representações de Q. Um morfismo de representações $f : M \to M'$ é uma família $f = (f_a)_{a\in Q_0}$ de K-transformações lineares $(f_a : M_a \to M'_a)_{a\in Q_0}$ que são compatíveis com φ_α da seguinte forma: para cada flecha $\alpha : a \to b$, temos $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$ ou, equivalentemente, o diagrama a seguir é comutativo.

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"'] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"'] & M'_b \end{tikzcd}$$

Exemplo 2.72. *Seja Q o quiver de Kronecker $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2$. Podemos representar Q de várias formas, duas delas são:*

Uma representação M de Q:

$$K \underset{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}{\overset{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}{\rightrightarrows}} K^2 \ .$$

Outra representação M' de Q:

$$K^2 \underset{\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]}{\overset{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]}{\rightrightarrows}} K^2 \ .$$

Ambas são de dimensão finita. Agora, considere um morfismo $M \to M'$ definido por:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, shift left, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"] \arrow[r, shift right, "{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}"'] \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"'] & K^2 \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]}"] \\
K^2 \arrow[r, shift left, "{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]}"] \arrow[r, shift right, "{\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]}"'] & K^2
\end{tikzcd}$$

O diagrama acima comuta, pois

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Também podemos definir representações para *quivers* com relações. Seja Q um *quiver* finito e I um ideal admissível de KQ. Uma representação $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ de Q satisfaz as relações em I, se tivermos

$$\varphi_\rho = 0 \text{ para todas as relações } \rho \in I.$$

Se I é gerado pelo conjunto finito de relações $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$, a representação M é limitada por I se, e somente se, $\varphi_{\rho_j} = 0$, para todo j tal que $1 \leq j \leq m$.

Observação 2.73. *Através de uma bijeção, é possível associar cada representação de um quiver com relações a um módulo e vice versa.*

3 Alguns Módulos Especiais

Conseguimos classificar álgebras a partir de suas representações, essas podem ser vistas como módulos pelo Teorema 2.66. Nesta seção veremos que qualquer módulo finitamente gerado pode ser escrito como uma soma direta de módulos indecomponíveis, além disso, estudaremos algumas classes de módulos que se destacam: simples, projetivos e injetivos. Ao longo deste trabalho usaremos a notação mod A para denotar a família de módulos finitamente gerados à esquerda sobre a álgebra A.

3.1 Módulos Indecomponíveis

Nesta subseção faremos uma breve introdução de uma das estruturas que dá nome a este trabalho. Os módulos indecomponíveis podem ser vistos como pequenos bloquinhos que são capazes de construir grandes muros. A importância de conhecer o conjunto de módulos indecomponíveis de uma álgebra é que a partir desse conjunto conseguimos descobrir todos os módulos existentes sobre a mesma.

Definição 3.1. *Sejam A uma K-álgebra e M um A-módulo não nulo. Então M é chamado de indecomponível se ele não pode ser escrito como soma direta $M = U \oplus V$ para submódulos U e V não nulos. Caso contrário, M é chamado de decomponível.*

Exemplo 3.2. *Todo A-módulo da forma Ae_i, com e_i primitivo, é indecomponível.*

Teorema 3.3. *Seja M um módulo finitamente gerado. Então existe uma única decomposição de soma direta $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, a menos de isomorfismo, em que cada M_i é um módulo indecomponível.*

O teorema anterior é conhecido como Teorema da Decomposição Única e sua demonstração pode ser encontrada com detalhes em [4].

Observação 3.4. *Submódulos ou módulos quocientes de módulos indecomponíveis, podem não ser indecomponíveis. De fato, considere a álgebra de caminhos $A = KQ$ com Q o quiver:*

$$1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2 \ .$$

Seja $M = Ae_2$ o módulo indecomponível gerado pelo conjunto $\{e_2, \alpha, \beta\}$ de A e U o submódulo gerado pelo conjunto $\{\alpha, \beta\}$. Cada elemento da base $\{e_1, e_2, \alpha, \beta\}$ de A atua *em U como escalar. Sendo assim, U e todo subespaço de U é um submódulo de A. Porém, U pode ser escrito como soma direta de dois submódulos:*

$$U = \operatorname{span}\{\alpha, \beta\} = \operatorname{span}\{\alpha\} \oplus \operatorname{span}\{\beta\}.$$

Logo, M é um módulo indecomponível e seu submódulo U é decomponível.

3.2 Módulos Simples

Nesta subseção, vamos introduzir módulos simples para álgebras sobre um corpo. Essas estruturas possuem uma caracterização mais elementar que outros módulos, dispõe apenas de submódulos triviais.

Definição 3.5. *Um A-módulo V não nulo é chamado de simples se não possuir nenhum submódulo diferente de 0 e V.*

Observação 3.6. *Todo módulo simples é indecomponível.*

Exemplo 3.7. *Todo A-módulo V tal que $\dim_K V = 1$ é um módulo simples. De fato, V não possui nenhum K-subespaço além dos triviais 0 e V.*

Exemplo 3.8. *Módulos simples podem ter dimensões arbitrariamente grandes. Considerando $A = M_n(K)$ uma K-álgebra e $V = K^n$ um A-módulo. Os submódulos de K^n sobre $M_n(K)$ são os submódulos triviais 0 e K^n. Logo, K^n é um módulo simples sobre $M_n(K)$ de dimensão n.*

Também podemos descrever módulos simples para álgebras de caminhos. Para isso, vamos considerar Q um *quiver* sem ciclos orientados e, consequentemente $A = KQ$ será de dimensão finita. Sabemos que para todo vértice $i \in Q_0$ existe um caminho trivial e_i de comprimento 0. Agora, vamos considerar o A-módulo Ae_i gerado por e_i. Como espaço vetorial este módulo é gerado pelos caminhos que terminam em i, além disso, Ae_i possui um submódulo $J_i := Ae_i^{\geq 1}$ gerado por todos os caminhos de comprimento maior ou igual a 1 que terminam no vértice i.

Por isso, temos n A-módulos de dimensão 1, consequentemente simples, como módulos quocientes da forma:

$$S_i := \frac{Ae_i}{J_i} = \operatorname{span}\{e_i + J_i\},$$

para $i = 1, \dots, n$.

Os A-módulos $S_1, S_2, \dots, S_n$ são dois a dois não isomorfos. De fato, seja $\varphi : S_i \to S_j$ um homomorfismo de A-módulos para algum $i \neq j$, então existe um escalar $\lambda \in K$ tal que $\varphi(e_i + J_i) = \lambda e_j + J_j$. Consequentemente, temos:

$$\varphi(e_i + J_i) = \varphi(e_i^2 + J_i) = \varphi(e_i(e_i + J_i)) = e_i(\lambda e_j + J_j) = \lambda(e_i e_j + J_j) = 0,$$

como e_i e e_j são ortogonais, $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$. Em particular, φ não é um isomorfismo.

O teorema a seguir, mostra que a construção feita é única e fornece todos os KQ-módulos simples, a menos de isomorfismo.

Teorema 3.9. *Seja K um corpo e Q um quiver sem ciclos orientados. Então a álgebra de caminhos $A = KQ$ de dimensão finita tem precisamente os módulos simples (a menos de isomorfismo) dados por $S_1, \dots, S_n$ onde $\frac{Ae_i}{J_i}$ para $i \in Q_0$. Em particular, todos os A-módulos simples são de dimensão 1 e são rotulados pelos vértices de Q.*

A demonstração formal do teorema pode ser encontrada em [5].

Exemplo 3.10. *A álgebra de matrizes triangulares superiores $T_n(K)$ é isomorfa a álgebra de caminhos de um quiver Q, dado a seguir:*

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow n-1 \longleftarrow n\ .$$

Pelo teorema anterior, temos que KQ e, consequentemente, $T_n(K)$ têm precisamente n módulos simples a menos de isomorfismo.

3.3 Módulos Projetivos

Os módulos projetivos são fundamentais para a definição de álgebra básica, um tipo de álgebra importante e necessária para provar um resultado de grande relevância em nosso trabalho. Além disso, quando olhamos para a representação de uma álgebra, podemos representá-la em relação aos seus módulos projetivos.

Definição 3.11. *Um A-módulo P é chamado de módulo projetivo, se para qualquer homomorfismo sobrejetor $f : M \to N$ e qualquer morfismo $g : P \to N$, existe um morfismo*

$h : P \to M$ *tal que* $g = fh$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists h"'] \arrow[d, "\forall g"] & \\ M \arrow[r, "\forall f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

A seguir, faremos um exemplo de representação da álgebra KQ/I em relação aos seus módulos projetivos indecomponíveis. Cada representação de um módulo projetivo indecomponível é associado a um vértice do *quiver* Q.

Fixaremos o vértice i. O módulo projetivo indecomponível P_i é representado por $P_i = ((P_i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$. Cada vértice j será associado a um K-espaço vetorial $(P_i)_j$. Esse espaço vetorial é gerado pelos caminhos que partem do vértice fixado i e chegam no vértice analisado j. Seja $\alpha : j \to k$, com $j, k \in Q_0$, a transformação linear $\varphi_\alpha : (P_i)_j \to (P_i)_k$ é dada pela multiplicação à direita por α.

Exemplo 3.12. *Seja* Q *o quiver dado por*

$$\begin{tikzcd} & & 3 \arrow[dr, "\gamma"] & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"'] & 2 \arrow[ur, "\beta"] & & 4 \arrow[ll, "\delta"] \end{tikzcd}$$

em que $I = \langle \beta\gamma\delta \rangle$. *Como* Q *é um quiver finito e* I *um ideal admissível de* KQ, *as representações dos projetivos abaixo* $P_i = ((P_i)_j, \varphi_\alpha)$ *de* Q *satisfazem as relações em* I, *pois* $\varphi_{\beta\gamma\delta} = 0$ *para a relação* $\beta\gamma\delta \in I$.

$(P_1)_1 = Kid$

$(P_1)_2 = K\alpha$

$(P_1)_3 = K\alpha\beta$

$(P_1)_4 = K\alpha\beta\gamma$

Representação P_1*:*

$$\begin{tikzcd} & & K \arrow[dr, "1"] & \\ K \arrow[r, "1"'] & K \arrow[ur, "1"] & & K \arrow[ll, "0"] \end{tikzcd}$$

$(P_2)_1 = 0$

$(P_2)_2 = Kid$

$(P_2)_3 = K\beta$

$(P_2)_4 = K\beta\gamma$

Representação P_2*:*

$$\begin{tikzcd} & & K \arrow[dr, "1"] & \\ 0 \arrow[r, "0"'] & K \arrow[ur, "1"] & & K \arrow[ll, "0"] \end{tikzcd}$$

$(P_3)_1 = 0$

$(P_3)_2 = K\gamma\delta$

$(P_3)_3 = Kid \oplus K\gamma\delta\beta$

$(P_3)_4 = K\gamma \oplus K\gamma\delta\beta\gamma$

Representação P_3:

$$\begin{tikzcd}
& & K^2 \arrow[dr, "\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}"] & \\
0 \arrow[r, "0"'] & K \arrow[ur, "\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}"] & & K^2 \arrow[ll, "{[0\ 0]}"]
\end{tikzcd}$$

$(P_4)_1 = 0$

$(P_4)_2 = K\delta$

$(P_4)_3 = K\delta\beta$

$(P_4)_4 = Kid \oplus K\delta\beta\gamma$

Representação P_4:

$$\begin{tikzcd}
& & K \arrow[dr, "\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}"] & \\
0 \arrow[r, "0"'] & K \arrow[ur, "1"] & & K^2 \arrow[ll, "{[0\ 0]}"]
\end{tikzcd}$$

Agora podemos definir uma álgebra que será isomorfa a uma soma direta de projetivos indecomponíveis, chamada básica:

Definição 3.13. *Seja A uma K-álgebra. A álgebra A é dita básica se pode ser decomposta em módulos projetivos indecomponíveis $P_1, P_2, \ldots, P_t$, ou seja,*

$$A \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_t, \ \ \textit{onde } P_i \ncong P_j, \ \textit{para } i \neq j.$$

A seguir, temos resultados que contribuem grandemente para a demonstração do Teorema de Gabriel.

Proposição 3.14. *Seja A uma álgebra básica de dimensão finita. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos de A, então $Ae_1, \ldots, Ae_n$ é uma lista completa de A-módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois.*

A demonstração da proposição anterior pode ser encontrada com detalhes em [6].

Proposição 3.15. *Uma K-álgebra de dimensão finita A é básica se, e somente se, $A/rad\, A$ é isomorfa a um produto $K \times K \times \cdots \times K$.*

A demonstração da proposição anterior pode ser encontrada com detalhes em [4].

Observação 3.16. *Pela proposição anterior, temos que $\dfrac{A}{rad\, A} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} K$. Por uma simples aplicação entre os espaços vetoriais K e Ke_i, obtemos que K é isomorfo a Ke_i, em que e_i é um elemento idempotente da álgebra A. Logo, podemos reescrever o isomorfismo acima como*

$$\frac{A}{rad\, A} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Ke_i.$$

Proposição 3.17. *Se A é uma K-álgebra de dimensão finita básica e conexa, então o quiver Q de A é conexo.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [4].

3.4 Módulos Injetivos

Os módulos injetivos podem ser vistos como duais aos módulos projetivos. Essa classe de módulos tem um papel especial para os próximos capítulos, onde serão estudados resultados sobre os módulos injetivos das álgebras *Tree Oriented Pullback*.

Definição 3.18. *Um A-módulo I é chamado de módulo injetivo, se para qualquer homomorfismo injetor $u : L \to M$ e qualquer morfismo $v : L \to I$, existe um morfismo $w : M \to I$ tal que $v = wu$.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\forall u"] \arrow[d, "\forall v"'] & M \arrow[dl, "\exists w"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

A seguir, faremos um exemplo de representação da álgebra KQ/I em relação aos seus módulos injetivos indecomponíveis. Para isso, é necessário calcular as representações dos projetivos associados a KQ^{op}/I^{op}, que será definido a seguir. A justificativa para esse processo é que as representações dos projetivos associados a KQ^{op}/I^{op} são isomorfas as representações dos injetivos de KQ/I. Logo, basta analisar os módulos projetivos sobre KQ^{op}/I^{op}.

Definição 3.19. *Seja $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. O quiver dual Q^{op} é dado por uma quádrupla (Q_0, Q_1, s', t') em que para cada flecha $\alpha \in Q_1$, $s'(\alpha) = t(\alpha)$ e $t'(\alpha) = s(\alpha)$.*

Observação 3.20. *A grosso modo, o dual de um quiver é dado pela cópia do quiver com as orientações de suas flechas trocadas.*

Para encontrar os módulos projetivos indecomponíveis associados a álgebra KQ^{op}, fixaremos o vértice i. O módulo projetivo P_i é representado por $P_i = ((P_i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$. Cada vértice j será associado a um K-espaço vetorial $(P_i)_j$. Este espaço vetorial $(P_i)_j$ é gerado pelos caminhos que partem do vértice fixado i e chegam no vértice analisado j. Seja $\alpha : j \to k$, com $j, k \in Q_0$, a transformação linear $\varphi_\alpha : (P_i)_j \to (P_i)_k$ é dada pela multiplicação à direita por α.

Exemplo 3.21. *Seja Q^{op} o dual do quiver Q do Exemplo 3.12. O quiver Q^{op} é dado por*

$$\begin{tikzcd} & & 3 \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1 & 2 \arrow[l, "\alpha"] \arrow[rr, "\delta"'] & & 4 \arrow[ul, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

em que $I^{op} = \langle \delta\gamma\beta \rangle$. As representações dos injetivos abaixo $I_i = ((I_i)_j, \varphi_\alpha)$ de Q satisfazem as relações em I, pois $\varphi_{\beta\gamma\delta} = 0$ para a relação $\beta\gamma\delta \in I$.

Faremos o processo na representação do injetivo associado ao vértice 1 e as outras são feitas de forma análoga.

$(I_1)_1 \cong Kid$

$(I_1)_2 \cong 0$

$(I_1)_3 \cong 0$

$(I_1)_4 \cong 0$

Representação P_1:

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[dl, "0"'] & \\ K & 0 \arrow[l, "0"] \arrow[rr, "0"'] & & 0 \arrow[ul, "0"'] \end{tikzcd}$$

Representação I_1:

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ K \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[ur, "0"] & & 0 \arrow[ll, "0"] \end{tikzcd}$$

$(I_2)_1 \cong K\alpha$

$(I_2)_2 \cong Kid$

$(I_2)_3 \cong K\gamma\delta$

$(I_2)_4 \cong K\delta$

Representação I_2:

$$\begin{tikzcd} & & K \arrow[dr, "1"] & \\ K \arrow[r, "1"] & K \arrow[ur, "1"] & & K \arrow[ll, "0"] \end{tikzcd}$$

$(I_3)_1 \cong K\alpha\beta$

$(I_3)_2 \cong K\beta$

$(I_3)_3 \cong Kid \oplus K\gamma\delta\beta$

$(I_3)_4 \cong K\delta\beta$

Representação I_3:

$$\begin{tikzcd} & & K^2 \arrow[dr, "{[0\ 1]}"] & \\ K \arrow[r, "1"] & K \arrow[ur, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"] & & K \arrow[ll, "0"] \end{tikzcd}$$

$(I_4)_1 \cong K\alpha\beta\gamma$

$(I_4)_2 \cong K\beta\gamma$

$(I_4)_3 \cong K\gamma$

$(I_4)_4 \cong Kid \oplus K\delta\beta\gamma$

Representação I_4:

$$\begin{tikzcd} & & K \arrow[dr, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"] & \\ K \arrow[r, "1"] & K \arrow[ur, "1"] & & K^2 \arrow[ll, "{[0\ 0]}"] \end{tikzcd}$$

Observação 3.22. *O módulo injetivo I_1 associado ao vértice 1, é um módulo simples, pois sua dimensão é igual a 1. Além disso, note que somente partem flechas deste vértice.*

4 Teorema de Gabriel

Esta seção será totalmente dedicada a um dos mais importantes teoremas deste trabalho, o teorema de Gabriel. Através dele é provado que toda álgebra de dimensão finita é isomorfa a um quociente de álgebra de caminhos. A grosso modo, através desse teorema conseguimos associar uma álgebra a um *quiver* com relações. Para prová-lo precisamos de inúmeros conceitos vistos nas seções passadas, como: álgebra básica e *quiver* com relações. A demonstração foi baseada em [7] e em [8].

Teorema 4.1. *Seja A uma álgebra básica, conexa e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K. Então existe um quiver conexo Q_A e um homomorfismo sobrejetor de álgebras $\phi : KQ_A \to A$ tal que* $\ker \phi$ *é um ideal admissível de KQ_A.*

Demonstração: Dividiremos a demonstração deste teorema em quatro partes: a primeira será destinada para definirmos o *quiver* Q_A a partir da álgebra A, na segunda definiremos o morfismo $\phi : KQ_A \to A$, na terceira mostraremos que ϕ é sobrejetor e por fim, mostraremos que o $\ker \phi$ é um ideal admissível de KQ_A. Durante a demonstração denotaremos Q_A por Q para evitar excesso de notação.

I. Quiver ordinário

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos de A, fixada uma ordem (é garantida a existência deste sistema pois A é de dimensão finita sobre K). Como A é básica, podemos decompô-la como $A \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_t$, onde $P_i \ncong P_j$, para $i \neq j$. A partir dessas hipóteses, temos $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

O *quiver* ordinário de A, denotado por Q é definido da seguinte forma:

- Os n vértices de Q formam o conjunto $Q_0 = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ enumerado em correspondência com $\{e_1, \ldots, e_n\}$;
- O número de flechas que começam em ϵ_i e terminam em ϵ_j será definido por

$$dim_K \, e_i \left(\frac{radA}{rad^2 A} \right) e_j.$$

Agora, verificaremos que Q está bem definido e é conexo.

Vale enfatizar que o número de vértices de Q depende apenas do número de termos da decomposição de A em A-módulos. Sendo assim, considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{f_1, \ldots, f_n\}$ dois sistemas de idempotentes completos ortogonais e primitivos enumerados de tal forma que $Ae_i \cong Af_i$ para todo i. Precisamos mostrar que

$$e_j\left(\frac{radA}{rad^2A}\right)e_i \cong f_j\left(\frac{radA}{rad^2A}\right)f_i,$$

como K espaços vetoriais. Este resultado segue dos seguintes isomorfismos:

$$\begin{aligned} e_j\left(\frac{radA}{rad^2A}\right)e_i &\cong e_j\left(\frac{rad(Ae_i)}{rad^2(Ae_i)}\right), \\ &\cong Hom_A\left(Ae_j, \frac{rad(Ae_i)}{rad^2(Ae_i)}\right), \\ &\cong Hom_A\left(Af_j, \frac{rad(Af_i)}{rad^2(Af_i)}\right), \\ &\cong f_j\left(\frac{radA}{rad^2A}\right)f_i. \end{aligned}$$

Desta forma, Q está bem definido, ou seja, o *quiver* Q não depende da escolha do conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos em A. Além disso, pela Proposição 3.17 como A é conexa, Q também é conexo.

II. Homomorfismo $\phi : KQ \to A$

Primeiramente, definiremos uma transformação linear ϕ entre os espaços vetoriais KQ e A, para isso, vamos fixar uma base de A a partir do sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Denotaremos $[\epsilon_i, \epsilon_j]$ o conjunto de flechas de ϵ_i a ϵ_j.

Fixando $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ uma base em $e_i\left(\frac{radA}{rad^2A}\right)e_j$, por definição, o número de elementos em $[\epsilon_i, \epsilon_j]$ é igual a $dim_K\, e_i\left(\frac{radA}{rad^2A}\right)e_j$, sendo assim podemos associar biunivocamente cada flecha em $[\epsilon_i, \epsilon_j]$ com um elemento da base fixada. Por fim, escolhemos $x_\alpha \in e_i(radA)e_j$ tal que $\overline{x}_\alpha = y_\alpha$ para todo $\alpha \in Q_1$. Logo, podemos visualizar uma aplicação da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc} KQ & \longrightarrow & radA & \longrightarrow & \frac{radA}{rad^2A} \\ \\ \alpha & \longmapsto & x_\alpha & \longmapsto & y_\alpha = \overline{x}_\alpha \end{array}$$

Definimos agora $\phi(\epsilon_i) = e_i$, $\phi(\alpha) = x_\alpha$ para $\alpha \in Q_1$, $\phi(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_n}$ e estendemos por linearidade a todos os elementos de KQ.

Agora devemos mostrar que ϕ é um homomorfismo de álgebras. Note que, $\phi(1_{KQ}) = \phi(\sum_{i \in Q_0} \epsilon_i) = \sum_{i \in Q_0} e_i = 1_A$. Além disso, devemos mostrar que $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$ para quaisquer caminhos p, q na base usual da álgebra de caminhos KQ.

Provaremos o caso em que ambos caminhos são de comprimento maior ou igual a 1, os casos com caminhos triviais são análogos. Considere $p = \alpha_1 \dots \alpha_n$ e $q = \beta_1 \dots \beta_m$:

Se $t(p) = s(q)$ então $pq = \alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m$ e $\phi(pq) = x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n} x_{\beta_1} \dots x_{\beta_m} = \phi(p)\phi(q)$.

Se $t(p) = i \neq j = s(q)$ teremos então $pq = 0$ e $\phi(pq) = 0$. Por outro lado, considere $s(\alpha_n) = k$ e $t(\beta_1) = l$, temos que $\phi(p) = x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n}$, com $x_{\alpha_n} \in e_k(radA)e_i$ e $\phi(q) = x_{\beta_1} \dots x_{\beta_m}$, com $x_{\beta_1} \in e_j(radA)e_l$. Logo, podemos escrever x_{α_n} como $e_k z_1 e_i$, onde $z_1 \in radA$ e x_{β_1} como $e_j z_2 e_l$, onde $z_2 \in radA$. Como $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$ segue que $x_{\alpha_n} x_{\beta_1} = e_k z_1 e_i e_j z_2 e_l = 0$ e portanto $\phi(\gamma)\phi(\delta) = x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n} x_{\beta_1} \dots x_{\beta_m} = 0$.

Logo, $\phi : KQ \to A$ é um homomorfismo de álgebras.

III. ϕ é sobrejetora

Sabemos que $A \cong \frac{A}{rad\,A} \oplus rad\,A$ como K-espaços vetoriais, sendo assim, para mostrar que ϕ é sobrejetora, mostraremos que e_i, com $i = 1, 2, \dots, n$, geram $A/rad\,A$ e x_α geram $rad\,A$ como espaço vetorial. Logo, para cada elemento a da base de A existirá um elemento p em KQ tal que $\phi(p) = a$.

Como A é básica, sabemos pela Proposição 3.15 e pela Observação 3.16 que $\frac{A}{rad\,A} \cong \bigoplus_{i=1}^n Ke_i$, sendo assim temos que e_i geram $\frac{A}{rad\,A}$.

Agora, mostraremos que $e_i(rad\,A)e_j$ é gerado por produtos da forma $x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_m}$ onde $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ é um caminho de i a j.

Como K-espaço vetorial, temos que

$$e_i(rad\,A)e_j \cong e_i \left(\frac{rad\,A}{rad^2\,A} \right) e_j \oplus e_i(rad^2\,A)e_j.$$

Portanto, para cada $a \in e_i(rad\,A)e_j$, existe $\sum_{\alpha: i \to j} \lambda_\alpha \overline{x}_\alpha \in e_i \left(\frac{rad\,A}{rad^2\,A} \right) e_j$, com $\lambda_\alpha \in K$ tal que $a - \sum_{\alpha: i \to j} \lambda_\alpha \overline{x}_\alpha$ pertence a $e_i(rad^2\,A)e_j$. Por outro lado,

$$e_i(rad^2\,A)e_j = \sum_{k \in Q_0} (e_i(rad\,A)e_k) \cdot (e_k(rad\,A)e_j).$$

Tome as combinações lineares $\sum_{\beta: i \to k} \lambda_\beta x_\beta \in e_i(rad\,A)e_k$ e $\sum_{\gamma: k \to j} \lambda_\gamma x_\gamma \in e_k(rad\,A)e_j$, tais que $\sum_{\beta\gamma: i \to k \to j} (\lambda_\beta \lambda_\gamma) x_\beta x_\gamma \in e_i(rad^2\,A)e_j$.

Repetindo o raciocínio anterior, como K-espaço vetorial temos:

$$e_i(rad^2 A)e_j \cong e_i\left(\frac{rad^2 A}{rad^3 A}\right)e_j \oplus e_i(rad^3 A)e_j.$$

Portanto, para cada $a - \sum_{\alpha:i\to j} \lambda_\alpha \overline{x}_\alpha \in e_i(rad^2 A)e_j$, existe $\sum_{\beta\gamma:i\to k\to j} (\lambda_\beta\lambda_\gamma)\overline{x_\beta x_\gamma}$ tal que

$$a - \sum_{\alpha:i\to j} \lambda_\alpha \overline{x}_\alpha - \sum_{\beta\gamma:i\to k\to j} (\lambda_\beta\lambda_\gamma)\overline{x_\beta x_\gamma}$$

pertence a $e_i(rad^3 A)e_j$.

Usando indução e o fato que $rad\,A$ é nilpotente, podemos escrever a como uma combinação linear de produtos da forma $x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\ldots x_{\alpha_m}$ onde $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$ é um caminho de i a j.

IV. $\ker\phi$ *é admissível*

Por fim, devemos verificar que $\ker\phi = I$ é um ideal admissível, isto é, devemos mostrar que existe um $m \geq 2$ tal que $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$, onde R_Q é o ideal de KQ gerado por todas as flechas de Q.

Pela construção de ϕ, nós temos que $\phi(R_Q) \subseteq rad\,A$. Por indução, temos $\phi(R_Q^m) \subseteq rad^m A$ para todo $m \geq 1$. Como $rad\,A$ é nilpotente, existe $m \geq 2$ tal que $\phi(R_Q^m) = 0$, isto é, $R_Q^m \subseteq I$.

Nos resta mostrar que $I \subseteq R_Q^2$.

Seja $a \in I$. Então existe as combinações lineares $\sum_{i\in Q_0} \lambda_i\epsilon_i$ e $\sum_{\alpha\in Q_1} \mu_\alpha\alpha$, com $\lambda_i, \mu_\alpha \in K$, para todo i, α tal que

$$a - \left(\sum_{i\in Q_0} \lambda_i\epsilon_i + \sum_{\alpha\in Q_1} \mu_\alpha\alpha\right) \in R_Q^2.$$

Aplicando ϕ e usando que $\phi(a) = 0$, pois $a \in \ker\phi$, temos

$$\sum_{i\in Q_0} \lambda_i e_i + \sum_{\alpha\in Q_1} \mu_\alpha x_\alpha \in \phi(R_Q^2) \subseteq rad^2 A.$$

Como $A \cong \bigoplus_{i=1}^n Ke_i \oplus rad\,A$ e o elemento anterior pertence a $rad^2 A$, concluímos que $\lambda_i = 0$ para todo i, pois $\sum_{i\in Q_0} \lambda_i e_i \in \bigoplus_{i=1}^n Ke_i$. Portanto, nos resta o elemento $\sum_\alpha \mu_\alpha x_\alpha \in rad^2 A \subset radA$, que pode ser escrito como $\sum_\alpha \mu_\alpha \overline{x_\alpha} = \overline{0}$. Mas os elementos do conjunto $\{x_\alpha + rad^2 A\}_\alpha$ formam, por definição, uma base para o espaço vetorial

$rad\,A/rad^2\,A$. Em particular, estes elementos são linearmente independentes, logo $\mu_\alpha = 0$ para todo α. Portanto, $a \in R_Q^2$. E concluímos que $\ker\phi$ é um ideal admissível.

Com isso, terminamos a demonstração do Teorema de Gabriel. ■

Exemplo 4.2. *Considere a álgebra*

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ K & K & K \end{pmatrix}.$$

A partir desta álgebra, construiremos seu quiver.

Primeiro devemos descobrir seus elementos idempotentes e ortogonais. Notemos que, os elementos

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formam sistema de elementos idempotentes ortogonais. Além disso,

$$rad\,A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 \end{pmatrix} \text{ e } rad^2\,A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\frac{rad\,A}{rad^2\,A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \dim\left(\frac{rad\,A}{rad^2\,A}\right) = 2.$$

Calculando $E_{ii}\left(\frac{rad\,A}{rad^2\,A}\right)E_{jj}$, temos:

$$E_{33}\left(\frac{rad\,A}{rad^2\,A}\right)E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ sendo assim } \dim E_{33}\left(\frac{rad\,A}{rad^2\,A}\right)E_{11} = 1.$$

$$E_{33}\left(\frac{rad\,A}{rad^2\,A}\right)E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \end{pmatrix}, \text{ sendo assim } \dim E_{33}\left(\frac{rad\,A}{rad^2\,A}\right)E_{22} = 1.$$

Como a $\dim\left(\frac{rad\,A}{rad^2\,A}\right) = 2$ e já encontramos dois subespaços vetoriais diferentes de dimensão 1 não é necessário fazer o cálculo para as opções restantes.

Logo, o quiver Q_A *é*

$$1 \longleftarrow 3 \longrightarrow 2 \ .$$

5 *Pullback* de Álgebras

Dadas duas estruturas algébricas, sejam elas álgebras ou módulos, e dois homomorfismos, é possível construir um *pullback*, que recebe a tradução de produto fibrado. Este objeto pode apresentar diversas características que estão intimamente envolvidas com as outras duas estruturas trabalhadas. Ao longo dessa seção os resultados serão dados para álgebras, porém são provados de forma análoga para módulos.

Definição 5.1. *Sejam A e C álgebras sobre o corpo K e dois homomorfismos $f_A : A \to B$ e $f_C : C \to B$. Um pullback do par (f_A, f_C) é uma tripla (R, h_A, h_C) onde R também é uma álgebra sobre K e $h_A : R \to A$, $h_C : R \to C$ são homomorfismos tais que:*

(i) $f_A h_A = f_C h_C$;

(ii) para toda álgebra Z sobre K e todo par de homomorfismos $g_A : Z \to A$, $g_C : Z \to C$ tal que $f_A g_A = f_C g_C$, existe um único morfismo $g : Z \to R$ tal que $h_A g = g_A$ e $h_C g = g_C$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "g_A"] \arrow[ddr, bend right, "g_C"'] \arrow[dr, dotted, "g"] & & \\
& R \arrow[r, "h_A"] \arrow[d, "h_C"'] & A \arrow[d, "f_A"] \\
& C \arrow[r, "f_C"'] & B
\end{tikzcd}$$

Para evitar excesso de notação, em alguns casos o pullback de f_A e f_C será denotado apenas por R.

Observação 5.2. *Segue da propriedade (ii) que quando existir um pullback (R, h_A, h_C) do par (f_A, f_C), este é único a menos de isomorfismo, ou seja, se (R', h'_A, h'_C) também for um pullback do par (f_A, f_C) então existe um isomorfismo $g : R' \to R$ tal que $h'_A = h_A g$ e $h'_C = h_C g$.*

Observação 5.3. *Dados os homomorfismos sobrejetores de álgebras $f_A : A \to B$ e $f_C : C \to B$, um pullback (R, h_A, h_C) do par (f_A, f_C) é a subálgebra de $A \times C$ dada por*

$$R = \{(a, c) \in A \times C \mid f_A(a) = f_C(c)\}.$$

Também conseguimos associar os módulos sobre as álgebras A, B e C com os módulos sobre o *pullback* R, através da observação a seguir.

Observação 5.4. *Seja $h_A : R \to A$ um homomorfismos de álgebras, podemos olhar um A-módulo M como um R-módulo através do produto dado por $\lambda \cdot m = h_A(\lambda)m$, para $\lambda \in R$ e $m \in M$. Observemos que, se M é indecomponível sobre A, ele também será sobre R. Mais detalhes desta observação podem ser encontrados em [10].*

O lema a seguir nos fornece um modo de verificar quando um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ C \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

é um *pullback*.

Lema 5.5. *Considere o diagrama comutativo de álgebras*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "h_A"] \arrow[d, "h_C"'] & A \arrow[d, "f_A"] \\ C \arrow[r, "f_C"'] & B \end{tikzcd}$$

com h_A um homomorfismo sobrejetor. Então (R, h_A, h_C) é um pullback de f_A e f_C se, e somente se, $h_C|_{\ker h_A} : \ker h_A \to \ker f_C$ é uma bijeção.

Demonstração: Considere (R, h_A, h_C) um *pullback* de f_A e f_C, ou seja, $R = \{(a, c) \in A \times C \,|\, f_A(a) = f_C(c)\}$, com h_A e h_C restrições em R das projeções canônicas de $A \times C$ a A e C, respectivamente.

Restringindo essas projeções aos núcleos das aplicações, temos:

$$h_A|_{\ker h_C} : \ker h_C \to \ker f_A \text{ e } \; h_C|_{\ker h_A} : \ker h_A \to \ker f_C.$$

Olhando para $\ker h_A$, por definição, temos que $h_A((a, c)) = 0$, para $(a, c) \in \ker h_A$. Além disso, como h_A é uma restrição em R da projeção canônica de $A \times C$ em A, temos que $a = 0$. Por outro lado, usando o diagrama comutativo, temos que $f_C(c) = f_A(0) = 0$. Logo, $\ker h_A = \{(a, c) \in R \,|\, (a, c) = (0, \ker f_C)\}$. Portanto, $h_C|_{\ker h_A}$ é uma bijeção.

Agora, considere o seguinte *pullback*: $Q = \{(a, c) \in A \times C \,|\, f_A(a) = f_C(c)\}$, onde $p_A : Q \to A$ e $p_C : Q \to C$ são as restrições das projeções.

Pelo item (ii) da definição de *pullback*, existe um morfismo $h : R \to Q$ tal que $p_A h = h_A$ e $p_C h = h_C$. Falta mostrar que h é um isomorfismo.

Seja $w \in R$, tal que $h(w) = (0, 0)$. Logo, $h_A(w) = p_A h(w) = 0$ e, consequentemente, $w \in \ker h_A$. Além disso, $h_C(w) = p_C h(w) = 0 = h_C(0)$, como por hipótese $h_C|_{\ker h_A}$ é uma bijeção, daí segue que $w = 0$. Logo, h é injetor.

Considere agora $x = (a, c)$ em Q. Como $a \in A$ e h_A é um homomorfismo sobrejetor, então existe $r \in R$ tal que $h_A(r) = a$. Como $f_A(a) = f_C(c)$ e $f_C h_C = f_A h_A$ temos que $h_C(r) - c \in \ker f_C$, pois $f_C(h_C(r) - c) = f_C h_C(r) - f_C(c) = f_A h_A(r) - f_A(a) = f_A(a) - f_A(a) = 0$.

Logo, como a restrição de h_C ao núcleo de h_A é uma bijeção entre $\ker h_A$ e $\ker f_C$, existe $y \in \ker h_A$ tal que $h_C(y) = h_C(r) - c$, sendo assim, $h_C(r - y) = c$ e $p_C h(r - y) = c$. Além disso, como $h_A(r - y) = h_A(r) = a$ segue que $p_A h(r - y) = a$. Concluímos que $h(r - y) = (a, c)$.

Portanto, h é um isomorfismo e R é um *pullback*. ∎

Exemplo 5.6. *Seja* $\begin{pmatrix} K & 0 \\ K & K \end{pmatrix}$ *a álgebra das matrizes triangulares inferiores e o homomorfismo sobrejetor* $f : \begin{pmatrix} K & 0 \\ K & K \end{pmatrix} \to K^2$ *dada por* $f : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = (a, c)$*, então o pullback de* (f, f) *é dado por:*

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \right) \mid (a, c) = (a', c'),\ \textit{em que } a, a', b, b', c, c' \in K \right\} =$$

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b' & c \end{pmatrix} \right) \mid a, b, b', c \in K \right\} \cong$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ (b, b') & c \end{pmatrix} \mid a, b, b', c \in K \right\} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{pmatrix}.$$

Esta álgebra é a álgebra de Kronecker, dada pelo quiver $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2$.

A partir de agora, nos preocuparemos em estudar e construir o quiver de um pullback de álgebras. Pela definição de álgebra de caminhos, sabemos que $1_{KQ} = \sum_{i=1}^{n} e_i$, além disso, pelo Teorema de Gabriel (Teorema 4.1), sabemos que uma álgebra é isomorfa a um quociente entre a álgebra de caminhos associada a seu quiver e um ideal admissível. Ao longo dos próximos resultados, usaremos e_S como a unidade da álgebra S:

Lema 5.7. *Sejam $A = KQ_A/I_A$ e $C = KQ_C/I_C$ duas álgebras onde Q_A e Q_C são quivers conexos e I_A e I_C são ideais admissíveis em KQ_A e KQ_C, respectivamente. Seja também Q_B um subquiver pleno e convexo (não necessariamente conexo) de Q_A e de Q_C e suponhamos que $I_A \cap KQ_B = I_C \cap KQ_B$, o que será denotado por I_B e considere $B = KQ_B/I_B$ então $B \cong e_BAe_B \cong e_BCe_B$.*

Demonstração: Como I_B está contido em I_A podemos definir a seguinte aplicação:

$$\varphi : B \longrightarrow e_BAe_B$$

$$p + I_B \longmapsto p + I_A$$

para p um caminho em Q_B. Então, φ é um morfismo de K-álgebras. Agora, verificaremos que φ é um isomorfismo.

Considere p um caminho em KQ_B tal que $p + I_A$ é nulo. Então, p está em $KQ_B \cap I_A$ que por definição é I_B, isto é, $p + I_B = 0$. Portanto, φ é uma aplicação injetora. Vejamos que φ também é sobrejetora. Seja p um caminho em Q_A.

- Se e_Bpe_B é nulo então temos que $\varphi(0 + I_B) = I_A = e_Bpe_B + I_A$.

- Suponha que e_Bpe_B é não nulo. Neste caso, $s(p)$ e $t(p)$ estão em $(Q_B)_0$ e, pela observação 2.31, como Q_B é convexo em Q_A, segue que cada vértice que aparece em p está também em $(Q_B)_0$. Além disso, pela observação 2.30, como o *subquiver* é pleno, cada flecha que aparece em p está em $(Q_B)_1$ e portanto p é um caminho em Q_B. Logo, φ aplicado no elemento $p + I_B$ de B é igual a $e_Bpe_B + I_A$. Logo, φ é sobrejetora.

Portanto, φ é um isomorfismo, o caso do isomorfismo entre B e e_BCe_B é demonstrado de forma análoga. ∎

Apresentaremos a seguir, um caso de construção de um *pushout*, objeto que será usado para auxiliar na construção do *quiver* de um *pullback* de álgebras. Essa construção é conhecida para grafos, que são *quivers* não orientados e adaptada para *quivers*.

Consideremos $i : Q_B \to Q_A$ e $j : Q_B \to Q_C$ inclusões de *quivers*, onde Q_B é um *subquiver* pleno de Q_A e de Q_C . Definimos o seguinte *quiver* que será denotado por $Q_A \coprod_{Q_B} Q_C$:

1. Os vértices são aqueles de Q_A e aqueles de Q_C que não estão em $j(Q_B)$;

2. As flechas são as de $(Q_A)_1$ e:

   a) para x e y em $(Q_C)_0 \setminus j(Q_B)_0$, há uma flecha de x para y para cada flecha de x para y em Q_C;

   b) para x em $(Q_C)_0 \setminus j(Q_B)_0$ e $y = i(z)$ para algum $z \in Q_B$, há uma flecha de x para y para cada flecha de x para $j(z)$ em Q_C;

   c) para $x = i(z)$ com $z \in Q_B$ e y em $(Q_C)_0 \setminus j(Q_B)_0$, há uma flecha de x para y para cada flecha de $j(z)$ para y em Q_C.

Proposição 5.8. *Com as notações acima, o quiver $Q_A \coprod_{Q_B} Q_C$ é o pushout das aplicações i e j.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [13].

Exemplo 5.9. *Sejam Q_A, Q_B e Q_C os seguites quivers:*

$$Q_A : \begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl] \\ 1 & \\ & 2 \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad , \quad Q_B : \begin{tikzcd} 3 \\ \\ 2 \end{tikzcd} \quad e \quad Q_C : \begin{tikzcd} 3 & \\ & 4 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ 2 & \end{tikzcd}$$

O pushout $Q_A \coprod_{Q_B} Q_C$ é dado por

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl] & \\ 1 & & 4 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & 2 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Teorema 5.10. *Sejam $A \to B$ e $C \to B$ homomorfismos sobrejetores:*

- *R o pullback destes homomorfismos sobrejetores;*

- *Q o pushout das inclusões dos quivers $Q_B \to Q_A$ e $Q_B \to Q_C$;*
- *I o ideal de KQ gerado por I_A e I_C e por todos os caminhos que ligam $(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0$ e $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$.*

Então o pullback R é isomorfo a KQ/I.

Demonstração: Seja Q o *pushout* das inclusões de *quivers* $Q_B \to Q_A$ e $Q_B \to Q_C$. Observe que, os elementos de Q que estão tanto em Q_A quanto em Q_C são justamente os elementos de Q_B.

Considere I o ideal de KQ gerado por I_A, I_C e todos os caminhos que ligam $(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0$ e $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$. Por construção, temos que $I_A = I \cap KQ_A$ e $I_C = I \cap KQ_C$, além disso, (Q_A, I_A) e (Q_C, I_C) são plenos e convexos em (Q, I). Pelo Lema 5.7, temos que $A \cong e_A(KQ/I)e_A$ e $C \cong e_C(KQ/I)e_C$.
Iremos denotar $e_C - e_B$ por e'_C e $e_A - e_B$ por e'_A, e consequentemente podemos escrever a identidade de KQ/I como $e = e'_A + e_B + e'_C$.

Considere os seguintes homomorfismos sobrejetores:

$$h_A : KQ/I \to e_A(KQ/I)e_A \quad , \quad h_C : KQ/I \to e_C(KQ/I)e_C \ ,$$
$$x \mapsto e_A x e_A \qquad\qquad x \mapsto e_C x e_C$$

$$f_A : e_A(KQ/I)e_A \to e_B(KQ/I)e_B \quad \text{e} \quad f_C : e_C(KQ/I)e_C \to e_B(KQ/I)e_B$$
$$x \mapsto e_B x e_B \qquad\qquad x \mapsto e_B x e_B$$

Visto que $e_Be_A = e_B = e_Ae_B$ e $e_Ce_B = e_B = e_Be_C$ temos $f_A(h_A(x)) = f_A(e_Axe_A) = e_Be_Axe_Ae_B = e_Bxe_B$ e $f_C(h_C(x)) = f_A(e_Cxe_C) = e_Be_Cxe_Ae_C = e_Bxe_B$. Sendo assim, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\frac{KQ}{I} \arrow[r, "h_A"] \arrow[d, "h_C"'] & e_A\frac{KQ}{I}e_A \arrow[d, "f_A"] \\
e_C\frac{KQ}{I}e_C \arrow[r, "f_C"'] & e_B\frac{KQ}{I}e_B
\end{tikzcd}$$

Analisando os núcleos de h_A e f_C, temos:

Note que, os caminhos não nulos q de KQ/I após aplicados em h_A são da forma e_Aqe_A, ou seja, que iniciam e terminam em vértices de Q_A. Para que esses caminhos resultem em 0, $s(q)$ e/ou $t(q)$ devem pertencer ao $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$. Sendo assim, q pode ser escrito como

$re'_C s$, com $r, s \in KQ/I$. Logo, $\ker h_A = (KQ/I)e'_C(KQ/I)$. Com o raciocínio análogo para $\ker f_C$, concluímos que $\ker f_C = e_C(KQ/I)e'_C(KQ/I)e_C$.

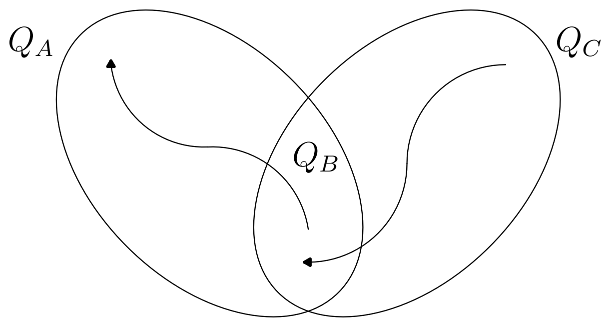
Além disso, h_C restrita ao núcleo de h_A é uma bijeção sobre $\ker f_C$, pois $h_C((KQ/I)e'_C(KQ/I)) = e_C(KQ/I)e'_C(KQ/I)e_C$ e pelo Lema 5.5, KQ/I é um *pullback* de f_A e f_C. ■

5.1 *Pullback* Orientado

Nesta seção, caracterizamos um tipo de *pullback*. Este nos da uma das principais características de um *tree oriented pullback*. Existem outros tipos de orientação, mas essas não se enquadram no intuito do nosso estudo.

Definição 5.11. *Seja R o pullback dos homomorfismos sobrejetores $A \to B$ e $C \to B$. Dizemos que tal pullback é orientado se não existir caminho não nulo de $(Q_B)_0$ para $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$ e de $(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0$ para $(Q_B)_0$.*

A ilustração a seguir auxilia na visualização dessa definição, onde as flechas denotam os sentidos para os caminhos em Q_R.



Observação 5.12. *Pela definição anterior, podemos observar que a condição da inexistência de caminho não nulo de $(Q_B)_0$ para $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$ e $(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0$ para $(Q_B)_0$ equivale a $e_B R e'_C = 0$ e $e'_A R e_B = 0$, utilizando a notação definida no Teorema 5.10.*

Exemplo 5.13. *Considere as álgebras A, B e C dadas pelos seguintes quivers:*

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 4 \arrow[d] \\
Q_A : & 1 & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] \\
 & & & 5 \arrow[u]
\end{tikzcd}
, \quad
\begin{tikzcd}
 & 4 \arrow[d] \\
Q_B : & 3 \\
 & 5 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\quad e \quad
\begin{tikzcd}
 & 4 \arrow[d] & & \\
Q_C : & 3 & 6 \arrow[l] & 7 \arrow[l] \\
 & 5 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
.
$$

A álgebra R é um pullback orientado, onde

$$\begin{tikzcd} & & & 4 \arrow[d] & & \\ Q_R: & 1 & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & 6 \arrow[l] & 7 \arrow[l] \\ & & & 5 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

5.2 *Tree Oriented Pullback*

Nesta seção, finalmente iremos definir álgebra *tree oriented pullback* com o propósito de demonstrar o resultado referente aos seus módulos indecomponíveis. Para isso precisamos de alguns conceitos relacionados aos vértices de um *quiver* e resultados sobre representações de módulos.

Definição 5.14. *Seja v um vértice no quiver Q.*

- *v é chamado de fonte se não existe flecha com final em v;*
- *v é chamado de poço se não existe flecha com início em v.*

Um dos resultados relacionados a representação de módulos, é uma conexão entre a injetividade do módulo com as características do *quiver*.

Lema 5.15. *Sejam Q um quiver e i uma fonte de Q. Suponha que existe uma única flecha $\alpha : i \to j$ iniciando em i. Seja Q' o subquiver pleno de Q dado por $Q'_0 = Q_0 \setminus \{i\}$. Se $M = ((M_l)_{l \in Q_0}, (M_\beta)_{\beta \in Q_1})$ é uma representação de Q tal que a restrição de M sobre Q' é um módulo injetivo de KQ' e M_α é um isomorfismo, então M é um módulo injetivo de KQ.*

Demonstração: Sejam $L = ((L_l)_{l \in Q_0}, (L_\beta)_{\beta \in Q_1})$ e $N = ((N_l)_{l \in Q_0}, (N_\beta)_{\beta \in Q_1})$ representações de Q, $f = (f_l)_{l \in Q_0} : L \to N$ um morfismo injetor, e $g = (g_l)_{l \in Q_0} : L \to M$ um morfismo. Iremos mostrar que existe um morfismo $h = (h_l)_{l \in Q_0} : N \to M$ tal que $g = hf$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, "h"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Por hipótese, a restrição de M sobre Q' é um módulo injetivo de KQ', então podemos assumir que h_l é definido para $l \neq i$ satisfazendo a condição $g_l = h_l f_l$. Precisamos definir

$h_i : N_i \to M_i$ tais que $g_i = h_i f_i$ e $M_\alpha h_i = h_j N_\alpha$, em que $\alpha : i \to j$. Como M_α é um isomorfismo (admite inversa), podemos definir $h_i = M_\alpha^{-1} h_j N_\alpha$, o diagrama abaixo nos ajuda a visualizar este morfismo.

$$\begin{array}{ccc} N_i & \xrightarrow{N_\alpha} & N_j \\ {\scriptstyle h_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_j} \\ M_i & \xrightarrow[M_\alpha]{} & M_j \end{array}$$

Portanto, $h_i f_i = (M_\alpha^{-1} h_j N_\alpha) f_i = M_\alpha^{-1}(h_j f_j) L_\alpha = M_\alpha^{-1} g_j L_\alpha = M_\alpha^{-1} M_\alpha g_i = g_i$. Com os diagramas a seguir conseguimos visualizar as igualdades usadas.

$$\begin{array}{ccc} L_i & \xrightarrow{L_\alpha} & L_j \\ {\scriptstyle f_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_j} \\ N_i & \xrightarrow[N_\alpha]{} & N_j \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L_i & \xrightarrow{L_\alpha} & L_j \\ {\scriptstyle g_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_j} \\ M_i & \xrightarrow[M_\alpha]{} & M_j \end{array}$$

■

Para provarmos o principal teorema deste trabalho, devemos enunciar um resultado sobre o *quiver* do seguinte tipo:

Definição 5.16. *Um quiver Q é considerado tree, isto é, do tipo árvore, se seu grafo não orientado não possuir ciclos.*

Observação 5.17. *Note que, o quiver do tipo árvore com um único poço resulta em fontes com uma única flecha. Caso contrário, o seu grafo não orientado teria um ciclo.*

Teorema 5.18. *Seja Q um quiver do tipo árvore com um único poço. Se $M = ((M_l)_{l \in Q_0}, (M_\beta)_{\beta \in Q_1})$ é uma representação de Q em que M_β é sobrejetiva para todo $\beta \in Q_1$, então M é uma módulo injetivo sobre KQ.*

Demonstração: Provaremos por indução na quantidade n de flechas.
Caso $n = 1$. Considere Q como $\bullet \xrightarrow{\beta} \bullet$. Podemos representá-lo da seguinte forma $M_1 \xrightarrow{M_\beta} M_2$. Sabemos que os módulos injetivos sobre KQ são:

Representação I_1	Representação I_2
$K \longrightarrow 0$	$K \longrightarrow K$

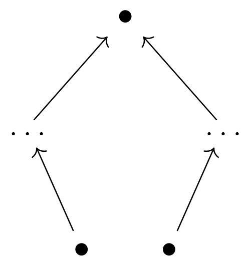
Temos dois casos para a representação M do teorema.

- Caso M_2 é zero: $K^m \longrightarrow 0$.
- Caso M_2 não é zero, isto é, $\dim M_2 = n > 0$: $K^m \longrightarrow K^n$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem $\dim K^m = \dim \ker M_\beta + \dim \operatorname{Im} M_\beta$, como, por hipótese M_β é sobrejetiva, concluímos que $m \geq n$.

Sendo assim, concluímos que em ambos os casos, podemos escrever a representação de M como soma direta de I_i, para $i = 1, 2$.

Agora, suponha que o resultado é verdadeiro para $n-1$ flechas. Demostraremos que ele também vale para n flechas:

Caso n



Seja Q um *quiver* do tipo árvore com n flechas e i uma fonte de Q. Pela Observação 5.17, como Q tem um único poço, então existe uma única flecha começando em i. Seja $\alpha : i \to j$ essa flecha. Vamos escrever o módulo M como uma soma direta de dois submódulos M' e M'' baseado no fato de que M_α é sobrejetora e i é uma fonte.

As transformações lineares associadas a flecha α das representações M, M'' e M', respectivamente estão ilustradas a seguir:

$$M_i \xrightarrow{\quad M_\alpha \quad} M_j$$

$$\ker M_\alpha \xrightarrow{\quad 0 \quad} 0$$

$$M_i/\ker M'_\alpha \xrightarrow{\quad M'_\alpha \quad} M_j$$

O submódulo $M'' = ((M''_l)_{l \in Q_0}, (M''_\beta)_{\beta \in Q_1})$ tem a seguinte característica: $M''_i = \ker M_\alpha$ e $M''_l = 0$ para $l \neq i$. Já o submódulo $M' = ((M'_l)_{l \in Q_0}, (M'_\beta)_{\beta \in Q_1})$ tem $M'_\alpha \colon M_i/\ker M_\alpha \to M_j$ um isomorfismo e $M'_\beta = M_\beta$ para $\beta \neq \alpha$.

Analisando os submódulos, M'' é um produto de cópias de módulos simples associados ao vértice i e então M'' é injetivo porque i é uma fonte. Quando i é uma fonte, o módulo simples associado ao vértice i é injetivo.

Agora, iremos provar que M' também é injetivo.

Seja Q' o *subquiver* pleno de Q, tal que $Q'_0 = Q_0 \setminus \{i\}$. Consideramos $\overline{M}$ a restrição do M' sobre Q'. O *subquiver* continua sendo do tipo árvore e tem apenas um poço. As aplicações $\overline{M}_\beta$ ainda são sobrejetoras para todo $\beta \in Q'_1$. Por hipótese de indução, temos que $\overline{M}$ é um módulo injetivo sobre KQ'. Logo o módulo M' está satisfazendo as hipóteses do Lema 5.15, e portanto, M' é injetivo sobre KQ. Fechando que o M é uma soma direta de módulos injetivos, então é injetivo sobre KQ. ∎

Definição 5.19. *Um pullback R de $A \to B$ e $C \to B$ é um tree oriented pullback se seu quiver com relações satisfaz as seguintes condições:*

- *Cada componente conexo de Q_B é do tipo árvore com um único poço, sem relações;*
- *Para cada flecha $\alpha : x \to y$ em $(Q_B)_1$ e cada caminho $p : z \to y$ com z em $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$ para y, existe um caminho $q : z \to x$ de z para x tal que $q\alpha - p \in I_C$.*

Observação 5.20. *A segunda condição garante que se existirem dois caminhos diferentes começando no mesmo vértice z em $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$ para $y \in (Q_B)_0$, passando em $\alpha : x \to y$ de $(Q_B)_1$, eles são equivalentes. Note que, se considerarmos q' o mesmo caminho de q até o vértice y ele continua respeitando a condição $q'\alpha - q \in I_C$.*

Exemplo 5.21. *Sejam A, B e C álgebras dadas, respectivamente pelos quivers*

$$Q_A : \begin{tikzcd} 1 & & \\ & 3 \arrow[ul] \arrow[dl] & 4 \arrow[l] \\ 2 & & \end{tikzcd}, \quad Q_B : \begin{tikzcd} 3 & 4 \arrow[l] \end{tikzcd} \quad e \quad Q_C : \begin{tikzcd} & & & 6 \arrow[dl] & \\ 3 & 4 \arrow[l] & 5 \arrow[l] \arrow[rr, dashed, no head] & & 8 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & & & 7 \arrow[ul] & \end{tikzcd}.$$

Neste caso, R é tree oriented pullback e é dado por

$$\begin{tikzcd} 1 & & & & 6 \arrow[dl] & \\ & 3 \arrow[ul] \arrow[dl] & 4 \arrow[l] & 5 \arrow[l] \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[from=1-1, dashed, no head, bend right] \arrow[from=3-1, dashed, no head, bend left] & & 8 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ 2 & & & & 7 \arrow[ul] & \end{tikzcd}.$$

O tracejado que liga $5 \to 4$ e $3 \to 1$ indica que o caminho iniciando em 5 e terminando em

1 é nulo em R. O mesmo acontece entre $5 \to 4$ e $3 \to 2$. Estas relações aparecem porque R é um pullback.

Teorema 5.22. *Se R é tree oriented pullback de $A \to B$ e $C \to B$ então todo módulo indecomponível sobre R é indecomponível sobre A ou sobre C.*

Demonstração: Pela Observação 5.4, já sabemos que os módulos indecomponíveis sobre A ou C, podem ser vistos como módulos indecomponíveis sobre R. Nesta demonstração mostraremos a volta, usando representações de módulos.

Seja $M = ((M_x)_{x\in(Q_R)_0}, (M_\alpha)_{\alpha\in(Q_R)_1})$ uma representação de um módulo indecomponível sobre R de (Q_R, I_R). A partir de M, definiremos uma representação de (Q_R, I_R), $W = ((W_x)_{x\in(Q_R)_0}, (W_\alpha)_{\alpha\in(Q_R)_1})$ da seguinte forma:

- para cada vértice x em $(Q_R)_0$ considere W_x a soma das imagens das aplicações $M_p : M_y \to M_x$, onde p é um caminho de y para x, com y em $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$;

caso i) Se x está em $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$, então podemos usar a aplicação identidade sobre M_x associado ao caminho trivial e_x, e teremos $W_x = M_x$;

caso ii) Se x está em $(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0$ então $W_x = 0$ pois, pela orientação do *pullback*, não existe caminho não nulo de $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$ para $(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0$.

- para cada flecha $\alpha : x \to x'$ em $(Q_R)_1$, considere $W_\alpha = M_\alpha|_{W_x}$ a restrição de W_α a W_x.

Portanto, pelo caso ii, W é uma representação de (Q_C, I_C), enquanto M/W é uma representação de (Q_A, I_A).

Note que se mostrarmos que $W = 0$ ou $W = M$, chegaremos no resultado.

Vamos estudar a parte da representação W de (Q_B, I_B). Considere uma flecha $\alpha : x \to x'$ em $(Q_B)_1$ e a aplicação $W_\alpha : W_x \to W_{x'}$. Provaremos que W_α é sobrejetora.

Seja $b \in \operatorname{Im} M_p \subseteq M_{x'}$ para algum caminho p de $z \in (Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$ para x' e seja a em M_z tal que $M_p(a) = b$. Pelo segundo item da Definição 5.19, existe um caminho q de y em x tal que $q\alpha - p$ está em I_R. Então, $M_\alpha \circ M_q = M_p$, aplicando em a, temos:

$$b = M_p(a) = M_\alpha(M_q(a)) = W_\alpha(M_q(a)),$$

pois $M_q(a) \in \operatorname{Im} M_q \subseteq W_x$ e $M_\alpha|_{W_x} = W_\alpha$.

Portanto, W_α é sobrejetora.

Segue deste fato e do Teorema 5.18, que W restrito a (Q_B, I_B) é uma representação de um módulo injetivo sobre B. Portanto a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow W \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/W \longrightarrow 0$$

restrita a (Q_B, I_B), é uma sequência exata que cinde. Vejamos que ela também cinde em (Q_R, I_R).

Seja $i : W \to M$ a inclusão. W restrito a (Q_B, I_B) é uma representação de um módulo injetivo sobre B, existe $h : M|_{Q_B} \to W|_{Q_B}$ tal que $h \circ i' = 1_{W|_{Q_B}}$ onde i' é a restrição de i a $W|_{Q_B}$. Considere a seguinte extensão l de h, dada para cada x de $(Q_R)_0$, por:

$$l_x = \begin{cases} h_x, & \text{se} \quad x \in (Q_B)_0 \\ id_{M_x}, & \text{se} \quad x \in (Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0 \\ 0, & \text{se} \quad x \in (Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0 \end{cases}.$$

Como o *pullback* é orientado, l é um morfismo de representações de (Q_R, I_R) e $l \circ i = 1_W$. Portanto, pela Proposição 2.62 a sequência cinde e segue que $M \cong W \oplus M/W$. Mas, como M é indecomponível segue que $W = 0$ ou $W = M$ e portanto M é uma representação de (Q_A, I_A) ou uma representação de (Q_C, I_C).

Portanto, todo módulo indecomponível sobre R é um indecomponível sobre A ou sobre C. ■

Exemplo 5.23. *Considere as álgebras A, B e C dadas pelos seguintes quivers:*

$$Q_A : \begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \\ & & 5 \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd}, \quad Q_B : \begin{tikzcd} 4 \arrow[d, "\gamma"] \\ 3 \\ 5 \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd} \quad e \quad Q_C : \begin{tikzcd} 4 \arrow[d, "\gamma"] & & \\ 3 & 6 \arrow[l, "\epsilon"'] & 7 \arrow[l, "\zeta"'] \\ 5 \arrow[u, "\delta"'] & & \end{tikzcd}.$$

Logo, Q_R é dado por

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 & 6 \arrow[l, "\epsilon"'] & 7 \arrow[l, "\zeta"'] \\ & & 5 \arrow[u, "\delta"'] & & \end{tikzcd} .$$

Note que, R não satisfaz a condição do Teorema 5.22, pois existe um caminho não nulo de $Q_A \setminus Q_B$ para Q_B, ou seja, R não é orientado.

De fato, se analisarmos a representação do módulo injetivo indecomponível de Q_R associado ao vértice 3, temos:

$(I_3)_1 \cong K\alpha\beta$

$(I_3)_2 \cong K\beta$

$(I_3)_3 \cong Kid$

$(I_3)_4 \cong K\gamma$

$(I_3)_5 \cong K\delta$

$(I_3)_6 \cong K\epsilon$

$(I_3)_7 \cong K\zeta\epsilon$

Representação I_3:

$$\begin{tikzcd} & & K \arrow[d, "1"] & & \\ K \arrow[r, "1"] & K \arrow[r, "1"] & K & K \arrow[l, "1"'] & K \arrow[l, "1"'] \\ & & K \arrow[u, "1"'] & & \end{tikzcd} .$$

Portanto, podemos afirmar que não existem representações de módulos em A ou C que possam ser representados desta forma. Note que, na representação de I_3 existem espaços vetoriais não nulos em $Q_C \setminus Q_B$ e em $Q_A \setminus Q_B$, sendo impossível representá-lo somente através de Q_A e Q_C, respectivamente.

6 Considerações Finais

De forma geral, este trabalho além de possibilitar a compreensão de resultados introdutórios de extrema importância para a teoria de representações de álgebras, relembrou conceitos trabalhados em diversas disciplinas presentes na grade curricular do curso de licenciatura em matemática, como: Linguagens Matemáticas, Álgebra Linear, Fundamentos de Álgebra, Extensões Algébricas dos Racionais, entre outras.

Este trabalho pode servir como base para estudos e pesquisas sobre teoria de representações de álgebras em nível de graduação e, consequentemente, possibilita à estudantes de ciências exatas contato com uma área de pesquisa não presente na grade curricular do curso.

O estudo dos conceitos algébricos propostos neste trabalho contribuíram para a complementação na formação matemática, visando a admissão em um programa de mestrado, possibilitando maiores condições para prosseguir com a formação profissional. Além disso, partindo do conhecimento obtido através deste trabalho, grande parte introdutória, há a possibilidade de estudar de forma mais aprofundada tópicos da teoria.

Referências

[1] MILIES, C. P. **Breve História da Álgebra Abstrata**. Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf>. Acesso em: 25 nov. 2019.

[2] COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A História da Álgebra e o Pensamento Algébrico: Correlações com o Ensino. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 171-187, 2018.

[3] GUSTAFSON, W. H. The history of algebras and their representations. **Lecture Notes in Mathematics**, v. 944, p. 1-28, 1982.

[4] ASSEM, I.; SIMSON, D.; SKOWROŃSKI, A. **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras**: Techiques of Representation Theory. New York: Cambridge University Press, 2006.

[5] HOLM, T.; ERDMANN, K. **Algebras and Representation Theory**. Cham: Springer, 2018.

[6] BAROT, M. **Introdution to the Representation Theory of Algebras**. Notas de Aula (curso de graduação) - Instituto de Matemática, Universidade Nacional Autonoma de México, México, 2012. 215 f.

[7] COELHO, F. U. **Uma Introdução à Teoria de Representações de Álgebras**. Apostila (mini-curso Escola de Álgebra) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992.

[8] ASSEM, I.; COELHO, F. U. **Basic Representation Theory of Algebras**. Cham: Springer, 2020.

[9] BEKKERT, V.; COELHO, F. U; WAGNER, H. Tree Oriented Pullback. **Communications in Algebra**, v. 43, p. 4247-4257, 2015.

[10] WAGNER, H. **Produto Fibrado Orientado de Álgebras e Dimensão de Representação**. 2012. 93f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

[11] GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[12] MILIES, C. P. **Anéis e Módulos**. São Paulo: Livraria da Física, 2018.

[13] LEVESQUE, J. **Produits fibrés d'algèbres et inclinaison**. 2004. 95f. Tese (Doutorado em Matemática), Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 2004.