

Universidade Federal de Alfenas

**Augusto dos Reis Ribeiro**

***Uma variação do teorema dos quatro vértices***

Alfenas/MG

2021

**Augusto dos Reis Ribeiro**

***Uma variação do teorema dos quatro vértices***

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Geometria. Orientador: José Carlos de Souza Júnior.

Alfenas/MG

2021

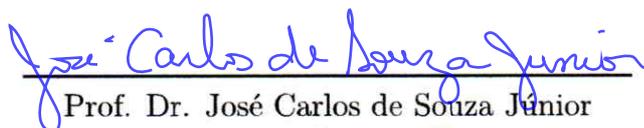
Augusto dos Reis Ribeiro

*Uma variação do teorema dos quatro vértices*

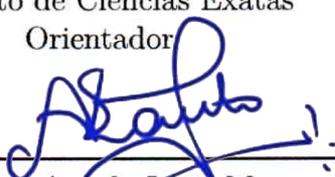
A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Monografia apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alenas. Área de concentração: Geometria.

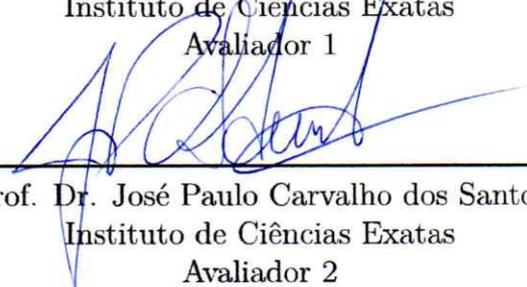
Aprovado em: 03 / 03 / 2021

Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. José Carlos de Souza Júnior

Instituto de Ciências Exatas  
Orientador

  
Profa. Dra. Angela Leite Moreno  
Instituto de Ciências Exatas  
Avaliador 1

  
Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos  
Instituto de Ciências Exatas  
Avaliador 2

Profa. Dra. Andréa Cardoso  
Instituto de Ciências Exatas  
Suplente

À minha família . . .

# *Agradecimentos*

Agradeço primeiramente a Deus por ter me capacitado para chegar até onde cheguei, agradeço a minha família que de inúmeras maneiras me proporcionou condições para estudar e realizar meu sonho. Agradeço aos meus colegas de sala que durante toda a graduação esteve ao meu lado enfrentando as dificuldades juntos e sempre dando ânimo para que conseguíssemos vencer cada etapa. Agradeço a minha esposa por me manter de pé diante das dificuldades e me manter focado nos meus objetivos. Em especial devo minha gratidão ao meu orientador professor José Carlos, que desde o início do curso tem dado ensinamentos indispensáveis e também soube ter paciência para me ajudar em cada momento, e ao final do curso me ajudar a concluir o meu sonho, através deste trabalho excepcional. . . .

# Resumo

A história da Geometria Diferencial se dá através do estudo das curvas, onde o estudo da geometria é feito por técnicas de cálculo. E nesse contexto encontra-se teoremas clássicos como o Teorema Fundamental das Curvas Planas e o Teorema dos Quatro Vértices (TQV). O TQV possui elevada importância no contexto das aplicações da teoria das curvas planas. Este trabalho tem o objetivo de apresentar uma demonstração detalhada do Teorema dos Quatro Vértices, visando posteriormente trazer uma variação deste teorema para curvas na esfera. Para isto realizaremos um estudo de curvas planas e espaciais e apresentaremos conceitos que fundamentam a teoria das curvas e então demonstrando o Teorema dos Quatro Vértices, e através da projeção estereográfica mostraremos a variação deste teorema para curvas na esfera. Tendo em vista a demonstração do Teorema dos Quatro Vértices para curvas no plano e com o estudo das curvas espaciais, espera-se uma generalização para curvas na esfera.

**Palavras-chave:** Geometria Diferencial. Curvas. Projeção Estereográfica.

# Abstract

The history of Differential Geometry takes place through the study of curves, where the study of geometry is done by calculation techniques. And in that context, one finds classic theorems such as the Fundamental Theorem of Flat Curves and the Four Vertices Theorem (TQV). TQV is highly important in the context of applications of the theory of plane curves. This work aims to present a detailed demonstration of the Four Vertices Theorem, aiming later to bring a variation of this theorem for curves in the sphere. For this we will carry out a study of plane and spatial curves and present concepts that support the theory of curves and then demonstrate the Four Vertex Theorem, and through stereographic projection we will show the variation of this theorem for curves in the sphere. In view of demonstrating the Four Vertex Theorem for curves in the plane and with the study of spatial curves, a generalization for curves in the sphere is expected.

**Keywords:** Differential Geometry. Curves. Stereographic Projection.

# Lista de ilustrações

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Curva localmente convexa e curva não localmente convexa em $t_0 \in I$ . . . | 17 |
| Figura 2 – Gráfico de $f'$ no intervalo $[0, l]$ . . . . .                              | 22 |
| Figura 3 – Gráfico de $f'$ no intervalo $[0, l]$ . . . . .                              | 22 |
| Figura 4 – Gráfico de $f'$ no intervalo $[0, l]$ . . . . .                              | 23 |
| Figura 5 – Rotação e translação da curva $\alpha$ . . . . .                             | 24 |
| Figura 6 – Triedro de Frenet. . . . .   | 28 |
| Figura 7 – Projecção estereográfica. . . . .  | 33 |
| Figura 8 – Inversa da projecção estereográfica. . . . .                                 | 34 |
| Figura 9 – Curva na superfície do toro. . . . .   | 38 |

# Sumário

|   |  |    |
|---|--|----|
|   | Lista de ilustrações . . . . .   | 7  |
| 1 | INTRODUÇÃO . . . . .   | 9  |
| 2 | CURVAS PLANAS . . . . .  | 12 |
| 3 | TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES . . . . .  | 18 |
| 4 | <i>CURVAS ESPACIAIS</i> . . . . .  | 26 |
| 5 | UMA VARIAÇÃO DO TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES PARA<br>CURVAS NO ESPAÇO . . . . . | 33 |
| 6 | <i>CONSIDERAÇÕES FINAIS</i> . . . . .  | 39 |
|   | REFERÊNCIAS . . . . .  | 40 |

# 1 *Introdução*

O objetivo deste trabalho é estudar em detalhes o teorema dos quatro vértices, bem como apresentar ao leitor a devida demonstração e com isto estender este resultado para curvas espaciais, mais especificamente contidas na esfera. Para tal, realizamos um estudo introdutório da geometria diferencial, onde falamos dos principais conceitos e exemplos de curvas planas e curvas espaciais.

Desde tempos remotos o homem tem por necessidade de realizar medições, tanto para expansão territorial como para construções e produção. Tendo em vista estas necessidades, às medições relacionam-se às figuras geométricas, e estas ao estudo que Euclides realizou da Geometria em sua famosa obra "Os Elementos", com maior sucesso na história da matemática, sendo utilizado por mais de dois mil anos. Euclides um grego que viveu em Alexandria no Egito, provavelmente durante o reinado de Ptolomeu I (323 - 383 a.C.) e que é conhecido como o "pai da Geometria", [5]. O quinto postulado de Euclides foi bem polêmico e por um grande período houve tentativas frustradas de prová-lo como teorema demonstrado a partir dos outros quatro postulados anteriores, pode-se dizer que daí então surgem as geometrias não-euclidianas.

No ano de 1626, Descartes frequentou o círculo de pensadores que gravitavam em torno do padre Mersenne, em Paris, que se dedicava, entre outras coisas, a problemas óticos ligados ao estudo do movimento de raios luminosos [...]. Podemos dizer que esta época é marcada pela concepção geral das curvas em que não se limitavam ao estudo de curvas particulares [6].

Em dado momento, quando as técnicas algébricas são usadas para definição de curvas, há um efeito na busca pelas tangentes e áreas, incentivando o desenvolvimento de métodos infinitesimais. Ao fim do século XVII o conceito curva se recobre por três concepções; "a curva como expressão algébrica, eventualmente infinita; a curva como trajetória de um ponto em movimento; e, a curva como polígono com um número infinito de lados"[6].

O surgimento do Cálculo foi um dos passos mais importantes na história da evolução da matemática. O Cálculo vem resolvendo problemas que preocupavam os matemáticos desde os Elementos de Euclides. O Cálculo deu uma nova visão e perspectiva das coisas, onde traz a oportunidade de medir taxas de variações de grandezas, como também acumulações de quantidades. Assim se divide em duas partes, sendo uma o inverso da outra: diferenciação e integração, ambas as partes são essencialmente métodos de aproximação, mas procuram usar limites em que fazem o erro envolvido tender a zero [5].

A integral calcula a área sob curva traçando uma série de retângulos infinitesimalmente finos sob a curva e somando suas áreas, fazendo uma aproximação grosseira da área de modo que a curva passe pelos pontos médios do topo de cada retângulo. A diferenciação é aceleração média sob um intervalo de tempo dado sob a inclinação de uma reta traçado entre o ponto final e o inicial do intervalo [5].

Quando se fala de geometria diferencial, segundo [1] "colocamos como uma estrutura onde se pode falar em curvatura a qual mede o quanto a estrutura dada difere localmente de uma estrutura padrão". Ao se pensar no contexto histórico, nos embasamos em [1] onde se dividiu em três períodos:

O primeiro que chamarei a Pré-história da Geometria, do qual não fui testemunha ocular, e que vai de 1800 a 1957. O segundo que é o início da História, e que vai de 1957 a 1970. E finalmente o período de consolidação da pesquisa que vai de 1970 a 1983 [1].

A Geometria Diferencial sendo uma junção do Cálculo e Geometria, contribui para questões como cartografia, astronomia e engenharia. Sobre seus aspectos atuais e "seus principais teoremas, como o Teorema de Egregium, tiveram seu início com Carl Friedrich Gauss em seu trabalho *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, de 1828" [4].

Quando se trata de curvas e superfícies, temos o Teorema dos Quatro Vértices como uma grande ferramenta no âmbito da generalização. Com uma história por volta de um século o Teorema vem sendo demonstrado em diferentes perspectivas, como analítica ou geométrica. Em sua primeira versão, uma oval (curva plana regular simples, fechada com curvatura estritamente positiva) foi provada em 1909 por S. Mukhopadhyaya. E este resultado foi usado em diferentes contextos. A. Kneser, em 1912, provou o teorema para o caso não convexo. Posteriormente W. C. Graustein, em 1937, e S. B. Jackson, em 1944, estudaram com mais detalhes a localização dos vértices em curvas fechadas regulares, mas pensando também em curvas não-simples [2].

Em 1971, uma recíproca do Teorema dos Quatro Vértices para funções de curvatura estritamente positiva foi apresentada por [13]. Finalmente, em 2005, surge uma publicação de Björn Dahlberg na qual ele consegue descartar a hipótese da função curvatura ser estritamente positiva na demonstração dessa recíproca. A publicação de [11] encerra um ciclo de quase cem anos iniciado pelas ideias de [20].

Diante disso, nos mergulhamos neste mundo das curvas e organizamos este estudo da seguinte maneira: no Capítulo 2 mencionamos algumas definições e conceitos básicos da geometria diferencial que constituem a definição de curvas planas, parametrizadas, fechadas, simples, regular, convexa e também da definição de vértice de uma curva que será de extrema importância para dar sequência ao nosso objetivo. No Capítulo 3 demonstramos o Teorema dos Quatro Vértices, porém para isto foi preciso trabalhar

---

também com alguns teoremas e lemas importantes do cálculo. O quarto capítulo, de maneira análoga ao Capítulo 2, aborda os conceitos de curvas espaciais. E por fim, no Capítulo 5, apresentamos uma extensão do Teorema dos Quatro Vértices para algumas curvas espaciais contidas na esfera. No final concluímos que foi o trabalho possibilitou um complemento teórico de modo a reforçar a importância dessas disciplinas no contexto da teoria e suas aplicações.

## 2 *Curvas planas*

Para contextualizar o assunto proposto mencionamos algumas definições e resultados elementares da Geometria Diferencial, de acordo com [6], [9] e [22].

**Definição 2.1** Uma curva plana é uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . A aplicação  $\alpha$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , é contínua se cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.

**Definição 2.2** O conjunto imagem  $C$  da aplicação  $\alpha$ , dado por  $C = \{(x(t), y(t)); t \in I\}$ , recebe o nome de traço de  $\alpha$ . Nesse caso, dizemos que  $\alpha$  é uma parametrização da curva  $C$  e que  $t$  é o parâmetro da curva  $\alpha$ . Se  $\alpha$  está definida em um intervalo fechado  $I = [a, b]$ , então  $\alpha(a)$  recebe o nome de ponto inicial de  $\alpha$ , enquanto  $\alpha(b)$  recebe o nome de ponto final de  $\alpha$ .

**Definição 2.3** Se uma curva plana  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é tal que  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , então dizemos que  $\alpha$  é uma curva fechada.

**Definição 2.4** Uma curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  recebe o nome de periódica se existe um número real  $p > 0$ , tal que  $\alpha(t + p) = \alpha(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . O menor valor  $p_0$  que satisfaz esta definição recebe o nome de período de  $\alpha$ .

**Definição 2.5** Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é simples, se a aplicação  $\alpha$  for injetiva. Se existirem  $t_1, t_2 \in I$ , com  $t_1 \neq t_2$  e  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ , dizemos que  $\alpha$  possui um ponto duplo em  $t_1$  e  $t_2$ .

**Definição 2.6** Dizemos que uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é fechada simples, se  $\alpha(a) = \alpha(b)$  e para quaisquer  $t_1, t_2 \in [a, b)$ , com  $t_1 \neq t_2$ , temos  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ . Uma curva  $\alpha$  fechada e simples também é conhecida como curva de Jordan.

**Definição 2.7** Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , é de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , se cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^r$ . Se as funções coordenadas são de classe  $C^\infty$  em  $I$ , então dizemos que a curva  $\alpha$  é suave.

**Observação 2.1** Neste trabalho, vamos nos referir às curvas de classe  $C^r$ , simplesmente como curvas parametrizadas.

**Definição 2.8** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . O vetor tangente de  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é dado por  $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$  e a norma de  $\alpha'(t_0)$  é dado por

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

**Definição 2.9** Dizemos que uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é regular em  $t_0 \in I$ , se  $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ , ou seja,  $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$ . A curva  $\alpha$  é regular em  $I$ , se  $\alpha$  for regular para todo  $t \in I$ . Se  $\|\alpha'(t_0)\| = 0$ , dizemos que  $\alpha$  é singular em  $t_0$  e  $\alpha(t_0)$  recebe o nome de cúspide de  $\alpha$ .

**Observação 2.2** Sempre que nos referirmos a curvas parametrizadas regulares, estaremos assumindo que a curva  $\alpha$  é, pelo menos, de classe  $C^1$ .

**Definição 2.10** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , uma curva parametrizada de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , e seja  $h : J \rightarrow I$  uma função de classe  $C^r$ . A curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t))$ , também de classe  $C^r$ , recebe o nome de reparametrização de  $\alpha$ .

**Definição 2.11** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada, de classe  $C^1$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . A função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2} d\xi,$$

com  $t_0 \in I$ , recebe o nome de função comprimento de arco.

**Definição 2.12** Dizemos que uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada por comprimento de arco, se para cada  $t_0, t_1 \in I$ , com  $t_0 \leq t_1$ , o comprimento do arco da curva  $\alpha$ , de  $t_0$  até  $t_1$ , é igual a  $t_1 - t_0$ , ou seja,

$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = t_1 - t_0.$$

**Proposição 2.1** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , para todo  $t \in I$ .

A demonstração do resultado enunciado na Proposição 2.1 pode ser encontrada na página 39 de [22].

**Teorema 2.1** Toda curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

A demonstração do resultado enunciado no Teorema 2.1 pode ser encontrada na página 40 de [22].

**Definição 2.13** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e regular de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ .

(i) O campo de vetores  $T : I \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ , definido por

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \cdot (x'(t), y'(t)),$$

recebe o nome de campo tangente unitário ou indicatriz tangente. Cada vetor  $T(t)$  recebe o nome de vetor tangente unitário à curva  $\alpha$  em  $t \in I$ .

(ii) O campo de vetores  $N : I \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ , definido por

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \cdot (-y'(t), x'(t)),$$

recebe o nome de campo normal unitário ou indicatriz normal. Cada vetor  $N(t)$  recebe o nome de vetor normal unitário à curva  $\alpha$  em  $t \in I$ .

**Observação 2.3** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então:

(i)  $\|\alpha'(s)\| = 1$  e, conseqüentemente, os campos  $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  estão bem definidos e são dados por  $T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$  e  $N(s) = (-y'(s), x'(s))$ .

(ii) Como  $\|T(s)\| = 1$ , para todo  $s \in I$ , então

$$\begin{aligned} \|T(s)\|^2 &= 1, \\ \langle T(s), T(s) \rangle &= 1, \text{ derivando em relação à } s, \text{ obtemos:} \\ \langle T(s), T'(s) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $T'(s)$  é perpendicular a  $T(s)$ , para todo  $s \in I$ . Como  $T(s)$  e  $N(s)$  são vetores ortogonais, concluímos que  $T'(s)$  é paralelo a  $N(s)$ . Isso significa que existe uma função  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$T'(s) = k(s) \cdot N(s), \quad s \in I \tag{2.1}$$

**Definição 2.14** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , parametrizada pelo comprimento de arco. A função  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida pela Equação (2.1), recebe o nome de curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$ . Segue ainda da Equação (2.1) que  $k(s) = \|T'(s)\|$ .

**Proposição 2.2** A curvatura de uma curva regular  $\alpha$  é identicamente nula se, e somente se, o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta.

*Demonstração.* Vamos supor que  $k(s) \equiv 0$ , para todo  $s \in I$ . Como  $0 = k(s) = \|T'(s)\|$ , concluímos que  $T'(s) = (0, 0)$ , para todo  $s \in I$ , ou seja,  $T(s) = V_0$  é um vetor constante. Assim,

$$\begin{aligned}\alpha(s) - \alpha(s_0) &= \int_{s_0}^s \alpha'(\xi) d\xi, \\ \alpha(s) &= \int_{s_0}^s T(\xi) d\xi + \alpha(s_0), \\ \alpha(s) &= V_0 \cdot (s - s_0) + \alpha(s_0).\end{aligned}$$

Reciprocamente, se o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta e  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, então  $\alpha(s) = \alpha(s_0) + s \cdot V_0$ , sendo  $V_0$  um vetor constante e tal que  $\|V_0\| = 1$ . Logo,  $\alpha'(s) = V_0$ ,  $\alpha''(s) = (0, 0)$  e, conseqüentemente,  $k(s) = \|\alpha''(s)\| \equiv 0$ . ■

**Proposição 2.3** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Os campos tangente e normal satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} T'(s) = k(s) \cdot N(s), \\ N'(s) = -k(s) \cdot T(s). \end{cases}$$

*Demonstração.* Pela Equação (2.1), temos:

$$\begin{aligned}T'(s) &= k(s) \cdot N(s) \\ (x''(s), y''(s)) &= k(s) \cdot (-y'(s), x'(s)).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} x''(s) = -k(s) \cdot y'(s), \\ y''(s) = k(s) \cdot x'(s). \end{cases}$$

Deste modo,

$$N'(s) = (-y''(s), x''(s)) = -k(s) \cdot (x'(s), y'(s)) = -k(s) \cdot T(s) \quad (2.2)$$

Combinando as Equações (2.1) e (2.2), obtemos o resultado desejado. ■

O próximo resultado nos permite obter a curvatura de uma curva que não esteja necessariamente parametrizada por comprimento de arco.

**Teorema 2.2** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Então a curvatura de  $\alpha$  em  $t \in I$  é dada por:

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A demonstração do resultado enunciado no Teorema 2.2 pode ser encontrada na página 37 de [6].

**Proposição 2.4** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  e  $k_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  a função curvatura da curva  $\alpha$ .

(i) Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a aplicação translação do plano segundo o vetor  $(a, b)$ , isto é,

$$T(x, y) = (x + a, y + b),$$

então  $k_\alpha$  é invariante por  $T$ .

(ii) Se  $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a aplicação rotação de um ângulo  $\theta$ , isto é,

$$R_\theta(x, y) = (x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta), y \cos(\theta) + x \operatorname{sen}(\theta)),$$

então  $k_\alpha$  é invariante por  $R_\theta$ .

*Demonstração.*

(i) Seja  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por:

$$\beta(t) = (X(t), Y(t)) = (T \circ \alpha)(t) = (x(t) + a, y(t) + b).$$

Assim,

$$X'(t) = (x(t) + a)' = x'(t),$$

$$X''(t) = x''(t),$$

$$Y'(t) = (y(t) + b)' = y'(t),$$

$$Y''(t) = y''(t).$$

Portanto, segue do Teorema 2.2 que  $k_\beta(t) = k_\alpha(t)$ .

(ii) Seja  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por:

$$\beta(t) = (X(t), Y(t)) = (R_\theta \circ \alpha)(t) = (x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta), y \cos(\theta) + x \operatorname{sen}(\theta)).$$

Assim,

$$X'(t) = x'(t) \cos(\theta) - y'(t) \operatorname{sen}(\theta),$$

$$X''(t) = x''(t) \cos(\theta) - y''(t) \operatorname{sen}(\theta),$$

$$Y'(t) = y'(t) \cos(\theta) + x'(t) \operatorname{sen}(\theta),$$

$$Y''(t) = y''(t) \cos(\theta) + x''(t) \operatorname{sen}(\theta).$$

Portanto, segue do Teorema 2.2 que

$$k_\beta(t) = \frac{X'(t)Y''(t) - X''(t)Y'(t)}{((X'(t))^2 + (Y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} = k_\alpha(t).$$

■

**Definição 2.15** Dizemos que uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é localmente convexa em  $t_0 \in I$ , se existe um  $\delta > 0$ , tal que  $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$  esteja inteiramente contido num dos semiplanos determinados pela reta tangente à  $\alpha$  em  $t_0$ .

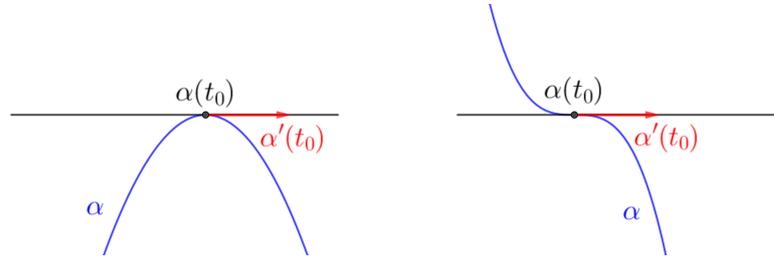


Figura 1: Curva localmente convexa e curva não localmente convexa em  $t_0 \in I$ .

**Definição 2.16** Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita convexa se é localmente convexa para todo  $t \in I$ .

**Definição 2.17** Um vértice de uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um ponto de máximo ou de mínimo local da função curvatura  $k$ .

### 3 Teorema dos quatro vértices

Mukhopadhyaya (1909) foi a primeira pessoa a mostrar que uma curva convexa possui pelo menos quatro vértices e pouco tempo depois, Kneser (1912) generalizou o resultado para curvas fechadas simples, não necessariamente convexas, desde então vários resultados relacionados ao assunto foram publicados, como por exemplo, os apresentados por Blaschke (1913), Mohrmann (1914), Hayashi (1926), Chern (1967), Guggenheimer (1969) e Osserman (1985).

Em 1971, uma recíproca do Teorema dos Quatro Vértices para funções de curvatura estritamente positiva foi apresentada por Gluck (1971). Finalmente, em 2005, surge uma publicação de Björn Dahlberg na qual ele consegue descartar a hipótese da função curvatura ser estritamente positiva na demonstração dessa recíproca. A publicação de Dahlberg (2005) encerra um ciclo de quase cem anos iniciado pelas ideias de Mukhopadhyaya (1909).

O teorema dos quatro vértices abordado nesta seção está de acordo com [6]. Iniciamos a abordagem apresentando alguns resultados do Cálculo Diferencial utilizados na demonstração do resultado principal desta seção.

**Teorema 3.1 (do Valor Intermediário)** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $[a, b]$  e se  $\gamma$  for um número real compreendido entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existe pelo menos um  $c \in [a, b]$ , tal que  $f(c) = \gamma$ .

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada na página 512 de [12].

**Teorema 3.2 (Weierstrass)** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua em  $[a, b]$ , então existem  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , tais que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ , para todo  $x \in [a, b]$ .

Em outras palavras, o Teorema 3.2 nos diz que toda função contínua, definida de um intervalo fechado na reta, admite um ponto de máximo absoluto e um ponto de mínimo absoluto. Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada na página 187 de [18].

**Teorema 3.3 (Rolle)** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua em  $[a, b]$ , diferenciável em  $(a, b)$  e  $f(a) = f(b)$ , então existe pelo menos um  $c \in (a, b)$ , tal que  $f'(c) = 0$ .

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada na página 458 de [12].

**Teorema 3.4 (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo)** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $[a, b]$ , então  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  é contínua em  $[a, b]$ , diferenciável em  $(a, b)$  e sua derivada é  $f(x)$ .

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

A demonstração do Teorema 3.4 pode ser encontrada na página 391 de [23].

**Teorema 3.5 (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo)** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $[a, b]$  e  $F$  é qualquer primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

A demonstração do Teorema 3.5 pode ser encontrada na página 392 de [23].

**Lema 3.1** Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas com  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ . Então existe um  $\theta \in [a, b]$ , tal que

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = g(\theta) \int_a^b f(x) dx.$$

*Demonstração.* Se  $f$  for identicamente nula, então o resultado é imediato. Vamos supor que  $f \not\equiv 0$ . Como  $g$  é contínua em  $[a, b]$ , segue do Teorema (3.2) que  $g$  assume um valor máximo e mínimo em  $[a, b]$ . Seja  $M$  o valor máximo e  $m$  o valor mínimo de  $g$  em  $[a, b]$ . Assim, para todo  $x \in [a, b]$ ,  $m \leq g(x) \leq M$ . Sendo  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ , então

$$m \cdot f(x) \leq g(x) \cdot f(x) \leq M \cdot f(x),$$

e daí,

$$\int_a^b m \cdot f(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq \int_a^b M \cdot f(x) dx,$$

ou seja,

$$m \cdot \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq M \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Como  $f$  é uma função não identicamente nula, segue que  $\int_a^b f(x) dx > 0$  e, portanto,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \leq M.$$

Deste modo,  $\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$  é um número entre o menor e o maior valor de  $g$  em  $[a, b]$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema (3.1)), existe  $\theta \in [a, b]$ , tal que

$$g(\theta) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b f(x) dx},$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = g(\theta) \int_a^b f(x) dx, \text{ para algum } \theta \in [a, b]$$

■

**Observação 3.1** O Lema 3.1 continua válido se  $f(x) \leq 0$  em  $[a, b]$ . A demonstração é análoga.

**Lema 3.2 (Segundo Teorema do Valor Médio)** Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções reais. Se  $f$  e  $g'$  são funções contínuas e  $g$  é uma função monótona, então existe  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b g(x) \cdot f(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

*Demonstração.* Aplicando a técnica de integração por partes na integral

$$\int_a^b \underbrace{g(x)}_u \cdot \underbrace{f(x)}_{dv} dx = [uv]_a^b - \int_a^b v du, \text{ obtemos:}$$

$$\begin{cases} u = g(x) \Rightarrow du = g'(x) dx, \\ dv = f(x) dx \Rightarrow v = \int_a^x f(\theta) d\theta. \text{ (Teorema (3.4))} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx &= \left[ g(x) \cdot \int_a^x f(\theta) d\theta \right]_a^b - \int_a^b \int_a^x f(\theta) d\theta \cdot g'(x) dx \\ &= g(b) \cdot \int_a^b f(\theta) d\theta - g(a) \cdot \int_a^a f(\theta) d\theta \\ &\quad - \int_a^b \int_a^x f(\theta) d\theta \cdot g'(x) dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Com o objetivo de aplicar o resultado do Lema (3.1) fazendo  $\tilde{g}(x) = \int_a^x f(\theta) d\theta$  e  $\tilde{f}(x) = g'(x)$ , então o fato de  $g$  ser uma função monótona nos garante que  $\tilde{f}(x) \geq 0$  ou  $\tilde{f}(x) \leq 0$ , em  $[a, b]$ . Assim, segue do Lema (3.1) e da Observação (3.1) que

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^x f(\theta) d\theta \cdot g'(x) dx &= \int_a^b \tilde{g}(x) \cdot \tilde{f}(x) dx \\ &= \tilde{g}(\xi) \int_a^b \tilde{f}(x) dx \\ &= \int_a^\xi f(\theta) d\theta \int_a^b g'(x) dx, \text{ para algum } \xi \in [a, b]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Assim, das Equações (3.1) e (3.2), obtemos:

$$\int_a^b g(x) \cdot f(x) dx = g(b) \cdot \int_a^b f(\theta) d\theta - \int_a^\xi f(\theta) d\theta \int_a^b g'(x) dx, \text{ com } \xi \in [a, b]. \tag{3.3}$$

Pelo Teorema 3.5, temos que  $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$ . Assim, (3.3) resulta em

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx &= g(b) \cdot \int_a^b f(\theta) d\theta - \int_a^\xi f(\theta) d\theta \cdot (g(b) - g(a)) \\ &= g(b) \cdot \left[ \int_a^\xi f(\theta) d\theta + \int_\xi^b f(\theta) d\theta \right] - \int_a^\xi f(\theta) d\theta \cdot (g(b) - g(a)) \\ &= g(b) \int_\xi^b f(\theta) d\theta + g(a) \int_a^\xi f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo uma mudança de variável na qual chamamos  $\theta$  de  $x$ , obtemos o resultado desejado.

$$\int_a^b g(x) \cdot f(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx, \text{ para algum } \xi \in [a, b].$$

■

**Lema 3.3** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica, com período  $l$  e de classe  $C^1$ . Se  $f$  não é constante em nenhum subintervalo de  $\mathbb{R}$ , então a soma dos números de pontos máximos e mínimos locais de  $f$  em  $[0, l)$  é sempre um número par.

*Demonstração.* Sendo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , então  $f' : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua. Como  $f$  é periódica de período  $l$ , então  $f'$  também possui esta mesma propriedade. Consideremos os seguintes casos:

(i)  $f'(0) = f'(l) > 0$ .

Sabemos que  $f'(x)$  muda de sinal na vizinhança de um ponto extremo local e como  $f'(0) = f'(l) > 0$ , então o intervalo  $[0, l)$  pode ser dividido em subintervalos em que  $f'(x)$  é, alternadamente, positiva e negativa, sendo obrigatoriamente positiva no primeiro e no último subintervalo e isto faz com que tenhamos um número ímpar destes subintervalos.

Deste modo,  $f'$  possui um número par de zeros e seu sinal muda antes e depois destes zeros. Portanto,  $f$  possui um número par de extremos locais no intervalo  $[0, l)$ .

(ii)  $f'(0) = f'(l) < 0$ .

Este caso é análogo ao anterior.

(iii)  $f'(0) = f'(l) = 0$ .

Temos duas situações possíveis: Existe um  $\epsilon > 0$ , tal que  $f'(x)$  tem o mesmo sinal nos intervalos  $(0, \epsilon)$  e  $(l - \epsilon, l)$ , ou  $f'(x)$  tem sinais distintos nestes intervalos.

No primeiro caso,  $[0, l)$  pode ser dividido em um número ímpar de subintervalos em que  $f'(x)$  muda de sinal na passagem de um subintervalo para o outro, o que implica em um número par de extremos locais em  $(0, l)$ , conforme ilustra a Figura 3.

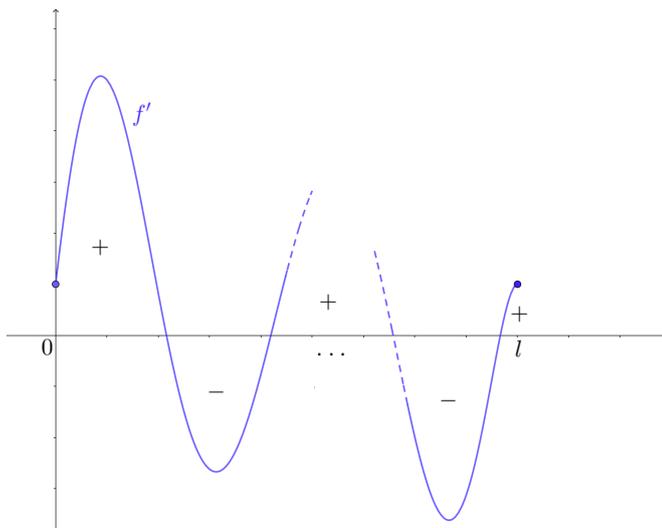


Figura 2: Gráfico de  $f'$  no intervalo  $[0, l]$ .

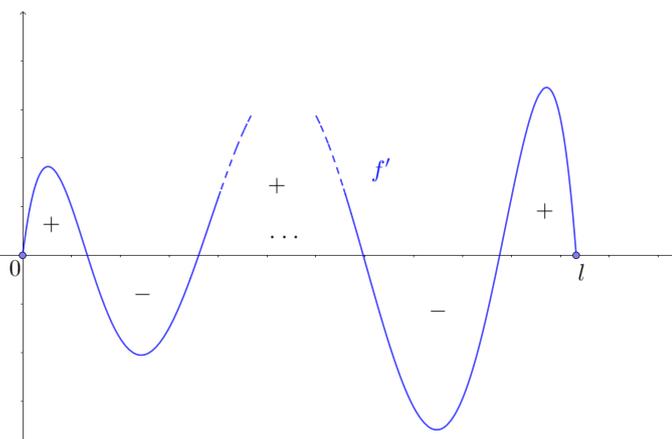


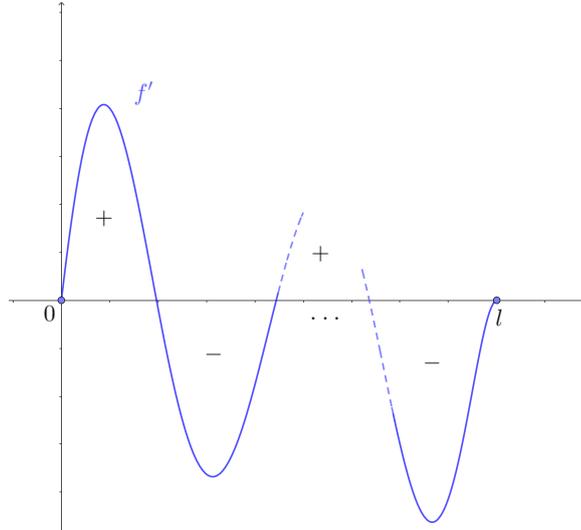
Figura 3: Gráfico de  $f'$  no intervalo  $[0, l]$ .

Como  $f$  e  $f'$  são funções periódicas, então concluímos que  $f'(x) > 0$  em  $(l, l + \epsilon)$ , logo o gráfico de  $f$  possui pontos de inflexão em  $x = 0$  e  $x = l$  e, conseqüentemente,  $f$  possui um número par de extremos locais em no intervalo  $[0, l]$ .

No segundo caso, o número de subintervalos de  $[0, l]$  em que  $f'(x)$  muda de sinal na passagem de um subintervalo para outro é par, conforme ilustra a Figura 4.

Mas isto implica que existe um número ímpar de extremos locais em  $(0, l)$ . Sendo  $f'$  periódica, concluímos que  $f'(x)$  tem o mesmo sinal nos subintervalos  $(-\epsilon, 0)$  e  $(l - \epsilon, l)$ . Assim,  $f'(x)$  tem sinais distintos em  $(-\epsilon, 0)$  e  $(0, \epsilon)$  e, conseqüentemente, o gráfico de  $f$  possui um extremo local em  $x = 0$ . Portanto, obtemos um número par de extremos locais de  $f$  em  $[0, l]$ .

■

Figura 4: Gráfico de  $f'$  no intervalo  $[0, l]$ .

A seguir, apresentamos o resultado principal desta seção cuja demonstração baseia-se em [6].

**Teorema 3.6 (Teorema dos Quatro vértices)** Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva regular, fechada, simples, convexa e de classe  $C^3$ , então  $\alpha$  possui pelo menos quatro vértices.

*Demonstração.* De acordo com o Teorema 2.1, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\alpha$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

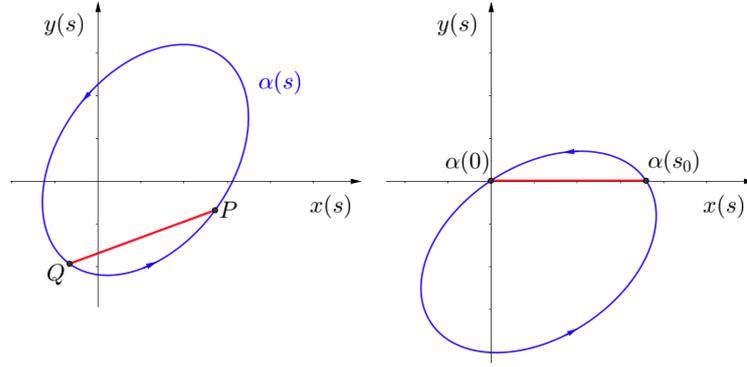
Se a função curvatura  $k$  for constante em algum subintervalo  $J \subset [a, b]$ , então todos os pontos de  $J$  são pontos críticos de  $k$  e, conseqüentemente,  $\alpha$  possui uma infinidade de vértices.

Vamos assumir que a função curvatura  $k$  não é constante. Assim, segue do Lema 3.3 que existe um número par de extremos locais da função  $k$  no intervalo  $[a, b]$ . Vamos mostrar por contradição que  $\alpha$  não possui apenas dois vértices.

Suponhamos que  $P$  e  $Q$  sejam os únicos vértices de  $\alpha$ . Como  $\alpha$  é simples e convexa, então o fato da função curvatura ser invariante por movimentos rígidos, veja a Proposição 2.4, nos permite aplicar, se necessário, uma rotação, uma translação e uma reparametrização, de modo que na nova curva obtida, também denotada por  $\alpha$ , tenhamos  $P = \alpha(0) = \alpha(l) = (0, 0)$ , sendo  $l$  o comprimento de  $\alpha$ ,  $Q = \alpha(s_0) = (x(s_0), 0)$  e  $k'(0) = k'(s_0) = 0$ , como ilustra a Figura 5. Neste caso,  $0$  e  $s_0$  são os únicos pontos extremos de  $k$ , uma vez que  $P$  e  $Q$  são, por hipótese, os únicos vértices de  $\alpha$ .

Observamos que

$$k(0) \neq k(s_0). \quad (3.4)$$


 Figura 5: Rotação e translação da curva  $\alpha$ .

De fato, suponhamos que  $k(s_0) = k(0)$ . Como estamos admitindo que  $k$  não é uma função constante, então segue do Teorema (3.3) que existe um  $c \in (0, s_0)$  tal que  $k'(c) = 0$  e esse ponto é, necessariamente, um extremo local da função  $k$ , contrariando nossa hipótese de que 0 e  $s_0$  são os únicos vértices de  $\alpha$ . Portanto, concluímos que  $k(0) \neq k(s_0)$ .

Considerando a curva  $\alpha$  dada por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , temos que

$$\begin{aligned} y(s) &< 0, \text{ se } 0 < s < s_0, \\ y(s) &> 0, \text{ se } s_0 < s < l, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Caso a orientação da curva  $\alpha$  seja oposta ao considerado na Figura 5, o raciocínio será o mesmo.

Segue das Equações de Frenet (Proposição 2.3) que  $T'(s) = k(s)N(s)$ , sendo  $T(s) = (x'(s), y'(s))$  e  $N(s) = (-y'(s), x'(s))$ , ou seja,

$$\begin{aligned} x''(s) &= -k(s)y'(s), \\ y''(s) &= k(s)x'(s). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim,

$$\int_0^l k(s)y'(s) ds \stackrel{(3.6)}{=} - \int_0^l x''(s) ds = -x'(s)|_0^l = 0, \quad (3.7)$$

uma vez que  $\alpha$  é uma curva fechada e, conseqüentemente,  $\alpha'(0) = \alpha'(l)$ .

Por outro lado,

$$\int_0^l k(s)y'(s) ds = \int_0^{s_0} k(s)y'(s) ds + \int_{s_0}^l k(s)y'(s) ds. \quad (3.8)$$

Como  $x = 0$  e  $x = s_0$  correspondem a extremos locais da função curvatura, concluímos que  $k$  é uma função monótona nos subintervalos  $[0, s_0]$  e  $[s_0, l]$ . Assim, segue do Lema 3.2 que

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} k(s)y'(s) ds &= k(0) \int_0^{\xi_1} y'(s) ds + k(s_0) \int_{\xi_1}^{s_0} y'(s) ds \\ &= k(0) \left[ y(\xi_1) - \overset{0}{y(0)} \right] + k(s_0) \left[ \overset{0}{y(s_0)} - y(\xi_1) \right] \\ &= y(\xi_1) [k(0) - k(s_0)], \text{ com } \xi_1 \in (0, s_0) \text{ e,} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_0}^l k(s)y'(s) ds &= k(s_0) \int_{s_0}^{\xi_2} y'(s) ds + k(l) \int_{\xi_2}^l y'(s) ds \\
&= k(s_0) \left[ y(\xi_2) - y(s_0) \right] + k(l) \left[ y(l) - y(\xi_2) \right] \\
&= y(\xi_2)[k(s_0) - k(l)], \text{ com } \xi_2 \in (s_0, l).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando (3.8) com as expressões obtidas em (3.9) e (3.10) e as condições (3.4) e (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^l k(s)y'(s) ds &= y(\xi_1)[k(0) - k(s_0)] + y(\xi_2)[k(s_0) - k(l)] \\
&= [y(\xi_1) - y(\xi_2)][k(0) - k(s_0)] \neq 0,
\end{aligned}$$

pois  $\xi_1 \in (0, s_0)$  e  $\xi_2 \in (s_0, l)$ . Mas isto contraria a Equação (3.7).

Portanto,  $\alpha$  não possui apenas dois vértices. Pelo Lema (3.3), sabemos que os pontos críticos da função curvatura ocorrem em pares, logo  $\alpha$  possui pelo menos quatro vértices. ■

## 4 *Curvas espaciais*

**Definição 4.1** Uma curva parametrizada diferenciável de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha$ , de classe  $C^\infty$ , de um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ . A variável  $t \in I$  é o parâmetro da curva, e o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado pelos pontos  $\alpha(t), t \in I$ , é o traço da curva

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

$t \in I$ , com  $x(t), y(t), z(t)$  funções diferenciáveis de classe  $C^\infty$ .

**Definição 4.2** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita plana se existe um plano de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $\alpha(I)$ .

A ideia de vetor tangente, curva regular e mudança de parâmetro para curvas espaciais seguem as mesmas considerações já vistas em curvas planas, assim introduziremos sem muitos comentários.

**Definição 4.3** (Vetor tangente): Seja  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  com  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . Logo

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

.

**Definição 4.4** (Curva regular): Para todo  $t \in I, \alpha'(t) \neq 0$ .

**Definição 4.5** (Reta tangente): A curva regular  $\alpha$  em  $t_0 \in I$ , é a reta que passa por  $\alpha(t_0)$  na direção de  $\alpha'(t_0)$  ou seja

$$g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0), r \in \mathbb{R}$$

.

**Definição 4.6** (Comprimento de arco): Seja  $\alpha(t), t \in I$  de uma regular de  $\mathbb{R}^3$ . O comprimento da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$$

.

**Definição 4.7** (Função comprimento de arco): A função da curva  $\alpha$  a partir de  $t_0$  é

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

..

As demonstrações das proposições 4.1 e 4.2 são similares às correspondentes da seção de curvas planas e podem ser encontradas em [22].

**Proposição 4.1** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, para todo  $t \in I$ ,  $|\alpha'(t)| = 1$ .

**Proposição 4.2** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e  $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Então, existe a função inversa de  $h$  de  $s$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$ , e  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Definição 4.8** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então a *curvatura* de  $\alpha$  em  $s \in I$  é o número real

$$k(s) = |\alpha''(s)|$$

**Proposição 4.3** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então,  $\alpha(I)$  é um segmento de reta se, e somente se,  $k(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ .

*Demonstração.*( $\Rightarrow$ ) Se  $\alpha(I)$  é um segmento de reta, então  $\alpha(s) = p + v \cdot s$ , onde  $p \in \mathbb{R}^3$  e  $v$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$ , portanto para todo  $s \in I$

$$\alpha'(s) = 0 + v \cdot 1 = v, \alpha''(s) = 0$$

$$k(s) = |\alpha'(s)| = 0$$

Reciprocamente, se  $|\alpha'(s)| = 0 = k(s)$ , para todo  $s \in I$  então  $\alpha''(s) = 0$

$\int \alpha''(s) ds = \alpha'(s) = v$  e  $|v| = 1$ .

$\int \alpha'(s) ds = \alpha(s) = p + v \cdot s$  cujo o traço é um segmento de reta. ■

**Definição 4.9** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $k(s) > 0$ . O vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$$

é denominado *vetor normal* a  $\alpha$  em  $s$ . A reta normal a  $\alpha$  em  $s_0 \in I$  é a reta que passa por  $\alpha(s_0)$  na direção do vetor normal  $n(s_0)$ .

Denotamos por  $t(s)$  o vetor unitário  $\alpha'(s)$ , temos que  $t(s)$  e  $n(s)$  são vetores ortonormais e

$$t'(s) = k(s)n(s)$$

**Definição 4.10**

O referencial ortonormal  $t(s), n(s), b(s)$  é o triedro de Frenet da curva  $\alpha$  em  $s$ . Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $k(s) > 0$ . O vetor binormal a  $\alpha$  em  $s$  é

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

O referencial ortonormal  $t(s), n(s), b(s)$  é o triedro de Frenet da curva  $\alpha$  em  $s$ .

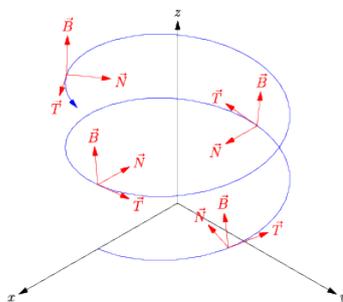


Figura 6: Triedro de Frenet.

Cada par de vetores do triedro de Frenet determina um plano. O plano de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $\alpha(s)$  e é normal a  $t(s)$  é o plano normal à curva  $\alpha$  em  $s$ . O plano que contém  $\alpha(s)$  e é normal a  $b(s)$  é denominado plano osculador, e o plano que contém  $\alpha(s)$  e é normal a  $n(s)$  é o plano retificante da curva  $\alpha$  em  $s$ .

**Definição 4.11** O número real  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é denominado torção da curva em  $s$ .

**Proposição 4.4** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular de parâmetro  $t$  e  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco, isto é,  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ , para todo  $t \in I$ . Sejam  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$  a curvatura e a torção de  $\beta$  em  $s \in J$ , então

$$k(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

*Demonstração.* Como  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ , derivando  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$  em relação a  $t$  temos que:

$$\frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \alpha'(t). \quad (4.1)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\beta}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} &= \alpha''(t), \\ \frac{d^2\beta}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} &= \alpha''(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Fazendo  $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$  obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \times \left[ \frac{d^2\beta}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \right], \\ &= \left( \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right) \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + \left( \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d\beta}{ds} \right) \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right), \\ &= \left( \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right) \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^3. \end{aligned}$$

Lembrando que  $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$ , segue que:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \left( \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right) \cdot \|\alpha'(t)\|^3.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| &= \|\alpha'(t)\|^3 \cdot \left\| \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\|, \\ &= \|\alpha'(t)\|^3 \cdot \left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| \cdot \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\| \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Como  $\frac{d\beta}{ds} = t(s)$  e  $\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{dt}{ds} = k(s) \cdot n(s)$ , então  $\frac{d\beta}{ds}$  e  $\frac{d^2\beta}{ds^2}$  são ortogonais. Além disso,

$$\left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = \|t(s)\| = 1 \text{ e } \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\| = \|k(s) \cdot n(s)\| = \underbrace{\|k(s)\|}_{>0} \cdot \underbrace{\|n(s)\|}_{=1} = k(s).$$

Logo,  $\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \|\alpha'(t)\|^3 \cdot 1 \cdot k(s(t)) \cdot 1$  e, conseqüentemente,

$$k(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Agora, segue da 3ª fórmula de Frenet que

$$\frac{db}{ds}(s(t)) = \tau(s(t))n(s(t)).$$

Portanto,

$$\tau(s(t)) = \left\langle \frac{db}{ds}(s(t)), n(s(t)) \right\rangle. \quad (4.3)$$

Vamos encontrar as componentes da expressão acima obter a fórmula da torção.

Sabemos que  $n(s(t)) = \frac{1}{k(s(t))} \cdot \frac{d^2\beta}{ds^2}$ . Usando (4.2), obtemos:

$$n(s(t)) = \frac{1}{k(s(t))} \cdot \left[ \frac{\alpha''(t) - \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \right].$$

Como  $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$ , segue que:

$$n(s(t)) = \frac{1}{k(s(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|^2} \cdot \left[ \alpha''(t) - \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \right]. \quad (4.4)$$

Como  $\frac{d\beta}{ds}$  é o vetor tangente à  $\beta$  e  $\frac{d^2\beta}{ds^2}$  é paralelo ao vetor normal à  $\beta$ , então seguem de (4.1) e (4.2) que  $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$  é paralelo ao vetor binormal. Sendo  $b(s(t))$  um vetor unitário, concluímos que

$$b(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}.$$

Lembrando que

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle^{\frac{1}{2}},$$

segue que

$$b(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.5)$$

Derivando (4.5) em relação à  $t$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{db}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} &= \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha' \times \alpha'' \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot (\alpha'' \times \alpha'' + \alpha' \times \alpha''')}{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha' \times \alpha'' \rangle} \\ &- \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \frac{1}{2} \cdot \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha' \times \alpha'' \rangle^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \langle \alpha' \times \alpha''', \alpha' \times \alpha'' \rangle}{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha' \times \alpha'' \rangle}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{db}{ds} \cdot \|\alpha'(t)\| &= \frac{\alpha' \times \alpha'''}{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha' \times \alpha'' \rangle^{\frac{1}{2}}} \\ &- \frac{1}{2} \cdot \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha' \times \alpha'' \rangle^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \langle \alpha' \times \alpha''', \alpha' \times \alpha'' \rangle \cdot (\alpha' \times \alpha''). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{db}{ds} = \frac{\alpha' \times \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\| \cdot \|\alpha'\|} - \frac{\langle \alpha' \times \alpha''', \alpha' \times \alpha'' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^{\frac{3}{2}} \cdot \|\alpha'\|} \cdot (\alpha' \times \alpha''). \quad (4.6)$$

Substituindo (4.4) e (4.6) em (4.3), obtemos:

$$\begin{aligned} \tau(s(t)) &= \left\langle \frac{db}{ds}, n(s(t)) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\alpha' \times \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\| \cdot \|\alpha'\|} - \frac{\langle \alpha' \times \alpha''', \alpha' \times \alpha'' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^{\frac{3}{2}} \cdot \|\alpha'\|} \cdot (\alpha' \times \alpha'') \right. \\ &\quad \left. , \frac{1}{\|\alpha'\|^2 k(s(t))} \cdot \left[ \alpha''(t) - \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \right] \right\rangle \\ &= \frac{1}{k(s(t)) \cdot \|\alpha'\|^3 \cdot \|\alpha' \times \alpha''\|} \cdot \langle \alpha' \times \alpha''', \alpha'' \rangle \\ &- \frac{1}{k(s(t)) \cdot \|\alpha'\|^3 \|\alpha' \times \alpha''\|} \cdot \langle \alpha' \times \alpha''', \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \rangle \\ &- \frac{\alpha' \times \alpha''', \alpha' \times \alpha''}{k(s(t)) \|\alpha' \times \alpha''\|^3 \|\alpha'\|^3} \cdot \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha'' \rangle \\ &+ \frac{\langle \alpha' \times \alpha''', \alpha' \times \alpha'' \rangle}{k(s(t)) \cdot \|\alpha' \times \alpha''\|^3 \cdot \|\alpha'\|^3} \cdot \langle \alpha' \times \alpha'', \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \rangle. \end{aligned}$$

Segue de (4.1) que  $\alpha'(t) = \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ . Logo,  $\alpha'$  é paralelo à  $\frac{d\beta}{ds}$ .

Como  $\alpha' \times \alpha'''$  é ortogonal à  $\alpha'$ , então  $\alpha' \times \alpha'''$  é ortogonal à  $\frac{d\beta}{ds}$ . Analogamente,  $\alpha' \times \alpha''$  é ortogonal à  $\alpha'$  e, conseqüentemente,  $\alpha' \times \alpha''$  é ortogonal  $\frac{d\beta}{ds}$ .

Portanto,

$$\tau(s(t)) = \frac{1}{k(s(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|^3} \cdot \frac{\langle \alpha' \times \alpha''', \alpha'' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|}.$$

Como

$$k(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

segue que:

$$\begin{aligned}\tau(s(t)) &= \frac{\|\alpha'(t)\|^3}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \cdot \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3} \cdot \frac{\langle \alpha' \times \alpha''', \alpha'' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|}, \\ \tau(s(t)) &= \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.\end{aligned}$$

■

**Definição 4.12** Dado uma curva fechada simples  $\gamma(t)$  no espaço dizemos que um ponto  $p$  da curva é vértice, se  $\tau(p) = 0$ .

## 5 Uma variação do Teorema dos Quatro Vértices para curvas no espaço

No Capítulo 3, apresentamos o Teorema Dos Quatro Vértices para curvas fechadas simples, convexa e de classe  $C^3$ . Um questionamento natural, é se o Teorema dos Quatro Vértices é válido para curvas espaciais, lembrando que nesse caso, um vértice da curva corresponde um ponto de torção nula. Neste capítulo, mostraremos que a resposta é positiva para algumas curvas fechada na esfera. Para tanto, precisamos da projeção estereográfica apresentada a seguir.

Sejam  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  e  $P = (0, 0, 1)$ .

Vamos exibir uma aplicação  $\pi : S^2 - \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que é bijetora, contínua e tal que sua inversa  $\pi^{-1}$  também é contínua.

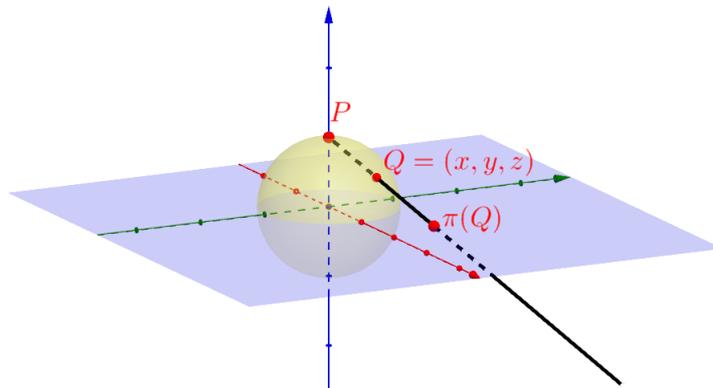


Figura 7: Projeção estereográfica.

Dado  $Q = (x, y, z) \in S^2 - \{P\}$ , seja  $r$  a semirreta de origem em  $P$  e que passa por  $Q$ . Definimos  $\pi(Q)$  como sendo a interseção dessa semirreta com o plano  $xy$ .

A equação da semirreta  $r$  é dada por:

$$r : (X, Y, Z) = (1 - t)P + tQ, \quad t \geq 0.$$

Parametricamente,

$$r : \begin{cases} X = (1 - t) \cdot 0 + tx = tx \\ Y = (1 - t) \cdot 0 + ty = ty \\ Z = (1 - t) \cdot 1 + tz \end{cases}, \quad t \geq 0.$$

Para determinarmos  $\pi(Q)$ , basta encontrarmos  $r \cap \mathbb{R}^2$ , ou seja, basta considerar

$Z = 0$  na equação paramétrica de  $r$ . Nesse caso,

$$\begin{aligned} (1-t) + tz &= 0, \\ t - tz &= 1, \\ (1-z)t &= 1, \\ t &= \frac{1}{1-z}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor desse parâmetro em  $r$ , obtemos:

$$\begin{cases} X = \frac{x}{1-z} \\ Y = \frac{y}{1-z} \\ Z = 0 \end{cases}.$$

Assim, fazemos a seguinte identificação:

$$\pi(Q) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Ou seja, estabelecemos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \pi : S^2 - \{P\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \end{aligned}$$

Como  $Q \neq P$ , então  $z \neq 1$  em todos os pontos de domínio de  $\pi$ , garantindo a continuidade desta função. A aplicação  $\pi$ , definida acima, recebe o nome de projeção estereográfica.

Para encontrarmos a inversa da aplicação  $\pi$ , usamos um raciocínio análogo. Consideramos a semirreta  $s$ , com origem em  $P$  e que passa pelo ponto  $Q = (x, y, 0)$  e, a seguir, tomamos sua interseção com a esfera  $S^2$ .

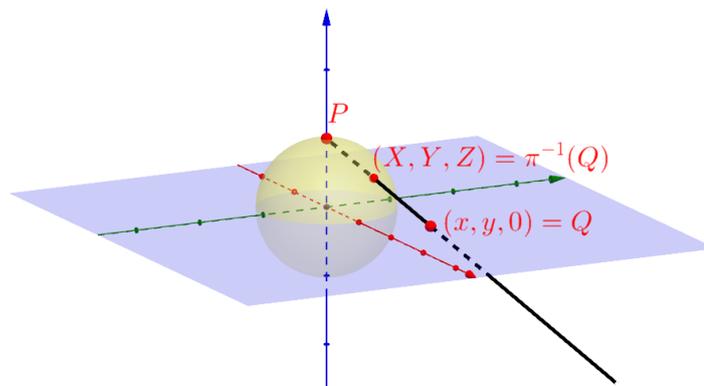


Figura 8: Inversa da projeção estereográfica.

A equação da semirreta  $s$  é dada por:

$$s : (X, Y, Z) = (1-t)P + tQ, \quad t \geq 0.$$

Já as equações paramétricas de  $s$  são dadas por:

$$s : \begin{cases} X = (1-t) \cdot 0 + tx = tx \\ Y = (1-t) \cdot 0 + ty = ty \\ Z = (1-t) \cdot 1 + t \cdot 0 = 1-t \end{cases}, \quad t \geq 0.$$

Para obter  $s \cap S^2$ , devemos ter:

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1, \\ t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 &= 1, \\ t^2x^2 + t^2y^2 + 1 - 2t + t^2 &= 1, \\ t^2(x^2 + y^2 + 1) &= 2t. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Temos que  $t \neq 0$ , pois caso contrário, teríamos  $\pi^{-1}(Q) = P$ . Assim, segue de (5.1) que:

$$\begin{aligned} t(x^2 + y^2 + 1) &= 2, \\ t &= \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor desse parâmetro em  $s$ , obtemos:

$$\begin{cases} X = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \\ Y = \frac{2y}{x^2+y^2+1} \\ Z = 1 - \frac{2}{x^2+y^2+1} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \end{cases}.$$

Assim, estabelecemos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 - \{P\} \\ (x, y) &\mapsto \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right), \end{aligned}$$

a qual também é contínua.

Para obtermos uma versão do Teorema dos Quatro Vértices para certas curvas contidas na esfera, iremos trabalhar com a inversa da projeção estereográfica discutida anteriormente:

$$(x, y) \rightarrow \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

A ideia é aplicarmos  $\pi^{-1}$  na curva plana  $\alpha = \alpha(s)$ , obtendo uma curva espacial  $\gamma$  cujas coordenadas são:

$$\gamma = \left( \frac{2x(s)}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1}, \frac{2y(s)}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1}, \frac{x(s)^2 + y(s)^2 - 1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right),$$

sendo  $\alpha(s)$  uma curva parametrizada por comprimento de arco e sob as hipóteses do teorema dos Quatro Vértices. A seguir, mostraremos que a projeção estereográfica leva um vértice da curva plana (ponto em que  $k' = 0$ ) em um ponto onde a torção é nula na curva contida na esfera, o qual corresponde a um vértice da curva espacial.

Sabemos que  $\tau_\gamma = 0$  se, e somente se, 
$$\begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Considerando que o vértice de  $\alpha$  está sob a origem, ou seja,  $x = y = 0$  temos:

$$\begin{aligned} X' &= \frac{2x'(s)}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} + 2x(s) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right), \\ Y' &= \frac{2y'(s)}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} + 2y(s) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right), \\ Z' &= \frac{2x(s)x'(s) + 2y(s)y'(s)}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} + (x(s)^2 + y(s)^2 - 1) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Notemos que  $\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) \Big|_{(0,0)} = 0$ .

Logo,

$$X'(0) = 2x'(0), Y'(0) = 2y'(0) \text{ e } Z'(0) = 0.$$

Cálculo de  $X''$ :

$$X'' = \frac{2x''(s)}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} + 4x'(s) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) + 2x(s) \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right).$$

Calculemos  $\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right)$ , levando em conta que  $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$ , pois a curva está parametrizada por comprimento de arco.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) &= \frac{d}{ds} \left( \frac{-(2x(s)x'(s) + 2y(s)y'(s))}{(x(s)^2 + y(s)^2 + 1)^2} \right) \\ &= \left( \frac{-(2 + 2x(s)x''(s) + 2y(s)y''(s))}{(x(s)^2 + y(s)^2 + 1)^2} \right) \\ &\quad + \left( \frac{2(2x(s)x'(s) + 2y(s)y'(s))}{(x(s)^2 + y(s)^2 + 1)^3} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) \Big|_{(0,0)} = -2.$$

Logo,  $X''(0) = 2x''(0)$ , e analogamente,  $Y''(0) = 2y''(0)$ . Finalmente, para o cálculo de  $Z''$ , temos:

$$\begin{aligned} Z'' &= \frac{2 + 2x(s)x''(s) + 2y(s)y''(s)}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \\ &+ 4(x(s)x'(s) + y(s)y'(s)) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) \\ &+ (x(s)^2 + y(s)^2 - 1) \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Assim temos  $Z''(0)=4$ .

Cálculo de  $X'''$ :

$$\begin{aligned} X''' &= \frac{2x'''(s)}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} + 6x''(s) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) \\ &+ 6x'(s) \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) + 2x(s) \frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Como

$$\frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) \Big|_{(0,0)} = 0$$

teremos que  $X'''(0) = 2x'''(0) - 12x'(0)$ , analogamente,

$$Y'''(0) = 2y'''(0) - 12y'(0)$$

Cálculo de  $Z'''$ :

$$\begin{aligned} Z''' &= \frac{2(x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s)) + 2(x(s)x'''(s) + y(s)y'''(s))}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} + \\ &6(x'(s)^2 + y'(s)^2 + x(s)x''(s) + y(s)y''(s)) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) + \\ &(x(s)^2 + y(s)^2 - 1) \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{x(s)^2 + y(s)^2 + 1} \right) + \end{aligned}$$

Logo,  $Z'''(0)=0$ . Desta forma,

$$\tau_\gamma = 0, \text{ se e somente se, } \begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{se e somente se, } \begin{vmatrix} 2x'(0) & 2y'(0) & 0 \\ 2x''(0) & 2y''(0) & 4 \\ 2x'''(0) - 12x'(0) & 2y'''(0) - 12y'(0) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{se e somente se, } x'(0)y'''(0) - y'(0)x'''(0) = 0$$

Mas sabemos que  $(x, y)$  é vértice da curva  $\alpha$ , logo

$$k_\alpha = x''y' - y''x' \Rightarrow k'_\alpha = x'''y' + x''y'' - y'''x' - y''x'' = 0 \Rightarrow x'''y' - y'''x' = 0$$

O que mostra que um vértice da curva é levado pela projeção estereográfica num ponto de torção nula que corresponde ao vértice de uma curva no espaço.

Cabe observar que o Teorema dos Quatro Vértices para curvas espaciais, ao contrário do caso de curvas planas, não é válido para todas as curvas regulares fechadas simples. Um exemplo poder ser dado pela curva no toro parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(t) \\ y(t) = r \sin(t) \\ z(t) = r \sin(3t) \end{cases}, \text{ com } r = a + \cos(3t), \frac{19}{8} < a < 10,$$

cuja torção nunca se anula. Pode-se observar na Figura 9 que esta curva não é convexa.

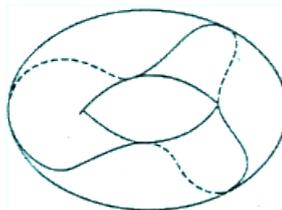


Figura 9: Curva na superfície do toro.

Entretanto, [25] mostrou o seguinte resultado para curvas espaciais:

**Teorema 5.1** Se  $\gamma = \gamma(t)$  é uma curva no espaço, fechada, simples e convexa, então  $\gamma$  possui pelo menos quatro vértices.

## 6 *Considerações finais*

A matemática desempenha um papel de fundamental importância nos âmbitos da sociedade, desde uma simples compra de um produto, até as mais complexas situações cotidianas, e ao se aprofundar nos conceitos matemáticos, não deve ser somente como pré-requisitos para estudo posteriores, mas sim para a construção e formação do cidadão. A realização deste trabalho, e o

Neste trabalho tínhamos como objetivo principal conhecer uma extensão do Teorema dos Quatro Vértices para uma curva no espaço contida na superfície da esfera e foi possível atingi-lo, porém para que se concluísse foi necessário fazer uma grande revisão literária, onde buscamos conceitos teóricos às disciplinas de Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e a grande parte em Geometria Diferencial.

É importante destacar que foi possível compreender conceitos preliminares para o estudo de curvas e interpretar curvas planas no âmbito da Geometria Diferencial. Através dos estudos e revisões embasados no [9] trouxemos uma demonstração do Teorema dos Quatro Vértices para o plano, e posteriormente estudamos a generalização dos conceitos de curvas planas para curvas no espaço. Desta forma aplicamos a projeção Estereográfica no Teorema dos Quatro Vértices e então projetamos pontos de torção nula onde correspondiam os vértices nas curvas espaciais e assim então alcançando o que se foi proposto.

# Referências

- [1] CARNEIRO, M. J.; GARCIA, R. O Teorema dos quatros vértices e sua recíproca. Rio de Janeiro: VIII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2017. Disponível em: <<http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/tqv.pdf>>. Acesso em: 17 Nov. 2019
- [2] ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. S. **Geometria Diferencial das Curvas no  $\mathbb{R}^2$** . Rio de Janeiro: SBM, 2020.
- [3] RONEY, A. **A História da Matemática**: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.
- [4] COIMBRA, J. R. **Uma Introdução à Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: SBM, 2008. Disponível em: <<https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2016/06/Introducao-a-Geometria-Diferencial-Ronaldo-Freire-Lima.pdf>>. Acesso em: 17 Nov. 2019
- [5] ROQUE, T; CARVALHO, J .B., **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [6] GLUCK, H. The converse to the four vertex theorem. **Enseign. Math.** (2), 17:295-309, 1971.
- [7] DAHLBERG, B. E. J. The converse of the four vertex theorem. **Proc. Amer. Math. Soc.** 133(7):2131-2135, 2005.
- [8] MUKHOPADHYAYA, S. New methods in the geometry of a plane arc. I. **Bull. Calcutta Math. Soc.**, 1:31-37, 1909.
- [9] CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [10] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.
- [11] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol.1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2008.
- [12] LIMA, E. L. **Análise Real**. Vol.1. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [13] THOMAS, G. B. **Cálculo**. Vol.1. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

- [14] CARMO, M. Pesquisa em Geometria Diferencial no Brasil. Rio de Janeiro: Matemática Universitária nº 26/27, 1999. Disponível em: <[https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n26\\_n27\\_Artigo01.pdf](https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n26_n27_Artigo01.pdf)>. Acesso em: 17 Nov. 2019
- [15] BLASCHKE, W. Die Minimalzahl der Scheitel einer geschlossenen konvexen Kurve. **Rend. Circ. Mat. Palermo**, 36:220-222, 1913.
- [16] BONNET, O. Remarques sur quelques intégrales définies. **J. Math. Pures Appl.**, Ser. 1, 14:249-256, 1849.
- [17] CHERN, S. S. Curves and surfaces in Euclidean space. In Studies in Global Geometry and Analysis. **Math. Assoc. Amer.** 16-56, 1967.
- [18] GUGGENHEIMER, H. Notes on geometry. **Arch. Math.**, 5:125-130, 1969.
- [19] HAYASHI, T. Some geometrical applications of Fourier series. **Rend. Circ. Mat. Palermo**, 50:96-102, 1926.
- [20] HOBSON, E. W. On the second mean-value theorem of the integral calculus. **Proc. Lond. Math. Soc.** (2), 7:14-23, 1909.
- [21] KNESER, A. Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nichteuklidischen Geometrie. H. Weber - Festschrift, 170-180, 1912.
- [22] MOHRMANN, H. Die Minimalzahl der Scheitel einer geschlossenen konvexen Kurve. **Rend. Circ. Mat. Palermo**, 37: 267-268, 1914.
- [23] OSSERMAN, R. The four-or-more vertex theorem. **Amer. Math. Monthly**, 92(5):332-337, 1985.
- [24] CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; SILVA, R. **Metodologia Científica**. 6.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.
- [25] SEDYKH, V.D. Four vertices of a convex space curve. **Bull. London Math. Soc.**, v. 26, pp. 177-180, 1994.