

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

**ANA CAROLINA DAVOLI**

**INFERÊNCIA ESTATÍSTICA PARA PROPORÇÃO DE  
POPULAÇÃO FINITA MULTIVARIADA**

Alfenas/MG

2021

**ANA CAROLINA DAVOLI**

**INFERÊNCIA ESTATÍSTICA PARA PROPORÇÃO DE  
POPULAÇÃO FINITA MULTIVARIADA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Alfenas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Inferência Estatística Multivariada

Orientador: Prof. Dr. Denismar Alves Nogueira.

**Alfenas/MG**

**2021**

**ANA CAROLINA DAVOLI**

**INFERÊNCIA ESTATÍSTICA PARA PROPORÇÃO DE  
POPULAÇÃO FINITA MULTIVARIADA**

A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Inferência Estatística Multivariada.

Aprovado em: 04 de março de 2021

---

Prof. Dr. Denismar Alves Nogueira  
Orientador

---

Prof. Dr. Anderson José de Oliveira  
Universidade Federal de Alfenas

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Andréa Cardoso  
Universidade Federal de Alfenas

---

Prof. Dr. Eric Batista Ferreira  
Universidade Federal de Alfenas

**Alfenas/MG**

**2021**

Dedico este trabalho especialmente para João e Beth,  
meus pais, por todo apoio, carinho e atenção.  
Sem eles nada seria possível.

## Agradecimentos

Gratidão é uma das virtudes que mais admiro e procuro praticar, é imensurável dizer a quantas pessoas e o quanto sou grata por estar aqui. Tenho gratidão por todos que participaram da minha jornada de vida e acadêmica, mesmo que indiretamente, aliás, acredito que ninguém passa pela nossa vida à toa, sempre existe um motivo de aprendizado por traz dessas relações.

Em especial, gostaria de agradecer a pessoa que me ensinou que é possível sonhar, planejar e correr atrás do sonhos. A mudança pra Alfenas, escolha do curso e permanência só foram possíveis porque aprendi que é preciso encarar os medos, dar a cara a tapa e persistir. A gratidão por isso é imensa.

Também gostaria de agradecer a todos os laços de amizade que construí - que pra mim são família, aqui me lembro daquela frase que chegamos a usar por várias vezes: Agradeço muito a familinha que Alfenas me deu, agradeço a possibilidade que essas pessoas me proporcionaram de me conhecer melhor, conhecer diferentes realidades e sair da zona de conforto. E acima de tudo, de valorizar a vida e o que tenho.

Agradeço aos professores do curso, aos projetos dos quais tive oportunidade de participar, à todo corpo da Universidade Federal de Alfenas, que se dedicam diariamente para oferecer uma educação pública de alta qualidade. Mesmo nas situações mais difíceis que esse ano vem nos colocando, devido a pandemia, os professores não param, se desdobram ao máximo para cumprirem o seu papel de formadores, agradeço a todos esses ótimos exemplos de garra, caráter e profissão que são em minha vida.

A gratidão pelos professores, se torna ainda mais especial ao Denismar, por ter me acolhido como orientanda e me guiado nesse longo caminho conturbado até aqui, sempre com calma e paciência, o que admiro muito.

E também, aos professores membros da banca, que sem dúvidas levarei sempre comigo os aprendizados e uma admiração especial.

E por tudo isso, agradeço a Deus, por ter dado a oportunidade da viver nesse caminho. E aos meus pais, pela vida.

*Desenvolver força, coragem e paz interior demanda tempo. Não espere resultados rápidos e imediatos, sob o pretexto de que decidiu mudar. Cada ação que você executa permite que essa decisão se torne efetiva dentro de seu coração.*

Dalai Lama

## RESUMO

A Comissão Própria de Avaliação (CPA) da Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG), realiza semestralmente uma avaliação institucional discente. Essa avaliação é referente a vários eixos, sendo um deles a avaliação dos docentes e disciplinas ministradas por eles. Para a avaliação é usada uma variável do tipo qualitativa com 5 categorias, descrevendo de excelente a péssimo os questionamentos. Um estudo analítico para este caso se depara com populações finitas e pequenas, se agravando com pequenas amostras. Este trabalho foi desenvolvido com objetivo de propor à CPA o tratamento inferencial deste questionário visando avaliar métodos de estimação intervalar multivariados para populações finitas. Na revisão de literatura, foi identificado que muitos estudos utilizam distribuição multinomial, que acabam por assumir populações infinitas, dificultando a escolha de um método analítico que seja adequado aos cenários deste problema. Com isso, surgiu a necessidade de investigar métodos que atenderiam e que se baseiam na distribuição hipergeométrica, para avaliar as possíveis diferenças em relação aos métodos que utilizam a multinomial. Os melhores intervalos multinomiais foram selecionados e também adaptados com fator de correção para populações finitas e implementados para análise. Com a análise, não foi possível eleger um único método como sendo o melhor, pois a eficácia do método depende no cenário do qual será aplicado, com isso, faz-se necessário avaliar os parâmetros populacionais para escolher o método que melhor se ajusta.

**Palavras-chave:** Análise multivariada; Distribuição hipergeométrica; Simulação; Avaliação Institucional.

## ABSTRACT

The Own Evaluation Commission of the Federal University of Alfenas (UNIFAL-MG), performs semiannually a student institutional assessment. This evaluation refers to several axes, one of which is the evaluation of teachers and the subjects they teach. For evaluation, a qualitative type variable with 5 categories is used, describing questions from excellent to terrible. An analytical study for this case of finite and small population, worsens in small samples. This work has been developed with the objective of proposing the CPA the inferential treatment of this questionnaire aiming to evaluate multivariate interval estimation methods for finite populations. In the literature review, it was identified that many studies use multinomial distribution, that end up assuming infinite populations, making it difficult to choose an analytical method that is appropriate to the scenarios of this problem. With that, the need arose to investigate methods that would serve me that are based on hypergeometric distribution, to assess possible differences in relation to the methods that use multinomial. The best multinomial intervals were selected and also adapted with a a correction factor for finite populations and implemented for analysis. With the analysis, it was not possible to choose a single method as the best, because the effectiveness of the method depends on the scenario to be applied, with this, it is necessary to evaluate the population parameters to choose the method that best fits.

**Keywords:** Multivariate Analysis; Hypergeometric Distribution; Simulation; Institutional Evaluation .



## Lista de Figuras

1	Acurácia percentual dos métodos nos cenários de estudo. . . . .	30
---	---	----

## Lista de Tabelas

1	Principais estatísticas . . . . .	14
2	Descrição dos cenários do estudo e as proporções paramétricas utilizadas	28
3	Resumo da análise da acurácia dos métodos estudados destacando os melhores . . . . .	32
4	Valores percentuais das vezes que um método apresenta amplitude me- nor em uma comparação dois a dois. . . . .	35
5	Porcentagem de acurácia do M1 em 10 mil simulações . . . . .	59
6	Porcentagem de acurácia do M2 em 10 mil simulações . . . . .	60
7	Porcentagem de acurácia do M3 em 10 mil simulações . . . . .	61
8	Porcentagem de acurácia do M4 em 10 mil simulações . . . . .	62
9	Porcentagem de acurácia do M5 em 10 mil simulações . . . . .	63
10	Porcentagem de acurácia do M6 em 10 mil simulações . . . . .	64
11	Amplitude média do M1 em 10 mil simulações . . . . .	65
12	Amplitude média do M2 em 10 mil simulações . . . . .	66
13	Amplitude média do M3 em 10 mil simulações . . . . .	67
14	Amplitude média do M4 em 10 mil simulações . . . . .	68
15	Amplitude média do M5 em 10 mil simulações . . . . .	69
16	Amplitude média do M6 em 10 mil simulações . . . . .	70
17	Número de vezes que a amplitude do M1 é maior, menor ou igual à M2	71
18	Número de vezes que a amplitude do M1 é maior, menor ou igual à M3	72
19	Número de vezes que a amplitude do M1 é maior, menor ou igual à M4	73
20	Número de vezes que a amplitude do M1 é maior, menor ou igual à M5	74
21	Número de vezes que a amplitude do M1 é maior, menor ou igual ao M6	75
22	Número de vezes que a amplitude do M2 é maior, menor ou igual ao M3	76
23	Número de vezes que a amplitude do M2 é maior, menor ou igual ao M4	77
24	Número de vezes que a amplitude do M2 é maior, menor ou igual ao M5	78
25	Número de vezes que a amplitude do M2 é maior, menor ou igual ao M6	79

26	Número de vezes que a amplitude do M3 é maior, menor ou igual ao M4	80
27	Número de vezes que a amplitude do M3 é maior, menor ou igual ao M5	81
28	Número de vezes que a amplitude do M3 é maior, menor ou igual ao M6	82
29	Número de vezes que a amplitude do M4 é maior, menor ou igual ao M5	83
30	Número de vezes que a amplitude do M4 é maior, menor ou igual ao M6	84
31	Número de vezes que a amplitude do M5 é maior, menor ou igual ao M6	85

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>29</b>
4.1	Acurácia . . . . .	29
4.2	Precisão . . . . .	33
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>36</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>37</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>59</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Estimar uma proporção de uma característica de interesse desconhecida de elementos em uma população, de uma característica de interesse, por meio de uma amostra é um problema comum na literatura. Esse problema se torna ainda mais complicado quando se expande para situações multivariadas, onde o interesse está em estimar  $n_k$  proporções que se relacionam em uma população finita.

O caso que motivou o estudo está ligado ao problema enfrentado pela Comissão Própria de Avaliação (CPA), da Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG), que elabora e desenvolve junto à comunidade acadêmica autoavaliações institucionais. Uma das avaliações é realizada semestralmente e um dos pontos abordados é referente aos docentes e as disciplinas que ministram. Para a avaliação é usada uma variável do tipo qualitativa ordinal com 5 níveis de categorias, indo de excelente a péssimo.

De acordo com os dados obtidos por meio da CPA, essas avaliações têm obtido uma aderência muito pequena da comunidade votante, com isso, surge uma preocupação em relação aos métodos utilizados para a realização de uma inferência confiável.

Outro fato relevante é que as populações em estudo, que normalmente são as turmas ou alunos matriculados nas disciplinas, são finitas e em alguns casos muito pequenas, fato este evidente nos cursos de exatas, logo, com a baixa aderência das avaliações a amostragem é muito pequena, não descrevendo a população de forma consistente.

De acordo com Costa (2017), quando se opta por um estudo estatístico com amostras, a Estatística estabelece técnicas que validam se a estimativa obtida junto à amostra é de qualidade e representativa, sendo esse o objetivo da estatística inferencial. Com isso, existe a necessidade de a CPA optar por métodos adequados se desejar inferir sobre o estudo amostral.

Como para a avaliação é usada uma variável do tipo qualitativa com múltiplos níveis de categorias, o estudo inferencial precisa ser de caráter multivariado e neste problema para populações finitas. Estimativas de parâmetros de proporção, aliadas a cenários de poucos dados dificultam o uso de processos assintóticos e aproximados.

Diante deste problema, verificou-se na literatura que a distribuição de probabilidade mais utilizada para o problema é a multinomial, porém assume populações infinitas e alguns métodos analíticos usam de procedimentos assintóticos, o que não retrata o problema em estudo. Assim, justifica-se a análise de comparação e adaptação dos

melhores métodos encontrados em busca daquele que apresente o melhor desempenho nos cenários levantados.

Para a construção desse trabalho, no segundo capítulo é apresentado o referencial teórico para fundamentar o que foi apresentado, além dos termos técnicos e notações. Também, apresenta-se a expansão da distribuição de probabilidade binomial para dados categóricos multivariados - a multinomial, que descrevem a variável de estudo, mas que assume população infinita, como alternativa define-se a distribuição hipergeométrica multivariada, que considera populações finitas. Essas distribuições foram utilizadas para construção dos estimadores por meio de intervalos de confiança. Com isso, três dos melhores métodos avaliados na revisão foram selecionados e apresentados.

Para contornar a problemática dos estimadores selecionados assumirem população infinita, os métodos selecionados foram adaptados com fator de correção de população finita, em busca de melhorar sua performance ao lidar com populações muito pequenas. Os intervalos de confiança selecionados na literatura, foram implementados por meio da linguagem de programação do software R (TEAM, 2021).

Com o propósito de simular cenários a partir de dados de uma variável de população finita. O pacote `extraDistr` (WOLODZKO, 2019) do R foi utilizado por já ter implementado a distribuição hipergeométrica multivariada, o que permitiu explorar cenários diferentes para os parâmetros e diferentes tamanhos amostrais e populacionais. Todos ao todo vinte cenários foram simulados com 10 mil amostras aleatórias, em busca do melhor método.

Com isso, tem-se como objetivo avaliar diferentes estimações por intervalos para proporção de população finita multivariada por meio de simulação Monte Carlo, de modo a eleger o melhor método, por meio da implementação dos intervalos de confiança selecionados na literatura, para simular o comportamento dos métodos, além de programar um algoritmo para analisar a acurácia e precisão dos métodos.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

A estatística é uma ciência que estuda e mede dados referentes a fenômenos, por meio de um conjunto de métodos e processos, sendo dividida em estatística descritiva e inferencial (COSTA, 2017).

Conforme Bussab e Morettin (2010) a estatística descritiva tem como objetivo, descrever características associadas a um conjunto de dados. Já a estatística inferencial é responsável por fazer afirmações sobre as características de uma população, com base em informações obtidas de um subconjunto de um conjunto maior.

Em uma exemplificação da diferença entre os dois processos Magalhães e Lima (2005) abordam que quando você quer saber se uma sopa ficou boa, tem duas alternativas:

1. Você come toda a sopa. Neste caso, suas conclusões serão de caráter descritivo, pois ao consumir tudo, conseguirá descrever as características da sopa com clareza.
2. Vai retirar apenas uma colher e provar. Neste caso, suas conclusões serão de caráter inferencial, pois estará consumindo apenas uma parte e tirando conclusões sobre o todo.

No caso da sopa, habitualmente o sabor é homogêneo, com isso é fácil inferir sobre o todo ao provar apenas uma parte, entretanto, em algumas situações, temos uma heterogeneidade, dificultado essa inferência, fazendo-se necessário técnicas mais avançadas.

Neste trabalho, o interesse de estudo é na inferência estatística. Segundo Costa (2017) a estatística inferencial tem como propósito auxiliar na tomada de decisões, por meio de uma estimativa amostral sobre um parâmetro populacional de interesse, sendo essa estimativa obtida por técnicas inferenciais.

Por outro lado, de modo semelhante Magalhães e Lima (2005) definem inferência estatística como um conjunto de métodos que visam por meio de evidências fornecidas por uma amostra estudar a população.

Deste modo, seguem algumas definições importantes para a estatística, de interesse neste estudo.

**Definição 2.1** *População* é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação.

**Definição 2.2** *Amostra* é um subconjunto da população, obtido de forma aleatória com unidades amostrais independentes.

**Definição 2.3** *Parâmetro* é uma medida numérica que descreve uma característica da população, associado a uma função de distribuição de probabilidade.

**Definição 2.4** *Uma estatística* é um número que pode ser calculado a partir de dados amostrais, sem fazer uso de nenhum parâmetro desconhecido.

Para cada parâmetro de uma população, existe uma estatística a ser calculada com base em dados amostrais, geralmente o método de obtenção do valor que representa o parâmetro e a estatística são análogos e a estatística é uma estimativa do parâmetro populacional (SPIEGEL, 1978).

**Definição 2.5** *Estimativa* é uma medida numérica que descreve uma característica da amostra.

De modo geral, usa-se as letras gregas para representar os valores dos parâmetros da população e letras romanas minúsculas para valores correspondentes à estatística.

A Tabela 1 exemplifica alguns parâmetros e as estatísticas para estimá-los a partir de uma amostra.

Tabela 1: Principais estatísticas

Denominação	População (parâmetro)	Amostra (estatística)
Média	$\mu = E(X)$	$\bar{x} = \sum \frac{x_i}{n}$
Variância	$\sigma^2 = Var(X)$	$s^2 = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$
Número de elementos	$N$	$n$
Proporção	$p$	$\hat{p} = \frac{x}{n}$

Fonte: Bussab e Morettin (2010).

De acordo com Moore, Notz e Fligner (2017) em um conjunto de dados que contém algumas características a respeito de um grupo de indivíduos pode ser organizada como variáveis.

**Definição 2.6** *Uma variável é qualquer característica de interesse que associamos à população a ser estudada e que o seu resultado varia de indivíduo para indivíduo.*

Altura, idade e estado civil são variáveis que descrevem características de um indivíduo.

**Definição 2.7** *Uma variável categórica posiciona um indivíduo em um de diversos grupos ou categorias.*

Como exemplo, em um estudo onde deseja-se estudar o número de fumantes de uma população, variáveis categóricas são utilizadas, tendo duas categorias: fumantes e não fumantes.

**Definição 2.8** *Uma variável aleatória é uma variável cujo valor é resultado numérico de um fenômeno aleatório que apresenta valores que podem ser descritos por uma distribuição de probabilidade.*

Uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória  $X$ , apresenta quais valores  $x$  pode assumir e descreve o comportamento da probabilidade total 1, sendo essa probabilidade total alocada entre os diferentes possíveis valores de  $X$  (DEVORE, 2006). Uma distribuição pode ser populacional ou amostral.

**Definição 2.9** *A distribuição populacional de uma variável é a distribuição dos valores da variável entre todos os indivíduos da população.*

**Definição 2.10** *A distribuição amostral de uma estatística é a distribuição dos valores assumidos pela estatística em todas as amostras possíveis de mesmo tamanho, de uma mesma população.*

É importante ressaltar que a distribuição populacional descreve os indivíduos que constituem uma população e a distribuição amostral descreve como uma estatística varia ou se comporta em muitas (infinitas) amostras extraídas de uma população (MOORE; NOTZ; FLIGNER, 2017). Uma estatística também é uma variável aleatória.



Ainda de acordo com Moore, Notz e Fligner (2017), se observar indivíduos em quantidade suficiente, uma estatística desta amostra irá em algum momento, se aproximar bastante do parâmetro desconhecido da população, dadas as propriedades de um ótimo estimador em uso <sup>1</sup>.

A distribuição binomial e a hipergeométrica serão apresentadas, sendo de interesse no estudo, por estarem associadas a variáveis categóricas.

De acordo com Devore (2006), quando um experimento assume as quatro condições listadas a seguir, é garantido que esse pode ser modelado pela distribuição de probabilidade Binomial.

1. O experimento é obtido por uma sequência de  $n$  experimentos, denominados como tentativas, sendo  $n$  estabelecido anteriormente ao experimento.
2. Cada uma das  $n$  tentativas pode assumir apenas um de dois possíveis resultados, sendo eles: sucesso( $S$ ) e fracasso( $F$ ).
3. Uma tentativa não influi no resultado de qualquer outra tentativa, ou seja, as tentativas são independentes.
4. A probabilidade de sucesso não se altera entre as tentativas, sendo essa probabilidade denominada como  $\pi$ .

A distribuição de probabilidade Binomial, é denotada por  $X \sim bin(n, \pi)$  para indicar que  $X$  é uma variável aleatória que segue a distribuição binomial baseada em  $n$  ensaios com probabilidade de sucesso  $\pi$ , seu interesse está no número total de sucessos, entre os  $n$  ensaios (DEVORE, 2006).

**Definição 2.11** *A função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória Binomial depende de dois parâmetros, sendo eles  $n$  e  $\pi$ , e é representada por  $bin(x; n, \pi)$ .*

**Definição 2.12** *A função de probabilidade da distribuição Binomial é dada por:*

$$bin(n, \pi) \begin{cases} P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>A lei dos grandes números é um teorema fundamental da teoria da probabilidade, que descreve o resultado da realização da mesma experiência repetidas vezes.

Sendo,

$x$  o número de sucessos

$n$  tamanho amostral

$\pi$  a probabilidade de sucesso.

**Proposição 2.13** *Se  $X \sim \text{bin}(n, \pi)$ , então a esperança matemática  $E(X)$  e a variância  $V(X)$  da variável que segue uma binomial é:*

$$E(X) = n\pi \quad (2)$$

$$V(X) = n\pi(1 - \pi) \quad (3)$$

A distribuição binomial assume que a população alvo é considerada de tamanho infinito e para o caso de uma população finita a distribuição que seria mais apropriada para descrever o comportamento da variável é a hipergeométrica. Na distribuição de probabilidade hipergeométrica, Devore (2006) denota esta distribuição como:

1. A população de onde a amostra é retirada é composta por  $N$  indivíduos, ou seja, é uma população finita;
2. Cada indivíduo é classificado como sucesso (S) ou falha (F) e há  $M$  sucessos na população;
3. É selecionada uma amostra sem reposição de  $n$  indivíduos de forma que cada subconjunto de tamanho  $n$  seja igualmente provável de ser escolhido.

Além disso, a variável de interesse  $X$  é o número de sucessos  $S$  da amostra.

**Definição 2.14** *A função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória hipergeométrica depende dos parâmetros  $n$ ,  $M$  e  $N$ , é representada por  $\text{hip}(x; n, M, N)$ .*

**Definição 2.15** *Se  $X$  for o número de  $S$  de uma amostra completamente aleatória de tamanho  $n$  tirada de uma população constituída de  $M$  sucessos  $S$  e  $N - M$  fracassos  $F$ , então a distribuição de probabilidade de  $X$ , denominada distribuição hipergeométrica, será dada por*

$$\text{hip}(x; \pi, M, N) \left\{ = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \right. \quad (4)$$

para  $x$ , um número inteiro, satisfazendo  $\max [0, n - N + M] \leq x \leq \min (n, N)$ .

Sendo,

$N$  o número de elementos na população.

$M$  o número de elementos de sucesso na população.

$n$  o número de sucessos.

$x$  o número total de sucessos na amostra.

$\pi = \frac{M}{N}$  a probabilidade de sucesso.

**Proposição 2.16** *Se  $X \sim \text{hip}(n, M, N)$ , então:*

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N} = n\pi \quad (5)$$

$$V(X) = n\pi(1 - \pi) \left( \frac{N - n}{N - 1} \right). \quad (6)$$

Percebe-se que a média da variável que segue a distribuição hipergeométrica é igual a de uma binomial e que a variância se diferencia por um fator que é conhecido na literatura como fator de correção para populações finitas.

De acordo com Devore (2006) o fator de correção finita é menor que 1, deste modo a variável hipergeométrica tem variância menor do que a binomial. O fator de correção pode ser escrito como  $\frac{N - n}{N - 1}$ , que é aproximadamente 1 quando  $n$  é pequeno em relação a  $N$ .

Outro resultado importante para esse estudo, são os estimadores, de acordo com Spiegel (1978) a estimativa de um parâmetro populacional dado por um único valor é chamado de estimador pontual do parâmetro. Já uma estimativa de um parâmetro populacional dada por dois valores, que definem um intervalo de valores, é chamada de estimador por intervalo do parâmetro.

**Exemplo 2.17** *Se diz que uma distância é de 5,28 pés, está dando uma estimativa pontual. Se, por outro lado, diz que a distância é de  $5,28 \pm 0,03$  pés, isto é, a distância deve estar compreendida entre 5,25 e 5,31 pés, tem-se uma estimativa por intervalo.*

É importante mencionar que a construção do intervalo envolve a definição da distribuição de uma estatística, com a inclusão de uma probabilidade de confiança  $(1 - \alpha)$ , sendo  $\alpha$  o erro máximo aceitável. Esse procedimento é chamado de intervalo de confiança, já que incorpora a confiança do estimador ao parâmetro desconhecido

e a variabilidade ou erro do estimador. Sendo objeto de estudo deste trabalho, as estimativas por meio de intervalos de confiança para proporção.

**Definição 2.18** *Um intervalo de confiança para um parâmetro é calculado a partir de dados, usualmente da forma:*

$$\text{estimativa} \pm \text{margem de erro}$$

**Definição 2.19** *O nível de confiança dá a probabilidade que o intervalo contenha o verdadeiro valor do parâmetro em amostras repetidas. Ou seja, o nível de confiança é a taxa de sucesso do método.*

De acordo com Moore, Notz e Fligner (2017) o usuário pode escolher o nível de confiança que deseja utilizar, quase sempre 90% ou mais, por querer estar seguro de suas conclusões, neste caso,  $\alpha = 10\%$ . O nível de confiança mais comum é de 95%. Em um intervalo com 95% de confiança, temos que o método fornece resultados corretos em pelo menos 95% das vezes, ou seja, são as chances de que o resultado caia entre  $a$  e  $b$ , sendo  $a$  e  $b$  os extremos do intervalo de confiança.

As técnicas apresentadas até então, referem-se a situações em que cada observação de um conjunto de dados é um único número ou uma única categoria. Com tudo, quando uma pesquisa ou estudo é desenvolvido, dificilmente o foco de interesse está em uma única variável isolada. As variáveis de estudo, comumente se relacionam, se tais relações forem exploradas, a análise será mais consistente em relação as informações desejadas (MAGALHÃES; LIMA, 2005).

Segundo Mingoti (2005) a estatística multivariada se trata de um conjunto de técnicas estatísticas utilizadas em situações que envolvem mais de uma variável simultaneamente, de modo geral, essas variáveis se relacionam entre si. Além disso, quanto mais variáveis, mais complexa a análise se torna.

Para ilustrar, Ferreira (2008) apresenta um exemplo dessa situação, ao analisar a reação de uma planta a uma certa doença. A planta pode ser classificada/categorizada como sadia, levemente infectada, moderadamente infectada ou severamente infectada. Modelos probabilísticos multinomiais podem ser utilizados para lidar com dados dessa natureza. Uma planta pode se encaixar no momento do estudo em exclusivamente uma só categoria.

Com isso, a seguir serão apresentadas algumas definições de interesse que são muito comuns no tratamento de dados multivariados, de acordo com Mingoti (2005).

**Definição 2.20** Seja  $X$  um vetor contendo  $p$  componentes, onde cada componente é uma variável aleatória, isto é  $X_i$  é uma variável aleatória  $\forall_i = 1, 2, \dots, p$ . Então  $X$  é chamado de **vetor aleatório** e é denotado por:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}. \quad (7)$$

**Definição 2.21** Seja  $X$  um vetor aleatório. O vetor  $\mu = E(X)$  é chamado de **vetor de médias** do vetor  $X = [X_1 X_2 \dots X_p]'$ , sendo

$$\mu = E(X) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}, \quad (8)$$

onde,  $\mu_i = E(X_i)$  denota a média, ou esperança da variável aleatória  $X_i, i = 1, 2, \dots, p$ .

Conforme Mingoti (2005), a média é a uma das medidas mais utilizadas para sintetizar informações da distribuição de valores da variável  $X_i$ .

**Definição 2.22** A **variância** do  $i$ -ésimo componente do vetor  $X$  é denotada por:

$$\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2 = \sigma_{ii}. \quad (9)$$

**Definição 2.23** O **desvio padrão** é denotado por  $\sigma_i$  ou  $\sqrt{\sigma_{ii}}$  e fornece a informação sobre a disposição dos valores da variável  $X_i$  estão próximos ou distantes da média  $\mu_i$ . Assim, valores grandes de  $\sigma_i$  indicam uma maior dispersão de valores em relação à média da distribuição.

Em um estudo multivariado também é possível avaliar a variabilidade entre duas variáveis, que é chamada de covariância.

**Definição 2.24** A **covariância** entre os valores da  $i$ -ésima e  $j$ -ésima variáveis do vetor  $X$  é denotada por:

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij} = E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j), \quad (10)$$

quando  $i = j$ , a expressão torna-se a variância da variável  $X_i, i = 1, 2, \dots, p$ . A representação mais natural para as variâncias e covariâncias de um conjunto de  $p$  variáveis é o uso de uma matriz e portanto, a diagonal representa as variâncias e fora desta as covariâncias.

**Definição 2.25** Uma *matriz de covariância* é a matriz de variâncias e covariâncias do vetor aleatório  $X$ , denotada por:

$$\text{Cov}(X) = V(X) = \text{Var}(X) = \Sigma_{p \times p} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Seja o caso multivariado considerando  $p$  variáveis categóricas, onde cada uma segue uma distribuição binomial, as  $p$  variáveis conjuntamente seguem uma distribuição conhecida como multinomial, ao considerarmos uma amostra de tamanho  $n$  nesta distribuição, cada unidade amostral independente pode ter realizações em qualquer e somente uma das  $p$  categorias (FERREIRA, 2008).

Ainda segundo Ferreira (2008), utiliza-se 1 para representar o sucesso de uma categoria e 0 para representar o fracasso. Como exemplo, em uma situação com  $p = 3$ , o resultado de uma variável aleatória pode ser dada por  $[0, 1, 0]^T$ , indicando que houve sucesso na categoria 2 e fracasso nas categorias 1 e 3. Pode-se observar que a categoria de sucesso é linearmente dependente das demais  $p - 1$  categorias.

Para uma amostra de tamanho  $n$  de uma população, obtida a partir de ensaios multinomiais, temos  $X_k = \sum_{j=1}^n Y_{jk}$ , sendo  $Y_{jk}$  a variável aleatória correspondente a  $j$ -ésima unidade amostral da  $k$ -ésima categoria, cuja as possíveis realizações são 1 para sucesso e 0 para fracasso. Ou seja,  $Y_{jk} = [Y_{j1}, Y_{j2}, \dots, Y_{jk}]^T$  é uma observação multinomial com  $\sum_{k=1}^p Y_{jk} = 1$  e as contagens  $[X_1, X_2, \dots, X_p]^T$  possuem distribuição multinomial (FERREIRA, 2008).

Segundo os autores Spiegel (1978) e Freund, Miller e Miller (2000) a distribuição de probabilidade multinomial é uma generalização imediata da distribuição de probabilidade binomial. Com isso, a função de probabilidade multinomial será definida.

**Teorema 2.26** O vetor aleatório  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  tem distribuição multinomial com parâmetros  $n$  e probabilidades  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ , se sua função de probabilidade conjunta é dada

por:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_p = n_p) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!} \prod_{k=1}^p \pi_k^{n_k} \text{ tal que } \sum_{k=1}^p n_k = n \quad (12)$$

e para  $0 < \pi_k < 1$ ,  $\sum_{k=1}^p \pi_k = 1$

**Proposição 2.27** Se  $X_k \sim \text{Mult}(n, \pi_k)$ , então:

$$E(X_k) = n\pi_k, \quad V(X_k) = n\pi_k(1 - \pi_k). \quad (13)$$

$$\text{Cov}(X_k, X_{k'}) = -n\pi_k\pi_{k'} \text{ para } k \neq k'. \quad (14)$$

Da mesma forma que a distribuição binomial recebe uma generalização para estatística multivariada, o mesmo ocorre com a generalização da distribuição de probabilidade hipergeométrica.

**Teorema 2.28** A função de possibilidade da distribuição hipergeométrica multivariada é dada por:

$$\text{HipM}(x_1, x_2, \dots, x_p; M_1, M_2, \dots, M_p, N, n) = \frac{\prod_{k=1}^p \binom{M_k}{x_k}}{\binom{N}{n}} \quad (15)$$

para  $x_i = 0, 1, 2, \dots, n$  e  $x_i \leq M_i, \forall_i$ , tal que  $\sum_{i=1}^k x_i = n$  e  $\sum_{i=1}^k M_i = N$

**Proposição 2.29** Se  $X_k \sim \text{HipM}(M_k, N, n)$ , então:

$$E(X_k) = \frac{nM_k}{N}, \quad V(X_k) = n \frac{M_k}{N} \left(1 - \frac{M_k}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right). \quad (16)$$

$$\text{Cov}(X_k, X_{k'}) = -\frac{nM_k M_{k'}}{N^2} \left(\frac{N-n}{N-1}\right). \quad (17)$$

para  $k \neq k'$ .

Bem como a estatística univariada, a multivariada, é dividida em dois procedimentos, sendo que um deles consiste num conjunto de técnicas exploratórias para estudo e sistematização da variabilidade dos dados e o outro refere-se as técnicas de inferência estatística (MINGOTI, 2005). Sendo de interesse para este estudo a inferência multivariada.

Analogamente ao que foi visto na estatística univariada, têm-se estimadores intervalares para proporção de populações multivariadas. De acordo com Lee, Nyangoma e Seber (2002), o problema de definir intervalos de confiança para os parâmetros de modelos não lineares tem recebido atenção considerável nos últimos anos.

Na literatura especializada, Lee, Nyangoma e Seber (2002) avaliam 12 propostas de intervalos de confiança para parâmetros multinomiais. Para avaliar o desempenho dos métodos, os autores comparam a cobertura dos intervalos, volume e amplitude, para isso foram geradas amostras  $n=30; 50$  e  $100$ . Usando 5 mil simulações para estimar a cobertura e mil simulações para amplitude.

Baseado no método mais bem avaliado por Lee, Nyangoma e Seber (2002), Ferreira (2008) define, de forma assintótica, o intervalo de confiança simultâneo aproximado de  $100(1 - \alpha)\%$ .

$$IC_{1-\alpha}(\ell^T \pi) : \ell^T \hat{\pi} \pm \sqrt{\chi_{\alpha, p-1}^2} \sqrt{\frac{\ell^T \hat{\Sigma} \ell}{n}}, \quad (18)$$

sendo,  $\ell^T \pi$  as possíveis combinações lineares de cada componente do vetor de parâmetros  $\pi$ ,  $\chi_{\alpha, p-1}^2$  é o quantil superior  $\alpha$  da distribuição qui-quadrado com  $p-1$  graus de liberdade e  $\frac{\hat{\Sigma}}{n}$  a covariância de  $\hat{\pi}$ .

De acordo com Jhonson e Wichern (1998 apud FERREIRA, 2008), para este intervalo, é recomendável que os valores observados em cada categoria  $n_k \geq 20$ .

Hou, Chiang e Tai (2003) estudaram a construção de intervalos de confiança simultâneos para proporção multinomial de forma extensiva, apresentando um conjunto de métodos, que são avaliados por meio da técnica de Monte Carlo <sup>2</sup>.

Até onde se sabe Quesenberry e Hurst (1964 apud HOU; CHIANG; TAI, 2003), foram os primeiros a discutir o assunto, eles derivaram os intervalos de confiança simultâneos para grandes amostras com base em uma aproximação do qui-quadrado da estatística de Pearson.

Dentre os principais intervalos apresentados por Hou, Chiang e Tai (2003), dois deles ganham destaque em uma cobertura igual ou maior que 95%, para diversos valores de  $n$ .

O primeiro é baseado na aproximação qui-quadrado da estatística de Pearson, foi

---

<sup>2</sup>A técnica de Monte Carlo consiste em gerar uma grande quantidade de dados aleatórios para simulação, com objetivo de testar a eficácia do método.



inicialmente definido por Goodman (1965), apresentando um menor comprimento que o de Quesenberry e Hurst (1964), é dado por:

$$IC_{1-\alpha}(\pi_k) : \frac{\chi_{\alpha,p-1}^2 + 2n_k \pm \sqrt{\chi_{\alpha,p-1}^2 [\chi_{\alpha,p-1}^2 + 4n_k(n - n_k)/n]}}{2(n + \chi_{\alpha,p-1}^2)} \quad (19)$$

para  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Já o segundo intervalo apresentado por Hou, Chiang e Tai (2003) e desenvolvido por Fitzpatrick e Scott (1987), é derivado de um ajuste de intervalos binomiais para contemplar a extensão multinomial, utilizando para isso a aproximação normal, resultando o intervalo:

$$IC_{1-\alpha}(\pi_k) : \frac{n_k}{n} \pm \frac{Z_{\frac{\alpha}{4}}}{2\sqrt{n}} \quad (20)$$

sendo,  $Z_{\frac{\alpha}{4}}$  o quantil superior 100% $_{(\frac{\alpha}{4})}$  da distribuição normal padrão.

Estes dois intervalos apresentados, no entanto, possuem um desempenho inferior a um outro intervalo também apresentado por Hou, Chiang e Tai (2003), em relação a precisão, mas este requer maior tempo e recursos computacionais para serem determinados.

Como já abordado, os intervalos apresentados em (14), (15) e (16) são baseados em uma distribuição multinomial, que assume população infinita, entretanto, no cenário apresentado das avaliações institucionais, a problemática têm uma população finita e pequena, com isso, há necessidade de um método de inferência que considere o número finitos de elementos da população. Neste caso, a distribuição mais apropriada é a hipergeométrica multivariada. Com tudo, na literatura, não se verificou estimadores intervalares específicos para o caso multivariado.

Diante de propostas de intervalos de confiança baseados na hipergeométrica multivariada com informações inconclusivas, explorou-se os métodos univariados e as técnicas usadas para o uso de intervalos univariados nos casos multivariados.

Os trabalhos mais atuais estudados que contemplam intervalos baseados na distribuição hipergeométrica são os de Wendell e Schmee (2001), Talens (2005) e Wang (2015). Todos os estudos apresentam e comparam diferentes estimadores, com suas respectivas propriedades, em busca do melhor método.

Entre os autores estudados, existe um consenso na classificação dos três principais métodos mais adequados, sendo os métodos desenvolvidos por Buonaccorsi(1987), que

é uma adaptação melhorada do método de Cochran(1977) e também de Konijn(1973), sendo o primeiro o mais bem avaliado.

Wang (2015) disponibiliza um algoritmo para encontrar os intervalos de confiança hipergeométrico univariados baseado em Buonaccorsi(1987), que tem sido avaliado como o mais adequado, sendo estudado com objetivo de ajustá-lo para situações multivariadas.

Além disso, pela falta de métodos que contemplem a situação de população finita, os métodos (14), (15) e (16), baseados na multinomial foram adaptados para contemplarem população finita.

Como visto na apresentação das distribuições binomial e hipergeométrica, a variância das duas se diferencia por um fator que é conhecido na literatura como fator de correção finita, que tem como objetivo incluir e considerar no método o número de elementos da população. Esse fator é dado por  $\frac{N-n}{N-1}$ .

Os intervalos utilizando o fator de correção para população finita fariam a correção no Erro padrão dos casos Multinomiais e assim são apresentados:

Intervalo apresentado por Lee, Nyangoma e Seber (2002), adaptado com correção de população finita:

$$IC_{1-\alpha}(\ell^T \pi) : \ell^T \hat{\pi} \pm \sqrt{\chi_{\alpha,p-1}^2} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \cdot \sqrt{\frac{\ell^T \hat{\Sigma} \ell}{n}} \quad (21)$$

Intervalo de Goodman (1965) apresentado por Hou, Chiang e Tai (2003), baseado na aproximação qui-quadrado da estatística de Pearson, adaptado com correção de população finita:

$$IC_{1-\alpha}(\pi_k) : \frac{\chi_{\alpha,p-1}^2 + 2n_k}{2(n + \chi_{\alpha,p-1}^2)} \pm \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \cdot \frac{\sqrt{\chi_{\alpha,p-1}^2 [\chi_{\alpha,p-1}^2 + 4n_k(n - n_k)/n]}}{2(n + \chi_{\alpha,p-1}^2)} \quad (22)$$

Intervalo de Fitzpatrick e Scott (1987) apresentado por Hou, Chiang e Tai (2003), derivado de um ajuste de intervalos binomiais para contemplar a extensão multinomial, utilizando para isso a aproximação normal, adaptado com correção de população finita:

$$IC_{1-\alpha}(\pi_k) : \frac{n_k}{n} \pm \frac{Z_{\frac{\alpha}{4}}}{2\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad (23)$$

Diante destes métodos de estimação intervalar selecionados como os mais adequados, esse trabalho foi desenvolvido com o propósito de avaliá-los em situação de população finita e eleger o que melhor descreve o cenário das avaliações institucionais proporcionada pela comissão própria de avaliação.

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

Esse estudo é classificado como uma pesquisa exploratória e analítica, em que uma revisão da literatura acerca dos diferentes intervalos de confiança para proporção de populações finitas multivariadas de variáveis multi-categóricas foi feita.

A abordagem do problema é de caráter quantitativo, tendo como base para execução os intervalos de confiança encontrados nas obras citadas na revisão de literatura, com o propósito de avaliar os intervalos de confiança e compará-los.

Os intervalos de confiança encontrados na literatura, considerados os mais adequados e apresentados no referencial teórico foram implementados por meio da linguagem de programação do software R (TEAM, 2021).

Com o propósito de simular cenários a partir de dados de uma variável de população finita. O pacote `extraDistr` (WOLODZKO, 2019) do R foi utilizado por já ter implementado a distribuição hipergeométrica multivariada, o que permitiu explorar cenários diferentes para os parâmetros e diferentes tamanhos amostrais e populacionais. Todos os cenários que foram simulados com 10 mil amostras aleatórias.

Ao todo, vinte cenários foram criados para esse estudo, a escolha desses cenários foi baseada no números de alunos matriculados em disciplinas na UNIFAL-MG.

Em casa um dos cenários, a variável de interesse do estudo tem 5 categorias, podendo assumir apenas umas, sendo elas excelente, bom, regular, ruim e péssimo.

Os cenários estudados são:

Os intervalos de confiança gerados nas simulações foram organizados, avaliados e comparados entre eles de acordo com sua precisão e acurácia.

Para avaliação da acurácia, um algoritmo em linguagem R foi desenvolvido e conta com uma estrutura de repetição que analisa os intervalos de confianças um a um, contabilizando quantas das vezes o parâmetro populacional não estava entre o intervalo de confiança estimado.

O valor apresentado pelo contador foi transformado em porcentagem e os dados obtidos para acurácia dos métodos estão apresentados a partir do Apêndice B.

Para analisar a precisão, usou-se da amplitude dos intervalos de confiança, sendo que um algoritmo em R foi desenvolvido e este usa de estrutura de repetição para calcular a amplitude dos intervalos das 5 categorias da variável em cada um dos vinte

Tabela 2: Descrição dos cenários do estudo e as proporções paramétricas utilizadas

Cenários	N	n	Parâmetros
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)
9	50	10	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)
10	50	10	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

cenários estudados, em 10 mil simulações. As amplitudes obtidas em cada um dos cenários foram arquivadas em uma matriz e foram consultadas separadamente, mas, devido a grande quantidade de dados, uma média dessas amplitudes foi usada.

A média das amplitudes dos métodos em cada uma das categorias dos cenários de estudo são apresentados a partir do Apêndice H.

Ainda em relação a precisão, o algoritmo desenvolvido permite comparar os métodos entre si, indicando quantas vezes a amplitude de um método é maior, menor ou igual a de outro método em todas as simulações. O valor numérico foi transformado em porcentagem. A tabulação dessas informações são apresentadas a partir do Apêndice N.

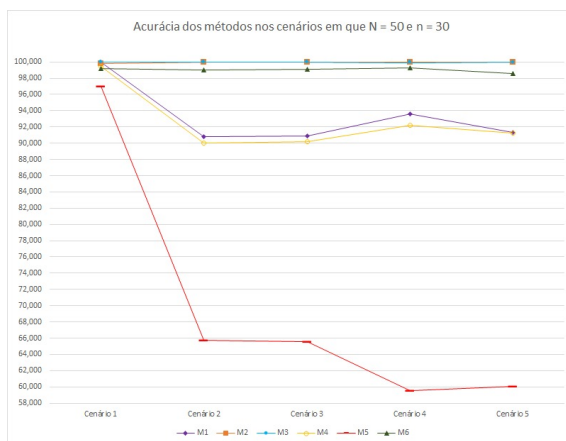
## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A fim de notação e organização do texto, os métodos serão enumerados, de acordo com a ordem que aparecem no referencial teórico, ou seja, M1 - equação (18); M2 - equação (19); M3 - equação (20); M4 - equação (21); M5 - equação (22) e M6 - equação (23). Os seis métodos em estudo foram avaliados de acordo com acurácia e precisão.

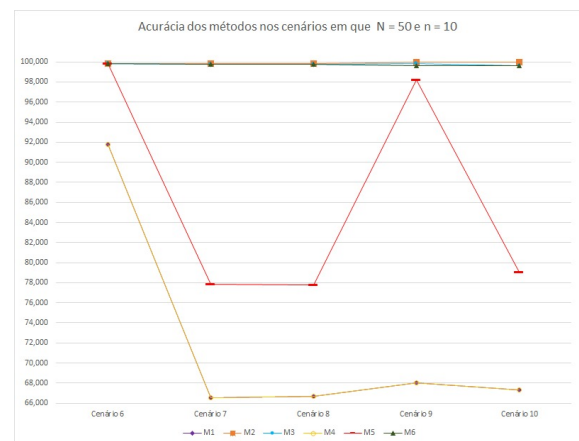
### 4.1 Acurácia

Bussab e Morettin (2010) fazem uma analogia entre acurácia e um jogo de dardos, se você acerta o alvo está sendo acurado, se você erra o alvo não está sendo acurado, interpretando isso para um intervalo de confiança, significa que, se o intervalo contém o parâmetro, ele é acurado, caso contrário, não é acurado. Para sintetizar os dados das simulações e facilitar a interpretação, esses foram plotados em quatro gráficos, onde cada um representa cinco dos cenários de estudo em cada combinação de  $N$  e  $n$ .

Pela análise conjunta dos gráficos da Figura 1, é possível avaliar o comportamento dos métodos nos diferentes cenários estudados, além de identificar se estes apresentam variação da acurácia entre os diferentes cenários estudados. A descrição dos cenários se encontra na Tabela 2.



(a)  $N = 50$  e  $n = 30$



(b)  $N = 50$  e  $n = 10$

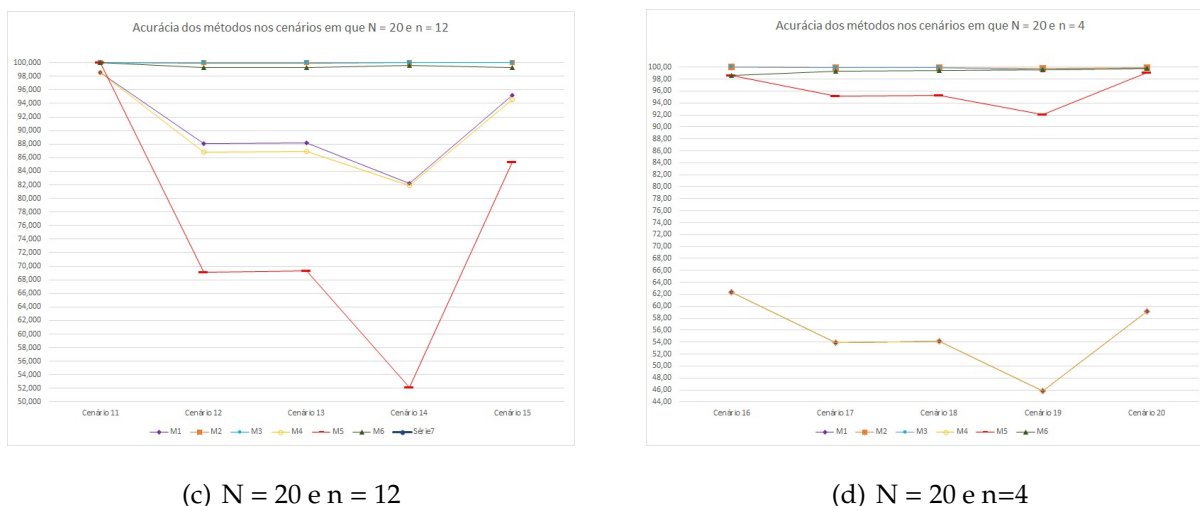


Figura 1: Acurácia percentual dos métodos nos cenários de estudo.

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

Quando  $N = 50$  e  $n = 30$ , o M1 apresentou-se com acurácia sempre acima de 90%, tendo uma variabilidade na acurácia nas categorias de no máximo 9,14%. Mantendo  $N = 50$  e diminuindo a amostra para  $n = 10$  tem-se uma perda de acurácia, atingindo o seu máximo próximo aos 92%, no cenário 6, que é equiprovável, e fica abaixo da marca de 68% nos cenários 7, 8, 9 e 10, atingindo uma grande variação de 25,39% da acurácia entre as categoriais.

No M1, quando  $N$  diminui influencia negativamente o resultado tornando-o menos acurado, o mesmo acontece quando a amostra ( $n$ ) diminui.

Para  $N = 20$  e  $n = 12$ , o M1 demonstrou ter uma variabilidade da acurácia entre as categorias bem evidente, que atinge até 16,39%, estando sempre acima de 82%, mas com  $n = 4$  a queda da acurácia de M1 é alta, estando sempre abaixo de 46%, com uma variabilidade de 16,44%

Para o M1, os cenários influenciaram no resultado da acurácia, sendo os melhores resultados para os 4 cenários equiprováveis. Além disso, amostras muito pequenas geram uma grande perda de acurácia.

O baixo desempenho na acurácia de M1 já era esperada, pois de acordo com Jhonson e Wichern (1998 apud FERREIRA, 2008), para este intervalo de confiança, é recomendável que os valores observados em cada categoria fosse de pelo menos  $n_k \geq 20$ , mas nos casos simulados o valor máximo para  $n_k$  fica em torno de 6.

O M2 atinge 100% de acurácia quando  $N = 50$  e  $n = 30$  e quando  $N = 20$  e

$n = 12$ ; quando  $n$  diminui nessas duas situações para  $n = 10$  e  $n = 4$ , respectivamente, existe uma pequena queda de acurácia, que se mantém sempre acima de 99%, a maior variabilidade nas categorias de um mesmo cenário nesse método é de 0,16%. Os valores de  $N$  e  $n$  não geram diferença relevante na acurácia do M2, nem mesmo os cenários.

Com um comportamento muito parecido com M2, o M3 tem acurácia sempre superior a 99% em todos os cenários, para  $N = 50$  a variabilidade foi mínima, de apenas 0,01% na redução do tamanho amostral e de 0,18% e 0,46% para  $n = 12$  e 4, respectivamente.

A variabilidade da acurácia no M3 não está relacionado com os cenários, já que não altera nas situações equiprováveis e não equiprováveis, mas aparenta ser menos acurado quando  $n$  diminui, porém não sofreu influências nas mudanças de  $N$ .

Os métodos M2 e M3 apresentam melhores resultados na acurácia quando comparados ao M1, pois não são assintóticos e não exigem tantos dados amostrais e tamanhos populacionais para atingir resultados acurados.

Derivado do M1 acrescido do fator de correção de população finita, o M4 apresentou um comportamento muito parecido com M1, essa correção possibilitou um aumento na variabilidade da acurácia, sendo a variabilidade de 9,46% para  $N = 50$  e  $n = 30$ , estando sempre acima de 89%, já com  $n = 10$ , o M4 apresentou valores muito semelhantes ao M1, gerando uma sobreposição das linhas no gráfico, e a variação da acurácia chega até 25,19%.

Para  $N = 20$  e  $n = 12$ , a acurácia ficou sempre acima 81%, variando em até 16,69%, existindo uma queda de acurácia, quando  $n = 4$ , atingindo seu mínimo próximo aos 45% com uma variação de até 17,22%.

O M4 apresentou melhores resultados na acurácia nos cenários com categorias equiprováveis, perdendo bastante acurácia no restante dos cenários, principalmente quando  $n$  diminuiu.

Já o M5 foi claramente o método que apresentou as piores acurácias nas Figura 1(a) (b) e (c), principalmente nos cenários não equiprováveis. As oscilações de acurácia ficaram evidentes, atingindo até 37,42%. Nos casos equiprováveis, a acurácia fica sempre acima de 96%.

Por mais que o M5 seja uma adaptação com correção de população finita do M2, eles não apresentaram uma variabilidade equivalente da acurácia, neste caso a adaptação



fez com que o método perca acurácia.

Para  $N = 20$  e  $n = 4$ , quando tanto a população quanto a amostra diminuem, o M5 teve uma melhora evidente na acurácia, estando sempre acima de 92% com uma variabilidade de até 7,08%, desta forma, o fator de correção de população finita foi eficaz nesse método para populações equivalentes a dos cenários da Figura 1(d).

Os valores de  $N$  e  $n$  influenciaram a acurácia de M5 de forma positiva, sendo o único método entre os estudados que apresentou melhoria da acurácia quando a população e a amostra diminuíram, isso se deu por ser um método não assintótico e pelo fator de correção penalizar mais os cenários com maiores amostras.

Com uma acurácia sempre acima de 98,54% e uma variabilidade máxima de 0,72%, o M6 não sofre alterações relevantes quando  $N$  e  $n$  variaram, nem mesmo os diferentes cenários geraram influencia no desempenho da acurácia do método.

Os métodos visualmente mais variáveis são M1, M4 e M5, sendo os de pior acurácia nos cenários não equiprováveis. Já os métodos M2, M3 e M6 são os com melhores desempenho quanto acurácia nas situações equiprováveis e não equiprováveis.

NA Tabela 3 é apresentado uma síntese dos métodos de acordo com a análise dos resultados:

Tabela 3: Resumo da análise da acurácia dos métodos estudados destacando os melhores

Método	Menor acurácia entre os vinte cenários	Diferença percentual entre a maior e menor acurácia	Média das acurácias entre os vinte cenários	Os parâmetros influenciam na acurácia das categorias?
M1	45,89%	54,89%	77,72%	Sim
M2	99,82%	0,18%	99,94%	Não
M3	99,53%	0,47%	99,89%	Não
M4	45,89%	53,55%	77,34%	Sim
M5	52,14%	47,86%	81,84%	Sim
M6	98,54%	1,46%	99,40%	Não

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

Em azul, na Tabela 3, apresenta-se os melhores resultados encontrados para a acurácia em cada um dos quesitos avaliados, e em vermelho os piores, com isso, o método que apresenta melhor desempenho em relação a acurácia é o M2. Os métodos 1, 4 e 5 são os que apresentaram os piores resultados em todos os quesitos avaliados para acurácia.

## 4.2 Precisão

Em uma mesma analogia usada para exemplificar acurácia (BUSSAB; MORETTIN, 2010) traz analogia a um jogo de dardos, em que para ser preciso é necessário acertar o alvo muitas vezes em um mesmo lugar, com isso, a distância entre um acerto e outro será pequena. Isso vale para a inferência usando intervalos de confiança, quanto menor for sua amplitude, mais preciso ele é.

As médias da amplitude de cada um dos métodos, em todos os cenários estudados estão apresentadas do Apêndice - A ao F.

A partir da síntese dos resultados obtidos, é possível observar que no M1 as amplitudes de cada uma das categorias (ótimo, muito bom, bom, ruim e péssimo), se comportaram de forma semelhante entre elas mesmo alterando os parâmetros de proporção nos diferentes cenários. Nos cenários 1, 6, 11 e 16, que são equiprováveis, a amplitude entre as categorias são sempre próximas, nos outros cenários, não equiprováveis é possível notar uma diferença entre a amplitude das categorias, algumas vezes maiores e outras vezes menores.

Além disso, pelo M1 ser definido de forma assintótica, quando os valores de  $N$  e  $n$  diminuem a amplitude aumenta, tornando o método menos preciso, de acordo com Bussab e Morettin (2010), em uma amostra menor menos informação está disponível e, portanto, maior a margem de erro, sendo esperado um aumento da amplitude em amostras menores.

O mesmo tipo de comportamento observado no M1 acontece com o M2, mas com amplitudes menores, isso se dá, pois, esse método é definido de forma diferente que o M1, sendo possível obter melhores resultados com um número populacional e amostral menores. Isso se dá, pois, de acordo com Quesenberry e Hurst (1964 apud HOU; CHIANG; TAI, 2003) o M1 derivava de grandes amostras com base em uma aproximação do qui-quadrado da estatística de Pearson, e M2 é baseado na aproximação qui-quadrado

da estatística de Pearson, para amostras de divesos valores para  $n$ , e foi inicialmente definido por Goodman (1965), apresentando um menor comprimento que o de Quisenberry e Hurst (1964).

A amplitude média do M3 em todos os cenários assume valores iguais para as 5 categorias de cada um dos cenários, ou seja, quando  $N = 50$  e  $n = 30$  a amplitude é sempre de 0,4092, para  $N = 50$  e  $n = 10$  a amplitude é sempre de 0,7088, para  $N = 20$  e  $n = 12$  a amplitude é sempre de 0,6470 e para  $N = 20$  e  $n = 4$  a amplitude é sempre de 1,1207, isso se dá porque a construção do intervalo não leva em consideração o tamanho populacional e portanto está sendo influenciado apenas pelo tamanho amostral.

O uso do M3 se mostrou interessante, pois não foi influenciado pelas diferenças nos parâmetros de proporção de cada categoria, sendo os resultados não influenciados pelos diferentes cenários estudados.

O comportamento da amplitude média nas categorias dos cenários do M4, são semelhantes ao comportamento da amplitude do M1, que apresentou melhores resultados para parâmetros equiprováveis, tornando-se mais variável entre cenários não equiprováveis. O mesmo ocorreu com o M5.

A amplitude média do M6 em todos os cenários assumiu valores iguais para as 5 categorias de casa um dos cenários, ou seja, quando  $N = 50$  e  $n = 30$  a amplitude foi sempre de 0,2614, para  $N = 50$  e  $n = 10$  a amplitude foi sempre de 0,6404, para  $N = 20$  e  $n = 12$  a amplitude foi sempre de 0,4199 e para  $N = 20$  e  $n = 4$  a amplitude foi sempre de 1,0284, isso se deu porque o fator de correção impactou mais os cenários com maior amostra para  $N=50$  e 30. Quando  $N$  diminuiu influenciou negativamente na amplitude, tornando-a maior, o mesmo aconteceu com o  $n$ , o que era esperado.

Quando M1 e M4 são comparados, tem-se que a adaptação proporcionou melhoria da amplitude, tornando-a menor, e assim mais preciso, em todos os cenários. O mesmo ocorreu quando se compara o M2 com M5 e o M3 com M6, quando os valores de  $N$  e  $n$  diminuem, isso corrobora para melhoria da precisão, pois nesses métodos, o fator de correção de população finita se torna mais forte.

De acordo com a comparação dos métodos apresentada na tabela 4, é possível identificar a porcentagem de vezes que um método foi mais preciso que os outros, o que possibilitou uma melhor visualização dos resultados.

Tabela 4: Valores percentuais das vezes que um método apresenta amplitude menor em uma comparação dois a dois.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
M1<	-	37,19%	45,76%	0	22,10%	32,25%
M2<	62,81%	-	85,14%	25,77%	0	43,76%
M3<	54,24%	14,86%	-	20,87%	0	0
M4<	77,90%	74,23%	100%	-	37,19%	45,76%
M5<	77,90%	100%	100%	69,81%	-	86,19%
M6<	67,75%	56,24%	100%	54,24%	13,81%	-

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

O M1 comparado aos outros métodos não se destaca quanto a precisão em nenhuma das comparações, o que se justifica por este ser mais acurado. O M2 tem precisão melhor quando comparado ao M1 e destacada quando comparada ao M3. O M3 destaca-se apenas do M1. Esses três métodos não ganharam em nenhuma comparação das suas versões com fator de correção para população finita.

O M4 é mais preciso na maioria das vezes quando comparado com M1, M2 e M3. Ou seja, o uso do fator de correção de população finita tornou o método mais preciso que os métodos não adaptados.

M5 é mais preciso na maioria das vezes que todos os outros métodos, e, por fim, o M6 também tem sua precisão melhorada quando comparado ao M1, exceto em relação ao M5.

Nessas condições, tem-se que o M1 apresenta os piores resultados em relação a precisão, não sendo recomendado para o estudo da CPA, em contra partida, tem-se M6 como o método com melhor desempenho no quesito precisão, seguido dos métodos M5 e M4.

Observa-se nesses resultados que a precisão e acurácia estão relacionadas e que ter acurácia elevada se mostrou possível com intervalos amplos, ou menos precisos. Por outro lado ter intervalos de menor amplitude pode não conter o parâmetro e portanto ser um intervalo com erro.

## 5 CONCLUSÕES

Segundo a análise baseada na acurácia e precisão dos métodos de estimação intervalar para proporção de populações finitas multivariadas, não é possível eleger um único melhor método, pois a eficácia do método depende do cenário qual será aplicado, com isso, faz-se necessário avaliar o cenário populacional para escolher o método que melhor se ajusta.

Analisando os resultados obtidos, têm-se M2, M3 e M6, nessa ordem são os mais acurados e M6, M5 e M4 os mais precisos. O M6 é o único método bem avaliado nos dois quesitos, sendo a melhor recomendação.

Entretanto, o ideal seria analisar a população de estudo para escolha de um método que melhor se comporte no perfil populacional, nessas situações, em populações maiores, recomenda-se o M2 e em populações menores o M5.

Com isso, o estudo será apresentado para a CPA, com objetivo de que a mesma implemente o método que melhor se ajuste em suas avaliações, aprimorando o tratamentos dos dados amostrais referente as avaliações institucionais, podendo mais de um método ser implementado.

Como trabalhos futuros é fundamental desenvolver um intervalo de confiança baseado na distribuição hipergeométrica multivariada. Acredita-se em maior desempenho que os avaliados.

## Referências

- BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística Básica*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
- COSTA, G. G. O. *Curso de Estatística Básica: Teoria e prática*. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2017.
- DEVORE, J. L. *Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências*. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006.
- FERREIRA, D. F. *Estatística Multivariada*. Lavras: UFLA, 2008.
- FITZPATRICK, S.; SCOTT, A. Quick simultaneous confidence intervals for multinomial proportions. *Journal of the American Statistical Association*, v. 82, p. 875–878, 1987.
- FREUND, J.; MILLER, I.; MILLER, M. *Estadística matemática con aplicaciones*. 6. ed. México: Pearson Educación, 2000.
- GOODMAN, L. On simultaneous confidence intervals for multinomial proportions. *Technometrics*, v. 7, p. 247–254, 1965.
- HOU, C.-D.; CHIANG, J.-T.; TAI, J. A family of simultaneous confidence intervals for multinomial proportions. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 43, p. 29–45, 2003.
- JHONSON, R. A.; WICHERN, D. W. *Applied multivariate statistical analysis*. 4. ed. New Jersey: Prebtice Hall, 1998.
- LEE, A.; NYANGOMA, S.; SEBER, G. Confidence regions for multinomial parameters. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 39, p. 329–342, 2002.
- MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 6. ed. São Paulo: USP, 2005.
- MINGOTI, S. A. *Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada*. Belo Horizonte: UFMG, 2005.
- MOORE, D. S.; NOTZ, W. I.; FLIGNER, M. A. *A Estatística Básica e sua Prática*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- QUESENBERRY, C. P.; HURST, D. Simultaneous confidence intervals for multinomial proportions. *Technometrics*, v. 6, p. 191–195, 1964.
- SPIEGEL, M. R. *Probabilidade e Estatística*. São Paulo: Pearson Educationdo Brasil, 1978.
- TALENS, E. *Statistical Auditing and the AOQL-method*. Tese (Doctor of Philosophy) — University of Groningen, Groningen, 2005.
- TEAM, R. C. R. *A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2021.
- WANG, W. Exact optimal confidence intervals for hypergeometric parameters. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 110, n. 512, p. 1491–1499, 2015.
- WENDELL, J. P.; SCHMEE, J. Likelihood confidence intervals for proportions in finite populations. *The American Statistician*, Taylor & Francis, v. 55, n. 1, p. 55–61, 2001.

WOLODZKO, T. *extraDistr: Additional Univariate and Multivariate Distributions*. [S.l.], 2019. R package version 1.8.11.

## APÊNDICE A - Algoritmos R

### Algoritmo de implementação dos métodos e construção dos intervalos de confiança

```
1 library(extraDistr)
2 s = \textcolor{green}{10000} #s é o número de interações
3 M1IC1<-matrix(0, s, 2) #Método 1, IC do primeiro parâmetro
4 M1IC2<-matrix(0, s, 2) #Método 1, IC do segundo parâmetro
5 M1IC3<-matrix(0, s, 2) #Método 1, IC do terceiro parâmetro
6 M1IC4<-matrix(0, s, 2) #Método 1, IC do quarto parâmetro
7 M1IC5<-matrix(0, s, 2) #Método 1, IC do quinto parâmetro
8 M1A<-matrix(0, s, 5) #Método 1, Amplitude, cada coluna é referente
9 ao IC de um parâmetro
10 M1AM<-matrix(0, 1, 5) #Método 1, Média das amplitudes
11
12 M2IC1<-matrix(0, s, 2)
13 M2IC2<-matrix(0, s, 2)
14 M2IC3<-matrix(0, s, 2)
15 M2IC4<-matrix(0, s, 2)
16 M2IC5<-matrix(0, s, 2)
17 M2A<-matrix(0, s, 5)
18 M2AM<-matrix(0, 1, 5)
19
20 M3IC1<-matrix(0, s, 2)
21 M3IC2<-matrix(0, s, 2)
22 M3IC3<-matrix(0, s, 2)
23 M3IC4<-matrix(0, s, 2)
24 M3IC5<-matrix(0, s, 2)
25 M3A<-matrix(0, s, 5)
26 M3AM<-matrix(0, 1, 5)
27
28 M4IC1<-matrix(0, s, 2)
29 M4IC2<-matrix(0, s, 2)
```



```
30 M4IC3<-matrix(0, s, 2)
31 M4IC4<-matrix(0, s, 2)
32 M4IC5<-matrix(0, s, 2)
33 M4A<-matrix(0, s, 5)
34 M4AM<-matrix(0, 1, 5)
35
36 M5IC1<-matrix(0, s, 2)
37 M5IC2<-matrix(0, s, 2)
38 M5IC3<-matrix(0, s, 2)
39 M5IC4<-matrix(0, s, 2)
40 M5IC5<-matrix(0, s, 2)
41 M5A<-matrix(0, s, 5)
42 M5AM<-matrix(0, 1, 5)
43
44 M6IC1<-matrix(0, s, 2)
45 M6IC2<-matrix(0, s, 2)
46 M6IC3<-matrix(0, s, 2)
47 M6IC4<-matrix(0, s, 2)
48 M6IC5<-matrix(0, s, 2)
49 M6A<-matrix(0, s, 5)
50 M6AM<-matrix(0, 1, 5)
51
52 x<-0 #contador
53 m1<-0 #contador de quantas vezes o intervalo no método 1 não contém o parâmetro.
54 m2<-0
55 m3<-0
56 m4<-0
57 m5<-0
58 m6<-0
59
60 for (i in 1:s){
61   x <- x+1
62   N=50
63   n=30
```

```

64  A<- rmvhyper(1, c(10, 10, 10, 10, 10), n) #estimador
65  B<- rbind(c(10,10,10,10,10)/N) #parâmetro
66
67  #método 1
68  pihat<- as.vector(A/n)
69
70  v1=pihat[1]*(1-pihat[1])/n
71  v2=pihat[2]*(1-pihat[2])/n
72  v3=pihat[3]*(1-pihat[3])/n
73  v4=pihat[4]*(1-pihat[4])/n
74  v5=pihat[5]*(1-pihat[5])/n
75
76  c12=-pihat[1]*pihat[2]/n
77  c13=-pihat[1]*pihat[3]/n
78  c14=-pihat[1]*pihat[4]/n
79  c15=-pihat[1]*pihat[5]/n
80  c23=-pihat[2]*pihat[3]/n
81  c24=-pihat[2]*pihat[4]/n
82  c25=-pihat[2]*pihat[5]/n
83  c34=-pihat[3]*pihat[4]/n
84  c35=-pihat[3]*pihat[5]/n
85  c45=-pihat[4]*pihat[5]/n
86
87  S<-matrix(c(v1,c12,c13,c14,c15,
88  c12,v2,c23,c24,c25,
89  c13,c23,v3,c34,c35,
90  c14,c24,c34,v4,c45,
91  c15,c25,c35,c45,v5),5,5)
92
93  #pi1
94  l1<-c(1,0,0,0,0)
95  me<-sqrt(qchisq(0.95,4))*sqrt(t(l1)%*%S%*%l1)
96  LI1<-t(l1)%*%pihat-me
97  LS1<-t(l1)%*%pihat+me

```

```
98 #pi2
99 l2<-c(0,1,0,0,0)
100 me<-sqrt(qchisq(0.95,4))*sqrt(t(l2)%*%S%*%l2)
101 LIl2<-t(l2)%*%pihat-me
102 LS12<-t(l2)%*%pihat+me
103
104 #pi3
105 l3<-c(0,0,1,0,0)
106 me<-sqrt(qchisq(0.95,4))*sqrt(t(l3)%*%S%*%l3)
107 LIl3<-t(l3)%*%pihat-me
108 LS13<-t(l3)%*%pihat+me
109
110 #pi4
111 l4<-c(0,0,0,1,0)
112 me<-sqrt(qchisq(0.95,4))*sqrt(t(l4)%*%S%*%l4)
113 LIl4<-t(l4)%*%pihat-me
114 LS14<-t(l4)%*%pihat+me
115
116 #pi5
117 l5<-c(0,0,0,0,1)
118 me<-sqrt(qchisq(0.95,4))*sqrt(t(l5)%*%S%*%l5)
119 LIl5<-t(l5)%*%pihat-me
120 LS15<-t(l5)%*%pihat+me
121
122 #cálculo da amplitude
123 l1<- LS11 - LIl1
124 l2<- LS12 - LIl2
125 l3<- LS13 - LIl3
126 l4<- LS14 - LIl4
127 l5<- LS15 - LIl5
128
129 M1A[x,1]<-l1
130 M1A[x,2]<-l2
131 M1A[x,3]<-l3
```

```
132 M1A[x,4]<-14
133 M1A[x,5]<-15
134
135 M1IC1[x,1]<-LI11
136 M1IC1[x,2]<-LS11
137
138 M1IC2[x,1]<-LI12
139 M1IC2[x,2]<-LS12
140
141 M1IC3[x,1]<-LI13
142 M1IC3[x,2]<-LS13
143
144 M1IC4[x,1]<-LI14
145 M1IC4[x,2]<-LS14
146
147 M1IC5[x,1]<-LI15
148 M1IC5[x,2]<-LS15
149
150 if (B[1,1]<M1IC1[x,1] || B[1,1]>M1IC1[x,2]){
151     m1<-m1+1
152 }
153
154 if (B[1,2]<M1IC2[x,1] || B[1,2]>M1IC2[x,2]){
155     m1<-m1+1
156 }
157
158 if (B[1,3]<M1IC3[x,1] || B[1,3]>M1IC3[x,2]){
159     m1<-m1+1
160 }
161
162 if (B[1,4]<M1IC4[x,1] || B[1,4]>M1IC4[x,2]){
163     m1<-m1+1
164 }
165
```

```

166   if (B[1,5]<M1IC5[x,1] || B[1,5]>M1IC5[x,2]){
167       m1<-m1+1
168   }
169
170   #método 2
171   nk<-as.vector(A)
172   #l1
173   a<- (qchisq(0.95, 4)) + 2*nk[1]
174   b<- (qchisq(0.95, 4)) + (4*nk[1]*(n-nk[1]))/n
175   c<- sqrt((qchisq(0.95, 4))*b)
176   d<- (2*n + 2*(qchisq(0.95, 4)))
177   LIl1<- (a - c)/d
178   LS11<- (a + c)/d
179
180   #l2
181   a<- (qchisq(0.95, 4)) + 2*nk[2]
182   b<- (qchisq(0.95, 4)) + (4*nk[2]*(n-nk[2]))/n
183   c<- sqrt((qchisq(0.95, 4))*b)
184   d<- (2*n + 2*(qchisq(0.95, 4)))
185   LIl2<- (a - c)/d
186   LS12<- (a + c)/d
187
188   #l3
189   a<- (qchisq(0.95, 4)) + 2*nk[3]
190   b<- (qchisq(0.95, 4)) + (4*nk[3]*(n-nk[3]))/n
191   c<- sqrt((qchisq(0.95, 4))*b)
192   d<- (2*n + 2*(qchisq(0.95, 4)))
193   LIl3<- (a - c)/d
194   LS13<- (a + c)/d
195
196   #l4
197   a<- (qchisq(0.95, 4)) + 2*nk[4]
198   b<- (qchisq(0.95, 4)) + (4*nk[4]*(n-nk[4]))/n
199   c<- sqrt((qchisq(0.95, 4))*b)

```

```
200 d<- (2*n + 2*(qchisq(0.95, 4)))
201 LI14<- (a - c)/d
202 LS14<- (a + c)/d
203
204 #15
205 a<- (qchisq(0.95, 4)) + 2*nk[5]
206 b<- (qchisq(0.95, 4)) + (4*nk[5]*(n-nk[5]))/n
207 c<- sqrt((qchisq(0.95, 4))*b)
208 d<- (2*n + 2*(qchisq(0.95, 4)))
209 LI15<- (a - c)/d
210 LS15<- (a + c)/d
211
212 #cálculo da amplitude
213 l1<- LS11 - LI11
214 l2<- LS12 - LI12
215 l3<- LS13 - LI13
216 l4<- LS14 - LI14
217 l5<- LS15 - LI15
218
219 M2A[x,1]<-l1
220 M2A[x,2]<-l2
221 M2A[x,3]<-l3
222 M2A[x,4]<-l4
223 M2A[x,5]<-l5
224
225 M2IC1[x,1]<-LI11
226 M2IC1[x,2]<-LS11
227
228 M2IC2[x,1]<-LI12
229 M2IC2[x,2]<-LS12
230
231 M2IC3[x,1]<-LI13
232 M2IC3[x,2]<-LS13
233
```

```

234 M2IC4[x,1]<-LI14
235 M2IC4[x,2]<-LS14
236
237 M2IC5[x,1]<-LI15
238 M2IC5[x,2]<-LS15
239
240 if (B[1,1]<M2IC1[x,1] || B[1,1]>M2IC1[x,2]){
241     m2<-m2+1
242 }
243
244 if (B[1,2]<M2IC2[x,1] || B[1,2]>M2IC2[x,2]){
245     m2<-m2+1
246 }
247
248 if (B[1,3]<M2IC3[x,1] || B[1,3]>M2IC3[x,2]){
249     m2<-m2+1
250 }
251
252 if (B[1,4]<M2IC4[x,1] || B[1,4]>M2IC4[x,2]){
253     m2<-m2+1
254 }
255
256 if (B[1,5]<M2IC5[x,1] || B[1,5]>M2IC5[x,2]){
257     m2<-m2+1
258 }
259
260 #método 3
261 nk<-as.vector(A/n)
262 a<- qnorm(0.9875)/ (2* sqrt(n))
263
264 #l1
265 LI11 <- nk[1] - a
266 LS11 <- nk[1] + a
267

```

```
268 #12
269 LI12 <- nk[2] - a
270 LS12 <- nk[2] + a
271
272 #13
273 LI13 <- nk[3] - a
274 LS13 <- nk[3] + a
275
276 #14
277 LI14 <- nk[4] - a
278 LS14 <- nk[4] + a
279
280 #15
281 LI15 <- nk[5] - a
282 LS15 <- nk[5] + a
283
284 #cálculo da amplitude
285 l1<- LS11 - LI11
286 l2<- LS12 - LI12
287 l3<- LS13 - LI13
288 l4<- LS14 - LI14
289 l5<- LS15 - LI15
290
291 M3A[x,1]<-l1
292 M3A[x,2]<-l2
293 M3A[x,3]<-l3
294 M3A[x,4]<-l4
295 M3A[x,5]<-l5
296
297 M3IC1[x,1]<-LI11
298 M3IC1[x,2]<-LS11
299
300 M3IC2[x,1]<-LI12
301 M3IC2[x,2]<-LS12
```



```
302
303 M3IC3[x,1]<-LI13
304 M3IC3[x,2]<-LS13
305
306 M3IC4[x,1]<-LI14
307 M3IC4[x,2]<-LS14
308
309 M3IC5[x,1]<-LI15
310 M3IC5[x,2]<-LS15
311
312 if (B[1,1]<M3IC1[x,1] || B[1,1]>M3IC1[x,2]){
313     m3<-m3+1
314 }
315
316 if (B[1,2]<M3IC2[x,1] || B[1,2]>M3IC2[x,2]){
317     m3<-m3+1
318 }
319
320 if (B[1,3]<M3IC3[x,1] || B[1,3]>M3IC3[x,2]){
321     m3<-m3+1
322 }
323
324 if (B[1,4]<M3IC4[x,1] || B[1,4]>M3IC4[x,2]){
325     m3<-m3+1
326 }
327
328 if (B[1,5]<M3IC5[x,1] || B[1,5]>M3IC5[x,2]){
329     m3<-m3+1
330 }
331
332
333 #método 4
334 pihat<- as.vector(A/n)
335 #pihat<-c(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2) # estimativa
```

```

336     v1=pihat[1]*(1-pihat[1])/n
337     v2=pihat[2]*(1-pihat[2])/n
338     v3=pihat[3]*(1-pihat[3])/n
339     v4=pihat[4]*(1-pihat[4])/n
340     v5=pihat[5]*(1-pihat[5])/n
341
342     c12=-pihat[1]*pihat[2]/n
343     c13=-pihat[1]*pihat[3]/n
344     c14=-pihat[1]*pihat[4]/n
345     c15=-pihat[1]*pihat[5]/n
346     c23=-pihat[2]*pihat[3]/n
347     c24=-pihat[2]*pihat[4]/n
348     c25=-pihat[2]*pihat[5]/n
349     c34=-pihat[3]*pihat[4]/n
350     c35=-pihat[3]*pihat[5]/n
351     c45=-pihat[4]*pihat[5]/n
352
353     S<-matrix(c(v1,c12,c13,c14,c15,
354               c12,v2,c23,c24,c25,
355               c13,c23,v3,c34,c35,
356               c14,c24,c34,v4,c45,
357               c15,c25,c35,c45,v5),5,5)
358
359     #pi1
360     l1<-c(1,0,0,0,0)
361     me<-sqrt(qchisq(0.95,4))*sqrt(t(l1)%*S%*l1)*sqrt((N-n)/(N-1))
362     LIl1<-t(l1)%*pihat-me
363     LSl1<-t(l1)%*pihat+me
364
365     #pi2
366     l2<-c(0,1,0,0,0)
367     me<-sqrt(qchisq(0.95,4))*sqrt(t(l2)%*S%*l2)*sqrt((N-n)/(N-1))
368     LIl2<-t(l2)%*pihat-me
369     LSl2<-t(l2)%*pihat+me

```

```
370 #pi3
371 l3<-c(0,0,1,0,0)
372 me<-sqrt(qchisq(0.95,4))*sqrt(t(l3)%*%S%*%l3)*sqrt((N-n)/(N-1))
373 LIl3<-t(l3)%*%pihat-me
374 LS13<-t(l3)%*%pihat+me
375
376 #pi4
377 l4<-c(0,0,0,1,0)
378 me<-sqrt(qchisq(0.95,4))*sqrt(t(l4)%*%S%*%l4)*sqrt((N-n)/(N-1))
379 LIl4<-t(l4)%*%pihat-me
380 LS14<-t(l4)%*%pihat+me
381
382 #pi5
383 l5<-c(0,0,0,0,1)
384 me<-sqrt(qchisq(0.95,4))*sqrt(t(l5)%*%S%*%l5)*sqrt((N-n)/(N-1))
385 LIl5<-t(l5)%*%pihat-me
386 LS15<-t(l5)%*%pihat+me
387
388 #cálculo da amplitude
389 l1<- LS11 - LI11
390 l2<- LS12 - LI12
391 l3<- LS13 - LI13
392 l4<- LS14 - LI14
393 l5<- LS15 - LI15
394
395 M4A[x,1]<-l1
396 M4A[x,2]<-l2
397 M4A[x,3]<-l3
398 M4A[x,4]<-l4
399 M4A[x,5]<-l5
400
401 M4IC1[x,1]<-LI11
402 M4IC1[x,2]<-LS11
403
```

```
404 M4IC2[x,1]<-LI12
405 M4IC2[x,2]<-LS12
406
407 M4IC3[x,1]<-LI13
408 M4IC3[x,2]<-LS13
409
410 M4IC4[x,1]<-LI14
411 M4IC4[x,2]<-LS14
412
413 M4IC5[x,1]<-LI15
414 M4IC5[x,2]<-LS15
415
416 if (B[1,1]<M4IC1[x,1] || B[1,1]>M4IC1[x,2]){
417     m4<-m4+1
418 }
419
420 if (B[1,2]<M4IC2[x,1] || B[1,2]>M4IC2[x,2]){
421     m4<-m4+1
422 }
423
424 if (B[1,3]<M4IC3[x,1] || B[1,3]>M4IC3[x,2]){
425     m4<-m4+1
426 }
427
428 if (B[1,4]<M4IC4[x,1] || B[1,4]>M4IC4[x,2]){
429     m4<-m4+1
430 }
431
432 if (B[1,5]<M4IC5[x,1] || B[1,5]>M4IC5[x,2]){
433     m4<-m4+1
434 }
435
436 #método 5
437 nk<-as.vector(A)
```

```
438 #l1
439 a<- (qchisq(0.95, 4)) + 2*nk[1]
440 b<- (qchisq(0.95, 4)) + (4*nk[1]*(n-nk[1]))/n
441 c<- sqrt((qchisq(0.95, 4))*b)
442 d<- (2*n + 2*(qchisq(0.95, 4)))
443 LI11<- (a/d) - (c/d)*sqrt((N-n)/(N-1))
444 LS11<- (a/d) + (c/d)*sqrt((N-n)/(N-1))
445
446 #l2
447 a<- (qchisq(0.95, 4)) + 2*nk[2]
448 b<- (qchisq(0.95, 4)) + (4*nk[2]*(n-nk[2]))/n
449 c<- sqrt((qchisq(0.95, 4))*b)
450 d<- (2*n + 2*(qchisq(0.95, 4)))
451 LI12<- (a/d) - (c/d)*sqrt((N-n)/(N-1))
452 LS12<- (a/d) + (c/d)*sqrt((N-n)/(N-1))
453
454 #l3
455 a<- (qchisq(0.95, 4)) + 2*nk[3]
456 b<- (qchisq(0.95, 4)) + (4*nk[3]*(n-nk[3]))/n
457 c<- sqrt((qchisq(0.95, 4))*b)
458 d<- (2*n + 2*(qchisq(0.95, 4)))
459 LI13<- (a/d) - (c/d)*sqrt((N-n)/(N-1))
460 LS13<- (a/d) + (c/d)*sqrt((N-n)/(N-1))
461
462 #l4
463 a<- (qchisq(0.95, 4)) + 2*nk[4]
464 b<- (qchisq(0.95, 4)) + (4*nk[4]*(n-nk[4]))/n
465 c<- sqrt((qchisq(0.95, 4))*b)
466 d<- (2*n + 2*(qchisq(0.95, 4)))
467 LI14<- (a/d) - (c/d)*sqrt((N-n)/(N-1))
468 LS14<- (a/d) + (c/d)*sqrt((N-n)/(N-1))
469
470 #l5
471 a<- (qchisq(0.95, 4)) + 2*nk[5]
```

```
472 b<- (qchisq(0.95, 4)) + (4*nk[5]*(n-nk[5]))/n
473 c<- sqrt((qchisq(0.95, 4))*b)
474 d<- (2*n + 2*(qchisq(0.95, 4)))
475 LI15<- (a/d) - (c/d)*sqrt((N-n)/(N-1))
476 LS15<- (a/d) + (c/d)*sqrt((N-n)/(N-1))
477
478 #cálculo da amplitude
479 l1<- LS11 - LI11
480 l2<- LS12 - LI12
481 l3<- LS13 - LI13
482 l4<- LS14 - LI14
483 l5<- LS15 - LI15
484
485 M5A[x, 1]<-l1
486 M5A[x, 2]<-l2
487 M5A[x, 3]<-l3
488 M5A[x, 4]<-l4
489 M5A[x, 5]<-l5
490
491 M5IC1[x, 1]<-LI11
492 M5IC1[x, 2]<-LS11
493
494 M5IC2[x, 1]<-LI12
495 M5IC2[x, 2]<-LS12
496
497 M5IC3[x, 1]<-LI13
498 M5IC3[x, 2]<-LS13
499
500 M5IC4[x, 1]<-LI14
501 M5IC4[x, 2]<-LS14
502
503 M5IC5[x, 1]<-LI15
504 M5IC5[x, 2]<-LS15
505
```

```
506   if (B[1,1]<M5IC1[x,1] || B[1,1]>M5IC1[x,2]){
507     m5<-m5+1
508   }
509
510   if (B[1,2]<M5IC2[x,1] || B[1,2]>M5IC2[x,2]){
511     m5<-m5+1
512   }
513
514   if (B[1,3]<M5IC3[x,1] || B[1,3]>M5IC3[x,2]){
515     m5<-m5+1
516   }
517
518   if (B[1,4]<M5IC4[x,1] || B[1,4]>M5IC4[x,2]){
519     m5<-m5+1
520   }
521
522   if (B[1,5]<M5IC5[x,1] || B[1,5]>M5IC5[x,2]){
523     m5<-m5+1
524   }
525
526   #método 6
527   nk<-as.vector(A/n)
528   a<- qnorm(0.9875)*(1/(2*sqrt(n)))*sqrt((N-n)/(N-1))
529   #l1
530   LI11 <- nk[1] - a
531   LS11 <- nk[1] + a
532
533   #l2
534   LI12 <- nk[2] - a
535   LS12 <- nk[2] + a
536
537   #l3
538   LI13 <- nk[3] - a
539   LS13 <- nk[3] + a
```

```
540
541 #l4
542 LI14 <- nk[4] - a
543 LS14 <- nk[4] + a
544
545 #l5
546 LI15 <- nk[5] - a
547 LS15 <- nk[5] + a
548
549 #cálculo da amplitude
550 l1<- LS11 - LI11
551 l2<- LS12 - LI12
552 l3<- LS13 - LI13
553 l4<- LS14 - LI14
554 l5<- LS15 - LI15
555
556 M6A[x,1]<-l1
557 M6A[x,2]<-l2
558 M6A[x,3]<-l3
559 M6A[x,4]<-l4
560 M6A[x,5]<-l5
561
562 M6IC1[x,1]<-LI11
563 M6IC1[x,2]<-LS11
564
565 M6IC2[x,1]<-LI12
566 M6IC2[x,2]<-LS12
567
568 M6IC3[x,1]<-LI13
569 M6IC3[x,2]<-LS13
570
571 M6IC4[x,1]<-LI14
572 M6IC4[x,2]<-LS14
573
```



```
574 M6IC5[x,1]<-LI15
575 M6IC5[x,2]<-LS15
576
577 if (B[1,1]<M6IC1[x,1] || B[1,1]>M6IC1[x,2]){
578     m6<-m6+1
579 }
580
581 if (B[1,2]<M6IC2[x,1] || B[1,2]>M6IC2[x,2]){
582     m6<-m6+1
583 }
584
585 if (B[1,3]<M6IC3[x,1] || B[1,3]>M6IC3[x,2]){
586     m6<-m6+1
587 }
588
589 if (B[1,4]<M6IC4[x,1] || B[1,4]>M6IC4[x,2]){
590     m6<-m6+1
591 }
592
593 if (B[1,5]<M6IC5[x,1] || B[1,5]>M6IC5[x,2]){
594     m6<-m6+1
595 }
596
597 }
598 M1AM<-colSums( M1A[,1:5])
599 M1AM<-M1AM/s
600
601 M2AM<-colSums( M2A[,1:5])
602 M2AM<-M2AM/s
603
604 M3AM<-colSums( M3A[,1:5])
605 M3AM<-M3AM/s
606
607 M4AM<-colSums( M4A[,1:5])
```

```
608 M4AM<-M4AM/s
609
610 M5AM<-colSums( M5A[,1:5])
611 M5AM<-M5AM/s
612
613 M6AM<-colSums( M6A[,1:5])
614 M6AM<-M6AM/s
615
616 #Amplitudes médias de cada método.
617 M1AM
618 M2AM
619 M3AM
620 M4AM
621 M5AM
622 M6AM
623
624 #contagem de quantas vezes o intervalo não contém a estimativa.
625 m1
626 m2
627 m3
628 m4
629 m5
630 m6
631
632 #uso de banco de dados pra armazenar as informações
633
634 mydata1 <- data.frame (M1AM,M2AM,M3AM, M4AM,M5AM,M6AM)
635 mydata1 <- edit(mydata1)
636 mydata2 <- data.frame (m1,m2,m3, m4,m5,m6)
637 mydata2 <- edit(mydata2)
```

## Algoritmo de comparação dos métodos

```
1 #o código faz comparação entre o M1 e M2. Para comparação dos outros métodos, a estrutura
2 #tricotomia entre os métodos
```

```
3 M1M2<- M1A-M2A
4 x<-0 # contador de quantas vezes é M1 menor M2
5 y<-0 # contador de quantas vezes é M1 maior M2
6 z<-0 # contador de quantas vezes é M1 igual M2
7 w<-1 # contador do loop
8 for (i in 1:s){
9   if (M1M2[w, 1]==0){z<-z+1}
10  if (M1M2[w, 1]>0){y<-y+1}
11  if (M1M2[w, 1]<0){x<-x+1}
12  if (M1M2[w, 2]==0){z<-z+1}
13  if (M1M2[w, 2]>0){y<-y+1}
14  if (M1M2[w, 2]<0){x<-x+1}
15  if (M1M2[w, 3]==0){z<-z+1}
16  if (M1M2[w, 3]>0){y<-y+1}
17  if (M1M2[w, 3]<0){x<-x+1}
18  if (M1M2[w, 4]==0){z<-z+1}
19  if (M1M2[w, 4]>0){y<-y+1}
20  if (M1M2[w, 4]<0){x<-x+1}
21  if (M1M2[w, 5]==0){z<-z+1}
22  if (M1M2[w, 5]>0){y<-y+1}
23  if (M1M2[w, 5]<0){x<-x+1}
24  w<-w+1
25 }
26 x12<-x
27 y12<-y
28 z12<-z
29 #utilizou-se um banco de dados para armazenar as informações sobre a comparação
30 dos métodos.
31 mydata1 <- data.frame (x12, y12, z12)
```

## APÊNDICE B - Acurácia do M1

Tabela 5: Porcentagem de acurácia do M1 em 10 mil simulações

Cenários	N	n	Parâmetros	Acurácia em %
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	99,95
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	90,81
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	90,92
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	93,56
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	91,36
			Total percentual(%)	93,32
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	91,75
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	66,56
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	66,65
9	50	10	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	68,04
10	50	10	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	67,32
			Total percentual(%)	72,06
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	98,55
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	88,07
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	88,16
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	82,16
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	95,17
			Total percentual(%)	90,42
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	62,33
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	53,91
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	54,11
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	45,89
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	59,19
			Total percentual(%)	55,08
			Total percentual(%)	77,72

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE C - Acurácia do M2

Tabela 6: Porcentagem de acurácia do M2 em 10 mil simulações

Cenários	N	n	Parâmetros	Acurácia em %
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	100
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	100
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	100
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	100
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	100
Total percentual(%)				100
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	99,82
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	99,82
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	99,82
9	50	10	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	99,98
10	50	10	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	99,94
Total percentual(%)				99,87
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	100
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	100
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	100
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	100
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	100
Total percentual(%)				100
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	99,99
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	99,89
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	99,90
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	99,84
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	99,88
Total percentual(%)				99,90
Total percentual(%)				99,94

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE D - Acurácia do M3

Tabela 7: Porcentagem de acurácia do M3 em 10 mil simulações

Cenários	N	n	Parâmetros	Acurácia em %
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	100
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	99,99
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	100
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	99,99
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	99,99
			Total percentual(%)	99,99
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	99,82
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	99,79
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	99,78
9	50	10	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	99,82
10	50	10	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	99,64
			Total percentual(%)	99,77
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	100
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	99,99
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	99,99
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	100
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	100
			Total percentual(%)	99,99
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	99,99
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	99,89
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	99,90
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	99,53
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	99,76
			Total percentual(%)	99,81
			Total percentual(%)	99,89

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE E - Acurácia do M4

Tabela 8: Porcentagem de acurácia do M4 em 10 mil simulações

Cenários	N	n	Parâmetros	Acurácia em %
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	99,44
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	89,98
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	90,20
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	92,16
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	91,25
			Total percentual(%)	92,61
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	91,75
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	66,56
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	66,65
9	50	10	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	68,02
10	50	10	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	67,32
			Total percentual(%)	72,06
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	98,55
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	86,82
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	86,92
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	81,86
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	94,53
			Total percentual(%)	89,73
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	62,33
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	53,91
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	54,11
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	45,89
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	59,19
			Total percentual(%)	55,08
			Total percentual(%)	77,34

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE F - Acurácia do M5

Tabela 9: Porcentagem de acurácia do M5 em 10 mil simulações

Cenários	N	n	Parâmetros	Acurácia em %
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	96,99
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	65,71
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	65,55
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	59,57
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	60,08
			Total percentual(%)	69,58
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	99,82
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	77,84
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	77,80
9	50	10	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	98,23
10	50	10	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	79,06
			Total percentual(%)	86,55
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	100
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	69,15
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	69,37
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	52,14
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	85,32
			Total percentual(%)	75,19
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	98,65
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	95,16
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	95,32
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	92,01
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	99,09
			Total percentual(%)	96,04
			Total percentual(%)	81,84

Fonte: Arquivo pessoal dos autores



## APÊNDICE G - Acurácia do M6

Tabela 10: Porcentagem de acurácia do M6 em 10 mil simulações

Cenários	N	n	Parâmetros	Acurácia em %
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	99,18
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	98,99
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	99,07
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	99,26
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	98,54
			Total percentual(%)	99,00
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	99,82
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	99,79
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	99,78
9	50	10	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	99,64
10	50	10	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	99,64
			Total percentual(%)	99,73
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	100
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	99,32
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	99,34
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	99,60
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	99,32
			Total percentual(%)	99,51
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	98,65
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	99,37
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	99,39
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	99,53
0	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	99,76
			Total percentual(%)	99,34
			Total percentual(%)	99,40

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE H - Amplitude média do M1

Tabela 11: Amplitude média do M1 em 10 mil simulações

Cenários	N	n	Parâmetros	Amplitude média das categorias				
				C1	C2	C3	C4	C5
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,4452	0,4451	0,4450	0,4450	0,4445
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,5469	0,4449	0,3581	0,2522	0,1221
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,1222	0,2537	0,3597	0,4446	0,5472
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,1981	0,4061	0,5471	0,4073	0,1990
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,5486	0,2979	0,1222	0,2998	0,5492
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,7065	0,7059	0,7044	0,6999	0,7097
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,9092	0,7046	0,5188	0,3110	0,1145
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,1167	0,3081	0,5216	0,7028	0,9087
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,2200	0,6232	0,9092	0,6212	0,2222
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,9122	0,3945	0,1206	0,3977	0,9145
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,6857	0,6878	0,6868	0,6855	0,6852
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0,8681	0,7500	0,5975	0,4842	0,2938
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0,2979	0,4781	0,6017	0,7479	0,8682
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0,2977	0,6036	0,8554	0,6011	0,2936
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	0,7977	0,5992	0,4804	0,6027	0,7954
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,8590	0,8651	0,8663	0,8510	0,8695
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	1,2966	0,9996	0,6846	0,4949	0,2733
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0,2654	0,4953	0,7020	1,0017	1,2937
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0,2568	0,6933	1,2580	0,6994	0,2653
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	1,1086	0,6917	0,4998	0,6949	1,1109

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE I - Amplitude média do M2

Tabela 12: Amplitude média do M2 em 10 mil simulações

Cenários		Variável Categórica	Amplitude média das categorias					
N	n		C1	C2	C3	C4	C5	
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,4153	0,4152	0,4152	0,4152	0,4149
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,4800	0,4151	0,3643	0,3119	0,2674
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,2674	0,3124	0,3651	0,4150	0,4802
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,2909	0,3918	0,4801	0,3925	0,2911
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,4811	0,3327	0,2674	0,3336	0,4815
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,6176	0,6172	0,6169	0,6160	0,6178
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,6755	0,6171	0,5746	0,5350	0,5035
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,5038	0,5346	0,5750	0,6164	0,6753
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,5201	0,5974	0,6755	0,5969	0,5203
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,6764	0,5501	0,5044	0,5506	0,6772
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,5877	0,5884	0,5880	0,5877	0,5876
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0,6558	0,6103	0,5600	0,5290	0,4884
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0,4890	0,5277	0,5610	0,6095	0,6559
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0,4890	0,5615	0,6507	0,5609	0,4883
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0,6280	0,5603	0,5283	0,5613	0,6272
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,7725	0,7730	0,7731	0,7718	0,7733
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0,8106	0,7845	0,7579	0,7424	0,7247
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0,7240	0,7424	0,7592	0,7846	0,8101
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0,7234	0,7585	0,8071	0,7591	0,7240
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0,7940	0,7585	0,7428	0,7587	0,7942

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE J - Amplitude média do M3

Tabela 13: Amplitude média do M3 em 10 mil simulações

Cenários		Variável Categórica	Amplitude média das categorias					
N	n		C1	C2	C3	C4	C5	
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,4092	0,4092	0,4092	0,4092	0,4092
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,4092	0,4092	0,4092	0,4092	0,4092
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,4092	0,4092	0,4092	0,4092	0,4092
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,4092	0,4092	0,4092	0,4092	0,4092
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,4092	0,4092	0,4092	0,4092	0,4092
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,7088	0,7088	0,7088	0,7088	0,7088
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,7088	0,7088	0,7088	0,7088	0,7088
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,7088	0,7088	0,7088	0,7088	0,7088
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,7088	0,7088	0,7088	0,7088	0,7088
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,7088	0,7088	0,7088	0,7088	0,7088
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,6470	0,6470	0,6470	0,6470	0,6470
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0,6470	0,6470	0,6470	0,6470	0,6470
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0,6470	0,6470	0,6470	0,6470	0,6470
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0,6470	0,6470	0,6470	0,6470	0,6470
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0,6470	0,6470	0,6470	0,6470	0,6470
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	1,1207	1,1207	1,1207	1,1207	1,1207
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	1,1207	1,1207	1,1207	1,1207	1,1207
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	1,1207	1,1207	1,1207	1,1207	1,1207
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	1,1207	1,1207	1,1207	1,1207	1,1207
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	1,1207	1,1207	1,1207	1,1207	1,1207

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE K - Amplitude média do M4

Tabela 14: Amplitude média do M4 em 10 mil simulações

Cenários		Variável Categórica	Amplitude média das categorias					
N	n		C1	C2	C3	C4	C5	
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,2844	0,2844	0,2843	0,2843	0,2840
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,3494	0,2842	0,2288	0,1611	0,0780
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,0781	0,1621	0,2298	0,2841	0,3496
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,1265	0,2595	0,3495	0,2602	0,1271
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,3505	0,1903	0,0781	0,1915	0,3509
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,6383	0,6378	0,6365	0,6323	0,6412
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,8215	0,6366	0,4687	0,2810	0,1034
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,1054	0,2784	0,4713	0,6350	0,8210
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,1987	0,5631	0,8215	0,5613	0,2007
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,8242	0,3564	0,1090	0,3593	0,8263
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,4450	0,4463	0,4457	0,4448	0,4446
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0,5633	0,4867	0,3877	0,3142	0,1906
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0,1933	0,3103	0,3905	0,4853	0,5634
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0,1932	0,3917	0,5551	0,3901	0,1905
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0,5176	0,3888	0,3117	0,3911	0,5161
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,7883	0,7939	0,7950	0,7809	0,7979
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	1,1899	0,9173	0,6283	0,4542	0,2508
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0,2436	0,4545	0,6442	0,9192	1,1871
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0,2356	0,6362	1,1545	0,6418	0,2434
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	1,0173	0,6348	0,4587	0,6377	1,0195

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE L - Amplitude média do M5

Tabela 15: Amplitude média do M5 em 10 mil simulações

Cenários		Variável Categórica	Amplitude média das categorias					
N	n		C1	C2	C3	C4	C5	
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,2653	0,2653	0,2653	0,2653	0,2651
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,3067	0,2652	0,2327	0,1993	0,1708
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,1708	0,1996	0,2332	0,2651	0,3068
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,1858	0,2503	0,3068	0,2508	0,1860
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,3074	0,2125	0,1708	0,2131	0,3076
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,5580	0,5577	0,5574	0,5566	0,5582
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,6103	0,5575	0,5191	0,4834	0,4549
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,4552	0,4830	0,5195	0,5569	0,6101
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,4699	0,5397	0,6103	0,5393	0,4701
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,6111	0,4970	0,4557	0,4975	0,6119
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,3813	0,3818	0,3816	0,3813	0,3813
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0,4256	0,3960	0,3634	0,3432	0,3169
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0,3173	0,3424	0,3640	0,3955	0,4256
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0,3173	0,3644	0,4222	0,3640	0,3169
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0,4075	0,3635	0,3428	0,3642	0,4070
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,7089	0,7093	0,7094	0,7083	0,7096
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0,7439	0,7199	0,6955	0,6812	0,6650
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0,6644	0,6812	0,6967	0,7200	0,7434
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0,6638	0,6961	0,7407	0,6966	0,6644
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0,7286	0,6960	0,6816	0,6962	0,7288

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE M - Amplitude média do M6

Tabela 16: Amplitude média do M6 em 10 mil simulações

Cenários		Variável Categórica	Amplitude média das categorias					
N	n		C1	C2	C3	C4	C5	
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,2614	0,2614	0,2614	0,2614	0,2614
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,2614	0,2614	0,2614	0,2614	0,2614
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,2614	0,2614	0,2614	0,2614	0,2614
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,2614	0,2614	0,2614	0,2614	0,2614
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,2614	0,2614	0,2614	0,2614	0,2614
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,6404	0,6404	0,6404	0,6404	0,6404
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0,6404	0,6404	0,6404	0,6404	0,6404
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0,6404	0,6404	0,6404	0,6404	0,6404
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0,6404	0,6404	0,6404	0,6404	0,6404
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0,6404	0,6404	0,6404	0,6404	0,6404
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0,4199	0,4199	0,4199	0,4199	0,4199
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0,4199	0,4199	0,4199	0,4199	0,4199
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0,4199	0,4199	0,4199	0,4199	0,4199
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0,4199	0,4199	0,4199	0,4199	0,4199
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0,4199	0,4199	0,4199	0,4199	0,4199
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	1,0284	1,0284	1,0284	1,0284	1,0284
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	1,0284	1,0284	1,0284	1,0284	1,0284
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	1,0284	1,0284	1,0284	1,0284	1,0284
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	1,0284	1,0284	1,0284	1,0284	1,0284
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	1,0284	1,0284	1,0284	1,0284	1,0284

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE N - Comparação do M1 com o M2

Tabela 17: Número de vezes que a amplitude do M1 é maior, menor ou igual à M2

Cenários	N	n	Parâmetros	M1<M2	M1>M2	M1=M2
1	50	30	(0,2, 0,2, 0,2, 0,2, 0,2)	1747	48253	0
2	50	30	(0,6, 0,2, 0,12, 0,06, 0,02)	24925	25075	0
3	50	30	(0,02, 0,06, 0,12, 0,2, 0,6)	24886	25114	0
4	50	30	(0,04, 0,16, 0,6, 0,16, 0,04)	23076	26294	0
5	50	30	(0,4, 0,08, 0,02, 0,08, 0,4)	27370	22630	0
			Total numérico:	102004	147996	0
			Total percentual (%):	40,80%	59,20%	0
6	50	10	(0,2, 0,2, 0,2, 0,2, 0,2)	4114	45886	0
7	50	10	(0,6, 0,2, 0,12, 0,06, 0,02)	16369	33631	0
8	50	10	(0,02, 0,06, 0,12, 0,2, 0,6)	16322	33678	0
9	50	30	(0,04, 0,16, 0,6, 0,16, 0,04)	15636	34364	0
10	50	30	(0,4, 0,08, 0,02, 0,08, 0,4)	15722	34278	0
			Total numérico:	68163	181837	0
			Total percentual (%):	27,27%	147996 72,73%	0
11	20	12	(0,2, 0,2, 0,2, 0,2, 0,2)	7721	42279	0
12	20	12	(0,45, 0,25, 0,15, 0,1, 0,05)	20586	29414	0
13	20	12	(0,05, 0,1, 0,15, 0,25, 0,45)	20602	29398	0
14	20	12	(0,05, 0,15, 0,6, 0,15, 0,05)	26807	23193	0
15	20	12	(0,3, 0,15, 0,1, 0,15, 0,3)	13705	36295	0
			Total numérico:	89421	160579	0
			Total percentual (%):	35,77%	64,23%	0
16	20	4	(0,2, 0,2, 0,2, 0,2, 0,2)	18835	31165	0
17	20	4	(0,45, 0,25, 0,15, 0,1, 0,05)	23046	26954	0
18	20	4	(0,05, 0,1, 0,15, 0,25, 0,45)	22944	27056	0
19	20	4	(0,05, 0,15, 0,6, 0,15, 0,05)	27057	22943	0
20	20	4	(0,3, 0,15, 0,1, 0,15, 0,3)	20405	29595	0
			Total numérico:	112287	137713	0
			Total percentual (%):	44,91%	55,09%	0
			Total percentual (%):	37,19%	62,81%	0

Fonte: Arquivo pessoal dos autores



## APÊNDICE O - Comparação do M1 com o M3

Tabela 18: Número de vezes que a amplitude do M1 é maior, menor ou igual à M3

Cenários	N	n	Parâmetros	M1<M3	M1>M3	M1=M3
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	6876	43124	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	29253	20747	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	29177	20823	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	27995	22005	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	30000	20000	0
			Total numérico:	123301	126699	0
			Total percentual (%):	49,32%	50,68%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	17417	32583	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	29403	20597	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	29493	20507	0
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	29380	20620	0
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	26927	23073	0
			Total numérico:	132620	117380	0
			Total percentual (%):	53,05%	46,95%	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	7721	42279	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	20586	29414	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	20602	29398	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	26807	23193	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	13705	36295	0
			Total numérico:	89421	160579	0
			Total percentual (%):	35,77%	64,23%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	18835	31165	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	23046	26954	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	22944	27056	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	27057	22943	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	20405	29595	0
			Total numérico:	112287	137713	0
			Total percentual (%):	44,91%	55,09%	0
			Total percentual (%):	45,76%	54,24%	0

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE P - Comparação do M1 com o M4

Tabela 19: Número de vezes que a amplitude do M1 é maior, menor ou igual à M4

Cenários	N	n	Parâmetros	M1<M4	M1>M4	M1=M4
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0	45415	4585
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0	45472	4528
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0	46862	3138
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0	45681	4319
			Total numérico:	0	233430	16570
			Total percentual (%):	0	93,37%	6,63%
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	45886	4114
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0	33631	16369
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0	33678	16322
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0	34364	15636
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0	34278	15722
			Total numérico:	0	181837	68163
			Total percentual (%):	0	72,73%	27,27%
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	49275	725
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	44039	5961
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	44082	5918
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	41085	8915
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	0	47587	2413
			Total numérico:	0	226068	23932
			Total percentual (%):	0	90,43%	9,57%
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	31165	18835
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	26954	23046
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	27056	22944
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	22943	27057
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	0	29595	20405
			Total numérico:	0	137713	112287
			Total percentual (%):	0	55,09%	44,91%
			Total percentual (%):	0	77,90%	22,10%

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE Q - Comparação do M1 com o M5

Tabela 20: Número de vezes que a amplitude do M1 é maior, menor ou igual à M5

Cenários	N	n	Parâmetros	M1<M5	M1>M5	M1=M5
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	4585	45415	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	4528	45472	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	3138	46862	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	4319	45681	0
			Total numérico:	16570	233430	0
			Total percentual (%):	6,63%	93,37%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	4114	45886	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	16369	33631	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	16322	33678	0
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	15636	34364	0
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	15722	34278	0
			Total numérico:	68163	181837	0
			Total percentual (%):	27,27%	72,73%	0%
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	725	49275	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	5961	44039	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	5918	44082	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	8915	41085	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	2413	47587	0
			Total numérico:	23932	226068	0
			Total percentual (%):	9,57%	90,43%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	18835	31165	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	23046	26954	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	22944	27056	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	27057	22943	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	20405	29595	0
			Total numérico:	112287	137713	0
			Total percentual (%):	44,91%	55,09%	0
			Total percentual (%):	22,10%	77,90%	0

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE R - Comparação do M1 com o M6

Tabela 21: Número de vezes que a amplitude do M1 é maior, menor ou igual ao M6

Cenários	N	n	Parâmetros	M1<M6	M1>M6	M1=M6
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	25	49975	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	13914	36086	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	13765	36235	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	12898	37102	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	13083	36917	0
			Total numérico:	53685	196315	0
			Total percentual (%):	21,47%	78,53%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	17417	32583	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	29403	20597	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	29493	20507	0
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	29380	20620	0
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	26927	23073	0
			Total numérico:	132620	117380	0
			Total percentual (%):	53,05%	46,95%	0 %
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	725	49275	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	5961	44039	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	5918	44082	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	8915	41085	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	2413	47587	0
			Total numérico:	23932	226068	0
			Total percentual (%):	9,57%	90,43%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	18835	31165	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	23046	26954	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	22944	27056	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	27057	22943	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	20405	29595	0
			Total numérico:	112287	137713	0
			Total percentual (%):	44,91%	55,09%	0
			Total percentual (%):	32,25%	67,75%	0

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE S - Comparação do M2 com o M3

Tabela 22: Número de vezes que a amplitude do M2 é maior, menor ou igual ao M3

Cenários	N	n	Parâmetros	M2<M3	M2>M3	M2=M3
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	17675	32325	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	33149	16851	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	33230	16770	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	34050	15950	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	30001	19999	0
			Total numérico:	148105	101895	0
			Total percentual (%):	59,24%	40,76%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	50000	0	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	50000	0	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	50000	0	0
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	50000	0	0
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	50000	0	0
			Total numérico:	250000		
			Total percentual (%):	100%	0	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	50000	0	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	41869	8131	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	41814	8186	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	43846	6154	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	46230	3770	0
			Total numérico:	223759	26241	0
			Total percentual (%):	89,50%	10,50%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	50000	0	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	50000	0	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	50000	0	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	50000	0	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	50000	0	0
			Total numérico:	250000	0	0
			Total percentual (%):	100%	0	0
			Total percentual (%):	85,14%	14,86%	0

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE T - Comparação do M2 com o M4

Tabela 23: Número de vezes que a amplitude do M2 é maior, menor ou igual ao M4

Cenários	N	n	Parâmetros	M2<M4	M2>M4	M2=M4
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0	50000	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0	50000	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0	50000	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	32583	17417	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	20597	29403	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	23073	26927	0
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	20620	29380	0
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	23073	26927	0
			Total numérico:	119946	130054	0
			Total percentual (%):	47,98%	52,02%	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	50000	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	50000	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	50000	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	31165	18835	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	26954	23046	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	27056	22944	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	22943	27057	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	29595	20405	0
			Total numérico:	137713	112287	0
			Total percentual (%):	55,09%	44,91%	0
			Total percentual (%):	25,77%	74,23%	0

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE U - Comparação do M2 com o M5

Tabela 24: Número de vezes que a amplitude do M2 é maior, menor ou igual ao M5

Cenários	N	n	Parâmetros	M2<M5	M2>M5	M2=M5
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0	50000	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0	50000	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0	50000	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0	50000	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0	50000	0
9	50	10	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0	50000	0
10	50	10	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	50000	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	50000	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	50000	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	50000	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	50000	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	50000	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
			Total percentual (%):	0	100%	0

## APÊNDICE V - Comparação do M2 com o M6

Tabela 25: Número de vezes que a amplitude do M2 é maior, menor ou igual ao M6

Cenários	N	n	Parâmetros	M2<M6	M2>M6	M2=M6
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	4585	45415	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	4528	45472	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	3138	46862	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	4319	45681	0
			Total numérico:	16570	233430	0
			Total percentual (%):	6,63%	93,37%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	34259	15741	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	37383	12617	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	29493	20507	0
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	37710	12290	0
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	32216	17784	0
			Total numérico:	171061	78939	0
			Total percentual (%):	68,42%	31,58%	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	50000	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	50000	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	50000	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	50000	0	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	50000	0	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	50000	0	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	50000	0	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	50000	0	0
			Total numérico:	250000	0	0
			Total percentual (%):	100%	0	0
			Total percentual (%):	43,76%	56,24%	0



## APÊNDICE W - Comparação do M3 com o M4

Tabela 26: Número de vezes que a amplitude do M3 é maior, menor ou igual ao M4

Cenários	N	n	Parâmetros	M3<M4	M3>M4	M3=M4
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0	50000	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0	50000	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0	50000	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	15741	34259	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	12617	37383	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	12529	37471	0
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	12290	37710	0
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	17784	32216	0
			Total numérico:	70961	149039	0
			Total percentual (%):	28,38%	71,62%	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	50000	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	50000	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	50000	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	31165	18835	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	26954	23046	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	27056	22944	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	22943	27057	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	29595	20405	0
			Total numérico:	137713	112287	0
			Total percentual (%):	55,09%	44,91%	0
			Total percentual (%):	20,87%	79,13%	0

## APÊNDICE X - Comparação do M3 com o M5

Tabela 27: Número de vezes que a amplitude do M3 é maior, menor ou igual ao M5

Cenários	N	n	Parâmetros	M3<M5	M3>M5	M3=M5
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0	50000	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0	50000	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0	50000	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0	50000	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0	50000	0
9	50	10	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0	50000	0
10	50	10	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	50000	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	50000	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	50000	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	50000	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	50000	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	50000	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
			Total percentual (%):	0	100%	0

## APÊNDICE Y - Comparação do M3 com o M6

Tabela 28: Número de vezes que a amplitude do M3 é maior, menor ou igual ao M6

Cenários	N	n	Parâmetros	M3<M6	M3>M6	M3=M6
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0	50000	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0	50000	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0	50000	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	0	50000	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	0	50000	0
9	50	10	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	0	50000	0
10	50	10	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	50000	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	50000	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	50000	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	0	50000	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	0	50000	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	0	50000	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	0	50000	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	0	50000	0
			Total numérico:	0	250000	0
			Total percentual (%):	0	100%	0
			Total percentual (%):	0	100%	0

## APÊNDICE Z - Comparação do M4 com o M5

Tabela 29: Número de vezes que a amplitude do M4 é maior, menor ou igual ao M5

Cenários	N	n	Parâmetros	M4<M5	M4>M5	M4=M5
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	1747	48253	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	24925	25075	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	24886	25114	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	23076	26924	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	27370	22630	0
			Total numérico:	102004	147996	0
			Total percentual (%):	40,80%	59,20%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	4114	45886	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	16369	33631	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	16322	33678	0
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	15636	34364	0
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	15722	34278	0
			Total numérico:	68163	181837	0
			Total percentual (%):	27,27%	72,73%	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	7721	42279	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	20586	29414	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	20602	29398	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	26807	23193	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	13705	36295	0
			Total numérico:	89421	160579	0
			Total percentual (%):	35,77%	64,23%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	18835	31165	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	23046	26954	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	22944	27056	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	27057	22943	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	20405	29595	0
			Total numérico:	112287	137713	0
			Total percentual (%):	44,91%	55,09%	0
			Total percentual (%):	37,19%	62,81%	0

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

## APÊNDICE AA - Comparação do M4 com o M6

Tabela 30: Número de vezes que a amplitude do M4 é maior, menor ou igual ao M6

Cenários	N	n	Parâmetros	M4<M6	M4>M6	M4=M6
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	17417	32583	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	29380	20620	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	29493	20507	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	29380	20620	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	26927	23073	0
			Total numérico:	132597	117403	0
			Total percentual (%):	53,04%	46,96%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	6876	43124	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	29253	20747	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	29177	20823	0
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	27995	22005	0
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	30000	20000	0
			Total numérico:	123301	126699	0
			Total percentual (%):	49,32%	50,68%	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	7721	42279	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	20586	29414	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	20602	29398	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	26807	23193	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	13705	36295	0
			Total numérico:	89421	160579	0
			Total percentual (%):	35,77%	64,23%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	18835	31165	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	23046	26954	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	22944	27056	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	27057	22943	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0,3)	20405	29595	0
			Total numérico:	112287	137713	0
			Total percentual (%):	44,91%	55,09%	0
			Total percentual (%):	45,76%	54,24%	0

## APÊNDICE AB - Comparação do M5 com o M6

Tabela 31: Número de vezes que a amplitude do M5 é maior, menor ou igual ao M6

Cenários	N	n	Parâmetros	M5<M6	M5>M6	M5=M6
1	50	30	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	17675	32325	0
2	50	30	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	33149	16851	0
3	50	30	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	33230	16770	0
4	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	34050	15950	0
5	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	19999	30001	0
			Total numérico:	138103	111897	0
			Total percentual (%):	55,24%	44,76%	0
6	50	10	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	50000	0	0
7	50	10	(0.6, 0.2, 0.12, 0.06, 0.02)	50000	0	0
8	50	10	(0.02, 0.06, 0.12, 0.2, 0.6)	50000	0	0
9	50	30	(0.04, 0.16, 0.6, 0.16, 0.04)	50000	0	0
10	50	30	(0.4, 0.08, 0.02, 0.08, 0.4)	50000	0	0
			Total numérico:	250000	0	0
			Total percentual (%):	100%	0	0
11	20	12	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	50000	0	0
12	20	12	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	41869	8131	0
13	20	12	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	41814	8186	0
14	20	12	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	43846	6154	0
15	20	12	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	46230	3770	0
			Total numérico:	223759	26241	0
			Total percentual (%):	89,50%	10,50%	0
16	20	4	(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)	50000	0	0
17	20	4	(0.45, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05)	50000	0	0
18	20	4	(0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.45)	50000	0	0
19	20	4	(0.05, 0.15, 0.6, 0.15, 0.05)	50000	0	0
20	20	4	(0.3, 0.15, 0.1, 0.15, 0.3)	50000	0	0
			Total numérico:	250000	0	0
			Total percentual (%):	100%	0	0
			Total percentual (%):	86,19%	13,81%	0