

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS - UNIFAL-MG

EDMARA VIANA DA SILVA

**UM ESTUDO DA TEORIA DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES**

ALFENAS, MG

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS - UNIFAL-MG

EDMARA VIANA DA SILVA

**UM ESTUDO DA TEORIA DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado por exigência para obtenção do título de licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Equações Diferenciais Ordinárias. Orientador: Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos.

ALFENAS, MG

2022

*Ao Barney (meu gatinho) por me
fazer companhia todas as noites
que passei acordada estudando.*

Agradecimentos

Começarei agradecendo a minha querida mãe, Maria Aparecida por sempre me dar apoio em cada escolha que fiz ao longo da minha vida, e por sempre me encorajar a ir atrás dos meus sonhos.

Agradeço a todos os professores que passaram pela minha vida e contribuíram de alguma forma para minha formação e para a pessoa que sou hoje. Em especial quero agradecer ao professor Anderson José, meu primeiro orientador na universidade, foi graças a ele que eu me interessei pela pesquisa em matemática e fui descobrindo que poderia ser uma cientista (meu sonho de criança).

Agradeço a todos os amigos que estiveram comigo ao longo destes anos, em especial, Diego, Fernanda Taranto, Letícia, Luis, Mariana, Nikolas, Ronaldo e Valéria. Agradeço também ao meu amigo Clodoaldo, por todas as nossas conversas filosóficas na cozinha, elas sempre foram muito benéficas para mim. Não posso deixar de agradecer minha família da república Pulo do Gato, Jéssica, Lino, Mateus e Marco, vocês fizeram meus dias mais felizes em Alfenas, levarei vocês sempre em meu coração.

Agradeço também aos dois melhores amigos que a matemática me deu, Mesek Felipe e Matheus Felipe que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e me dando forças para continuar. Em especial quero agradecer ao Mesek, pelo apoio na construção do meu conhecimento matemático, por cada dia naquela biblioteca calorosa estudando cálculo e geometria, você foi uma das minhas inspirações dentro do curso, meus sinceros agradecimentos.

Por fim, agradeço ao meu orientador José Paulo, pelos conhecimentos compartilhados, pela dedicação e esforço em estar sempre me ajudando, por toda a paciência que teve comigo e por todos os ensinamentos de vida que me foi passado.

A todos vocês, muito obrigada!

Resumo

O presente trabalho expõe os estudos feitos sobre os principais teoremas da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias. O foco será a apresentação dos resultados de existência e unicidade de solução, dependência contínua em relação aos dados iniciais e o teorema de prolongamento de solução. Apresentaremos também um estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio dos sistemas lineares que será necessário para o entendimento do Teorema de Hartmann-Globman utilizado para o estudo da estabilidade local dos pontos de equilíbrio de um modelo do tipo SIR. Também apresentaremos o Teorema de Poincaré-Bendixon que será utilizado para o estudo da estabilidade global dos pontos de equilíbrio do mesmo modelo. O trabalho foi dividido em duas partes. Na primeira parte, apresentamos os conceitos de estabilidade de sistemas lineares e os teoremas fundamentais da teoria das equações diferenciais ordinárias. Na segunda parte, descrevemos os modelos matemáticos e analisamos o modelo compartimentado SIR, muito utilizado para o estudo de problemas epidemiológicos. Além disso, apresentamos também o estudo feito acerca de trabalhos que utilizaram o modelo SIR para compreender como o vírus da COVID-19 se comportaria ao longo do tempo em determinada população.

Palavras-chave: COVID-19; Estabilidade de Liapunov; Modelos epidemiológicos; Teoremas de existência.

Abstract

The present work exposes the studies done on the main theorems of the Theory of Ordinary Differential Equations. The focus will be the presentation of the existence and uniqueness solution, continuous dependence on the initial data and the solution extension theorem. We will also present a study of the stability of the equilibrium points of linear systems that will be necessary for the understanding of the Hartmann-Globman Theorems used for the study of the local stability of the equilibrium points of a SIR model. We will also present the Poincaré-Bendixon Theorem that will be used to study the global stability of equilibrium points of the same model. The work was divided into two parts. In the first part, we present the concepts of stability of linear systems and the fundamental theorems of the theory of ordinary differential equations. In the second part, we describe the mathematical models and analyze the SIR compartmentalized model, widely used for the study of epidemiological problems. In addition, we also present the study carried out on works that used the SIR model to understand how the COVID-19 virus would behave over time in a given population.

Keywords: COVID-19; Liapunov stability; Epidemiological models; Existence theorems.

Sumário

1	Introdução	8
2	Estabilidade de sistemas lineares	11
2.1	Sistemas planares	11
2.2	Comentários sobre linearização	14
2.3	A matriz exponencial	18
2.4	Forma Canônica de Jordan	31
2.5	O fluxo de uma equação linear e atratores	36
3	Teoremas fundamentais da teoria de EDOs	42
3.1	Teorema de existência e unicidade	42
3.2	Continuidade das soluções em relação as condições iniciais	50
3.3	Teorema do prolongamento de solução	51
3.4	Uma noção sobre sistema dinâmicos e alguns teoremas importantes da teoria de estabilidade	54
3.4.1	Teorema de Hartman-Grobman	56
3.4.2	Poincaré-Bendixson	57
4	Aplicações em modelos epidemiológicos	60
4.1	O que é um modelo matemático?	60
4.2	O Modelo de Kermack-McKendrick	60
4.3	Parâmetro de reprodução R_0	62
4.3.1	Proporção crítica de vacinação	67
4.3.2	Estabilidade local dos equilíbrios do modelo SIR	68
4.4	Estabilidade global	71
4.4.1	Estabilidade global do equilíbrio livre de doença	71
4.4.2	Estabilidade global do equilíbrio endêmico	72
4.5	Modelo SIR para modelagem da COVID-19	74
5	Considerações finais	77
	Referências Bibliográficas	78

Capítulo 1

Introdução

Os estudos sobre as equações diferenciais ordinárias tiveram o seu início a partir do século XVII, logo após o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz [1]. A motivação de Newton para o desenvolvimento do cálculo foi sua aplicação para os seus estudos sobre os princípios básicos da mecânica, que forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Leonhard Euler.

Já Leibniz, segundo [1], estabeleceu a notação dy/dx representando as derivadas, além disso, ele generalizou o método de resolução de equações diferenciais por variáveis separáveis, redução de equações homogêneas à equações de variáveis separáveis e o método para resolução de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Além desses métodos, ele contribuiu para a resolução de muitos outros problemas, através de correspondência com os irmãos Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli, tais irmãos contribuíram para a área de equações diferenciais ordinárias, desenvolvendo métodos para resolver equações diferenciais e para ampliar o campo de suas aplicações.

De acordo com [1], Leonhard Euler auxiliou no desenvolvimento da teoria sobre equações diferenciais ordinárias identificando a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas, aprofundando os conceitos de fator integrante, encontrando e estendendo a solução geral de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes para equações não homogêneas. Ainda, Euler propôs o uso de séries de potências e de métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais.

Outro matemático que contribuiu para o avanço no campo das equações diferenciais foi Joseph-Louis Lagrange, que segundo [1] mostrou que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções linearmente independentes. Ele também desenvolveu completamente o método de variação dos parâmetros que consiste em tomar uma solução para equação linear homogênea e substituir o parâmetro constante por uma variável, determinando uma solução particular para a equação não homogênea.

Temos também, Pierre-Simon de Laplace que se destacou por seus trabalhos com

mecânica celeste e por desenvolver métodos para os problemas que envolviam equações diferenciais. É possível citar seu estudo com a equação de Laplace e com a relação que essa equação possui com a gravitação. Por fim cita-se o desenvolvimento do método da transformada de Laplace, que permite obter a solução de uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes através da resolução de uma equação algébrica.

Quanto ao desenvolvimento da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, temos que ela surgiu no final do século XIX, e nos permite estudar os sistemas de equações diferenciais pelo retrato de fase analisando de forma global a família de soluções, e de acordo com [2], essa teoria teve como pioneiro Henri Poincaré, o qual utilizou a teoria para estudar alguns problemas de dinâmica celeste. Outro problema que atraiu o foco para o estudo qualitativo de equações diferenciais foi o comportamento caótico das equações de Lorenz.

Esta teoria das equações diferenciais nascida nos problemas de mecânica celeste obteve uma evolução de abrangência a ponto de servir para modelar problemas biológicos. Em especial, a teoria qualitativa auxiliou na formulação de um modelo matemático que descreva uma propagação temporal, como no caso da epidemiologia, na qual é muito comum o uso de equações diferenciais, uma vez que elas representam taxas de variação. De acordo com [3] e [4], em 1798 Thomas Malthus tentou modelar o crescimento populacional, e para isso, ele utilizou as equações diferenciais, e sua equação até hoje é usada para modelar o crescimento de populações pequenas.

A utilização de modelos matemáticos na Epidemiologia, é quase tão antiga quanto na Física. Embora em 1760, Daniel Bernoulli tenha usado um método matemático para avaliar os efeitos da técnica da variação no controle da epidemia de varíola, o desenvolvimento de modelos matemáticos aplicados a fenômenos epidemiológicos mais amplos ficou limitado pelas restrições intrínsecas a ausência de conhecimento médico sobre os agentes causadores das infecções, segundo [4]. Deste modo somente a partir do nascimento da bacteriologia e da descoberta dos vírus no século XIX é que foi possível identificar os causadores das doenças infecciosas e conseqüentemente, aplicar modelos matemáticos mais gerais e mais próximos da realidade.

Em 1906, Hamer postulou que o desenvolvimento de uma epidemia depende da taxa de contato entre indivíduos suscetíveis e infecciosos. Este postulado, hoje conhecido como o princípio de ação de massas, se tornou o mais importante conceito da epidemiologia matemática. O primeiro modelo que incorpora ferramentas matemáticas em epidemiologia para descrever a propagação de uma doença infecciosa ao longo do tempo em uma população foi proposto em 1927, por Kermack e McKendrick [5] e é denominado modelo SIR (Suscetível, Infectados e Recuperados/Removidos). Eles estenderam a teoria com a teoria do limiar, estabelecendo que a introdução de indivíduos infecciosos em uma comunidade não pode levar a um surto endêmico a menos que a densidade de indivíduos suscetíveis esteja acima de um certo valor crítico. Este princípio, em conjunto com o princípio de

ação das massas, constitui a base da epidemiologia matemática moderna, segundo [4].

De acordo com os conceitos históricos apresentados e pela breve apresentação do desenvolvimento da literatura da teoria de equações diferenciais, nota-se que esta teoria tem uma profunda conexão com aplicações em outras áreas do conhecimento tais como, Física e Biologia. Em particular, a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias é uma ferramenta importante para o estudo de modelos matemáticos que decorrem de fenômenos biológicos.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho foi desenvolver um estudo dos principais resultados da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias e como eles podem ser aplicados no estudo de problemas do mundo real, desta maneira o desenvolvimento do trabalho ganha organicidade da seguinte forma: no primeiro capítulo serão apresentados os conceitos sobre equações diferenciais ordinárias lineares, dando foco as condições que caracterizam quando um ponto de equilíbrio de um sistema linear é um atrator.

No segundo capítulo, serão apresentados os resultados de existência e unicidade, dependência contínua em relação aos dados iniciais, prolongamento de solução, além de enunciar os teoremas de Hartman Grobman e o de Poincaré Bendixson com o interesse nas suas aplicações, por isso as demonstrações destes resultados foram omitidas, pois se tratam de temas estudados em cursos mais avançados na pós-graduação.

No terceiro capítulo, será apresentada a aplicação da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias em modelos epidemiológicos. Por fim, serão apresentadas as considerações finais do trabalho desenvolvido.

Capítulo 2

Estabilidade de sistemas lineares

Neste capítulo serão apresentados conceitos relevantes sobre sistemas de equações diferenciais, bem como os principais resultados da teoria de sistemas lineares e exemplos para compreensão de alguns dos principais resultados estudados. Para a elaboração deste capítulo, foram utilizadas como principais referências [6], [7], [8] e [9].

2.1 Sistemas planares

Inicialmente será apresentada a definição de um sistema de equações diferenciais, bem como apresentar uma conexão de uma equação bidimensional com uma equação de segundo grau, além de apresentar um exemplo que descreve o uso dessas equações.

Definição 2.1.1 *Um sistema de equações diferenciais é um conjunto de n equações diferenciais interligadas, como mostra (2.1)*

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Nesta situação, as funções f_j , onde $1 \leq j \leq n$ são funções a valores reais de $n + 1$ variáveis reais, x_1, x_2, \dots, x_n e t . Sempre assumiremos que as funções f_j são de classe C^∞ , a menos que esteja especificado de outra maneira. Isso significa, que as derivadas parciais de todas as ordens de f_j existem e são contínuas.

Uma maneira de simplificar a notação do sistema (2.1) é usando a notação vetorial, deste modo, tem-se

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

assim, o sistema pode ser escrito de uma forma mais resumida, como:

$$x'(t) = F(t, x), \quad (2.2)$$

onde:

$$F(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Uma solução para esse sistema, será uma função da forma $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ que satisfaz a equação (2.2) onde: $x'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$.

Um sistema de equações diferenciais é chamado de autônomo se nenhuma das f_j depende de t , nessa situação o sistema se escreve como $x' = F(x)$.

Neste trabalho, denotaremos as variáveis reais por letras minúsculas, as funções com valores reais também serão denotadas por letras minúsculas, e em alguns casos, também denotaremos vetores por letras minúsculas. Já as letras maiúsculas serão utilizadas para valores vetoriais de funções, e para matrizes. E o espaço euclidiano de n -dimensional será denotado por \mathbb{R}^n .

As equações diferenciais são muito importantes para várias ciências, como Engenharia, Biologia, Economia, entre outras. E as equações diferenciais mais utilizadas são as de segunda ordem, pois possuem uma ampla aplicabilidade na modelagem de problemas, um exemplo dessa aplicabilidade será apresentado a seguir no problema do oscilador harmônico.

Uma equação de segunda grau homogênea pode ser representada da seguinte forma:

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0.$$

Além disso, temos também as equações diferenciais autônomas, que são equações que não dependem explicitamente de t . Um sistema autônomo em \mathbb{R}^2 , pode ser escrito como

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y), \end{aligned} \quad (2.3)$$

que também pode ser representado pela notação abreviada $X' = F(x, y)$ e

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)). \quad (2.4)$$

Considerando o lado direito da equação (2.4), definimos um campo vetorial em \mathbb{R}^2 , ou seja, pensamos em $F(x, y)$ representando um vetor cujas componentes x e y são $f(x, y)$ e $g(x, y)$, respectivamente.

Como foi mencionado anteriormente, a aplicabilidade das equações diferenciais no problema do oscilador harmônico, vamos agora descrevê-lo no exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.1 *O problema do oscilador harmônico, utiliza de equações diferenciais de segunda ordem linear com coeficiente constante para modelar o movimento de uma massa presa a uma mola.*

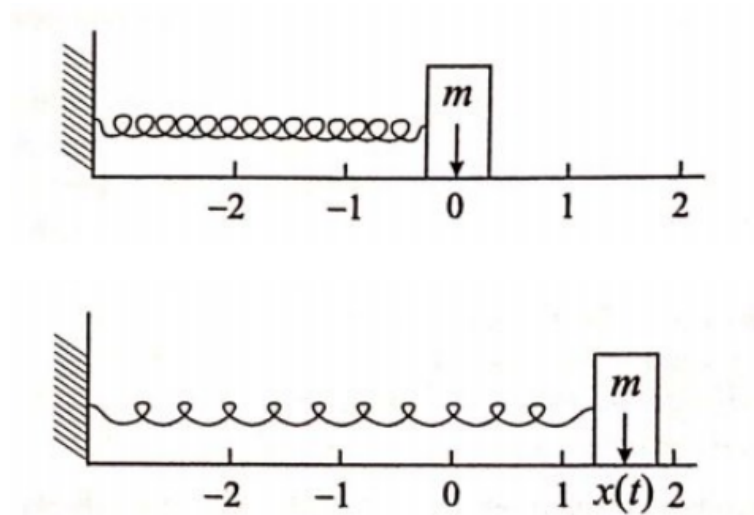


Figura 2.1: A mola em posição de equilíbrio e a mola estendida além do equilíbrio.

Fonte: [7]

A mola é fixada a uma parede vertical e a massa pode deslizar ao longo de uma trilha horizontal. O x denota o deslocamento da massa de seu local de repouso (com $x > 0$ se a mola é esticada e $x < 0$ se a mola é comprimida). Assim, a velocidade da massa em movimento é $x'(t)$ e a aceleração é $x''(t)$. A mola exerce uma força proporcional a $x(t)$, além disso, há uma força de atrito proporcional a $x'(t)$ na direção oposta ao movimento.

Para esse sistema há três parâmetros: $m > 0$ que representa a massa do oscilador, $b \geq 0$ é a constante de amortecimento e $k > 0$ é a constante da mola. Segundo as leis de Newton, a força que atua no oscilador é igual a massa vezes a aceleração, deste modo a equação diferencial para o oscilador harmônico amortecido será dada como:

$$mx'' + bx' + kx = 0.$$

No caso em que $b = 0$, o oscilador é dito não amortecido, caso contrário, temos um oscilador harmônico amortecido. Temos assim um exemplo de equação diferencial homogênea, linear, de coeficiente constante e de segunda ordem. Deste modo, a equação para o oscilador harmônico é descrita em forma de sistema como, $X' = F \cdot X$, em que:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Normalmente o movimento do sistema massa-mola pode ser submetido a uma força externa (como mover a parede vertical para frente e para trás periodicamente). Essa força externa na maioria das vezes depende apenas do tempo, não da posição, então temos um sistema mais geral para o oscilador harmônico forçado:

$$mx'' + bx' + kx = f(t),$$

onde $f(t)$ representa a força externa. Assim, obtemos uma equação não autônoma e não linear de segunda ordem.

2.2 Comentários sobre linearização

Nesta seção vamos introduzir através de uma conta heurística a importância dos sistemas de equações diferenciais lineares para o estudo qualitativo dos sistemas de equações diferenciais não lineares. O resultado sobre linearização será formalmente apresentado no Capítulo 3, através do Teorema 3.4.1.

A linearização é uma forma de se obter informações sobre o comportamento das soluções perto de um ponto de equilíbrio, ressaltamos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema $X' = F(t, X)$, se temos que $F(t, x_0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sendo assim, se (x^*, y^*) é um ponto de equilíbrio, consideramos a perturbação de uma solução a partir de uma condição próxima ao ponto de equilíbrio $(x(\tau), y(\tau))$, deste modo, definimos as funções

$$\begin{aligned} u(\tau) &= x(\tau) - x^*, \\ v(\tau) &= y(\tau) - y^*. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Observe que $u(\tau)$ e $v(\tau)$ são funções de τ , mas não são necessariamente não negativas, isto é, o sinal de subtração não indica os sinais das respectivas funções. Deste modo, escrevendo (2.5) da seguinte forma, $x(\tau) = u(\tau) + x^*$, $y(\tau) = v(\tau) + y^*$, e substituindo em (2.3) suas respectivas derivadas, obtemos

$$\begin{aligned} u' &= f(u + x^*, v + y^*), \\ v' &= g(u + x^*, v + y^*). \end{aligned}$$

Como supomos que f e g são de classe C^∞ , poderemos expandir elas em uma série de

Taylor próximas do ponto (x^*, y^*) . Assim, a expansão é da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(u + x^*, v + y^*) &= f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)u(\tau) + f_y(x^*, y^*)v(\tau) + f_{xx}(x^*, y^*)u^2(\tau)/2 \\ &\quad + f_{xy}(x^*, y^*)u(\tau)v(\tau) + f_{yy}(x^*, y^*)v^2(\tau)/2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(u + x^*, v + y^*) &= g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)u(\tau) + g_y(x^*, y^*)v(\tau) + g_{xx}(x^*, y^*)u^2(\tau)/2 \\ &\quad + g_{xy}(x^*, y^*)u(\tau)v(\tau) + g_{yy}(x^*, y^*)v^2(\tau)/2 + \dots \end{aligned}$$

Os coeficientes das segundas derivadas parciais são u^2 , uv e v^2 , logo se as perturbações forem pequenas, na escala de ε , isto é, se $u \approx 0$ e $v \approx 0$ então os termos das derivadas de segunda ordem serão ainda menores, logo podemos ignorá-los. Por isso,

$$\begin{aligned} u' &\approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)u(\tau) + f_y(x^*, y^*)v(\tau), \\ v' &\approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)u(\tau) + g_y(x^*, y^*)v(\tau). \end{aligned}$$

Como (x^*, y^*) é um ponto de equilíbrio, $f(x^*, y^*) = 0$ e $g(x^*, y^*) = 0$, e assim temos a seguir o sistema linearizado dado por (2.6),

$$\begin{aligned} u' &= f_x(x^*, y^*)u(\tau) + f_y(x^*, y^*)v(\tau), \\ v' &= g_x(x^*, y^*)u(\tau) + g_y(x^*, y^*)v(\tau). \end{aligned} \tag{2.6}$$

O sistema linearizado (2.6) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} u' &= au(\tau) + bv(\tau), \\ v' &= cu(\tau) + dv(\tau), \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde a, b, c, d são constantes. O sistema (2.7) é um sistema linear bidimensional homogêneo, ou seja, ele possui duas dimensões.

O equilíbrio de sistemas lineares bidimensionais são soluções para o sistema linear de equações:

$$\begin{aligned} au(\tau) + bv(\tau) &= 0, \\ cu(\tau) + dv(\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Tais sistemas sempre têm $(0, 0)$ como solução. O equilíbrio $(0, 0)$ é o único equilíbrio

se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

é invertível, ou seja, $\det(A) \neq 0$. Assumiremos que esta condição se mantém, porque se não, existirá uma continuidade de equilíbrios.

Se assumirmos que $ad - bc \neq 0$, a matriz A é obtida da linearização e é uma matriz Jacobiana avaliado em um equilíbrio (x^*, y^*) , a condição $\det(A) \neq 0$ significa que o equilíbrio está isolado, ou seja, há um disco em torno dele que não contém outros equilíbrios.

Procurando soluções exponenciais do sistema linearizado (2.7), definimos

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \bar{u}e^{\lambda\tau} \\ v(\tau) &= \bar{v}e^{\lambda\tau}, \end{aligned}$$

onde \bar{u} e \bar{v} são constantes diferentes de zero, e $\lambda \in \mathbb{R}$ representa uma constante de integração.

Substituindo no sistema e cancelando $e^{\lambda\tau}$, obtém-se o seguinte sistema para \bar{u} e \bar{v} :

$$\begin{aligned} a\bar{u} + b\bar{v} &= \lambda\bar{u}, \\ c\bar{u} + d\bar{v} &= \lambda\bar{v}. \end{aligned}$$

Este é um sistema linear homogêneo para \bar{u} e \bar{v} . Queremos que este sistema tenha uma solução diferente de zero, uma vez que as suas perturbações devem ser diferentes de zero. Isso só poderá acontecer se o determinante do sistema for zero, então temos

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Expandindo o determinante $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$, obtém-se a equação característica do sistema linearizado:

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0,$$

onde $p = a + d = \text{Tr}(A)$ e $q = ad - bc = \det(A)$. Assim, p é o traço e q é o determinante da matriz Jacobiana. As soluções da equação característica são chamados de autovalores da matriz Jacobiana.

Dado esses autovalores, há três casos para a solução do sistema de perturbações (2.7):

1. Os autovalores λ_1 e λ_2 do Jacobiano são reais e distintos. Neste caso, a solução do

sistema (2.7) é dada por:

$$\begin{aligned}u(\tau) &= C_1 e^{\lambda_1 \tau} + C_2 e^{\lambda_2 \tau}, \\v(\tau) &= C_3 e^{\lambda_1 \tau} + C_4 e^{\lambda_2 \tau},\end{aligned}$$

onde C_1, \dots, C_4 são constantes arbitrárias. Neste caso, $u \rightarrow 0$ e $v \rightarrow 0$ se, e somente se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$.

2. Os autovalores λ_1 e λ_2 do Jacobiano são reais e iguais. Neste caso, diremos $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ e assim a solução do sistema (2.7) é dada por

$$\begin{aligned}u(\tau) &= C_1 e^{\lambda \tau} + C_2 \tau e^{\lambda \tau}, \\v(\tau) &= C_3 e^{\lambda \tau} + C_4 \tau e^{\lambda \tau},\end{aligned}$$

onde C_1, \dots, C_4 são constantes arbitrárias. Neste caso, $u \rightarrow 0$ e $v \rightarrow 0$ se, e somente se $\lambda < 0$.

3. Os autovalores $\lambda_1 = \xi + \eta_i$ e $\lambda_2 = \xi - \eta_i$ do Jacobiano são conjugados complexos. Neste caso, a solução real do sistema (2.7) é dado por

$$\begin{aligned}u(\tau) &= C_1 e^{\xi \tau} \sin \eta \tau + C_2 e^{\xi \tau} \cos \eta \tau, \\v(\tau) &= C_3 e^{\xi \tau} \sin \eta \tau + C_4 e^{\xi \tau} \cos \eta \tau,\end{aligned}$$

onde C_1, \dots, C_4 são constantes arbitrárias. Neste caso, $u \rightarrow 0$ e $v \rightarrow 0$ se, e somente se $\xi < 0$, ou seja, os autovalores têm parte real negativa.

O resultado anterior pode ser resumido por meio do seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 [8] *Assuma que J seja uma matriz 2×2 com entradas constantes e $\det(J) \neq 0$. Assuma que J foi obtido como uma linearização em torno do equilíbrio (x^*, y^*) . Então, o equilíbrio (x^*, y^*) é localmente assintoticamente estável se, e somente se*

$$\text{Tr}(J) < 0 \quad \text{e} \quad \det(J) > 0.$$

O equilíbrio (x^, y^*) é instável se, e somente se,*

$$\text{Tr}(J) > 0 \quad \text{ou} \quad \det(J) < 0.$$

A Figura 2.2 representa o retrato de fases referente ao Teorema 2.2.1. Dependendo dos valores do $\text{Tr}(J)$ e do $\det(J)$ temos a seguinte configuração para o diagrama de fase.

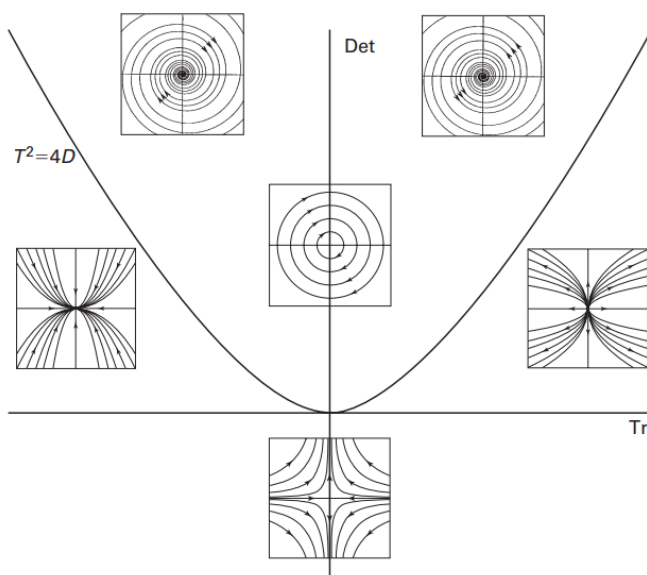


Figura 2.2: Retrato de fases dos casos 1, 2 e 3.
Fonte: O autor.

2.3 A matriz exponencial

Nesta seção vamos estudar sobre a exponencial de matriz, pois $e^{tA}x_0$ é a solução do sistema $x' = Ax$, onde A é uma matriz de dimensão $n \times n$. Mas para chegar na exponencial da matriz, é preciso possuir alguns conhecimentos básicos sobre espaços vetoriais normados, norma do espaço de matriz e série convergente de matriz, para que assim, se possa compreender a definição de exponencial de matriz.

Seja $M(n)$ o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas reais, esse conjunto é um espaço vetorial. O elemento neutro da operação de soma em $M(n)$ é a matriz nula dada por

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

também temos a multiplicação por escalar real. Além dessas operações temos a multiplicação entre matrizes. No espaço $M(n)$ o elemento neutro para a multiplicação entre matrizes é a matriz identidade

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz diagonal cujas entradas na diagonal principal são iguais a 1. Por fim, o espaço $M(n)$, admite elemento inverso para algumas matrizes, neste caso diremos que a matriz B é a inversa da matriz A se vale as igualdades a seguir, $BA = I = AB$, denotamos

a inversa de A por A^{-1} . O espaço vetorial das matrizes $n \times n$, pode ser identificado como o espaço \mathbb{R}^{n^2} .

E como existem muitas possibilidades de normas no espaço $M(n)$, vamos assumir a norma mais conveniente, que é a do supremo, já que essa norma é equivalente a norma de \mathbb{R}^{n^2} .

Sendo assim, definimos a norma do supremo para o operador por,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

E, para que a expressão anterior defina uma norma é necessário observar que o supremo deve ser finito.

Tal norma se comporta muito bem em relação ao produto de matrizes, pois vale a propriedade:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (2.8)$$

A demonstração da propriedade (2.8) pode ser encontrada no Lema 9.1 de [7]. E em particular, temos a validade do seguinte lema.

Lema 2.3.1 *Para as potências A^m de $A \in M(n)$ vale*

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m,$$

para cada $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Temos que $\|A^m\| \leq \|A\|^m$, pois

$$\begin{aligned} \|A^m\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^m x\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x \neq 0, A^{m-1}x \neq 0} \frac{\|A(A^{m-1}x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x \neq 0, A^{m-1}x \neq 0} \left(\frac{\|A(A^{m-1}x)\|}{\|A^{m-1}x\|} \cdot \frac{\|A^{m-1}x\|}{\|x\|} \right) \\ &\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^{m-1}x\|}{\|x\|} \\ &= \|A\| \cdot \|A^{m-1}\|. \end{aligned}$$

■

Com base nas informações anteriores, podemos agora definir a matriz exponencial de

uma matriz $A \in M(n)$ por

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{j!}A^j + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j.$$

Também podemos escrever a exponencial da seguinte forma: $\exp(A) = \exp A = e^A$.

Uma questão sobre a definição da exponencial de matriz é se a série que a define converge em qualquer caso, por exemplo, no caso $n = 1$, temos $e^{(a)} = (e^a)$, e neste caso e^a acaba sendo a série de Taylor da exponencial escalar que converge, já no caso geral, se tomarmos a norma $\|\cdot\|$ de $M(n)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{j!}A^j \right\| &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A^j\| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \underbrace{\|AA \dots A\|}_{j \text{ vezes}} \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \underbrace{\|A\| \dots \|A\|}_{j \text{ vezes}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A\|^j \\ &= e^{\|A\|}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Note que, utilizamos a propriedade (2.8) para se obter $e^{\|A\|}$. Dessa forma, a série que define a exponencial é, portanto, absolutamente convergente, logo a série é convergente. Consideramos a norma $\|\cdot\|$ em $M(n)$ justamente para poder usar a propriedade (2.8) em (2.9), deste modo facilitamos a prova da convergência da exponencial. Temos ainda que a série da exponencial também converge na norma euclidiana ou em qualquer outra norma de $M(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. (Veja a Proposição 9.3 em [7], que garante essa afirmação).

Agora, vejamos alguns exemplos sobre o cálculo da matriz exponencial.

Exemplo 2.3.1 *Considere a matriz diagonal*

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Note que,

$$D^j = \text{diag}(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j),$$

o que vale para cada $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} D^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \text{diag}(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j) \\ &= \text{diag} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_1^j, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_2^j, \dots, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_n^j \right) \\ &= \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}). \end{aligned}$$

Em particular, temos $e^0 = I$ e $e^I = \text{diag}(e, e, \dots, e) = eI$.

Exemplo 2.3.2 Vamos obter a exponencial da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ e para isso, observe que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

portanto, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^j = 0 \in M(2)$ para cada $j \geq 2$, de modo que

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

Dada uma matriz $A \in M(n)$, se existir um n tal que $A^n = 0$, então essa matriz é chamada de matriz nilpotente, e essas matrizes são da forma

$$N_c(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 \end{pmatrix} \in M(l).$$

No qual l representa uma multiplicidade algébrica do autovalor da matriz relacionada ao bloco de Jordan. Por exemplo, para uma matriz $N_c(l) \in M(4)$, temos:

$$N_c(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}, \quad N_c(4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_c(4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_c(4)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, pela definição podemos calcular a exponencial da matriz $N_c(4)$,

$$\begin{aligned} e^{N_c(4)} &= I + N_c(4) + \frac{1}{2}N_c(4)^2 + \frac{1}{3!}N_c(4)^3 + \frac{1}{4!}N_c(4)^4 + \dots \\ &= I + N_c(4) + \frac{1}{2}N_c(4)^2 + \frac{1}{3!}N_c(4)^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} & c & 1 & 0 \\ \frac{c^3}{3!} & \frac{c^2}{2!} & c & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

E por indução é possível obter

$$e^{N_c(l)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} & c & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!} & \frac{c^2}{2!} & c & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{c^{l-1}}{(l-1)!} & \frac{c^{l-2}}{(l-2)!} & \frac{c^{l-3}}{(l-3)!} & \dots & c & 1 \end{pmatrix} \in M(l).$$

Exemplo 2.3.3 Considere a matriz $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, temos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b^5 \\ -b^5 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando indução, temos que, quando as potências são pares a matriz é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2j} = (-1)^j \begin{pmatrix} b^{2j} & 0 \\ 0 & b^{2j} \end{pmatrix},$$

e quando as potências forem ímpares, teremos

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2j+1} = (-1)^j \begin{pmatrix} 0 & b^{2j+1} \\ -b^{2j+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Quando calculamos a exponencial da matriz, obtemos

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Lembrando que as séries de Taylor da $\cos b$ e $\sin b$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \cos b &= 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 - \frac{1}{6!}b^6 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j!} b^{2j} \\ e \\ \sin b &= b - \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{5!}b^5 - \frac{1}{7!}b^7 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} b^{2j+1}, \end{aligned}$$

obtemos assim,

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

onde,

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 - \frac{1}{6}b^6 + \dots = \cos b, \\ a_{12} &= b - \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{5!}b^5 - \frac{1}{7}b^7 + \dots = \sin b, \\ a_{21} &= -b + \frac{1}{3!}b^3 - \frac{1}{5!}b^5 + \frac{1}{7}b^7 - \dots = -\sin b, \\ a_{22} &= 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 - \frac{1}{6}b^6 + \dots = \cos b. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

O teorema a seguir é de fundamental importância, pois ele nos diz que para calcular a exponencial de uma matriz qualquer, basta calcular a exponencial de alguma matriz conjugada e depois conjugá-la.

Teorema 2.3.1 *Se $A, B, Q \in M(n)$ são tais que $AQ = QB$, então $e^A Q = Qe^B$. Em particular, se as matrizes A e B de $M(n)$ são conjugadas, logo as matrizes e^A e e^B também serão, e assim poderemos usar a mesma matriz de conjugação, ou seja, se $Q \in M(n)$ é invertível e $A = QBQ^{-1}$, então*

$$e^A = e^{QBQ^{-1}} = Qe^BQ^{-1}.$$

Demonstração: Como temos que $AQ = QB$, logo

$$A^2Q = AAQ = AQB = QBB = QB^2$$

e, por indução teremos, $A^jQ = QB^j$, para $j \in \mathbb{N}$. Deste modo,

$$\begin{aligned} e^A Q &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} A^j \right) Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} A^j Q \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} QB^j = Q \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} B^j \right) \\ &= Qe^B. \end{aligned}$$

Logo, $e^A Q = Qe^B$. ■

Os próximos resultados são importantes para o entendimento do funcionamento da exponencial de matriz em caminhos contínuos e para a interpretação da exponencial como solução de $x'(t) = A(t)x$.

Lema 2.3.2 (*Desigualdade de Gronwall*) *Sejam $\alpha \geq 0$ e φ, v funções contínuas e não negativas no intervalo $[a, b]$ satisfazendo*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)v(s)ds, \quad \text{para } a \leq t \leq b.$$

Então,

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}, \quad \text{para } a \leq t \leq b.$$

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $\alpha > 0$. Seja $K(t) = \alpha + \int_a^t \varphi(s)v(s)ds$. Note que $K(a) = \alpha$ e que $K(t) \geq \alpha > 0$. Derivando, obtemos

$$K'(t) = \varphi(t)v(t) \leq K(t)v(t).$$

Portanto,

$$\frac{K'(t)}{K(t)} \leq v(t).$$

Logo,

$$\int_a^s \frac{K'(s)}{K(s)} ds \leq \int_a^t v(s)ds.$$

Fazendo a mudança $u = K(s)$ na primeira integral obtemos

$$\int_{K(a)}^{K(s)} \frac{du}{u} \leq \int_a^t v(s)ds,$$

logo,

$$\ln \left(\frac{K(t)}{K(a)} \right) \leq \int_a^t v(s)ds,$$

portanto,

$$K(t) \leq K(a)e^{\int_a^t v(s)ds},$$

de onde obtemos

$$\varphi(t) \leq K(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Para o caso em que $\alpha = 0$, utilizamos o caso anterior e fazemos $\alpha = \varepsilon \rightarrow 0^+$. ■

Teorema 2.3.2 *Suponhamos que os elementos das matrizes $A(t)$ e $F(t)$ sejam funções contínuas em um intervalo comum I que contenha o ponto t_0 . Então existe uma solução única do problema (2.10) de valor inicial no intervalo.*

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x'(t) &= A(t)x + F(t). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Demonstração: Para a demonstração desse resultado vamos utilizar o método das aproximações sucessivas, definindo a sequência de aplicações $x_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 0, 1, 2, \dots$

onde,

$$\begin{aligned}x_0(t) &= x_0, \\x_{j+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_j(s) + F(s))ds.\end{aligned}$$

Vamos mostrar que para todo $t \in [a, b] \subset I$, a sequência de funções x_n converge uniformemente para uma solução de

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A(t)x + F(t) \\x(t_0) &= x_0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Seja $K = \sup_{s \in [a, b]} \|A(s)\|$ e $M = \sup_{s \in [a, b]} \|x_1(s) - x_0(s)\|$. Então

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)x_1(s) - A(s)x_0(s)\| ds \leq KM|t - t_0|.$$

Por outro lado,

$$\|x_3(t) - x_2(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)x_2(s) - A(s)x_1(s)\| ds \leq \frac{K^2M}{2}|t - t_0|^2.$$

Suponha por indução que

$$\|x_j(t) - x_{j-1}(t)\| \leq \frac{K^{j-1}M}{(j-1)!}|t - t_0|^{j-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|x_{j+1}(t) - x_j(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)x_j(s) - A(s)x_{j-1}(s)\| ds \\&\leq \int_{t_0}^t K \frac{K^{j-1}M}{(j-1)!}|s - t_0|^{j-1} ds \\&\leq \frac{K^jM}{(j-1)!} \frac{|t - t_0|^j}{j} \\&\leq \frac{K^jM}{j!}|t - t_0|^j.\end{aligned}$$

Assim sendo, temos que

$$\sup_{t \in [a, b]} \|x_{j+1}(t) - x_j(t)\| \leq \frac{K^jM}{j!}(b - a)^j.$$

Como a série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{K^jM}{j!}(b - a)^j$ é convergente, pelo Teste de Weierstrass, temos que a série de funções $\sum_{j=0}^{\infty} (x_{j+1} - x_j)$ converge uniformemente para uma função contínua

$x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + F(s))ds.$$

Portanto x é uma solução do problema linear não homogêneo (2.11).

Então, nos resta mostrar a unicidade da solução de (2.11). Suponhamos que existam duas soluções x_1 e x_2 de (2.11), portanto x_1 e x_2 satisfazem as equações integrais. Vamos supor inicialmente que $t > t_0$ o caso $t < t_0$ segue de forma similar.

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_1(s) + F(s))ds \quad \text{e} \quad x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_2(s) + F(s))ds.$$

Portanto,

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)(x_1(s) - x_2(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t K \|x_1(s) - x_2(s)\| ds.$$

Fazendo $\varphi(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\|$, obtemos

$$\varphi(t) \leq \int_{t_0}^t K\varphi(s)ds,$$

e, pela desigualdade de Gronwal temos que $\varphi(t) = 0e^{\int_{t_0}^t Kds}$ o que implica que

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| = 0,$$

para todo $t \in [a, b]$. Esse fato mostra que $x_1 = x_2$, o que finaliza a prova. ■

Proposição 2.3.1 *Dados uma matriz $A \in M(n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, os caminhos $t \mapsto e^{tA}$ em $M(n)$ e $t \mapsto e^{tA}x_0$ em \mathbb{R}^n são deriváveis e*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \in M(n), \quad \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Temos que,

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j.$$

Como,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|t^j A^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|tA\|^j = e^{\|tA\|} < +\infty,$$

cada entrada da matriz e^{At} é uma série de potências com raio de convergência $+\infty$ na

variável t . Assim, conseguimos derivar a série termo a termo, e obtemos

$$\begin{aligned}
 (e^{At})' &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} j t^{j-1} A^j \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} A A^{j-1} \\
 &= A \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} A^{j-1} \\
 &= A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \\
 &= A e^{At},
 \end{aligned}$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. ■

Teorema 2.3.3 *Se $A \in M(n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então o caminho*

$$x(t) = e^{tA} x_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

define a única solução de $x' = Ax$ com condição inicial $x(0) = x_0$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.3.2, a solução é única e como todas as soluções da equação $x' = A(t)x$ tem intervalo máximo \mathbb{R} . Resta observar que para a função $x(t)$ em (2.12) temos:

$$x(t_0) = e^{A_0} x_0 = e^0 x_0 = Id(x_0) = x_0$$

e que pela Proposição 2.3.1,

$$x'(t) = A e^{A(t-t_0)} x_0 = Ax(t).$$

Isto mostra que $x(t)$ é a solução pretendida. ■

O Teorema 2.3.3 prova formalmente que o caminho $x(t) = e^{tA} x_0$ é de fato a solução do sistema linear $x' = Ax(t)$ como afirmamos na introdução dessa seção. Além disso esse caminho é a única solução para o sistema quando $A \in M(n)$.

Corolário 2.3.1 *Dadas as matrizes A e B em $M(n)$, temos:*

1. se $AB = BA$ então $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$; e
2. a matriz e^A sempre é invertível, com $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Demonstração: Se $AB = BA$, então temos que $AB^k = B^k A$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Note que, $AB = BA \Rightarrow AB^k = B^k A$, $k = 1$. Logo, por indução, vamos supor que $AB^n = B^n A$. Assim,

$$AB^{n+1} = \underbrace{AB}_{AB=BA} B^n = B \underbrace{AB^n}_{AB^n=B^n A} = BB^n A = B^{n+1} A.$$

Como consequência do Princípio da Indução Finita, temos $AB^k = B^k A$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Temos pelo Teorema 2.3.1 que $Ae^{Bt} = e^{Bt}A$. Deste modo, vamos mostrar agora que $X_1(t) = e^{(A+B)t}$ e $X_2(t) = e^{At}e^{Bt}$ são soluções do problema

$$\begin{cases} X' = (A + B)X, \\ X(0) = Id. \end{cases} \quad (2.13)$$

Temos que, $X_1'(t) = (A + B)e^{(A+B)t} = (A + B)X_1(t)$, $X_1(0) = e^0 = Id$. Assim, X_1 é solução de (2.13). Por outro lado, temos $X_2'(t) = (e^{At})'e^{Bt} + e^{At}(e^{Bt})' = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} = (A + B)e^{At}e^{Bt} = (A + B)X_2(t)$, assim, $X_2(0) = e^0e^0 = Id$. Assim, X_2 também é solução de (2.13).

Deste modo, existe uma única solução para (2.13), portanto $X_1(t) = X_2(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Logo, $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$. E em particular, $e^{(A+B)} = e^Ae^B$.

Em particular, temos também que, como $A - A = 0$ e $e^0 = I$ pelo Exemplo (2.3.1), deste modo temos que $e^{-A}e^A = I = e^Ae^{-A}$, ou seja, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. ■

O exemplo a seguir nos mostra como o Corolário 2.3.1 facilita o cálculo da exponencial de matriz em certos casos.

Exemplo 2.3.4 Consideremos as matrizes $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, o Corolário 2.3.1 e os exemplos (2.3.1) e (2.3.2), podemos calcular a exponencial da matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$, como apresentado a seguir:

$$\exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} = \exp \left[\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}}_{II} \right] = \underbrace{\exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_I \underbrace{\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}}_{II}.$$

Calculando I e II separadamente, obtemos

$$\begin{aligned}
 I) \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 + \dots + \frac{1}{j!} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^j + \dots \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{2!} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \frac{a^j}{j!} & 0 \\ 0 & \frac{a^j}{j!} \end{pmatrix} + \dots \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^j}{j!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^j}{j!} + \dots \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 II) \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^2 + \dots + \frac{1}{j!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^j \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + 0 + \dots + 0 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Logo, por (I) e (II) vemos que

$$\exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ ce^a & e^a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.3.5 Agora, vejamos a exponencial da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Primeiro considere as matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ -ab & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando o Corolário 2.3.1 e os exemplos (2.3.1) e (2.3.3), obtemos

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \exp \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ &= e^a \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na Seção 2.4 veremos que A corresponde ao bloco de Jordan para os autovalores complexos.

Na próxima seção será apresentado o *Teorema da Forma Canônica de Jordan* para matrizes $n \times n$, já que nesta seção trabalhamos apenas com os cálculos de exponencial de matrizes de ordem 2×2 .

2.4 Forma Canônica de Jordan

No Teorema 2.3.3, vimos que $x(t) = e^{tA}x_0$ é a solução da equação diferencial linear $x' = Ax$, com a condição inicial $x(0) = x_0$, quando $A \in M(n)$, por outro lado, pelo Teorema 2.3.1 temos que se a matriz P é conjugada a matriz A então podemos obter a matriz exponencial de A a partir da matriz exponencial de P , ou seja, se $P = Q^{-1}AQ$, então $e^{Pt} = Q^{-1}e^{At}Q$, com $Q \in M(n)$ invertível.

O próximo resultado de Álgebra Linear nos garante que toda matriz ou operador linear pode ser conjugado a uma outra matriz semelhante à original que é quase uma matriz diagonal. Assim, a conexão desses resultados garante várias informações a respeito do comportamento qualitativo dos sistemas de equações diferenciais lineares. Esse fato nos leva ao estudo do *Teorema da Forma Canônica de Jordan*.

Antes de apresentar o teorema, vamos definir o que é um bloco de Jordan.

Definição 2.4.1 Caso Real

Uma matriz quadrada de dimensão l da forma

$$J_\lambda(l) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

é denominada um bloco de Jordan de dimensão l associado a λ . Ou seja, cada bloco de Jordan é uma matriz triangular com apenas um autovalor λ e um autovetor, tal qual sua dimensão l depende da multiplicidade geométrica do autovalor λ . Essa matriz pode ser escrita através da soma de duas matrizes:

$$J_\lambda(l) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N_1(l),$$

onde $N_1(l)$ é uma matriz nilpotente.

Caso Complexo

Se $\lambda = a + ib$ um autovalor complexo, definimos, analogamente a matriz $J_\lambda(l)$, como

$$R_{a,b}(l) = \begin{pmatrix} J_{a,b} & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{a,b} & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_{a,b} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{a,b} \end{pmatrix}$$

onde,

$$J_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.4.1 (Forma Canônica de Jordan) Se $A \in M(n)$, então A é linearmente conjugada a uma matriz real

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r) \in M(n),$$

em que cada J_i é um bloco de Jordan real ou complexo. A matriz J é única, a menos da ordem dos blocos na diagonal.

A matriz J desse teorema é conhecido como a *Forma Canônica de Jordan* de A . Cada bloco J_i da forma canônica de Jordan de uma matriz $A \in M(n)$ descreve a ação de A sobre um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n invariante por A , que é um *auto-espaço generalizado* associado a algum autovalor, restrito ao qual A é linearmente conjugada a J_i . A demonstração da Forma Canônica de Jordan para o caso real, pode ser encontrada no Capítulo 6 de [10], já para o caso complexo, pode ser encontrada no apêndice de [11].

Vamos ver agora como calcular a exponencial de uma matriz qualquer na forma

canônica de Jordan, para isso precisamos saber calcular a exponencial de uma matriz em blocos e a exponencial de uma matriz nilpotente.

No caso particular em que uma matriz de Jordan possui blocos 1×1 , temos

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} A_1^j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k^j \end{pmatrix},$$

e como cada bloco é de ordem 1×1 , então a matriz de Jordan é uma matriz diagonal, assim sua exponencial será

$$e^{\text{diag}(A_1, \dots, A_k)} = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_k}),$$

ou seja, a exponencial de uma matriz diagonal em blocos pode ser obtida tomando a exponencial de cada bloco individualmente. Este fato também vale para blocos de dimensão maior.

Como vimos na Definição 2.4.1, podemos decompor o bloco de Jordan real $J_\lambda(l)$ de autovalor λ , na soma de uma matriz nilpotente $N_1(l)$ com uma matriz diagonal com o autovalor na diagonal, ou seja,

$$J_\lambda(l) = \lambda I + N_1(l), \quad \lambda I \in M(l).$$

E pelos exemplos 2.3.1 e 2.3.2 vimos como se calcula a exponencial de uma matriz diagonal e como se calcula uma matriz nilpotente, respectivamente. Deste modo, temos que essas duas matrizes comutam, de fato,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

por outro lado, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que matrizes diagonais nilpotentes comutam. E pelo Corolário 2.3.1 item (1) temos que,

$$e^{J\lambda(l)} = e^{\lambda I + N_1(l)} = e^{\lambda I} e^{N_1(l)} = e^{\lambda} I e^{N_1(l)},$$

e assim a exponencial de um bloco de Jordan é dada por:

$$e^{J\lambda(l)} = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(l-1)!} & \frac{1}{(l-2)!} & \frac{1}{(l-3)!} & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(l).$$

Consideremos agora os blocos associados a autovalores complexos. Assim, como escrevemos anteriormente

$$R_{a,b}(l) = J_{a,b}^0(l) + N_{(1,I)}(l),$$

onde $J_{a,b}^0(l) = \text{diag}(J_{a,b}, J_{a,b}, \dots, J_{a,b}) \in M(2l)$ e $J_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$N_{c,I}(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ cI & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & cI & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & cI & 0 \end{pmatrix} \in M(2l),$$

temos que $N_{1,I}(l)^l = 0$, logo essa matriz é nilpotente, e como visto no Exemplo 2.3.2, teremos

$$e^{N_{c,I}(l)} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ cI & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} I & cI & I & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!} I & \frac{c^2}{2!} I & cI & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{c^{l-1}}{(l-1)!} I & \frac{c^{l-2}}{(l-2)!} I & \frac{c^{l-3}}{(l-3)!} I & \cdots & cI & I \end{pmatrix} \in M(2l).$$

Pelo Exemplo 2.3.5, sabemos que $e^{J_{a,b}^0} = e^a R_b \in M(2)$, onde

$$R_b = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix},$$

portanto,

$$\begin{aligned} e^{J_{a,b}^0(l)} &= \text{diag}(e^{J_{a,b}}, e^{J_{a,b}}, \dots, e^{J_{a,b}}) \\ &= \text{diag}(e^a R_b, e^a R_b, \dots, e^a R_b) \\ &= e^a \text{diag}(R_b, R_b, \dots, R_b). \end{aligned}$$

Como as matrizes $J_{a,b}^0(l)$ e $N_{c,1}(l)$ comutam, de fato,

$$\begin{pmatrix} e^{J_{a,b}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_{a,b}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{J_{a,b}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{J_{a,b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & cI & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cI e^{J_{a,b}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & cI e^{J_{a,b}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

por outro lado temos,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & cI & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{J_{a,b}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_{a,b}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{J_{a,b}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{J_{a,b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cI e^{J_{a,b}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & cI e^{J_{a,b}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

E utilizando o Corolário 2.3.1 vamos ter

$$e^{R_{a,b}(l)} = e^{J_{a,b}^0(l) + N_{1,1}(l)} = e^{J_{a,b}^0(l)} e^{N_{1,1}(l)},$$

deste modo, a exponencial dos blocos de Jordan é dada por:

$$e^{R_{a,b}(l)} = e^a \begin{pmatrix} R_b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R_b & R_b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} R_b & R_b & R_b & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} R_b & \frac{1}{2!} R_b & R_b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(l-1)!} R_b & \frac{1}{(l-2)!} R_b & \frac{1}{(l-3)!} R_b & \dots & R_b & R_b \end{pmatrix}.$$

Como qualquer matriz A é linearmente conjugada a uma matriz J em forma de Jordan,

pelo Teorema 2.3.1 temos que a exponencial de qualquer matriz $A \in M(n)$, é dada pela e^J conjugada pela mesma matriz Q que conjuga A e J , ou seja, $e^A = Qe^JQ^{-1}$.

Exemplo 2.4.1 *Considere uma matriz $A \in M(3)$ qualquer, com polinômio característico $p_A(\lambda) = (\lambda - 7)^3$. Se a dimensão do auto-espaço $\text{Nuc}(7I - A)$ for 1, então a sua forma canônica de Jordan possui um bloco $J_7(n) \in M(3)$ com o autovalor 7 na diagonal, ou seja,*

$$J_7(3) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

assim a exponencial de $J_7(3)$ será

$$e^{J_7(3)} = \begin{pmatrix} e^7 & 0 & 0 \\ e^7 & e^7 & 0 \\ \frac{e^7}{2} & e^7 & e^7 \end{pmatrix}.$$

Mas, se a dimensão do auto-espaço $\text{Nuc}(7I - A)$ for 2, então sua forma de Jordan possui pelo menos um bloco $J_7(n) \in M(2)$, ou seja,

$$J = \text{diag}(J_7(2), J_7(1)) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

e sua exponencial é dada por,

$$e^{\text{diag}(J_7(2), J_7(1))} = \begin{pmatrix} e^7 & 0 & 0 \\ e^7 & e^7 & 0 \\ 0 & 0 & e^7 \end{pmatrix}.$$

2.5 O fluxo de uma equação linear e atratores

Agora que já possuímos alguns conhecimentos sobre a Forma Canônica de Jordan, vamos retomar o estudo do caso geral da equação diferencial linear $x' = Ax$, onde $A \in M(n)$ é uma matriz real $n \times n$. Vimos no Teorema 2.3.3 que a solução geral do problema de valor inicial linear $x' = Ax$, $x(0) = x_0$, é dada por $x(t) = e^{tA}x_0$, e para calcular a exponencial e^{tA} de tA , precisamos saber calcular a exponencial e^{tP} , para alguma matriz P linearmente conjugada a A . Para formalizar o cálculo temos o seguinte resultado.

Lema 2.5.1 *Se $P, Q \in M(n)$ e Q é invertível, então*

$$e^{t(QPQ^{-1})} = Qe^{tP}Q^{-1}.$$

Demonstração: É uma consequência imediata do Teorema 2.3.1, já que temos

$$t(QPQ^{-1}) = QtPQ^{-1}.$$

■

Como a Forma Canônica de Jordan de uma matriz é linearmente conjugada à matriz, cada exponencial e^{tA} de A é linearmente conjugada à exponencial e^{tJ} .

Agora, vamos explicitar a exponencial e^{tJ} das matrizes em forma canônica de Jordan. Como temos que, $tJ_\lambda(l) = \lambda tI + tN_1(l)$ e qualquer matriz comuta com a identidade, logo o Corolário 2.3.1 garante que

$$e^{tJ_\lambda(l)} = e^{\lambda tI} e^{tN_1(l)} = e^{\lambda t} e^{tN_1(l)} \in M(l).$$

Vejamos um exemplo para melhor entendimento.

Exemplo 2.5.1 Para cada um dos dois blocos de Jordan J do Exemplo (2.4.1) visto anteriormente, temos que a exponencial e^{tJ} , que dá a solução geral de $x' = Jx$, é dada por

$$\begin{pmatrix} e^{7t} & 0 & 0 \\ te^{7t} & e^{7t} & 0 \\ \frac{t^2}{2}e^{7t} & te^{7t} & e^{7t} \end{pmatrix},$$

se $\dim \text{Nuc}(7I - J) = 1$. E

$$\begin{pmatrix} e^{7t} & 0 & 0 \\ te^{7t} & e^{7t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix},$$

se $\dim \text{Nuc}(7I - J) = 2$.

Veremos agora sobre os blocos associados a autovalores complexos. Note que, $tJ_{a,b} = J_{ta,tb}$ e assim, $e^{tJ_{a,b}} = e^{J_{ta,tb}} = e^{at} R_{bt}$. Também temos que $tR_{a,b}(l) = tJ_{a,b}^0(l) + tN_{1,I}(l) = tJ_{a,b}^0(l) + N_{t,I}(l)$ e como a matriz em blocos $N_{t,I}(l)$ comuta com a matriz diagonal em

blocos $tJ_{a,b}^0(l)$, o Corolário 2.3.1 nos garante que

$$\begin{aligned} e^{tR_{a,b}(l)} &= e^{tJ_{a,b}^0(l)} e^{N_{t,I}(l)} \\ &= e^{at} \operatorname{diag}(R_{bt}, R_{bt}, \dots, R_{bt}) e^{N_{t,I}(l)} \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} R_{bt} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ tR_{bt} & R_{bt} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} R_{bt} & tR_{bt} & R_{bt} & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{3!} R_{bt} & \frac{t^2}{2!} R_{bt} & tR_{bt} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} R_{bt} & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} R_{bt} & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!} R_{bt} & \cdots & tR_{bt} & R_{bt} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, vamos observar os elementos das matrizes que constituem os blocos da exponencial da Forma Canônica de Jordan

$$e^{tJ} = e^{\operatorname{diag}(tJ_1, \dots, tJ_m)} = \operatorname{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_m}),$$

de uma matriz $A \in M(n)$ qualquer. Podemos garantir que cada elemento da matriz e^{tJ} é zero ou de uma das formas

$$\frac{t^j}{j!} e^{at} \cos bt \quad \text{ou} \quad \frac{t^j}{j!} e^{at} \sin bt, \quad (2.14)$$

para qualquer $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor generalizado de A , se $b = 0$ e $a = \lambda$, os dois tipos apresentados anteriormente reduzem à mesma forma $\frac{t^j}{j!} e^{\lambda t}$.

Lema 2.5.2 *Seja $\varepsilon > 0$. Então para todo $k > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon t} t^k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^k}{e^{\varepsilon t}} = 0.$$

Daí, para qualquer polinômio $p(t)$, $e^{-\varepsilon t} p(t)$ é limitado para $t \geq 0$.

Demonstração: Observe que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varepsilon t} = \infty$, deste modo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital. Em particular, aplicamos $k+1$ vezes, temos então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^k}{e^{\varepsilon t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{kt^{k-1}}{\varepsilon e^{\varepsilon t}} = \cdots = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k(k-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot 0}{\varepsilon^{k+1} e^{\varepsilon t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0}{\varepsilon^{k+1} e^{\varepsilon t}} = 0$$

■

Proposição 2.5.1 *Seja A um operador linear em \mathbb{R}^n cujos autovalores tem parte real*

negativa. Então existem K e μ positivos tais que,

$$\| e^{At} x \| \leq K e^{-\mu t} \| x \|, t \geq 0.$$

Demonstração: Pelo Teorema de Jordan, temos que

$$A = Q^{-1} J Q,$$

logo

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{Q^{-1} J Q t} \\ &= Q^{-1} e^{J t} Q. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\| e^{At} \| = \| Q^{-1} e^{J t} Q \| \leq \| Q^{-1} \| \| e^{J t} \| \| Q \|,$$

temos então a seguinte matriz diagonal

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_j \end{pmatrix},$$

assim,

$$e^{J t} = \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_j t}).$$

Em que J_i , $i = 1, 2, \dots, j$ são os blocos de Jordan. Sendo assim, teremos

$$\| e^{J t} \| = \| \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_j t}) \|.$$

Suponhamos que exista $\alpha < 0$ tal que $0 < \alpha - \text{Re}(\lambda_i)$, logo:

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \left(Id + N_1(l_i) t + N_1(l_i)^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + N_1(l_i)^{k_i-1} \frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \| e^{J_j t} \| &= \left\| e^{\lambda_j t} \left(Id + N_1(l_j)t + N_1(l_j)^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + N_1(l_j)^{k_j-1} \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \right) \right\| \\
 &\leq |e^{\lambda_j t}| \left(\| Id \| + \| N_1(l_j) \| t + \cdots + \| N_1(l_j) \|^{k_j-1} \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \right) \\
 &\leq e^{(Re\lambda_j)t} \left(\| Id \| + \| N_1(l_j) \| t + \cdots + \| N_1(l_j) \|^{k_j-1} \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \right) \\
 &\leq e^{(Re\lambda_j-\alpha)t} \left(\| Id \| + \| N_1(l_j) \| t + \cdots + \| N_1(l_j) \|^{k_j-1} \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \right) e^{-\alpha t}.
 \end{aligned}$$

Note que,

$$\left(\| Id \| + \| N_1(l_j) \| t + \| N_1(l_j) \|^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + \| N_1(l_j) \|^{k_j-1} \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \right),$$

é um polinômio, e que $e^{(Re\lambda_j-\alpha)t}$ tem expoente negativo e, portanto, pelo Lema 2.5.2, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$e^{(Re\lambda_j-\alpha)t} \left(\| Id \| + \| N_1(l_j) \| t + \| N_1(l_j) \|^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + \| N_1(l_j) \|^{k_j-1} \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \right) \leq L,$$

para todo $t \geq 0$. Portanto

$$\| e^{J_j t} \| \leq L e^{\alpha t}.$$

Tomando $0 < \mu < -\alpha$, temos

$$\begin{aligned}
 \| e^{At} x \| &\leq \| Q^{-1} \| \| e^{Jt} \| \| Q \| \| x \| \\
 &\leq \| Q^{-1} \| \| \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_j t}) \| \| Q \| \| x \| \\
 &\leq \| Q^{-1} \| \| Q \| L e^{\alpha t} \| x \| \\
 &\leq K e^{-\mu t} \| x \|.
 \end{aligned}$$

O caso complexo segue de forma semelhante ao caso real. ■

Podemos resumir o estudo da teoria de estabilidade dos sistemas lineares dados por $x' = Ax$ com o ponto de equilíbrio 0, pela análise dos autovalores de A , conforme os resultados apresentados a seguir:

Corolário 2.5.1 [7] *Se todos os autovalores de uma matriz $A \in M(n)$ são tais que*

- *sendo reais são negativos, ou*
- *sendo complexos têm parte real negativa,*

então qualquer solução de $x' = Ax$ tende a $0 \in \mathbb{R}^n$, com $t \rightarrow +\infty$.

Proposição 2.5.2 [7] *A origem de um campo linear $A \in M(n)$ é um poço se, e somente se, o campo A é um atrator.*

A Proposição 2.5.2, nos mostra que, se conhecermos o sinal (da parte real) dos autovalores de A , conseguimos informações sobre como é o comportamento das soluções de $x' = Ax$ ao longo prazo. Sendo assim, se for mais fácil de calcular os autovalores de A do que as soluções, essa informação acaba sendo muito útil.

Capítulo 3

Teoremas fundamentais da teoria de EDOs

Neste capítulo, vamos apresentar alguns dos principais teoremas utilizados no estudo das equações diferenciais ordinárias, tais como, os teoremas de existência e unicidade, prolongamento de solução, dependência contínua, de Hartman-Grobman e de Poincaré-Bendixson. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [2], [7] e [10].

3.1 Teorema de existência e unicidade

Ao longo desta seção assumiremos que $W \subset \mathbb{R}^n$ denotará um conjunto aberto em \mathbb{R}^n e $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ definirá um campo de vetores continuamente diferenciável. E quando for mencionado, uma solução de equação diferencial

$$x' = f(x),$$

estamos querendo dizer, uma função diferenciável

$$u : J \rightarrow W,$$

que está definida em algum intervalo $J \subset \mathbb{R}$, de modo que para todos os $t \in J$

$$u'(t) = f(u(t)).$$

Neste caso, J poderia ser um intervalo de número real que é aberto, fechado ou semi

aberto. Isso é,

$$(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}, \text{ ou}$$

$$[a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}, \text{ ou}$$

$$(a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a < t \leq b\},$$

e assim por diante. Além disso, a ou b podem ser ∞ , mas lembre-se, intervalos como $(a, \infty]$ não são permitidos.

Geometricamente, u é uma curva em \mathbb{R}^n cujo vetor tangente $u'(t)$ é igual a $f(u(t))$, pensamos nesse vetor como baseado em $u(t)$. O fluxo $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial em W , já a solução u pode ser pensada como o caminho de uma partícula que se move em \mathbb{R}^n em um tempo t , seu vetor tangente ou velocidade é dado pelo valor do campo vetorial na posição da partícula. Imaginemos uma partícula de poeira em um vento constante, por exemplo, ou um elétron se movendo através de um campo magnético constante. Observe a Figura (3.1), onde $u(t_0) = x$, $u'(t) = f(u(t))$.

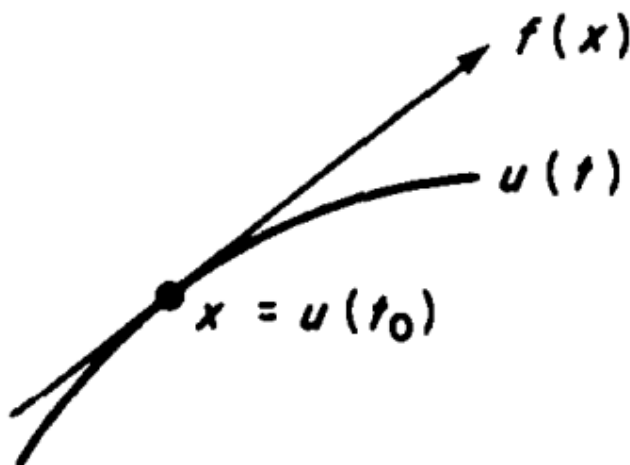


Figura 3.1
Fonte:[10].

Uma condição inicial para solução $u : J \rightarrow W$ é uma condição da forma $u(t_0) = x_0$, onde $t_0 \in J$ e $x_0 \in W$. Para simplificar, geralmente assumimos como $t_0 = 0$.

Uma equação diferencial pode ter mais de uma solução para uma condição inicial dada, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1.1 Consideremos a equação $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$ em \mathbb{R} . Aqui $W = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$.

A função identicamente nula, $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u_0(t) = 0$ para todo t é evidentemente uma solução com a condição inicial $u(0) = 0$. Mas também a função definida por $x(t) = t^3$. Em particular existem infinitas soluções para essa equação com a condição

inicial $u(0) = 0$. Os gráficos de algumas curvas de solução para essa equação, são apresentados na Figura (3.2), a seguir.

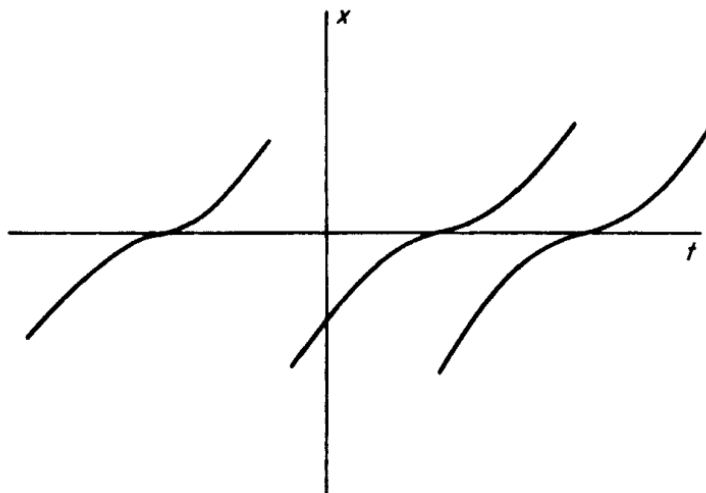


Figura 3.2
Fonte:[10].

Deste modo, para garantir a unicidade de solução, condições extras a continuidade devem ser impostas ao campo f . Veremos mais adiante que se f for continuamente diferenciável, isso acaba sendo suficiente para se obter uma única solução.

Adentremos agora no conceito de função Lipschitz. Uma função $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde W é um conjunto aberto do espaço vetorial normado \mathbb{R}^n , é dito ser Lipschitz em W se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\| f(y) - f(x) \| \leq K \| y - x \|,$$

para todos os x, y em W . Chamamos K de uma constante de Lipschitz para f .

Consideremos uma norma para \mathbb{R}^n . A aplicação f ainda será Lipschitz em todas as normas equivalentes a inicial, porém a constante K pode mudar de valor a medida que se altera as normas. Em uma norma diferente, f ainda será Lipschitz devido equivalência das normas, no entanto, a constante K pode mudar. Para compreender o que é uma função Lipschitz, nos exemplos 3.1.2 e 3.1.3, a seguir apresentaremos um caso em que a função é Lipschitz e um caso em que não é Lipschitz.

Exemplo 3.1.2 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x$ é Lipschitz.

De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|\sin(x) - \sin(y)\| \\ &= \left\| 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\| \\ &= 2 \left\| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right\| \cdot \left\| \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\|. \end{aligned}$$

Como temos que $|\cos \alpha| \leq 1$ e $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$, $\forall \alpha$, segue que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 2 \left\| \frac{x-y}{2} \right\| \cdot 1 = \|x-y\|.$$

Deste modo, concluímos que f é Lipschitz com $K = 1$.

Exemplo 3.1.3 A função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ não é Lipschitz.

De fato, suponhamos que f seja Lipschitz, então existe $K > 0$, tal que, $\forall x, y \in [0, +\infty)$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|.$$

Em particular, vamos tomar $x = 0$ e $y = \frac{1}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Assim, teremos que

$$\|f(x) - f(y)\| = \left\| f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Logo,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq K \left\| 0 - \frac{1}{n} \right\| = \frac{K}{n}.$$

Sendo assim,

$$\frac{n}{\sqrt{n}} \leq K \Rightarrow \sqrt{n} \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, temos que

$$n \leq K^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O que implica que o conjunto \mathbb{N} seria limitado superiormente por K^2 , o que é um absurdo. Logo, concluímos que a função f realmente não é Lipschitz.

Geralmente, chamamos f de localmente Lipschitz se cada ponto de W (o domínio de f) tem uma vizinhança $W_0 \subset W$, tal que a restrição $f|_{W_0}$ é Lipschitz. Quando f é localmente Lipschitz a sua constante K pode variar de acordo com a vizinhança W_0 tomada.

A seguir, o Lema 3.1.1 nos garantirá condições para que f seja localmente Lipschitz, mas antes disso vamos relembrar alguns pontos importantes.

O significado da derivada $Df(x)$ para $x \in W$, é um operador linear em \mathbb{R}^n , tal operador atribui a um vetor $u \in \mathbb{R}^n$, o vetor

$$Df(x)u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (f(x + su) - f(x)), \quad s \in \mathbb{R},$$

que existirá se $Df(x)$ estiver definida.

Em coordenadas (x_1, \dots, x_n) em \mathbb{R}^n , seja $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$, então $Df(x)$ é representado pela matriz $n \times n$ de derivadas parciais

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (f_i(x_1, \dots, x_n)).$$

Por outro lado, se todas as derivadas parciais existem e são contínuas, então f é de classe C^1 . Para cada $x \in W$, é definida a norma do operador $\| Df(x) \|$, para o operador linear $Df(x) \in L(\mathbb{R}^n)$. Se $u \in \mathbb{R}^n$, então

$$\| Df(x)u \| \leq \| Df(x) \| \| u \|.$$

E se $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 isso implica que o fluxo $W \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ que envia $x \rightarrow Df(x)$ é um fluxo contínuo. Agora que já relembramos o significado da derivada $Df(x)$, vamos ao Lema 3.1.1.

Definição 3.1.1 *Seja x um ponto no espaço métrico M . Dado um número real $r > 0$ definimos:*

- A **Bola Aberta** de centro x e raio r é o conjunto $B(x; r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto x é menor do que r . Ou seja, $B(x; r) = \{y \in M : d(y, x) < r\}$. Em \mathbb{R}^n , podemos escrever $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$.
- A **Bola Fechada** de centro x e raio r é o conjunto $B[x; r]$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual r do ponto x . Ou seja, $B[x; r] = \{y \in M : d(y, x) \leq r\}$. Em \mathbb{R}^n , podemos escrever $B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$.

Lema 3.1.1 *Seja a função $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Então f é localmente Lipschitz.*

Demonstração: Suponhamos que $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 , e $x_0 \in W$, onde W é um subconjunto aberto. Seja $b > 0$, assim a bola $B_b(x_0)$ está contida em W , desde modo

$$B_b(x_0) = \{x \in W : \|x - x_0\| \leq b\},$$

temos então que $B_b(x_0)$ é limitada e fechada, logo é compacta. Denotaremos aqui a bola $B_b(x_0)$ como W_0 , onde $f : W_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Seja K um limite superior para $\|Df(x)\|$ em W_0 , onde $Df : W_0 \rightarrow \Omega$, isso acontece porque Df é contínua e W_0 é compacto logo, admite máximo e mínimo. Assim,

$$\|Df(x)\| \leq K, \quad \forall x \in W_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in W_0} \|Df(x)\| \leq K.$$

Temos que o conjunto W_0 é convexo, isto é, se $y, z \in W_0$, então o segmento de reta que vai de y à z está contido W_0 .

Deste modo, sejam $y, z \in W_0$, colocando $u = z - y$, vamos ter

$$\begin{cases} p(s) = y + su, & s \in [0, 1] \\ p(0) = y & \text{e} \\ p(1) = y + u = y + z - y = z. \end{cases}$$

Seja $\phi(s) = f(p(s)) = f(y + su)$, onde $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, fazendo a derivada de ϕ , teremos

$$\phi'(s) = Df(p(s)) = Df(y + su)u.$$

Portanto, $f(z) - f(y) = \phi(1) - \phi(0)$, e pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^1 \phi'(s) ds = \int_0^1 Df(y + su)u ds.$$

Pela definição temos que

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(y)\| &= \|\phi(1) - \phi(0)\| \\ &= \left\| \int_0^1 Df(y + su)u ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|Df(y + su)u\| ds \leq \int_0^1 K \|u\| ds \\ &\leq K \|u\| = K \|z - y\|. \end{aligned}$$

O que prova a validade do lema. ■

Partindo da demonstração do Lema 3.1.1, temos que se W_0 for conexo e se $\|Df(x)\| \leq K, \forall x \in W_0$, então K é uma constante de Lipschitz para $f|_{W_0}$.

Vamos agora prova do Teorema 3.1.1 de existência de solução local das equações diferenciais ordinárias, tal resultado é chamado de Teorema “local”, porque lida com a natureza do campo vetorial $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ perto de algum ponto x_0 de W .

Teorema 3.1.1 *Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de classe C^1 (continuamente diferenciável) e $x_0 \in W$. Então, existe $a > 0$ e uma única solução $x : (-a, a) \rightarrow W$ da equação diferencial*

$$x' = f(x),$$

satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$.

Demonstração: Para cada $x_0 \in W$ seja $W_0 = B_b(x_0) = \{x \in W : \|x - x_0\| \leq b\}$. Por facilidade, construiremos uma sequência das aproximações sucessivas.

De $x'(t) = f(x)$, com $x(t_0) = x_0$ temos que

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t x'(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \\ \Rightarrow x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds. \end{aligned}$$

Portanto, encontrar a solução da equação diferencial ordinária é equivalente a encontrar a solução da equação integral apresentada anteriormente.

Como sabemos que $B_b(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, logo podemos definir

$$C = \{u : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n : u(0) = x_0 \text{ e } \|u(t) - x_0\| \leq b\},$$

em que $a < \min\{\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\}$, onde K é um constante Lipschitz e

$$M = \sup_{x \in B_b(x_0)} \|f(x)\|.$$

Deste modo, definimos a sequência:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= x_0 \\ u_1(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_0(s)) ds = T(u_0) \\ u_2(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_1(s)) ds = T(u_1) \\ u_3(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_2(s)) ds = T(u_2) \\ &\vdots \\ u_k(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_{k-1}(s)) ds = T(u_{k-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\{u_k\} \in C$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Suponhamos que $a < \frac{b}{M}$, temos então que:

$$\|u_0(t) - x_0\| = \|x_0 - x_0\| = 0 \leq b,$$

mostrando assim que $u_0(t) \in B_b(x_0)$ para todo $t \in (-a, a)$.

Utilizando a hipótese de indução, conseguimos dizer que $u_k \in C$, isto é $u_k : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\|u_k(t) - x_0\| \leq b$, para todo $t \in (-a, a)$

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}(t) - x_0\| &= \left\| \int_0^t f(u_k(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|f(u_k(s))\| ds \\ &\leq \int_0^t M ds = Mt \leq Ma < \frac{Mb}{M} = b \\ \Rightarrow \|u_k(t) - x_0\| &\leq b, \forall t \in (-a, a) \Rightarrow u_k \in C. \end{aligned}$$

Agora, tomando $L = \max\{\|u_1(t) - u_0(t)\| : -a \leq t \leq a\}$, temos pat todo $t \in (-a, a)$ talque $t \geq 0$ (o caso $t < 0$ segue de forma similar) então que

$$\begin{aligned} \|u_2(t) - u_1(t)\| &= \left\| \left(x_0 + \int_0^t f(u_1(s)) ds \right) - \left(x_0 + \int_0^t f(u_0(s)) ds \right) \right\| \\ &= \left\| \int_0^t f(u_1(s)) - f(u_0(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|f(u_1(s)) - f(u_0(s))\| ds \\ &\leq \int_0^t K \|u_1(s) - u_0(s)\| ds \\ &\leq \int_0^t KL ds \leq KL |t| \leq KLa. \end{aligned}$$

Na próxima etapa,

$$\begin{aligned} \|u_3(t) - u_2(t)\| &= \left\| \int_0^t f(u_2(s)) - f(u_1(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|f(u_2(s)) - f(u_1(s))\| ds \\ &\leq \int_0^t K \|u_2(s) - u_1(s)\| ds \\ &\leq K^2 La \int_0^t ds = K^2 Lat \\ &= K^2 La^2 = (Ka)^2 L. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, se

$$\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\| \leq (Ka)^{n-1}L,$$

então,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| &= \left\| \int_0^t f(u_n(s)) - f(u_{n-1}(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t K \|u_n(s) - u_{n-1}(s)\| ds \leq K(Ka)^{n-1}Lt \\ &\leq K(Ka)^{n-1}La = K^n a^n L \\ &= (Ka)^n L. \end{aligned}$$

Pelo fato de $Ka < 1$, segue que o último termo é o termo geral de uma série convergente. Usando o Teorema 10.7 de [12] temos que a sequência de funções $u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) - u_{k-1}(t)$ converge uniformemente em $(-a, a)$. Por outro lado, $u_n(t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^n u_k(t) - u_{k-1}(t)$ para todo $t \in (-a, a)$. Portanto $u_n(\cdot)$ converge uniformemente para uma função $u : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_0 + \int_0^t f(u_{n-1}(s)) ds \right) \\ &= x_0 + \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_{n-1}(s)) ds \\ &= x_0 + \int_0^t f(u(s)) ds, \end{aligned}$$

logo, u é a solução da equação integral. O que conclui a prova do Teorema 3.1.1 . ■

3.2 Continuidade das soluções em relação as condições iniciais

Nesta seção veremos o resultado que indica que dadas condições iniciais próximas de uma equação diferencial $x' = f(x)$ as suas respectivas soluções não estarão afastadas demasiadamente. Em outras palavras, diremos que as soluções “caminham” continuamente sobre a variação de condições iniciais.

O próximo teorema nos diz, que sobre certas condições se um dado inicial está próximo do outro, então as soluções que partem desses dados iniciais ficam próximas em um intervalo de tempo compacto. Para a demonstração de tal teorema precisaremos da Desigualdade de Gronwall, apresentada no Capítulo 2 através do Lema 2.3.2.

Teorema 3.2.1 *Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ aberto e suponha que $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ tenha uma constante de Lipschitz K . Sejam $y(t), z(t)$ soluções para*

$$x' = f(x)$$

no intervalo fechado $[t_0, t_1]$. Então, para todo $t \in [t_0, t_1]$:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| \exp K(t - t_0).$$

Demonstração: Vamos definir

$$v(t) = \|y(t) - z(t)\|,$$

desde que

$$y(t) - z(t) = y(t_0) - z(t_0) + \int_{t_0}^t [f(y(s)) - f(z(s))] ds,$$

temos

$$v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^t K v(s) ds.$$

Assim, ao fazer a aplicação do Lema 2.3.2 concluímos esta demonstração. ■

Este teorema é importante em um contexto prático, pois se erramos uma quantidade pequena nas condições iniciais, como ε , as soluções do modelo dadas pela equação $x' = f(x)$ não estará tão distante da solução para a condição inicial correta.

3.3 Teorema do prolongamento de solução

Uma pergunta que aparece no estudo de soluções das equações diferenciais é se o domínio da solução encontrada é o maior possível, isto é, dada uma solução para a equação, é possível estender o domínio de definição da solução ou ele é o maior possível. Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes para o estudo do problema de prolongamento de soluções.

Lema 3.3.1 *Seja $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Suponha que duas soluções $u(t), v(t)$ de $x' = f(x)$ são definidas no mesmo intervalo aberto J contendo t_0 e satisfazem $u(t_0) = v(t_0)$. Então $u(t) = v(t)$ para todo $t \in J$.*

Demonstração: Sabemos do Teorema 3.1.1 da Seção 3.1 que $u(t) = v(t)$ em algum intervalo aberto em torno de t_0 . A união de todos esses intervalos abertos é o maior

intervalo aberto J^* em J , em torno de t_0 em que $u = v$. Mas J^* deve ser igual a J , pois, se não, J^* tem um ponto final $t_1 \in J$.

Suponhamos que t_1 é o ponto final à direita, sendo o outro caso semelhante. Por continuidade, $u(t_1) = v(t_1)$. Mas, pelo Teorema 3.1.1, $u = v$ em algum J' , que seja intervalo em torno de t_1 . Então $u = v$ em $J^* \cup J'$, que é maior do que J^* . O que é uma contradição, e tal contradição prova o lema. ■

O Lema 3.3.1 nos garante que as soluções de uma mesma equação devem coincidir na interseção de seus domínios, caso os domínios sejam conjuntos diferentes. Mas esse fato não garante que a solução estará definida para todo t .

Exemplo 3.3.1 A equação em \mathbb{R} ,

$$x' = 1 + x^2,$$

tem como solução a função

$$x = \tan(t - c), \quad \text{onde } c \text{ é uma constante.}$$

Essa função não pode ser estendida por um intervalo maior do que

$$c - \frac{\pi}{2} < t < c + \frac{\pi}{2},$$

uma vez que $x(t) \rightarrow \pm\infty$ quando $t \rightarrow c \pm \pi/2$.

Consideremos a equação geral

$$x' = f(x),$$

onde a função f de C^1 é definida em um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $x_0 \in W$ há um intervalo máximo aberto (α, β) contendo 0 em que há uma solução $x(t)$ com $x(0) = x_0$.

Pelo Teorema 3.1.1 há algum intervalo deste tipo, e tomando (α, β) como sendo a união de todos os intervalos abertos contendo 0 em que há uma solução com $x(0) = x_0$. Pelo Lema 3.3.1, as soluções em quaisquer dois intervalos devem coincidir nas interseções dois a dois. Assim tomamos, $J = \bigcup J_i$ união de todos os intervalos J_i de soluções para a condição inicial $x(0) = x_0$ e definindo uma solução $x = x_i$ para $t \in J_i$, onde x_i é a solução com intervalo de domínio J_i construímos uma solução com o maior domínio possível.

O Teorema 3.3.1 a seguir, nos diz que se uma solução $y(t)$ não pode ser prolongada a um intervalo maior, então isso implica que $t \rightarrow \beta$ para qualquer $y(t)$ que se aproxima da fronteira de W ou $|y(t)|$ tende para ∞ (ou ambos).

Neste resultado, buscaremos analisar o que acontece com uma solução, quando os limites de seu domínio são abordados. Analisaremos o resultado apenas para o limite à direita, pois para o limite à esquerda, o processo é análogo.

Teorema 3.3.1 *Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, se $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Considere $y(t)$ uma solução em um intervalo maximal aberto $J = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ com $\beta < \infty$. Então, dado qualquer conjunto compacto $K \subset W$, existe algum $t \in (\alpha, \beta)$ com $y(t) \notin K$.*

Demonstração: Suponha que $y(t) \in K$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$. Como f é contínua, existe $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M$ se $x \in K$. Seja $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

Provaremos que y se estende a uma aplicação contínua $\bar{y} : [\gamma, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema 18, da página 192 de [13], é suficiente provar $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua. Para $t_0 < t_1$ em J temos

$$\begin{aligned} \|y(t_0) - y(t_1)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} y'(s) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(y(s))\| ds \leq (t_1 - t_0)M. \end{aligned}$$

Agora, a curva estendida $\bar{y} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que essa função é diferenciável em β . Para

$$\begin{aligned} \bar{y}(\beta) - \bar{y}(\gamma) &= \lim_{t \rightarrow \beta^+} y(t) - y(\gamma) \\ &= \lim_{t \rightarrow \beta^+} \int_{\gamma}^t y'(s) ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \beta^+} \int_{\gamma}^t f(y(s)) ds \\ &= \int_{\gamma}^{\beta} f(\bar{y}(s)) ds, \end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{\bar{y}(\beta) - \bar{y}(\gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{1}{\beta - \gamma} \int_{\gamma}^{\beta} f(\bar{y}(s)) ds.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\bar{y}(\beta) - \bar{y}(\gamma)}{\beta - \gamma} - f(\bar{y}(\beta)) \right\| &= \left\| \frac{1}{\beta - \gamma} \int_{\gamma}^{\beta} f(\bar{y}(s)) ds - f(\bar{y}(\beta)) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{\beta - \gamma} \left(\int_{\gamma}^{\beta} f(\bar{y}(s)) ds - \int_{\gamma}^{\beta} f(\bar{y}(\beta)) ds \right) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{\beta - \gamma} \left(\int_{\gamma}^{\beta} f(\bar{y}(s)) - f(\bar{y}(\beta)) ds \right) \right\| \\ &\leq \max_{\gamma \leq s \leq \beta} \|f(\bar{y}(s)) - f(\bar{y}(\beta))\| \rightarrow 0 \text{ quando } \gamma \rightarrow \beta^+. \end{aligned}$$

Portanto, \bar{y} é diferenciável em β e satisfaz $\bar{y}'(\beta) = f(\bar{y}(\beta))$. Podemos aplicar o Teorema

3.1.1 e encontrar uma solução em um intervalo $[\beta, \delta)$, $\delta > \beta$, pelo Lema 3.3.1 podemos estender y até o intervalo (α, δ) . Portanto, (α, β) não poderia ser um domínio máximo de uma solução. O que completa a demonstração do teorema. ■

Um fato importante que decorre imediatamente deste teorema é a Proposição 3.3.1.

Proposição 3.3.1 *Seja A um subconjunto compacto do conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ e seja $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de C^1 . Seja $y_0 \in A$ e suponha que seja conhecido que toda curva de solução na forma*

$$y : [0, \beta] \rightarrow W, \quad y(0) = y_0,$$

encontra-se inteiramente em A . Então há uma solução

$$y : [0, \infty) \rightarrow W, \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in A,$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Seja $[0, \beta)$ o intervalo maximal semiaberto no qual há uma solução y como acima. Então $y([0, \beta)) \subset A$ e, então, β não pode ser finito pelo Teorema 3.3.1. ■

3.4 Uma noção sobre sistema dinâmicos e alguns teoremas importantes da teoria de estabilidade

Nesta seção serão apresentados alguns resultados que geralmente não são vistos na dinâmica curricular de cursos de graduação em Matemática-Licenciatura, mas que são de vital importância no processo de aplicações em problemas, principalmente os epidemiológicos (tema do próximo capítulo). Sendo assim, iremos apenas enunciar estes resultados e utilizá-los. Para iniciar esta seção, vamos começar definindo o conceito de sistema dinâmico.

Definição 3.4.1 *Um sistema dinâmico suave em \mathbb{R}^n é uma função $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável, em que $\phi(t, x) = \phi_t(x)$, satisfaz as seguintes condições:*

1. $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a identidade, ou seja, $\phi_0(x_0) = x_0$;
2. A composição $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, para cada t, s em \mathbb{R} .

Observe que a definição implica que o fluxo $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 para cada t e tem um inverso continuamente diferenciável ϕ_{-t} .

Vejamos um exemplo de sistema dinâmico:

Exemplo 3.4.1 *Seja A um operador em um espaço vetorial \mathbb{R}^n , tomando $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $\phi(t, x) = e^{tA}x$. Assim, $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser representado por $\phi_t = e^{tA}$. Claramente, $\phi_0 = e^0 = Id$ ao operador de identidade e como $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$, definimos um sistema dinâmico em \mathbb{R}^n .*

O Exemplo 3.4.1 de um sistema dinâmico, está relacionado à equação diferencial $dx/dt = Ax$ em \mathbb{R}^n . Em geral um sistema dinâmico ϕ_t em \mathbb{R}^n sempre dá origem a uma equação diferencial em \mathbb{R}^n , isto é, um campo vetorial em \mathbb{R}^n , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dado ϕ_t , definimos f como

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t(x) \right|_{t=0}, \quad (3.1)$$

assim, para x em \mathbb{R}^n , $f(x)$ é um vetor em \mathbb{R}^n que pensamos como o vetor tangente a curva $t \rightarrow \phi_t(x)$ em $t = 0$. Deste modo, todo sistema dinâmico dá origem a uma equação diferencial. Reciprocamente, uma equação diferencial autônoma

$$x' = f(x),$$

da origem a um sistema dinâmico $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ em que $\phi_t(x) = x(t)$ e $x(t)$ é a curva solução de (3.1), satisfazendo assim a condição inicial $x(0) = x$.

Vamos considerar agora dois sistemas como dinamicamente equivalentes se houver uma função h que leva um fluxo para o outro. Tal função deve ser um homeomorfismo, isto é, h é uma função bijetora, e contínua, cuja sua inversa também é contínua.

Definição 3.4.2 *Suponhamos que $x' = f(x)$ e $x' = g(x)$ sejam dois sistemas autônomos com respectivos fluxos (sistemas dinâmicos) ϕ^f e ϕ^g . Estes dois sistemas são topologicamente conjugados se houver um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz*

$$\phi^g(t, h(x_0)) = h(\phi^f(t, x_0)).$$

O homeomorfismo h é chamado de conjugação. Portanto, uma conjugação leva curvas solução de $x' = f(x)$ em curvas solução de $x' = g(x)$.

Exemplo 3.4.2 *Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4}\right)$, então h é uma conjugação entre $\phi^f(x, y) = (x, -y)$ e $\phi^g(x, y) = (x, -y + x^3)$.*

Existem três classes de conjugação no \mathbb{R}^2 , são eles, a sela, o centro e os casos especiais $x' = 0$, onde todas as soluções são constantes.

Agora, note que só precisamos decidir sobre conjugações entre sistemas cujas matrizes estão em forma canônica, pois, conforme apresentado no Capítulo 2, se a aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ coloca A na forma canônica, então T leva o tempo t da aplicação do fluxo

$Y' = (T^{-1}AT)Y$ à aplicação do tempo t para $X' = AX$. Assim, nossa classificação de sistemas lineares planares agora prossegue exatamente como no caso unidimensional.

Definição 3.4.3 *Uma matriz A é hiperbólica se nenhum de seus autovalores tiver parte real nula. Também dizemos que o sistema $X' = AX$ é hiperbólico.*

Exemplo 3.4.3 *Suponha que as matrizes 2×2 A_1 e A_2 sejam hiperbólicas. Então os sistemas lineares $X' = A_i X$ são conjugados se, e somente se cada matriz tem o mesmo número de autovalores com parte real negativa.*

A demonstração do resultado enunciado no exemplo anterior foge ao foco deste trabalho, porém as conclusões decorrentes dele são importantes a serem comentadas. Devido a conjugação topológica, estabelecer uma ideia dinamicamente equivalente entre os sistemas de equações é possível notar que a invariância da dimensão do auto-espaço das matrizes que definem as equações é uma característica a se ressaltar. Além de que, o comportamento das trajetórias não são alterados quando se toma um ponto de vista topológico pelas conjugações.

3.4.1 Teorema de Hartman-Grobman

Começaremos enunciando resultados que explicam o comportamento geométrico das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares autônomo, isto é, quando a função f ao lado direito da equação 3.2 não depende de t . A dinâmica local das soluções do sistema

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (3.2)$$

é determinada pelos seus pontos de equilíbrio e pela linearização da função f em torno dos pontos de equilíbrio. Sendo assim, veremos que o problema não linear se comporta de forma semelhante a um sistema linear da forma

$$x'(t) = Ax(t), \quad (3.3)$$

em uma vizinhança do ponto de equilíbrio.

Definição 3.4.4 *Uma solução maximal do sistema (3.2) de forma que $x(0) = x_0$ é dita uma trajetória de f passando por x_0 .*

Definição 3.4.5 *Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é chamado ponto de equilíbrio ou ponto crítico de (3.2) se $f(x_0) = 0$. Um ponto de equilíbrio x_0 é dito ponto de equilíbrio Hiperbólico de (3.2) se nenhum dos autovalores da matriz $Df(x_0)$ tem parte real igual a zero.*

A seguir será apresentada a noção de estabilidade de uma solução de equilíbrio, na qual é estável se todas as soluções que partem suficientemente próximas de x_0 se mantêm próximas dessa solução.

Definição 3.4.6 *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Seja P um ponto de equilíbrio de $x' = f(x)$. Dizemos que a solução será*

- (i) *estável, se para toda vizinhança $U \subset D$ de P , existe uma vizinhança $V \subset U$ tal que, para todo $x \in V$, a solução de (3.2) está definida para todo $t \geq 0$ e $\phi_t(x) \in U$, $t \geq 0$;*
- (ii) *assintoticamente estável, se é estável e $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = P$.*

O próximo teorema mostra que perto de um ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 , o sistema não linear (3.2) tem a mesma estrutura qualitativa que o sistema linear associado (3.3), onde $A = Df(x_0)$. A demonstração pode ser encontrada em [14]. O resultado será enunciado com o ponto de equilíbrio sendo a origem no \mathbb{R}^n , entretanto por mudança de coordenada é possível mostrar que o resultado continua válido para qualquer ponto de equilíbrio fora da origem.

Teorema 3.4.1 [14] (Hartman-Grobman) *Seja E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo a origem, seja $f \in C^1(E)$ e ϕ_t o fluxo do sistema não linear (3.2). Suponha $f(0) = 0$ e que a matriz $A = Df(0)$ não possua nenhum autovalor com a parte real nula. Então, existe um homeomorfismo h de um conjunto aberto U contendo x_0 em um conjunto aberto V , contendo a origem, tal que para cada $x_0 \in U$, existe um intervalo aberto $I_0 \in \mathbb{R}$ contendo 0 tal que todo $t \in I_0$*

$$h \circ \phi_t(x_0) = e^{At}h(x_0),$$

ou seja, as trajetórias próximas de (3.2) próximas à x_0 são levadas em $x' = Ax$ próximas à origem e o tempo é preservado.

3.4.2 Poincaré-Bendixson

Agora, vamos apresentar o Teorema de Poincaré-Bendixson, um resultado muito importante no estudo de Sistemas Dinâmicos, pois estabelece para quais tipos de conjunto limite as trajetórias de um campo de vetores em \mathbb{R}^2 deve convergir. E para apresentar os principais resultados dessa teoria, consideremos um sistema planar geral

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) & x(0) &= u_1^o \\ y' &= g(x, y) & y(0) &= u_2^o. \end{aligned}$$

Seja $u(t) = (x(t), y(t))$ uma curva de solução com condição inicial $u^o = (u_1^o, u_2^o)$.

Definição 3.4.7 O conjunto limite ω do ponto u^0 , denotado por $\omega(u^0)$, consiste em todos os pontos $a \in \mathbb{R}^2$ para os quais existe uma sequência t_j , com $j = 1, 2, \dots$, tal que

$$u(t_j) \rightarrow a \quad t_j \rightarrow \infty.$$

Definição 3.4.8 Uma órbita homoclínica é uma trajetória de um fluxo de um sistema dinâmico que une um ponto de equilíbrio de sela a si mesmo. Uma órbita heteroclínica (às vezes chamada de uma conexão heteroclínica) é um caminho no espaço de fase que une dois pontos de equilíbrio diferentes.

Definição 3.4.9 Uma separatriz é uma curva de fase que encontra um equilíbrio hiperbólico de pontos ou conecta as variedades estáveis e instáveis de um par de pontos de equilíbrio. Uma separatriz marca um limite entre setores com curvas de fases com diferentes propriedades.

Ressaltamos que uma variedade é um espaço matemático que em pequena escala se assemelha ao espaço euclidiano de uma dimensão específica.

Definição 3.4.10 Um ciclo separatriz consiste na união de um número finito de equilíbrios p_j para $j = 1, \dots, m$ e separatrizes Γ_j de modo que o fluxo em Γ_j é de p_j para p_{j+1} e $p_{m+1} = p_1$.

Definição 3.4.11 Um ciclo separatriz composto ou gráfico é a união de um número finito de ciclos separatrizes orientados de forma compatível.

Os tipos de conjuntos de limites ômega para uma órbita arbitrária de um sistema planar são dados pelo seguinte teorema.

Teorema 3.4.2 [8] (*Tricotomia de Poincaré-Bendixson*) Suponha que $X \subseteq \mathbb{R}^2$, onde X é um conjunto aberto, contém apenas um número finito de equilíbrios. Seja $u(t)$ uma solução em X que é definido e limitado em $[0, \infty)$ com $\omega(u^0) \subseteq X$. Então, é válida apenas uma das seguintes afirmações:

1. $\omega(u^0)$ consiste em um equilíbrio.
2. $\omega(u^0)$ é uma órbita periódica.
3. $\omega(u^0)$ é um gráfico.

Para descartar possíveis órbitas periódicas e gráficos dentro de X , podemos usar o critério Dulac–Bendixson, que se aplica apenas a sistemas planares, apresentado no Teorema 3.4.3 a seguir.

Teorema 3.4.3 (*Critério de Dulac-Bendixson*) *Seja $Z \subseteq X$ aberto e simplesmente conexo. Suponha o seguinte:*

1. *As funções f e g são continuamente diferenciáveis em Z .*
2. *Existe uma função $D : Z \rightarrow \mathbb{R}$, continuamente diferenciável em Z , de modo que*

$$\frac{\partial(Df)}{\partial x} + \frac{\partial(Dg)}{\partial y}$$

é estritamente positivo quase em todos os lugares em Z ou estritamente negativo quase em todos os lugares em Z .

Então Z não contém órbitas ou gráficos periódicos.

Definição 3.4.12 *A função D é chamada de função Dulac. Se $D \equiv 1$, então o Critério de Dulac é referido como o Critério de Bendixson.*

Os conceitos apresentados nessa seção são de fundamental importância para o estudo dos modelos epidemiológicos que serão abordados no Capítulo 4.

Capítulo 4

Aplicações em modelos epidemiológicos

Neste capítulo serão apresentados os conceitos acerca da modelagem matemática, bem como uma aplicação prática envolvendo a COVID-19. As principais referências utilizadas para desenvolvimento deste capítulo, foram [4], [8] e [15].

4.1 O que é um modelo matemático?

Modelos matemáticos são utilizados em muitos campos da atividade humana, como: Matemática, Economia, Física, Química, Biologia, Psicologia, Comunicação, Demografia, Astronomia, Engenharia, etc.

O modelo é uma simplificação da realidade, para ser um modelo útil ele tem que ter apenas os componentes importantes para poder representar de maneira conveniente um sistema, de maneira que este fique o mais próximo da realidade possível, para que assim se possa resolver o problema com precisão.

Os principais modelos matemáticos são: Modelo Logístico, Modelo de Lotka-Volterra e Modelo de Kermack-McKendrick.

Neste trabalho focaremos no Modelo de Kermack-McKendrick.

4.2 O Modelo de Kermack-McKendrick

Em 1927 Kermack e McKendrick formularam um modelo matemático para modelar problemas de epidemiologia.

Para esse modelo, eles consideraram a população dividida em três classes rotuladas por S , I e R , onde:

- $S(t)$ indica o número de indivíduos suscetíveis à doença, ou seja, que ainda não estão infectados no instante t .

- $I(t)$ indica o número de indivíduos infectados, considerados infecciosos e capazes de espalhar a doença por contato com suscetíveis.
- $R(t)$ indica o número de indivíduos que foram infectados e, em seguida, removidos da possibilidade de serem novamente infectados ou de disseminar a infecção.

O modelo SIR pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t), \end{cases}$$

onde, β e γ representam respectivamente a taxa de infecção e taxa de recuperação.

A população total neste modelo é considerada como constante, isto é, a taxa de natalidade é a mesma que a de mortalidade, por isso podemos escrever o $N = S(t) + I(t) + R(t)$.

Por outro lado, podemos ter modelos incorporando novas informações como demografia (incluindo taxa de natalidade e mortalidade) e estratégias de controle da doença, como por exemplo vacinação.

As equações do modelo SIR sem vacinação podem ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \mu N(t) - \beta \frac{I(t)}{N(t)} S(t) - \mu S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta \frac{I(t)}{N(t)} S(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t), \end{aligned}$$

onde,

- $\mu N(t)$ representa a taxa de natalidade.
- $\lambda(t) = \beta \frac{I(t)}{N(t)}$ representa a taxa de transmissão (infecção).

Já a equação para o modelo SIR com vacinação é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \mu N(t) - \beta \frac{I(t)}{N(t)} S(t) - vS(t) - \mu S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta \frac{I(t)}{N(t)} S(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= vS(t) + \gamma I(t) - \mu R(t), \end{aligned}$$

onde,

- $\mu N(t)$ representa a taxa de natalidade.

- $\lambda(t) = \beta \frac{I(t)}{N(t)}$ e representa a taxa de transmissão (infecção).
- v representa a taxa de vacinação.

A Figura 4.1 a seguir, ilustra os compartimentos e as taxas que representam o modelo SIR com vacinação.

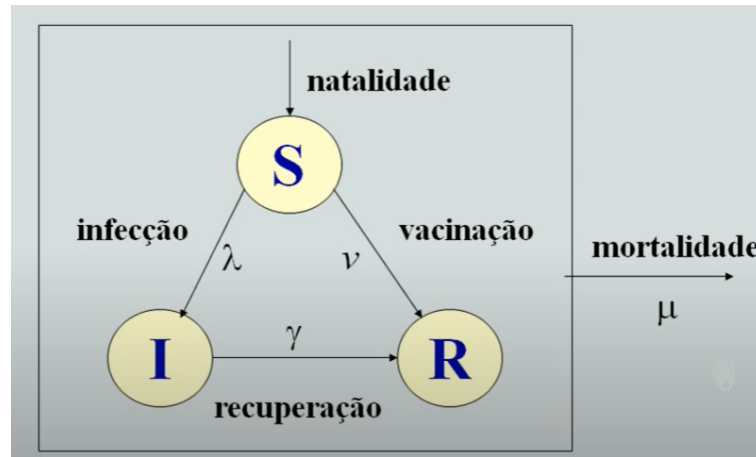


Figura 4.1: Modelo com vacinação.

Fonte:[3]

4.3 Parâmetro de reprodução R_0

Quando estamos trabalhando com problemas epidemiológicos, devemos sempre levar em consideração o parâmetro R_0 , pois este representa o número de casos secundários que um infectado pode produzir se introduzido em uma população completamente suscetível. Sabendo desta informação, temos os seguintes casos:

- $R_0 = 1$ há uma situação de equilíbrio (endemia);
- $R_0 > 1$ a doença cresce na população (epidemia);
- $R_0 < 1$ a doença desaparece da população.

É possível estimar o valor de R_0 , mas para isso devemos lembrar que ele depende de três parâmetros, são eles:

1. a taxa de contato (contato entre os indivíduos da população);
2. a duração do período infeccioso;
3. a probabilidade de que um contato entre um infectado e um suscetível, leve à infecção.

Esses parâmetros podem variar consideravelmente para diferentes doenças infecciosas, mas também para a mesma doença em diferentes populações.

Deste modo, a estimativa de R_0 pode ser feita de diferentes maneiras, tais como, utilizando os dados e estimativas dos parâmetros; com base na fase inicial de crescimento da epidemia; com base no tamanho final da epidemia; usando dados de situações de equilíbrio.

Neste trabalho vamos apresentar três formas de estimar o R_0 , através da situação de equilíbrio, com base na fase inicial da epidemia e com base no tamanho final da epidemia.

Pelo equilíbrio endêmico da doença: vamos tomar (S^*, I^*, R^*) como equilíbrios, deste modo vamos ter a seguinte equação

$$\left. \frac{dI(t)}{dt} \right|_{S^*, I^*, R^*} = I^* \left[\beta \frac{S^*}{N} - (\mu + \gamma) \right] = 0,$$

tomando $x^* = \frac{S^*}{N}$ como sendo a fração de suscetíveis no equilíbrio, conseguimos obter que

$$\begin{aligned} I^*(\beta x^* - \mu - \gamma) &= 0 \\ \Rightarrow x^* &= \frac{\mu + \gamma}{\beta} \\ \Rightarrow R_0 &= \frac{\beta}{\mu + \gamma}, \end{aligned}$$

já que $R_0 = \frac{1}{x^*}$, devido a razão de reprodução efetiva (R), que representa o número de casos secundários produzidos em uma população de hospedeiros não totalmente suscetíveis, e é dada por $R = R_0 x^*$, e no equilíbrio endêmico $R = 1$.

Agora, vamos estimar R_0 com base na fase inicial de crescimento da epidemia. considere que a equação para os infectados em um modelo SIR é dada como,

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) \frac{I(t)}{N} - (\mu + \gamma)I(t),$$

onde $N(t) = S(t) + I(t) + R(t) = N$.

Como no início de uma epidemia $S(t) \approx N$, então

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t) \frac{I(t)}{N} - (\mu + \gamma)I(t) \\ &= \beta N \frac{I(t)}{N} - (\mu + \gamma)I(t) \\ &= \beta I(t) - (\mu + \gamma)I(t) \\ &= [\beta - (\mu + \gamma)]I(t). \end{aligned}$$

Se,

$$\begin{aligned}\frac{dI(t)}{dt} < 0 &\Rightarrow [\beta - (\mu + \gamma)] < 0 \\ &\Rightarrow \beta < (\mu + \gamma) \\ &\Rightarrow \frac{\beta}{\mu + \gamma} < 1 \\ &\Rightarrow R_0 < 1,\end{aligned}$$

ou seja, há um decréscimo nos casos.

Se,

$$\begin{aligned}\frac{dI(t)}{dt} > 0 &\Rightarrow [\beta - (\mu + \gamma)] > 0 \\ &\Rightarrow \beta > (\mu + \gamma) \\ &\Rightarrow \frac{\beta}{\mu + \gamma} > 1 \\ &\Rightarrow R_0 > 1.\end{aligned}$$

isto é, há um aumento nos casos.

Deste modo, a equação para o número de infectados ao longo do tempo t é dada da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\frac{dI(t)}{dt} &= [\beta - (\mu + \gamma)]I(t) \\ \Rightarrow \frac{dI(t)}{I(t)} &= [\beta - (\mu + \gamma)]dt \\ \Rightarrow \int \frac{dI(t)}{I(t)} &= \int [\beta - (\mu + \gamma)]dt \\ \Rightarrow \ln I(t) &= [\beta - (\mu + \gamma)]t + c \\ \Rightarrow e^{\ln I(t)} &= e^{[\beta - (\mu + \gamma)]t} e^c \\ \Rightarrow I(t) &= I(0)e^{[\beta - (\mu + \gamma)]t},\end{aligned}$$

onde c e $e^c = I(0)$ representam constantes. Isto é, a solução para a equação $\frac{dI(t)}{dt}$ é dada por $I(t) = I(0)e^{[\beta - (\mu + \gamma)]t}$, onde este resultado nos garante qual será o número de infectados ao longo do tempo.

Se quisermos saber qual o tempo para que o número de infectados duplique, temos

que fazer $I(t_d) = 2I(0)$ logo,

$$\begin{aligned} 2I(0) &= I(0)e^{[\beta - (\mu + \gamma)]t_d} \\ \Rightarrow 2 &= e^{[\beta - (\mu + \gamma)]t_d} \\ \Rightarrow \ln(2) &= \ln[e^{[\beta - (\mu + \gamma)]t_d}] \\ \Rightarrow \ln(2) &= [\beta - (\mu + \gamma)]t_d. \end{aligned}$$

Considerando $R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}$ e relacionando com $\ln(2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2)}{\mu + \gamma} &= \left[\frac{\beta}{\mu + \gamma} - \frac{(\mu + \gamma)}{\mu + \gamma} \right] t_d \\ \Rightarrow \frac{\ln(2)}{\mu + \gamma} &= (R_0 - 1)t_d \\ \Rightarrow \frac{\ln(2)}{(\mu + \gamma)t_d} &= R_0 - 1 \\ \Rightarrow R_0 &= 1 + \frac{\ln(2)}{(\mu + \gamma)t_d}. \end{aligned}$$

Assim, a partir do crescimento inicial do número de infectados, há uma estimativa para R_0 .

Já para se estimar R_0 com base na fase final da epidemia, consideramos que o tempo de duração de uma epidemia é inferior à escala de tempo demográfica, assim se pode ignorar as taxas vitais ($\mu = 0$) e vamos escrever as equações para o modelo SIR da seguinte maneira:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t) \frac{I(t)}{N}, \quad \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) \frac{I(t)}{N} - \gamma I(t), \quad \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t). \quad (4.1)$$

Definindo

$$s(t)N = S(t), \quad i(t)N = I(t), \quad r(t)N = R(t), \quad (4.2)$$

aplicando (4.2) em (4.1) e dividindo por N , obtemos

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\beta s(t)i(t), \quad \frac{di(t)}{dt} = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t), \quad \frac{dr(t)}{dt} = \gamma i(t).$$

No início da epidemia, $s \approx 1$ e $\frac{di}{ds} = (\beta - \gamma)i$.

Há o decréscimo de casos se $\beta - \gamma < 0$ ($R_0 < 1$) e aumento se, $\beta - \gamma > 0$ ($R_0 > 1$), com $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$.

Temos então que o plano de fase (s, i) para o modelo SIR é dado por

$$\begin{aligned}
 \frac{di}{ds} &= \frac{\beta si - \gamma i}{-\beta si} \\
 &= \frac{\beta si}{-\beta si} - \frac{\gamma i}{-\beta si} \\
 &= -1 + \frac{\gamma}{\beta s} \\
 \Rightarrow \frac{di}{ds} &= -1 + \frac{\gamma}{\beta s} \\
 \Rightarrow di &= \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta s}\right) ds
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Integrando a equação (4.3) teremos,

$$\begin{aligned}
 \int_{i(0)}^{i(t)} di &= \int_{s(0)}^{s(t)} \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta s}\right) ds \\
 \Rightarrow \int_{i(0)}^{i(t)} di &= \int_{s(0)}^{s(t)} -1 ds + \int_{s(0)}^{s(t)} \frac{\gamma}{\beta s} ds \\
 \Rightarrow i(t) - i(0) &= -s(t) + s(0) + \frac{\gamma}{\beta} (\ln[s(t)] - \ln[s(0)]),
 \end{aligned}$$

como $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, temos que

$$i(t) - i(0) = -s(t) + s(0) + \frac{1}{R_0} \ln[s(t)] - \frac{1}{R_0} \ln[s(0)]$$

e organizando a equação anterior em função de t e 0 , teremos:

$$i(t) + s(t) - \frac{1}{R_0} \ln[s(t)] = i(0) + s(0) - \frac{1}{R_0} \ln[s(0)],$$

essa relação se torna constante ao longo do tempo.

Para tempos longos ($t \rightarrow \infty$), $i(\infty) = 0$ (a epidemia desaparece) e supondo que no começo $i(0)$, o número de infectados se aproxima de 0, ($i(0) \approx 0$).

Então obtemos a seguinte relação para $t \rightarrow \infty$

$$0 + s(\infty) - \frac{1}{R_0} \ln[s(\infty)] = 0 + s(0) - \frac{1}{R_0} \ln[s(0)],$$

organizando a equação anterior, teremos

$$\frac{1}{R_0} \ln[s(\infty)] + \frac{1}{R_0} \ln[s(0)] = s(0) - s(\infty),$$

multiplicando ambos os lados por R_0 ,

$$\begin{aligned} -\ln[s(\infty)] + \ln[s(0)] &= R_0[s(0) - s(\infty)] \\ \Rightarrow R_0 &= \frac{\ln[s(0)] - \ln[s(\infty)]}{s(0) - s(\infty)}. \end{aligned}$$

Temos então, que esta é a estimativa para R_0 , partindo da fase final da epidemia.

4.3.1 Proporção crítica de vacinação

Vimos nas seções anteriores que utilizando os conhecimentos que se tem sobre uma epidemia e calculando seus parâmetros, é possível prever como a doença pode ser controlada ao longo do tempo.

E para se evitar uma epidemia, o número de indivíduos que devem ser vacinados corresponde a $x^* = 1 - p$, onde p é a fração protegida pela vacinação. Assim, conseguimos obter a seguinte equação:

$$R = R_0 x^* = R_0(1 - p).$$

Para que a doença seja controlada, utilizamos a equação a seguir para modelar o problema:

$$\begin{aligned} R &= R_0(1 - p) < 1 \\ \Rightarrow p &> 1 - \frac{1}{R_0}. \end{aligned}$$

Podemos assim, definir uma proporção crítica de vacinação p_c para atingir a erradicação da doença na sociedade, esta proporção é dada por $p_c = 1 - \frac{1}{R_0}$. Veja a Figura (4.2), que mostra o gráfico de R_0 em função da proporção crítica p_c , se tomarmos $R_0 = 2$, logo teremos $p_c = 0,5$, assim se a proporção de vacinados estiver acima de 0,5 temos a erradicação da doença, mas se estiver abaixo de 0,5, a doença persistirá. Em particular, o gráfico dado por R_0 em função de p_c delimita duas regiões, que indicam uma proporção de vacinação para a erradicação da doença.

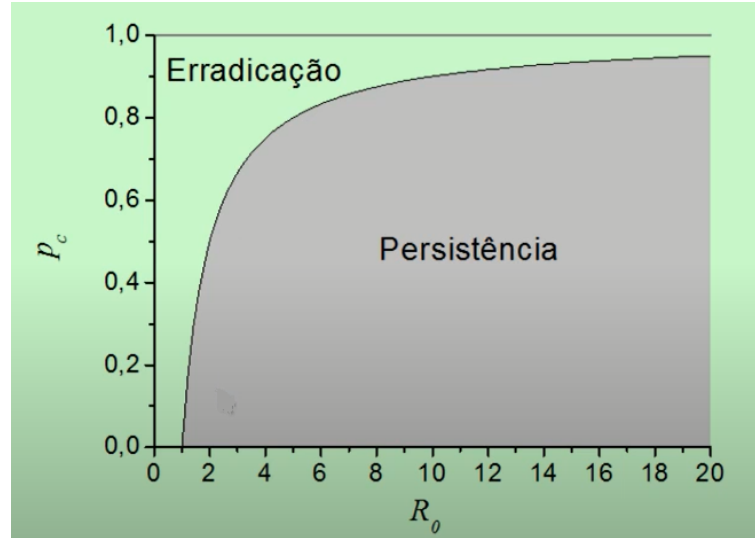


Figura 4.2: Gráfico de $p_c = 1 - \frac{1}{R_0}$.
Fonte:[3].

Nesta seção foi apresentado de maneira teórica como funciona o modelo SIR, como podemos encontrar o parâmetro de reprodução (R_0) para se obter informações sobre o comportamento da doença ao longo do tempo na sociedade. Já na Seção 4.5 vamos mostrar como é a aplicação desse modelo em um problema da vida real.

4.3.2 Estabilidade local dos equilíbrios do modelo SIR

Com base no que foi estudado no Capítulo 3, apresentado no Teorema 3.4.1 e com os conhecimentos que temos sobre o modelo SIR, vamos estudar nesta seção como é dada a estabilidade local do modelo SIR com demografia.

Dois parâmetros têm unidades: γ e μ . Uma vez que t está em unidade de tempo, temos que multiplicar t por uma das taxas para obter uma quantidade sem unidade. Definindo $\tau = (\gamma + \mu)t$, observe que τ é uma quantidade adimensional. Essa mudança irá remover o parâmetro multiplicando I , deixando $N(t) = N(\frac{\tau}{\gamma + \mu}) = \hat{N}(\tau)$. De modo semelhante, $I(t) = \hat{I}(\tau)$. Pela regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{S}}{d\tau} &= \frac{1}{\gamma + \mu} \frac{dS}{dt} \\ \frac{d\hat{I}}{d\tau} &= \frac{1}{\gamma + \mu} \frac{dI}{dt}. \end{aligned}$$

Redimensionamos os \hat{S} e \hat{I} variáveis com o tamanho total da população limitante. Portanto, $x(t) = \frac{\mu\hat{S}}{N}$ e $y(t) = \frac{\mu\hat{I}}{N}$. As novas variáveis dependentes $x(\tau)$ e $y(\tau)$ também são

quantidades adimensionais. O sistema para eles se torna

$$\begin{cases} x' = \rho(1 - x) - R_0xy, \\ y' = (R_0x - 1)y, \end{cases} \quad (4.4)$$

onde,

$$\rho = \frac{\mu}{\gamma + \mu} \quad R_0 = \frac{N\beta}{\mu(\gamma + \mu)},$$

são ambos parâmetros adimensionais. Observe que reduzimos o número de parâmetros de cinco para dois.

A estabilidade local do equilíbrio é determinada pelos autovalores do Jacobiano calculados nesse equilíbrio. O Jacobiano do modelo SIR com demografia dados pelas equações (4.4), em um equilíbrio (x^*, y^*) é dado por:

$$J = \begin{pmatrix} -\rho - R_0y^* & -R_0x^* \\ R_0y^* & R_0x^* - 1 \end{pmatrix}.$$

Para obter a estabilidade do equilíbrio livre de doença, se avalia J em $(1, 0)$

$$J = \begin{pmatrix} -\rho & -R_0 \\ 0 & R_0 - 1 \end{pmatrix}.$$

Os dois autovalores são $\lambda_1 = -\rho$ e $\lambda_2 = R_0 - 1$, lembrando que os autovalores são as entradas diagonais da matriz. O primeiro autovalor é negativo, enquanto o segundo autovalor será negativo se $R_0 < 1$. Neste caso, o equilíbrio livre de doença é um atrator estável. O segundo autovalor será positivo se $R_0 > 1$. Neste caso, o equilíbrio livre de doença é instável e teremos uma sela.

Agora vamos investigar a estabilidade local do equilíbrio endêmico. Considerando o Jacobiano no equilíbrio endêmico sendo:

$$J = \begin{pmatrix} -\rho - R_0y^* & -R_0x^* \\ R_0y^* & R_0x^* - 1 \end{pmatrix}.$$

Como vimos na seção 4.3 o equilíbrio endêmico é dado por $R = 1$, e como $R = R_0x^*$, logo $R_0x^* - 1 = 0$. Sendo assim o Jacobiano se torna

$$J = \begin{pmatrix} -\rho - R_0y^* & -R_0x^* \\ R_0y^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que traço desta matriz é negativo, $Tr(J) = -\rho - R_0y^* < 0$, já o determinante é dado por $\det(J) = R_0x^*y^* > 0$. O Teorema 2.2.1, do Capítulo 2, nos diz que o equilíbrio

endêmico é localmente assintoticamente estável.

Desta forma, para determinar o tipo de equilíbrio endêmico, consideramos a equação característica

$$\begin{pmatrix} -\rho - R_0 y^* - \lambda & -R_0 x^* \\ R_0 y^* & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

e ao expandirmos o determinante, encontramos a equação característica do equilíbrio endêmico:

$$\begin{aligned} -\lambda(-\rho - R_0 y^* - \lambda) + R_0^2 y^* x^* &= 0 \\ \lambda\rho + \lambda R_0 y^* + \lambda^2 + R_0^2 y^* x^* &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda(\rho + R_0 y^*) + R_0^2 y^* x^* &= 0. \end{aligned}$$

Uma vez que o equilíbrio endêmico é explicitamente conhecido, é possível expressar os coeficientes da equação característica nos termos dos parâmetros do sistema:

$$\begin{aligned} \rho + R_0 y^* &= \rho + R_0 \rho \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) = \rho R_0, \\ R_0^2 x^* y^* &= R_0^2 \frac{1}{R_0} \rho \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) = \rho(R_0 - 1) \end{aligned}$$

Assim, a equação característica se torna

$$\lambda^2 + \rho R_0 \lambda + \rho(R_0 - 1) = 0.$$

Portanto, as raízes da equação característica são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\rho R_0 + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-\rho R_0 - \sqrt{\Delta}}{2}, \end{aligned}$$

onde $\Delta = (\rho R_0)^2 - 4\rho(R_0 - 1)$. Portanto, se $\Delta > 0$, então a equação característica tem duas raízes reais negativas, e o equilíbrio endêmico é um atrator estável. Se $\Delta < 0$, então a equação característica tem duas raízes conjugadas complexas com parte real negativa, e o equilíbrio endêmico, neste caso, é um foco estável.

Teorema 4.3.1 [8] *Suponha $R_0 < 1$. Então existe um equilíbrio único, o equilíbrio livre de doença $(1, 0)$, que é localmente estável. Se $R_0 > 1$, existem dois equilíbrios: o equilíbrio livre de doenças $(1, 0)$, que é instável, e o equilíbrio endêmico, que é localmente assintoticamente estável.*

O Teorema 4.3.1 resume os resultados sobre a existência e estabilidade de equilíbrios do modelo SIR com demografia.

4.4 Estabilidade global

Um equilíbrio é denominado globalmente estável, se for estável para quase todas as condições iniciais, não apenas para aquelas que estão próximas a ele. A estabilidade global de um equilíbrio nem sempre pode ser provada. Um equilíbrio que é localmente estável pode ser globalmente estável se não houver outro equilíbrio localmente estável coexistindo com ele.

Para o modelo SIR, temos dois casos, no caso de $R_0 < 1$, o equilíbrio livre de doença é o único equilíbrio, e é localmente assintoticamente estável, podemos esperar que ele seja também globalmente estável. Já no caso $R_0 > 1$, o equilíbrio endêmico é o único equilíbrio localmente estável, portanto, podemos esperar que ele também seja globalmente estável.

4.4.1 Estabilidade global do equilíbrio livre de doença

A estabilidade global do equilíbrio livre de doenças pode ser estabelecida para muitos modelos, particularmente para modelos para os quais o equilíbrio livre de doença é o único equilíbrio quando $R_0 < 1$. Notamos que a estabilidade global do equilíbrio livre de doença não pode ser estabelecida para todos os modelos. Para estabelecer uma estabilidade global para o modelo SIR, em [8] é apresentada uma técnica que funciona bem para muitos modelos, incluindo modelos de equações diferenciais parciais. Vejamos o Teorema 4.4.1 a seguir, o qual a demonstração pode ser encontrada no Capítulo 3 de [8].

Teorema 4.4.1 *Suponha $R_0 < 1$. Então, o equilíbrio livre de doenças é globalmente estável.*

Demonstração: Trabalhando com o modelo SIR adimensional onde,

$$\begin{aligned}x' &= \rho(1-x) - R_0xy \\y' &= (R_0x - 1)y\end{aligned}$$

onde $\rho = \frac{\mu}{\gamma + \mu}$ e $R_0 = \frac{N\beta}{\mu(\gamma + \mu)}$.

Primeiro observa-se que se $x(0) > 1$, então $x'(\tau) < 0$, então $x(\tau)$ é uma função decrescente se $x > 1$. Assumindo que $\tau_0 > 0$ são saídas tais que $x(\tau_0) = 1$, então $x'(\tau_0) < 1$ e $x(\tau) \leq 1$ para todo $\tau \geq \tau_0$. Se $x(0) \leq 1$, podem-se tomar $\tau_0 = 0$. Considerando a equação para $y(\tau)$:

$$y'(\tau) = (R_0x - 1)y(\tau).$$

Para $\tau \geq \tau_0$ tem-se,

$$y'(\tau) \leq (R_0 - 1)y(\tau).$$

Integrando, obtém-se $y(\tau) = y(\tau_0)e^{(R_0-1)(\tau-\tau_0)}$. Portanto, se $R_0 < 1$, então $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau) = 0$. É um pouco mais complicado ver que $x \rightarrow 1$. Primeiro, nota-se que $\limsup_{\tau \rightarrow \infty} x \leq 1$. Precisa-se de *limsup*, uma vez que não se sabe se o limite realmente existe. Da equação para x , tem-se:

$$x' \leq \rho(1-x),$$

que pode ser resolvido da mesma forma que a igualdade correspondente.

Tem-se então

$$x(\tau) \leq e^{-\rho x} x(0) + \rho \int_0^\tau e^{-\rho(\tau-s)} ds.$$

Portanto $\limsup_{\tau \rightarrow \infty} x \leq 1$. Por outro lado, uma vez que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y = 0$, isso implica que para todo ϵ , existe $\tau > 0$ tal que $y \leq \epsilon$ para $\tau > \tau_0$. Para esses valores de τ , tem-se

$$x' \geq \rho(1-x) - \epsilon R_0 x.$$

Integrando a desigualdade, obtém-se

$$x(\tau) \geq e^{-(\rho+\epsilon R_0)\tau} x(0) + \rho \int_0^\tau e^{-(\rho+\epsilon R_0)(\tau-s)} ds.$$

Esta desigualdade implica que

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} x \geq \frac{\rho}{\rho + \epsilon R_0}.$$

Uma vez que a desigualdade é válida para todo ϵ , isso significa que $\liminf_{\tau \rightarrow \infty} x \geq 1$. Além disso, o *lim inf* e o *lim sup* são os mesmos, o limite quando $\tau \rightarrow \infty$ de x existe, e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x = 1$. Isso completa a prova da estabilidade global do equilíbrio livre de doenças. ■

4.4.2 Estabilidade global do equilíbrio endêmico

Agora, vamos considerar o modelo SIR adimensional apresentado no sistema 4.4. Este é um sistema planar, e existe uma teoria desenvolvida especificamente para sistemas planares que pode facilitar a compreensão do comportamento da solução e a prova da estabilidade global. Esta teoria foi vista no Capítulo 3, na Seção 3.4.2.

Sendo assim supondo que X seja aberto no primeiro quadrante. Assim, se $R_0 > 1$, então o modelo SIR adimensional tem um equilíbrio único em X , neste caso, o equilíbrio endêmico. Consequentemente, o conjunto limite ômega definido para cada ponto inicial em X é o equilíbrio endêmico, uma órbita potencial periódica, ou um gráfico. Para descartar possíveis órbitas periódicas e gráficos dentro de X , utilizamos o critério Dulac–Bendixson,

enunciado no Teorema 3.4.3, o qual se aplica apenas a sistemas planares.

Tendo em mente essas informações, segue o seguinte resultado.

Teorema 4.4.2 *Suponha $R_0 > 1$. O sistema (4.4) não tem órbitas ou gráficos periódicos em R_+^2 .*

Demonstração: Aplicaremos o Teorema 3.4.3. Seja $Z = X$ o aberto do primeiro quadrante. Seja $f(x, y) = \rho(1 - x) - R_0xy$ e $g(x, y) = (R_0x - 1)y$. Aplicando o Teorema 3.4.3 diretamente com $D = 1$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -\rho - R_0y + R_0x - 1.$$

Esta expressão tem sinal não especificado, que pode mudar potencialmente. O termo que interrompe a definição do sinal é R_0x . Portanto, temos que “eliminar” esse termo. Isso sugere que usando $D(x, y) = 1/y$. Consideramos Z como o aberto do primeiro quadrante, então D é continuamente diferenciável em Z . Além disso, temos

$$\frac{\partial(Df)}{\partial x} + \frac{\partial(Dg)}{\partial y} = -\frac{\rho}{y} - R_0 < 0.$$

Assim, o sistema não tem órbitas periódicas ou gráficos abertos no primeiro quadrante. O que implica que as escolhas dois e três do Teorema 3.4.2 estão descartadas como opção. ■

Teorema 4.4.3 *Suponha $R_0 > 1$. O equilíbrio endêmico (x^*, y^*) do sistema (4.4) é globalmente estável sempre que $I(0) > 0$.*

Demonstração: Aplicamos o Teorema 3.4.2. Primeiro, tende mostrar que todas as soluções do sistema (4.4) são limitadas. Para ver isso, adiciona-se as duas equações em (4.4). Conjunto $\hat{\rho} = \min\{\rho, 1\}$. Então

$$x' + y' \leq \rho - \hat{\rho}(x + y).$$

Por isso,

$$x + y \leq ke^{-\hat{\rho}t} + \frac{\rho}{\hat{\rho}}(1 - e^{-\hat{\rho}t}),$$

onde k é o valor da condição inicial. Obtém-se então

$$\limsup(x + y) \leq \frac{\rho}{\hat{\rho}},$$

ou seja, as soluções permanecem limitadas. Conclui-se então que o primeiro quadrante é positivamente invariante em relação às soluções do sistema (4.4), e contém o conjunto limite ω de cada condição inicial. Portanto, podemos aplicar o Teorema 3.4.2.

Quando $R_0 > 1$, se $y(0) = 0$, então as soluções ficarão no eixo x e convergirão para o equilíbrio livre de doenças. Se $y(0) > 0$, ou seja, $u^0 = (x(0), y(0)) \in X$, então afirma-se que o equilíbrio livre de doenças não pertence ao conjunto limite ω de u^0 .

Suponha que o equilíbrio livre de doenças pertença a $\omega(u^0)$. Então, uma vez que o equilíbrio livre de doenças é uma sela instável, tem uma variedade estável que é dada pelo eixo x . Esse é o caso, porque cada solução que começa de $y(0) = 0$, ou seja, que começa no eixo x , permanece no eixo x e converge para o equilíbrio livre de doenças. Por isso, a diversidade estável do equilíbrio livre de doença não é em X .

Portanto, $\omega(u^0)$ tem que conter outro equilíbrio, ou seja, o equilíbrio endêmico. Mas desde que o equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável, cada solução que se aproxima para ele, fica perto dele. Assim, o equilíbrio livre de doenças não pertence a $\omega(u^0)$. Logo, o conjunto limite ω de u^0 consiste apenas no equilíbrio endêmico, e todas as soluções com $I(0) > 0$ convergem para o equilíbrio endêmico. ■

O Teorema 4.4.3 mostra a estabilidade global do equilíbrio endêmico para o sistema (4.4).

4.5 Modelo SIR para modelagem da COVID-19

Através de estudos feitos na literatura atual, foi possível encontrar diversos trabalhos que utilizam o modelo SIR para estudar e pandemia da COVID-19. Entre os trabalhos analisados, daremos foco nos de [16], [17] e [18].

Em [16], os autores apresentam o modelo SIR contendo os três compartimentos $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$, e cada um representa respectivamente, suscetível, infectado e recuperado. O modelo é apresentado na forma de equações diferenciais, contendo as informações sobre o equilíbrio livre de doença e o equilíbrio endêmico, bem como informações sobre o parâmetro de reprodução básica (R_0), neste trabalho o cálculo da estabilidade global é feito através das construções de funções de Lyapunov, tais funções não foram estudadas neste trabalho devido ao curto prazo de tempo, enquanto a estabilidade local foi calculada utilizando a matriz jacobiana, como foi estudado no Capítulo 2. Para a verificação da eficácia do modelo desenvolvido, eles utilizaram dados do Paquistão para fazer suas simulações, e puderam constatar a eficácia do mesmo.

Já em [17], os pesquisadores apresentam sete modelos matemáticos diferentes que podem ser utilizados no estudo do comportamento da pandemia. Mas ao final eles utilizam o modelo clássico (SIR) para estimar os dados da vida real no estado de Tamil Nadu, na Índia. Nas Figuras 4.3 e 4.4, são apresentados alguns gráficos que mostram estimativas de parâmetros para todo o sistema SIR com base na situação em que o estado se encontrava até agosto de 2020. Os parâmetros α_0 e α_1 , representam respectivamente a taxa de infecção entre os indivíduos da população e a taxa de remoção de infectados da população.

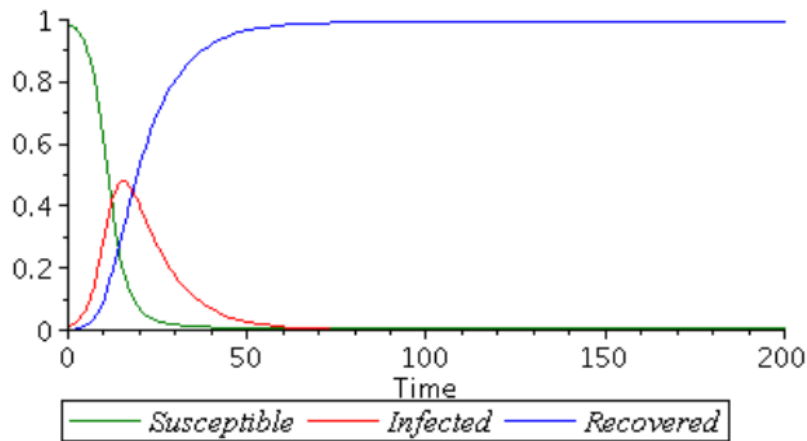


Figura 4.3: Parâmetro de estimativa de $\alpha_0 = 0.5$ e $\alpha_1 = 0.1$.

Fonte:[17].

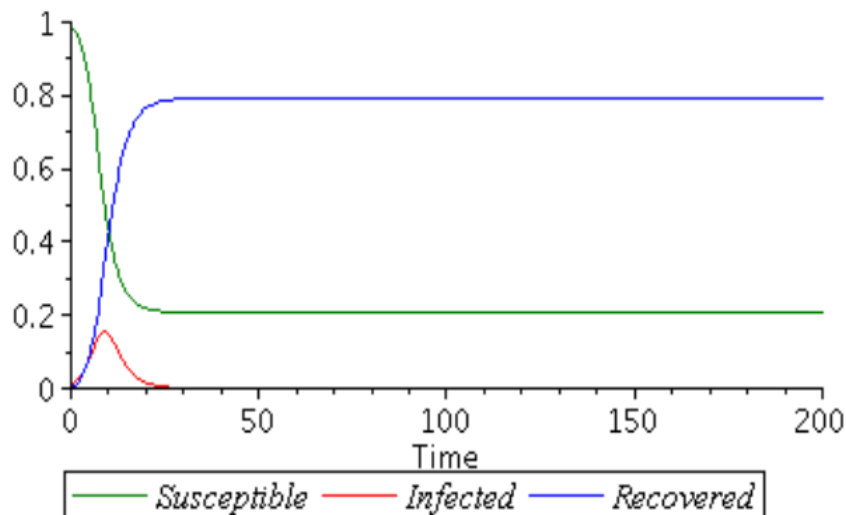


Figura 4.4: Parâmetro de estimativa de $\alpha_0 = 1$ e $\alpha_1 = 0.5$.

Fonte:[17].

Através das análises feitas, os pesquisadores constataram que para os próximos dois meses (que na época esses meses representavam setembro e outubro de 2020), seria necessário um bloqueio completo para conter o surto epidêmico que estava se alastrando pelo estado.

Por fim, em [18], discute a disseminação da epidemia do COVID-19 utilizando o modelo SIR. Neste trabalho foi utilizado o método de Euler para resolver as equações diferenciais ordinárias do modelo. Foram levados em consideração o efeito do distanciamento social no crescimento de infecções e o uso de máscaras.

Na Figura 4.5 é apresentado o modelo SIR proposto, levando em consideração o desenvolvimento do surto do COVID-19 na Índia, este modelo também visou prever o máximo crescimento do surto, além de apresentar os casos de recuperados que se tornam suscetíveis novamente, levando em conta que o vírus poderia sofrer mutações e as pessoas podem se

re-infectar (e de fato, houve essa mutação do vírus o que levou a reinfecção em algumas pessoas).

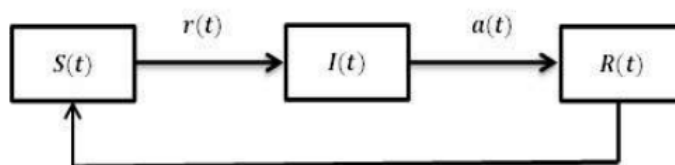


Figura 4.5: Descrição do modelo SIR com com reinfecção.

Fonte:[18].

A ideia do modelo proposto por [18], era de estimar o número de casos semanais, quinzenais, mensais e mesmo anuais, para que deste modo se pudesse auxiliar o governo índico e os médicos nas questões de combate ao vírus, com relação a evitar um colapso nas instalações hospitalares, suprir as necessidades de pacientes e ajudar nas questões de tempo de duração do isolamento social.

Por meio desses trabalhos, pode-se perceber como o modelo SIR pode ser utilizado para auxiliar o combate da pandemia global do COVID-19. Lembrando que estes são apenas alguns trabalhos, se o leitor pesquisar um pouco mais irá encontrar várias adaptações do modelo clássico com diversos compartimentos, levando em conta o avanço e as mutações que o vírus vem sofrendo ao longo do tempo.

Capítulo 5

Considerações finais

Neste trabalho, fizemos um estudo de alguns dos principais resultados da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Como aplicação da teoria estudamos o comportamento qualitativo de um sistema de EDOs que descrevem a dinâmica de um modelo epidemiológico.

Para introduzir a aplicação, fizemos uma discussão sobre o processo de modelagem de doenças infecciosas. Em particular buscamos entender o modelo SIR para o estudo da pandemia da COVID-19 e entender como o comportamento qualitativo do sistema de equações diferenciais pode ajudar a entender o espalhamento da doença em uma população.

Desenvolvemos o estudo de conceitos matemáticos, visando sua aplicação na modelagem matemática em uma doença viral, afim de demonstrar a importância da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias para as diversas ciências que utilizam modelos matemáticos.

Por fim, este trabalho possibilitou o aprendizado e desenvolvimento da discente em alguns conceitos que não são aprofundados ou vistos na graduação. Deixamos como sugestão de continuidade deste trabalho a possível modelagem da pandemia COVID-19 utilizando o modelo SIR para um cenário de volta as aulas na cidade de Alfenas-MG.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução de Valéria Magalhães Iorio. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [2] SOTOMAYOR, J. **Licões de equações diferenciais ordinárias**. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [3] **DINÂMICA POPULACIONAL DE DOENÇAS INFECCIOSAS**. Direção: Marcos Amaku. Produção: Marcos Amaku, 2012. Disponível em: <<https://www.youtube.com/user/marcosamaku/videos>> . Acesso em: 15 de dezembro de 2021.
- [4] MASSAD, E. et al, **Métodos Quantitativos em Medicina** 1.ed. Barueri, SP: Manole, 2004.
- [5] KERMAK, W. O.; MCKENDRICK, A.G. **A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics**. Proceedings of The Royal Society A, Londres Volume 115, p. 33-55, agosto, 1927.
- [6] BARREIRA, L. **Análise complexa e equações diferenciais**. 1º Edição. IST Press, 2009.
- [7] DOERING, C.I; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 3.ed. Rio Janeiro: IMPA, 2008.
- [8] MATCHEVA, M. **An Introduction to Mathematical Epidemiology** in Text in Applied Mathematics, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, vol 61, 2015.
- [9] MORRIS W. et al, **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. Second Edition, Academic Press, 2004.
- [10] SMALE, S.; HIRSCH, M. **Differential equations, dynamical systems, and linear algebra**. New York: Academic Press, 1974.

- [11] LIMA, E. L. **Álgebra linear**. Matemática Universitária. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [12] CIPOLATTI, R. **Cálculo Avançado**. 1ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2019.
- [13] LIMA, E. L. **Curso de Análise, vol.1**. Projeto Euclides. 7º.ed. Rio de Janeiro: Impa, 1976.
- [14] BARREIRA, L; VALLS, C. **Equações diferenciais ordinárias: teoria qualitativa**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- [15] GOMES, L. T.; BONIN, M. R. et al. **Notas de Aula de Biomatemática I**. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2019.
- [16] DIN, R; ALGEHYNE, E.A. **Mathematical analysis of COVID-19 by using SIR model with convex incidence rate**. Results in Physics, Vol. 23, 103970, Abril, 2021.
- [17] SUBA, M., SHANMUGAPRIYA, R., BALAMURALITHARAN, S., **Current Mathematical Models and Numerical Simulation of SIR Model for Coronavirus Disease - 2019 (COVID-19)**. European Journal of Molecular and Clinical Medicine, Volume 07, n.5, p.41-54, 2020.
- [18] RSY, D. R. S. Y. **Mathematical Modeling and Simulation of SIR Model for COVID-2019 Epidemic Outbreak: A Case Study of India**. INFO-COMP Journal of Computer Science, Vol. 19, n.2, p. 01-09, Dezembro, 2020.
- [19] NOVAIS, M. M. **Estabilidade global e aplicações ao modelo epidemiológico SEIRS**. 2015. 53f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão-SE, 2015.
- [20] SILVA, L. H. **Equações diferenciais ordinárias e suas aplicações**. 2020. 133f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.
- [21] SILVA, M. B.; DA SILVA, S. H. **Soluções de sistemas de equações diferenciais lineares**. Universidade Federal de Campina Grande, 2011.