

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS - UNIFAL-MG

MESEK FELIPE DE SOUZA

**Estudo da Teoria Qualitativa de Equações
Diferenciais Ordinárias e Aplicação ao Modelo da
Toxoplasmose**

ALFENAS, MG

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS - UNIFAL-MG

MESEK FELIPE DE SOUZA

**Estudo da Teoria Qualitativa de Equações
Diferenciais Ordinárias e Aplicação ao Modelo da
Toxoplasmose**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado por exigência para obtenção do título de licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Equações Diferenciais Ordinárias. Orientador: Dr. Evandro Monteiro

ALFENAS, MG

2021

Mesek Felipe de Souza

Estudo da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicação ao Modelo da Toxoplasmose

A banca examinadora abaixo-assinada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do Certificado de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Alfenas.

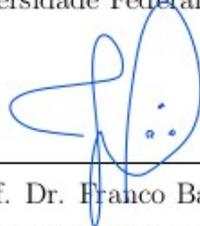
Aprovado em: 12 de março de 2021.



Prof. Dr. Evandro Monteiro
Orientador



Prof. Dr. Fabricio Goeking Avelar
Universidade Federal de Alfenas



Prof. Dr. Franco Bassi Rocha
Universidade Federal de Alfenas

Prof. Dr. Marcelo Moreira da Silva (Suplente)
Universidade Federal de Alfenas

Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio Criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e mínimo apareça. (Leonhard Euler)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por possibilitar mais essa etapa concluída em minha vida.

Agradeço a minha família por apoiar meus estudos durante esses quatro anos de graduação.

Agradeço aos meus professores que por meio de seus ensinamentos e dedicação nas disciplinas, possibilitaram que eu chegasse até este momento.

Agradeço a orientação do professor Evandro Monteiro que com sua paciência, atenção, ensinamentos e confiança me conduziu a conclusão deste trabalho.

Agradeço a integral participação do professor Fabricio Goencking Avelar em minha formação, que através de seu empenho, esforço e presença, me instruiu e auxiliou sempre que possível, em todos os aspectos.

Por fim agradeço aos meus amigos e colegas que me motivaram e apoiaram, em especial, Edmara Viana, Matheus Felipe da Silva Ponciano, Felipe Lima de Oliveira e as minhas gatas Midori e Gailliety.

Resumo

A compreensão da teoria qualitativa de equações diferenciais se faz útil ao observar que muitos fenômenos, físicos, econômicos, biológicos, entre outros, podem ser modelados por um sistema de equações diferenciais ordinárias. Este trabalho apresenta uma revisão da teoria básica para o tratamento de sistema de equações diferenciais via ferramentas da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias. São apresentados resultados a respeito de existência e unicidade das soluções, as definições básicas sobre fluxo, ponto de equilíbrio e órbita, e resultados e definições da teoria de estabilidade segundo Lyapunov. Ao final do trabalho é apresentada uma aplicação, da teoria construída, a um modelo epidemiológico para a doença Toxoplasmose, considerando as populações de gatos e humanos, tendo em vista a busca pelos pontos de equilíbrio endêmico e livre da doença e compreensão da dinâmica existente entre as populações. Para tal estudo, foi efetuada uma pesquisa de natureza básica com abordagem qualitativa de objetivo exploratório, através de uma revisão bibliográfica em livros textos, artigos científicos e documentos *online*. Assim neste trabalho está presente uma base teórica que permite investigar sistemas de equações diferenciais não lineares, via teoria qualitativa e obter conclusões sobre os respectivos pontos de equilíbrio, isto é, se são estáveis, assintoticamente estáveis, ou instáveis.

Palavras-chaves: Equações Diferenciais Ordinárias. Estabilidade de Lyapunov. Teoria Qualitativa. Modelos Biológicos.

Abstract

The compression of the qualitative theory of differential equations is useful when observing that many phenomena, physical, economic, biological, among others, can be modeled by a system of ordinary differential equations. This work presents a review of the basic theory for the treatment of differential equations systems using qualitative theory of ordinary differential equations. Results are presented regarding the existence and uniqueness of the solutions, the basic definitions of flow, equilibrium point and orbit, results and definitions of the theory of stability according to Lyapunov. At the end of the work, an application of the constructed theory is presented to an epidemiological model for the Toxoplasmosis diseases, considering cats and humans populations, in view of the search for points of endemic and disease-free balance and understanding of the existing dynamics between populations. For this study, a basic research was carried out with a qualitative approach with an exploratory objective, through a bibliographic review in textbooks, scientific articles and online documents. Thus, in this work, a theoretical basis is present that allows investigating systems of non-linear differential equations, via qualitative theory and obtaining conclusions about the respective equilibrium points, that is, whether they are stable, asymptotically stable, or unstable.

Words key: Ordinary Differential Equations. Lyapunov stability. Qualitative Theory. Biological Model.

Sumário

1	Introdução	9
2	Fundamentos de Existência da Soluções	12
2.1	Existência e unicidade	12
2.2	Soluções Máximas	21
2.3	Dependência as condições iniciais	25
3	Teoria de Estabilidade	29
3.1	Campos de Vetores	29
3.2	Estabilidade	47
4	Aplicação ao Modelo da Toxoplasmose	66
4.1	Doença Toxoplasmose	66
4.2	Modelo da Toxoplasmose	67
4.3	Análise do modelo	70
5	Conclusão	78
	Referências Bibliográficas	79

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho busca revisar os conceitos básicos da teoria qualitativa de equações diferenciais para aplicá-la em um determinado modelo para a doença Toxoplasmose, explicitando uma forma de aplicação da teoria que será apresentada. Agora descreve-se brevemente uma fração da história por trás dos desenvolvimento dessa teoria.

Estudos a respeito das equações diferenciais ordinárias são desenvolvidos desde o século XVII, logo após o início do cálculo diferencial e integral, por Newton e Leibniz. Em geral, a maior parte das pesquisas no início dessa área buscavam resolver problemas de origem física e geométrica. Como contribuição para a área, de acordo com Boyce e DiPrima [1], Newton, baseando-se nas variáveis da função f , classificou as equações diferenciais de primeira ordem em $\frac{dy}{dx} = f(x)$; $\frac{dy}{dx} = f(y)$; $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Particularmente para o tipo $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, em que $f(x, y)$ é um polinômio nas variáveis x e y , ele desenvolveu um método de resolução utilizando séries infinitas.

Quanto a Leibniz, além da notação $\frac{dy}{dx}$ representando as derivadas, atribui-se a ele o método de resolução de equações diferenciais por variáveis separáveis, redução de equações homogêneas à equações de variáveis separáveis e o método para resolução de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Além desses métodos há as contribuições para a resolução de muitos problemas, através de correspondência com os irmãos Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli, que contribuíram para a área de equações diferenciais ordinárias.

Um estudo da resolução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a^3}{b^2 \cdot y - a^3}}$ foi efetuado por Jakob Bernoulli e atribui-se a Johann Bernoulli a resolução da equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$. A Johann Bernoulli também atribuída a divulgação o problema da braquistócrona, que consiste em encontrar a curva entre dois pontos que uma partícula, com velocidade inicial nula, deve percorrer para minimizar o tempo gasto nesse trajeto. Tal problema foi solucionado por diversos matemáticos como Newton, de forma anônima, Leibniz, marquês de L'hospital, Jakob Bernoulli e pelo próprio Johann Bernoulli. Os resultados encontrados pelos matemáticos citados demonstraram que a curva solução para o problema é uma cicloide

invertida. Esse problema contribuiu para a área de equações diferenciais ordinárias pelo fato que a cicloide satisfaz a equação $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r - y}{y}$, de acordo com [2] e a equação diferencial do problema da braquistócrona envolve a expressão $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{-(2r + y)}{y}$.

O matemático Leonhard Euler também auxiliou no desenvolvimento da teoria sobre equações diferenciais ordinárias identificando a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas, aprofundando os conceitos de fator integrante e encontrando e estendendo a solução geral de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes para equações não homogêneas. Ainda como contribuição de Euler cita-se o uso de séries de potências e de métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais.

Após Leonhard Euler cita-se Joseph-Louis Lagrange, pois contribuiu para a área de equações diferenciais ao mostrar que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea é uma combinação linear de n soluções independentes. Dessa forma, ao resolver uma equação diferencial de ordem n deve-se determinar as n soluções independentes e, adequar a combinação linear de acordo com a condição inicial do problema. Concede-se a ele o desenvolvimento do método de variação dos parâmetros constituído de tomar uma solução para equação linear homogênea e substituir o parâmetro constante por uma variável, determinando uma solução particular para a equação não homogênea.

O matemático Pierre-Simon de Laplace destaca-se com seus trabalhos com mecânica celeste por desenvolver métodos para alguns problemas que envolvem equações diferenciais. Como exemplo de seus trabalhos cita-se seu estudo com a equação de Laplace e a relação que essa equação possui com a gravitação. Por fim, cita-se a transformada de Laplace, que é um meio de simplificar a busca de soluções para uma equação diferencial. A transformada de Laplace aplicada a uma equação diferencial, transforma o problema de encontrar soluções de equações diferenciais no problema de encontrar soluções para uma equação algébrica.

Devido ao trabalho de diversos matemáticos, além desses citados anteriormente, ao final do século XVIII foram desenvolvidos muitos métodos para resolver equações diferenciais ordinárias de forma analítica. Assim no século XIX as questões passaram para um ponto de vista mais teórico, com foco nos aspectos de existência e unicidade de soluções como também uma análise qualitativa das equações, isto é, estudar o comportamento dinâmico das soluções (obtidas pelos teoremas de existência) e não, necessariamente, das soluções explícitas.

Em relação a existência e unicidade de soluções cita-se os teoremas de Peano e Picard, que apresentam condições para que as equações diferenciais ordinárias possuam soluções únicas, utilizando a noção de funções Lipschitz na segunda variável. O teorema de Picard, nomeado assim em homenagem ao matemático francês Charles Émile Picard, demonstra a existência e unicidade de soluções em uma vizinhança próxima às condições iniciais de um problema de valor inicial. Esse trabalho teve fundamentação em trabalhos anteriores

de Augustin-Louis Cauchy e Rudolf Lipschitz relacionados a equações diferenciais.

A teoria qualitativa de equações diferenciais estuda os sistemas de equações diferenciais pelo retrato de fase analisando a família de soluções de forma global, de acordo com Sotomayor [3]. O desenvolvimento dessa teoria teve como precursor Henry Poincaré que estudava alguns problemas de dinâmica celeste. O comportamento caótico das equações de Lorenz, quando se variava os parâmetros, foi outro problema que tornou a teoria qualitativa atrativa para estudos.

Com a teoria qualitativa diversos questionamentos sobre um sistema de equações são possíveis como por exemplo: periodicidade das soluções, limitação das soluções, pontos de equilíbrio (estabilidade e instabilidade), convergência de soluções entre outras perguntas que o retrato de fase das soluções pode apresentar.

Esta teoria das equações diferenciais, nascida nos problemas de mecânica celeste, obteve uma evolução de abrangência a ponto de servir para modelar problemas biológicos. Em busca do controle de doenças e análise populacional, modelos matemáticos para descrever as interações foram adotados pelos pesquisadores. Como exemplo desses modelos pode-se citar um modelo compartimentado proposto por Aranda *et al* [4], que posteriormente foi complementado por Faria [5], no qual é possível encontrar, pela teoria qualitativa, os pontos de equilíbrio livre da doença e endêmico do modelo, ou um modelo com teste e abate para a dinâmica da transmissão da tuberculose bovina proposto por Augusto *et al.* [6]. Esse modelo permite a importação de gado infectado de fontes externas aos compartimentos do modelo. O trabalho de Abakar *et al.* [7] realiza simulações numéricas para a modelagem de tuberculose bovina. Uma outra análise de modelos por meio da teoria de qualitativa foi feita por Ribeiro [8] para as doenças babesiose e brucelose em um modelo de compartimentos.

Assim como foi apresentando anteriormente, os modelos de equações diferenciais proporcionam uma compreensão de perguntas sobre as soluções em um espectro global. Tornando a teoria rica em questões práticas como também em aspectos teóricos.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão dos resultados que fornecem existência e unicidade de soluções, como também a dependência da solução às condições iniciais dos problemas de valores iniciais. No Capítulo 3 são revisados os principais conceitos e resultados da teoria de estabilidade de equações diferenciais. Como também é fundamentado uma base para a compreensão desses resultados, isto é, defini-se campo de vetores e algumas propriedades que esse possui. No Capítulo 4 é aplicada a teoria de estabilidade em um modelo para a doença toxoplasmose exemplificando a utilização dos resultados que foram construídos, isto é, para o modelo compartimentado da toxoplasmose são apresentados os pontos de equilíbrio endêmico e livre da doença. Ao final deste trabalho é apresentado uma conclusão final do que foi desenvolvido.

Capítulo 2

Fundamentos de Existência da Soluções

Neste capítulo estuda-se a existência, unicidade e dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais dadas, para as equações diferenciais ordinárias.

2.1 Existência e unicidade

Será determinado nessa seção as condições básicas para que uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) possua solução, seja única e ligue-se às condições iniciais do problema modelado por uma EDO. As demonstrações de alguns resultados serão omitidas por não serem o foco deste trabalho, porém serão indicadas referências das mesmas. Os resultados e definições apresentados nessa seção podem ser encontrados em Doering [9], Sotomayor [3] e Lima [10].

Definição 2.1.1 *Entende-se por EDO a expressão,*

$$x' = f(t, x) \tag{2.1}$$

em que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em cada ponto (t, x) de um aberto U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$.

A Definição 2.1.1 indica que uma equação diferencial ordinária é uma equação que envolve a busca de uma curva a derivada ordinária dessa função em um ponto é dado pela função $f(t, x)$.

Em sua maioria, os problemas modelados por equações diferenciais, apresentam uma informação prévia da função procurada. Assim defini-se o seguinte problema.

Definição 2.1.2 *Chama-se de Problema de Valor Inicial (PVI) ou Problema de Cauchy*

a situação em que procura-se $x(t)$ da equação (2.1) tal que $x(t_0) = x_0$, ou seja,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

em que $(t_0, x_0) \in U$.

Observação 2.1.3 A expressão $x(t_0) = x_0$ é chamada de condição inicial.

Exemplo 2.1.4 O caminho $\bar{x}(t) = e^t$ é solução do PVI abaixo.

$$\begin{cases} x' = x \\ x(1) = e. \end{cases} \quad (2.3)$$

Inicialmente, resolve-se a EDO, encontrando uma solução para o PVI (2.3)

$$x'(t) = x(t),$$

ou melhor,

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = 1,$$

integra-se de $t = 1$ até t e obtêm-se

$$\ln(x(s)) \Big|_1^t = s \Big|_1^t,$$

após algumas simplificações encontra-se,

$$x(t) = x(1) e^{t-1},$$

ou melhor,

$$x(t) = e^t.$$

◇

Abaixo defini-se as condições para que uma função seja solução do PVI (2.2).

Definição 2.1.5 Chama-se trajetórias ou curvas integrais de f , ou curvas integrais da equação diferencial, as soluções do PVI (2.2). Precisamente chama-se de trajetórias ou curvas integrais de f um caminho $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, derivável no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, em que o gráfico está contido em U e a velocidade é determinada por f .

Observação 2.1.6 Existe uma equivalência entre a solução do PVI (2.2) e a solução da equação integral,

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds. \quad (2.4)$$

De fato, seja $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma solução da equação integral (2.4). Aplica-se o Teorema Fundamental do Cálculo em (2.4), isto é,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi(t) &= \frac{d}{dt}x_0 + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, \phi(s))ds \\ &= f(t, \phi(t)),\end{aligned}$$

e aplica-se, em $\phi(t)$, o ponto t_0 da condição inicial,

$$\begin{aligned}\phi(t_0) &= x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \phi(s))ds \\ &= x_0,\end{aligned}$$

conclui-se que (2.4) satisfaz o PVI (2.2).

Por outro lado se $x(t)$ é solução do PVI (2.2), pela Definição 2.1.5 $x(t)$ é diferenciável e, portanto, pode-se integrar a EDO (2.1), de t_0 ate t em $I \subset \mathbb{R}$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t x'(s)ds &= \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \\ x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \\ x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \\ x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds,\end{aligned}$$

obtêm-se, portanto a equação integral (2.4).

Com o PVI (2.2) bem definido, busca-se ferramentas para garantir a existência e unicidade das soluções. Mas antes de provar estas condições, necessita-se de alguns resultados e definições:

Definição 2.1.7 Diz que uma função $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica se satisfaz as seguintes condições para qualquer $x, y, z \in \mathcal{F}$:

1. $d(x, x) = 0$;
2. Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definição 2.1.8 Um espaço métrico é um par (\mathcal{F}, d) , em que \mathcal{F} é um conjunto e d é uma métrica em \mathcal{F} . (\mathcal{F}, d) é dito completo quando toda sequência de Cauchy em \mathcal{F} é convergente.

A Definição 2.1.7 e a Definição 2.1.8 são necessárias para a compressão das demonstrações a seguir.

Definição 2.1.9 Diz-se que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Lipschitziana ou de Lipschitz na segunda variável em $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, se existe $K > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para quaisquer dois pontos $(t, x), (t, y) \in U$. A constante k é denominada de constante de Lipschitz.

Definição 2.1.10 Define-se o operador \mathcal{L} como $\mathcal{L}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$ e define-se suas $m \in \mathbb{N}$ iteradas por

$$\mathcal{L}^m(x)(t) = \mathcal{L}(\mathcal{L}^{m-1}(x)(t)).$$

A definição acima indica que as soluções da equação integral (2.4), respectivamente do PVI (2.2), são os pontos fixos do operador \mathcal{L} e vice-versa. Observa-se que se $x(t)$ é solução da equação integral (2.4) então obtêm-se que $\int_{t_0}^t f(s, x(s))ds = x(t) - x(t_0)$, substitui-se no operador aplicado em $x(t)$ para se concluir

$$\mathcal{L}(x)(t) = x_0 + x(t) - x(t_0) = x_0 + x(t) - x_0 = x(t).$$

Lema 2.1.11 Se $K > 0$ é uma constante de Lipschitz de f em $I \times \mathbb{R}^n$, então

$$|\mathcal{L}^m(\mu)(t) - \mathcal{L}^m(\nu)(t)| \leq \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m d(\mu, \nu),$$

para quaisquer $\mu, \nu \in \mathcal{F}$, $m \geq 0$ e $t \in I$, em que \mathcal{L} é o operador da Definição 2.1.10.

A Demonstração encontra-se em Doering [9] página 381.

Lema 2.1.12 (Lema do Ponto Fixo de Contrações) Sejam (\mathcal{F}, d) um espaço métrico completo, $\mathcal{L} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ uma contração, isto é, $d(\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)) \leq K \cdot d(x, y)$, $0 \leq K < 1$. Existe um único ponto fixo p , por \mathcal{L} , isto é, $\mathcal{L}(p) = p$. Mais ainda p é um atrator de \mathcal{L} , isto é, $\mathcal{L}^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in \mathcal{F}$. $\mathcal{L}^n(x)$ é definida por $\mathcal{L}(\mathcal{L}^{n-1}(x))$.

A demonstração encontra-se em Sotomayor [3].

O corolário, a seguir, decorrente do Lema 2.1.12, é fundamental para obter os resultados de existência e unicidade de solução.

Corolário 2.1.13 Seja \mathcal{F} um espaço métrico completo. Se $\mathcal{L} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ é contínua e, para algum $m \geq 0$, \mathcal{L}^m é uma contração, então existe um único ponto p fixo por \mathcal{L} . Mais ainda p é um atrator de \mathcal{L} .

A demonstração encontra-se em Sotomayor [3].

Exemplo 2.1.14 A solução da equação diferencial $x' = ax$ em que $a \in \mathbb{R}$, com condição inicial $x(0) = k$, (em que $k \in \mathbb{R}$) é $x(t) = ke^{at}$.

Obter-se-á uma solução dessa equação diferencial por meio do limite das iteradas de \mathcal{L} . A abordagem válida-se pois

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |ax - ay| \leq |a||x - y|,$$

então $f(t, x) = ax$ é Lipschitz, pelo Lema 2.1.11, concluí-se que, para $m \geq 0$ suficientemente grande há que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{|a|^m}{m!} |x - y|,$$

e ainda há que $0 < \frac{|a|^m}{m!} < 1$ logo operador $\mathcal{L}^m(f)$ será uma contração.

Para determinar a solução, inicia-se com o caminho $x(t) = k$, donde segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(t) &= k + \int_0^t ax(s)ds = k + \int_0^t akds = k[1 + at] \\ \mathcal{L}^2(x)(t) &= k + \int_0^t ak[1 + as]ds = k[1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2] \\ \mathcal{L}^3(x)(t) &= k + \int_0^t ak[1 + as + \frac{1}{2}a^2s^2]ds = k[1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3], \end{aligned}$$

por indução, para todo $m \geq 0$, obtêm-se

$$\mathcal{L}^m(x)(t) = k \left[1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 \dots \frac{1}{m!}a^mt^m \right].$$

Aplica-se o limite para $m \rightarrow +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} k \left[1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 \dots \frac{1}{m!}a^mt^m \right] = k \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^m \frac{(at)^i}{i!} = ke^{at}.$$

◇

Teorema 2.1.15 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Se $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subseteq U$ e f é lipschitziana na segunda variável em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ então, para quaisquer $t_0 \in [a, b]$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do PVI (2.2) definida no intervalo $[a, b]$.

Demonstração: Toma-se $I = [a, b]$, $l = b - a$ e seja K a constante de Lipschitz de f . Como $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(Kl)^m}{m!} = e^{Kl}$, então a série converge. Consequentemente seu termo geral tende a zero (resultado encontra-se em Lima [11]), ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(Kl)^m}{m!} = 0.$$

Escolhe-se $m = m(K, l)$ tal que, para cada $t \in I$,

$$\frac{(K)^m}{m!} |t - t_0|^m \leq \frac{(Kl)^m}{m!} = \eta < 1.$$

Pelo Lema 2.1.11, resulta-se que

$$d(\mathcal{L}^m(\mu), \mathcal{L}^m(v)) = \sup_{t \in I} |\mathcal{L}^m(\mu)(t) - \mathcal{L}^m(v)(t)| \leq \eta d(\mu, v).$$

Concluí-se que \mathcal{L}^m , é uma contração em $\mathcal{F} = C(I, \mathbb{R}^n)$, o espaço métrico das funções contínuas. Aplica-se o Corolário 2.1.13 para concluir-se que \mathcal{L} possui um único ponto fixo $x \in \mathcal{F}$, logo apenas x satisfaz o PVI (2.2). ■

A demonstração anterior, diz que pode-se aproximar a solução do PVI (2.2) ao se iterar a sequências de funções dadas por $\mathcal{L}^m(y)$ por qualquer caminho $y \in \mathcal{F}$. O teorema, também indica a unicidade de solução, decorrente da hipótese de que f é Lipschitz na variável espacial.

Teorema 2.1.16 *Se $A : I \rightarrow M(n)$ e $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ são caminhos contínuos no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, então, para quaisquer $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a EDO linear*

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.5}$$

tem uma única solução definida em todo intervalo I .

Demonstração: Pode-se trocar, o intervalo compacto $[a, b]$ em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ por um intervalo I qualquer no Teorema 2.1.15.

Observa-se que, seja $[a, b] \subseteq I$ um intervalo compacto qualquer. A aplicação $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ é contínua em $I \times \mathbb{R}^n$ e satisfaz $f(t, x) - f(t, y) = A(t)(x - y)$. Segue da compacidade de $[a, b]$ e da continuidade de $A(t)$ que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |A(t)(x - y)| \leq K|x - y|,$$

em que $K = \sup\{\|A(t)\| \mid a \leq t \leq b\} < \infty$.

Aplicando-se o Teorema 2.1.15, obtêm-se a unicidade de solução para (2.5), em que $t_0 \in [a, b]$.

Se I é compacto conclui-se a demonstração.

Supondo-se que I seja um intervalo qualquer. Fixa-se $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quaisquer. Toma-se também, uma sequência de intervalos compactos $[a_m, b_m]$, tais que $a_m \leq t_0 \leq b_m$ e $I = \bigcup [a_m, b_m]$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, toma-se a única solução $x_m(t)$ em $[a_m, b_m]$ tal que $x_m(t_0) = x_0$.

Defini-se $x(t) = x_m(t)$, para $t \in [a_m, b_m]$. O caminho $x(t)$ está bem definido em todo intervalo I , por unicidade obtém-se a solução. ■

Antes da demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf apresenta-se uma definição utilizada no decorrer da demonstração.

Definição 2.1.17 *Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e um número $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$, diz-se que o conjunto*

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) \leq r\}$$

é a bola fechada de centro x e raio r .

Teorema 2.1.18 (Picard-Lindelöf) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua em $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e lipschitziana no retângulo $R_{a,b}$ em que $a > 0$, $b > 0$ e $R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U$, $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ e $B_b = \bar{B}(x_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$. Se existe $M > 0$ tal que $|f(t, x)| \leq M$ em $R_{a,b}$, então existe uma única solução do PVI (2.2), em I_α com $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{F} = C(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico das funções contínuas, $x : I_\alpha \rightarrow B_b$ com a métrica uniforme $d(x, y) = \sup_{t \in I_\alpha} |x(t) - y(t)|$.

Para $x \in \mathcal{F}$, toma-se $\mathcal{L}(x)(t)$ de acordo com a Definição 2.1.10 o que resulta que $\mathcal{L}^m(x)(t)$ nessas hipóteses é uma contração.

Observa-se que para todo $t \in I_\alpha$

$$|\mathcal{L}(x)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Portanto $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$. Aplica-se o Lema 2.1.11 para $x, y \in \mathcal{F}$, garantindo a existência de $m \geq 0$ em que \mathcal{L}^m é uma contração do espaço métrico \mathcal{F} .

Em seguida, aplica-se o Corolário 2.1.13 mostrando que o operador \mathcal{L} tem apenas um ponto fixo e, este ponto fixo, é a única solução para o PVI (2.2). ■

O Teorema 2.1.18 é uma generalização do Teorema 2.1.15, pois a exigência sobre a função $f(t, x)$ é menor. Isso decorre da exigência em que f deve ser lipschitziana em uma região menor para garantir a existência e unicidade das soluções.

O lema a seguir será utilizado na prova do Teorema de Cauchy-Peano que garante, sob certas condições, que o PVI (2.2) possui solução, entretanto não é possível afirmar nada com respeito a unicidade da mesma.

Lema 2.1.19 *Dado qualquer $0 < \epsilon \leq \delta$ existe um caminho contínuo $x_\epsilon : I(\delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para quaisquer $t, u \in I(\delta)$, valem*

$$|x_\epsilon(t) - x_\epsilon(u)| \leq M|t - u| \quad e \quad |x_\epsilon(t) - x_0| \leq b \quad (2.6)$$

e, para qualquer $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, vale

$$x_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_\epsilon(s - \epsilon)) ds. \quad (2.7)$$

A demonstração encontra-se em Doering [9] página 386.

Definição 2.1.20 *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ diz-se uniformemente contínua quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, sejam quais forem $x, y \in M$, $d(x, y), \delta \Rightarrow d(f(x), f(y))$.*

Definição 2.1.21 *Diz-se que a sequência de aplicações $f_n : X \rightarrow M$, em que X é arbitrário e M é um espaço métrico, converge uniformemente em X para a aplicação $f : X \rightarrow M$ quando, para todo número real $\epsilon > 0$ dado, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$, qualquer que seja $x \in X$.*

Teorema 2.1.22 (Cauchy-Peano) *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto e $a > 0$, $b > 0$ tais que $R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U$, em que $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ e $B_b = \bar{B}(x_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ são bolas fechadas centradas em t_0 e x_0 de raios a e b em \mathbb{R} e \mathbb{R}^n , respectivamente. Então existe uma solução do PVI (2.2) definida no intervalo fechado $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, em que $\alpha > 0$ é dado por $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, em que $M > 0$ é uma cota superior qualquer de $|f(t, x)|$ no retângulo $R_{a,b}$.*

Demonstração: Nas hipóteses do teorema, fixa-se $\delta > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, toma-se o caminho $x_n = x_{\epsilon_n}$ fornecido pelo Lema 2.1.19 para $\epsilon_n = \frac{1}{n}$.

Da expressão (2.6), a sequência $\{x_n\}$ em $C(I(\delta), R_{a,b})$ assim obtida satisfaz as condições do Teorema de Ascoli (Esse resultado se encontra em Doering [9] página 347). O Teorema de Ascoli garante a existência de um caminho contínuo $x : I(\delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é o limite uniforme de uma subsequência de $\{x_n\}$.

Da convergência uniforme de $x_n(s) \rightarrow x(s)$ em $I(\delta)$ e da continuidade uniforme de f no compacto $R_{a,b}$ decorre a convergência uniforme de $f(s, x_n(s - \frac{1}{n})) \rightarrow f(s, x(s))$ em $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Fixa-se $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, e toma-se o limite com $n \rightarrow \infty$ de ambos os lados da expressão (2.8)

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s - \frac{1}{n})) ds, \quad (2.8)$$

e obtêm-se

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

implicando que $x(t)$ é uma solução do PVI (2.2).

Efetuando raciocínio semelhante prova-se a existência de solução para o intervalo $[t_0 - \alpha, t_0]$.

Como as soluções possuem valor $x(t_0) = x_0$ e derivada $f(t_0, x_0)$ no ponto t_0 , conecta-se as soluções obtidas no processo acima definindo uma solução no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

■

O Teorema 2.1.22, fornece a existência de solução para o PVI (2.2) exigindo apenas a continuidade da função $f(t, x)$. Ao não ter a hipótese da condição de Lipschitz ocorre a perda de unicidade, pois as sequências geradas não possuem garantias de serem contrações. Conseqüentemente, perde-se a unicidade do ponto fixo da contração. Isto é ilustrado no seguinte exemplo:

Exemplo 2.1.23 *Sejam $f(t, x) = x^{\frac{2}{3}}$ e a EDO abaixo, com a respectiva condição inicial.*

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(0) &= 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

em que $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

Observa-se que para todo $c \geq 0$ a função

$$\phi_c(t) = \begin{cases} k(t-c)^3 & t \geq c \\ 0 & t < c \end{cases},$$

em que, $k \in \mathbb{R}$ é solução da EDO (2.9).

Contudo a função $x(t) = 0$ também é solução da EDO (2.9) com a mesma condição inicial.

Observa-se na Figura 2.1 os gráficos de algumas soluções para o PVI (2.9), que passam pela mesma condição inicial. Questiona-se o motivo das soluções dadas por $\phi_c(t)$ satisfazerem o respetivo problema.

Nota-se que a função $f(t, x) = x^{\frac{2}{3}}$ não é lipschitziana em x pois

$$|f(t, x) - f(t, 0)| = |x^{\frac{2}{3}} - 0| = |x^{-\frac{1}{3}} \cdot x - x^{-\frac{1}{3}} \cdot 0| = |x^{-\frac{1}{3}}(x - 0)| = \frac{1}{|x|^{\frac{1}{3}}} \cdot |x - 0|.$$

Dessa forma o Teorema 2.1.15 não garante a unicidade de soluções.

◇

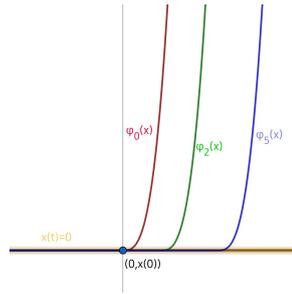


Figura 2.1: Gráficos de algumas soluções do PVI (2.9).

Fonte: Autor.

A observação seguinte apresenta uma condição suficiente para garantir a existência e unicidade de solução para o PVI (2.2):

Observação 2.1.24 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ com a aplicação derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x} : U \rightarrow M(n)$ contínua em U . Dado um ponto qualquer $(t_0, x_0) \in U$, toma-se $a, b > 0$ tais que $R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U$, em que $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ é uma bola fechada centrada em t_0 e raio a e $B_b = \bar{B}(x_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma bola fechada centrada em x_0 e raio b . Então f é lipschitziana na variável espacial, em retângulos compactos.*

Da aplicação derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ ser contínua em U e o retângulo $R_{a,b}$ ser compacto, existe $K > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq K,$$

para cada $(t, x) \in R_{a,b}$.

Utilizando-se a Desigualdade do Valor Médio, obtêm-se

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|,$$

para quaisquer dois pontos $(t, x), (t, y) \in R_{a,b}$ de mesma coordenada temporal t . Conclui-se, assim, que se a aplicação derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua. Então f é lipschitziana na variável espacial, em retângulos compactos.

Por isso é possível substituir a hipótese de lipschitziana na variável espacial por continuidade da derivada parcial em relação a segunda variável.

2.2 Soluções Máximas

Com as condições de existência e unicidade de soluções especificadas, segue-se para compreensão das propriedades do intervalo em que as soluções estão definidas.

Definição 2.2.1 Diz-se que uma solução $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ do PVI (2.2), em U , é máxima se, dada qualquer solução $\bar{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ do PVI (2.2) definida no intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$, ocorre que $J \subseteq I$ e $\bar{x}(t) = x(t)$ para todo $t \in J$. Em outras palavras x é uma extensão de \bar{x} , ou \bar{x} é uma restrição de x , como também x é uma continuação de \bar{x} .

O lema a seguir apresenta que duas soluções para o mesmo PVI devem coincidir quando estão definidas para o mesmo valor $t \in I$.

Lema 2.2.2 Sejam $x_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluções do PVI (2.2) definidas nos intervalos abertos $I_i \subseteq \mathbb{R}$, com $i = 1, 2$. Então $x_1(t) = x_2(t)$ para cada $t \in I_1 \cap I_2$.

Demonstração: Seja $I = I_1 \cap I_2$ e denota-se $J = \{t \in I \mid x_1(t) = x_2(t)\}$. Nota-se que $J \subseteq I$ é um conjunto fechado de I , pois é a imagem inversa $(x_1 - x_2)^{-1}(\{0\})$ do fechado de $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ pelo caminho contínuo $x_1 - x_2$ em I .

Seja, agora, $t_0 \in J$ dado. Pela unicidade das soluções do problema de valor inicial $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_1(t_0) = x_2(t_0)$, existe uma vizinhança aberta de t_0 em I na qual x_1 e x_2 coincidem, o que mostra que J é um conjunto aberto. Portanto J é aberto e fechado em I .

Como I é conexo e J é não-vazio, pois $t_0 \in J$, resulta que $J = I$.

■

O próximo resultado apresenta a unicidade do intervalo maximal de uma solução para o PVI (2.2), exigindo a continuidade de f e de sua derivada em relação a variável espacial.

Proposição 2.2.3 Se $f(t, x)$ e a derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ são aplicações contínuas de (t, x) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ então, para cada $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução máxima do PVI (2.2), necessariamente definida num intervalo aberto.

Demonstração: Seja $I = \cup J$ a união da coleção de todos intervalos abertos J para os quais existe uma solução $\bar{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (2.2) definida em J .

Aplica-se o Teoremas 2.1.18, garantindo a existência de um intervalo $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ dentro dessa coleção.

Pelo Lema 2.2.2, dados dois intervalos de I , as soluções associadas coincidem na interseção dos intervalos. Assim define-se $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ da seguinte forma.

Dado $t \in I_0$, toma-se um intervalo aberto J da coleção tal que $t \in J$, com solução associada $\bar{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ e toma-se $x(t) = \bar{x}(t)$.

Observa-se que $x|_J = \bar{x}$ é solução do PVI (2.2) e, por construção, x é a sua solução máxima definida no intervalo aberto I_0 .

■

Teorema 2.2.4 *Seja $f(t, x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ aplicações contínuas de (t, x) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto qualquer e $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução máxima do PVI (2.2) em U . Se $\beta < +\infty$ então, dado qualquer compacto $N \subset U$, existe $t_0 < t^* < \beta$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U - N$. Um comportamento análogo ocorre se $-\infty < \alpha$.*

Demonstração: Sejam $x(t)$ uma solução qualquer de (2.4) definida em $I = [t_0, \beta)$ com $\beta < +\infty$. Suponha, por absurdo, que exista um compacto $N \subset U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $(t, x(t)) \in N$ para cada $t \in I$. Mostrar-se-á que x será continuada para além de β .

Por ser contínua, a aplicação f é limitada no compacto N , de modo que existe $M > 0$ tal que $|f(t, x)| \leq M$ para cada $(t, x) \in N$. Por (2.4) têm-se que

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int_{t_2}^{t_1} f(s, x(s)) ds \right| \leq M|t_1 - t_2|,$$

para quaisquer $t_1, t_2 \in I$. Ou seja, o caminho $x(t)$ é uniformemente contínuo em I e portanto, possui uma extensão contínua $\bar{x} : [t_0, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com valor no extremo β dado por $\bar{x}(\beta) = \lim_{r \rightarrow \beta^-} x(r)$

Ainda de (2.4), há que

$$x(r) - x(t) = \int_t^r f(s, x(s)) ds,$$

e, portanto

$$\begin{aligned} \bar{x}(\beta) - \bar{x}(t) &= \lim_{r \rightarrow \beta^-} x(r) - x(t) = \lim_{r \rightarrow \beta^-} [x(r) - x(t)] \\ &= \lim_{r \rightarrow \beta^-} \int_t^r f(s, x(s)) ds = \int_t^\beta f(s, \bar{x}(s)) ds, \end{aligned}$$

para cada $t < \beta$. Mostrando que essa extensão é (lateralmente) derivável em β , com derivada (lateral) $\bar{x}'(\beta) = f(\beta, \bar{x}(\beta))$, já que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t)}{\beta - t} - f(\beta, \bar{x}(\beta)) &= \frac{1}{\beta - t} [\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t)] - \frac{f(\beta, \bar{x}(\beta))}{\beta - t} \int_t^\beta 1 ds \\ &= \frac{1}{\beta - t} \int_t^\beta [f(s, \bar{x}(s)) - f(\beta, \bar{x}(\beta))] ds, \end{aligned}$$

para $t < \beta$, acarreta

$$\begin{aligned} \left| \frac{\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t)}{\beta - t} - f(\beta, \bar{x}(\beta)) \right| &\leq \frac{1}{\beta - t} \int_t^\beta |f(s, \bar{x}(s)) - f(\beta, \bar{x}(\beta))| ds \\ &\leq \max_{t \leq s \leq \beta} |f(s, \bar{x}(s)) - f(\beta, \bar{x}(\beta))| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

com $t \rightarrow \beta^-$.

O Teorema 2.1.18 garante a existência de uma solução \tilde{x} de $x' = f(t, x)$ definida num intervalo $(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon)$, com condição inicial $\tilde{x}(\beta) = \bar{x}(\beta)$.

De ambas possuírem a mesma derivada $f(\beta, \bar{x}(\beta))$ em β , é possível estender x , ao menos, até $[t_0, \beta + \epsilon)$. Assim, mostra-se que $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ não é máxima, pois o intervalo I não é máximo, contrariando a hipótese.

Para o caso de $\alpha > -\infty$ a prova-se de maneira análoga.

■

O Teorema 2.2.4 apresenta a unicidade de soluções máximas, indicando que ao estender-se uma solução do PVI (2.2) ao intervalo máximo, nas condições do Teorema 2.1.18, mantêm-se a unicidade de soluções. Contudo observa-se que um intervalo máximo das soluções $x(t)$ não é, necessariamente, o conjunto \mathbb{R} .

Exemplo 2.2.5 *Seja o PVI abaixo*

$$\begin{cases} x'(t) &= x^2 \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

em que $x_0 \in \mathbb{R}$.

Inicialmente busca-se a solução $x(t)$ da EDO

$$\frac{x'(t)}{x^2} = 1,$$

ou seja,

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(t)}{x^2(t)} dt = \int_{t_0}^t dt.$$

Efetua-se a mudança de variável $u = x(t)$, $du = x'(t)dt$ e obtêm-se,

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{du}{u^2} = \int_{t_0}^t dt.$$

Resolve-se a integral, e encontra-se,

$$\frac{-1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)} = t - t_0,$$

que após simplificações obtêm-se,

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0 \cdot (t_0 - t)}.$$

Nota-se que:

1. Se $x_0 = 0$, então $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que $x(t) = 0$.
Se $x_0 \neq 0$, então $x(t)$ está definida, desde que $1 + x_0 \cdot (t_0 - t) \neq 0$, ou seja, $t \neq t_0 + \frac{1}{x_0}$, segue que
2. Se $x_0 > 0$, $x : (-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}) \rightarrow \mathbb{R}$
3. Se $x_0 < 0$, $x : (t_0 + \frac{1}{x_0}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Assim é visível que as soluções máximas do PVI (2.10), de acordo com cada possibilidade da condição inicial $x_0 \neq 0$, não possuem o intervalo máximo $I = \mathbb{R}$.

◇

2.3 Dependência as condições iniciais

Para o fim desse capítulo, mostra-se alguns resultados que garantem a dependência contínua das soluções das EDO's (2.1) às condições iniciais do PVI (2.2).

Lema 2.3.1 (Gronwall) *Sejam u, v funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que, para algum $\alpha \geq 0$, satisfaz*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, \quad (2.11)$$

$t \in [a, b]$. Então

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0$ então $u \equiv 0$.

Demonstração: Se $\alpha > 0$, define-se

$$w(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds$$

têm-se que $w(a) = \alpha$ e $w(t) \geq \alpha > 0$.

Deriva-se $w(t)$ e obtêm-se $w'(t) = v(t)u(t)$. Decorre da equação (2.11) que $w'(t) \leq v(t)w(t)$.

Segue-se que

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq v(t)$$

Integra-se entre a e t , e obtêm-se

$$\ln \left(\frac{w(t)}{\alpha} \right) \leq \int_a^t v(s)ds,$$

ou seja,

$$\frac{w(t)}{\alpha} \leq e^{\int_a^t v(s) ds},$$

e daí,

$$w(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}.$$

Portanto, conclui-se que

$$u(t) \leq w(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}.$$

Se $\alpha = 0$, o caso anterior implica que para todo $\bar{\alpha} > 0$.

$$u(t) \leq \bar{\alpha} e^{\int_a^t v(s) ds}$$

para todo $t \geq a$, segue que $u(t) \equiv 0$.

■

O Lema 2.3.1 ajudará na demonstração do próximo resultado que também é uma ferramenta de aproximação das soluções de uma EDO.

Teorema 2.3.2 *Sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações contínuas no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluções em U , definidas em um mesmo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, respectivamente das equações diferenciais*

$$x' = f(t, x) \tag{2.12}$$

$$y' = g(t, y) \tag{2.13}$$

Seja $\epsilon \geq 0$ e $K > 0$ tais que, para quaisquer $(t, x), (t, y) \in U$,

$$|f(t, x) - g(t, x)| \leq \epsilon$$

e

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Então, para quaisquer $t, t_0 \in I$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| e^{K|t-t_0|} + \frac{\epsilon}{K} [e^{K|t-t_0|} - 1].$$

Demonstração: Dados quaisquer $t, t_0 \in I$, da equação integral (2.4) há que,

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &= x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - g(s, y(s))] ds \\ &= x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - g(s, x(s))] ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t [g(s, x(s)) - g(s, y(s))] ds \end{aligned}$$

Da hipótese, decorre que

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t_0) - y(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t \epsilon ds \right| + \left| \int_{t_0}^t K|x(s) - y(s)| ds \right| \\ &= |x(t_0) - y(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t K \left[\frac{\epsilon}{K} + |x(s) - y(s)| \right] ds \right|. \end{aligned}$$

Definindo-se $v(t) = \frac{\epsilon}{K} + |x(s) - y(s)| \geq 0$, resulta-se em

$$v(t) \leq v(t_0) + \left| \int_{t_0}^t K v(s) ds \right|.$$

aplica-se o Lema 2.3.1 para obter-se $v(t) \leq v(t_0) e^{K|t-t_0|}$, ou seja,

$$\frac{\epsilon}{K} + |x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| e^{K|t-t_0|} + \frac{\epsilon}{K} e^{K|t-t_0|}.$$

Portanto,

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| e^{K|t-t_0|} + \frac{\epsilon}{K} [e^{K|t-t_0|} - 1].$$

■

O Teorema 2.3.2, apresenta a possibilidade de aproximar a solução da EDO (2.12), por meio de outra solução, no caso da EDO (2.13), desde que as aplicações f e g sejam próximas e g seja Lipschitz.

O corolário a seguir decorre diretamente da aplicação do Teorema 2.3.2

Corolário 2.3.3 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua em $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e lipschitziana na variável espacial, com constante de Lipschitz $K > 0$ então*

$$|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)| \leq |x_0 - y_0| e^{K|t-t_0|}$$

para quaisquer pontos $(t_0, x_0), (t_0, y_0) \in U$ e $t \in I(t_0, x_0) \cap I(t_0, y_0)$, em que $I(t_0, x), I(t_0, y)$

são os intervalos máximos das respectivas soluções $\varphi(t, x)$ e $\varphi(t, y)$ dos PVI's abaixo.

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Demonstração: Toma-se no Teorema 2.3.2, $f = g$ e $\epsilon = 0$ e obtêm-se

$$|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| e^{K|t-t_0|} \quad (2.16)$$

■

Esse último resultado garante que dadas as condições iniciais próximas, as soluções para a mesma EDO estarão próximas.

Capítulo 3

Teoria de Estabilidade

Neste capítulo, estuda-se conceitos, sobre os campos de vetores que definem as EDO's. Para isso aborda-se sobre as singularidades dos campos de vetores e como comportam-se, essas singularidades, em termos de estabilidade segundo a teoria de Lyapunov. Por fim, na última seção, caracteriza-se os conjuntos invariantes. Os resultados e definições apresentados neste capítulo podem ser encontrados em Doering [9] e Sotomayor [3].

3.1 Campos de Vetores

Nessa seção interpreta-se a aplicação $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua num aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, como um campo de vetores em E . Estudar-se-á propriedades das soluções $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ da equação diferencial com a condição inicial abaixo.

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $t_0 \in I$, $x_0 \in E$. Quando $x' = f(x)$ a equação é denominada autônoma.

Observa-se que em cada ponto de E , o campo define um vetor, que é a velocidade vetorial de qualquer solução do PVI (3.1) no ponto (t_0, x_0) , o que conduz à seguinte definição.

Definição 3.1.1 *Seja E um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k < \infty$ em E é uma aplicação $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ com derivadas parciais contínuas até ordem k . O campo f é de classe C^∞ se f possui derivadas parciais de todas as ordens contínuas. Ao campo vetorial f associamos a equação diferencial*

$$x' = f(x).$$

O campo vetorial fornecido pela Definição 3.1.1 permite analisar as possíveis curvas soluções de uma condição inicial, via teoria de cálculo diferencial e integral, averiguando

o comportamento das curvas, concavidade e inclinações.

Observação 3.1.2 *Nessa seção utiliza-se f como uma aplicação de classe C^1 , $I(x)$ o intervalo maximal da solução $x(t)$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto.*

Essas condições da 3.1.2 permite utilizar os teoremas apresentados no Capítulo 2. Basta retornar a Observação 2.1.24 onde encontra-se a justificativa.

Pela existência e unicidade de soluções, garantidos pelo Teorema 2.1.18, fica evidente que para cada condição inicial existe apenas uma curva integral passando por ela. Contudo, as condições iniciais da equação possuem infinitas possibilidades de escolhas. Diante disso, necessita-se de alguns resultados para estudar todas as trajetórias em suas respectivas condições iniciais de uma forma dinâmica.

Definição 3.1.3 *Chama-se fluxo do campo de vetores f (ou da equação diferencial) a aplicação diferenciável $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tal que, para cada par (t, x) em que $t \in I(x)$ vale para alguma trajetória $x \in E$, que $\phi(t, x) = x(t)$.*

A Definição 3.1.3 permite estudar todas as trajetórias, independente das condições iniciais, pois para aquele respectivo ponto (t, x) , associa-se uma solução $x(t)$ da EDO.

Observação 3.1.4 *A derivada parcial em relação a t do fluxo $\phi(t, x)$ satisfaz o PVI (3.1) pois,*

Nota-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t, x)) &= \frac{d}{dt}(x(t)) \\ &= x'(t) \\ &= f(x(t)) \\ &= f(\phi(t, x)), \end{aligned}$$

satisfazendo a EDO. Da Definição 3.1.3, escolhe-se o par (t_0, x_0) para satisfazer a condição inicial.

Ao olhar-se para o campo de vetores em específico, observa-se que o fluxo define trajetórias com determinados comportamentos. Por exemplo se $f(x_0) = 0$, o caminho constante $x \equiv x_0$ é uma solução para o PVI (3.1), x consiste apenas no ponto x_0 . Assim para estudar o funcionamento dos tipos de trajetórias utiliza-se a seguinte definição.

Definição 3.1.5 *Chama-se $x \in E$ de ponto singular (ou trivial) de f quando $f(x) = 0$. Chama-se $x \in E$ de ponto regular quando não é um ponto singular.*

Exemplo 3.1.6 *Sejam as EDO $y' = 2\sqrt{y}$ e $x' = x^2 + 2x - 3$. Tem os seguintes pontos singulares, para a primeira equação $y_0 = 0$ e para a segunda equação os pontos singulares são $x_0 = 1$, $x_1 = -3$.*

Observa-se que, para y' , ocorre que a solução $y(t) = 0$, de fato satisfaz a EDO $y'(t) = 2\sqrt{0} = 0$.

Para x' , ocorre que a solução $x(t) = 1$ fornece

$$x'(t) = (1)^2 + 2(1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0,$$

logo satisfaz, a EDO.

Ainda para a solução $x(t) = -3$ decorre que

$$x'(t) = (-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0,$$

satisfazendo as equações diferenciais.

◇

Observação 3.1.7 *Diz-se também que uma singularidade do campo f é um ponto de equilíbrio de f já que o sistema fica em repouso. Em particular a trajetória $x(t) = x_0$ é chama de trajetória singular.*

O próximo resultado é uma demonstração do Teorema 2.2.4 para o caso em que f é autônoma.

Proposição 3.1.8 *Seja $x : I(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a solução máxima de $x' = f(x)$ por x_0 , definida no intervalo máximo $I(x_0) = (\alpha, \beta)$ de f por x_0 . Se $\beta < +\infty$ então, dado qualquer compacto $K \subset E$ existe $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $x(t) \in E - K$. Analogamente se $-\infty < \alpha$ então, dado qualquer compacto $K \subset E$, existe $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $x(t) \in E - K$.*

Demonstração: Seja $x(t)$ uma solução qualquer de

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (3.2)$$

para $t \in I$, definida em $I = [t_0, \beta)$ em que $\beta < \infty$.

Suponha, por contradição, que exista um compacto N , de modo $(t, x(t)) \in N$ para todo $t \in I(x_0)$. Como N é compacto e f é contínua, existe $M > 0$ tal que $|f(t, x)| \leq M$ para cada $(t, x) \in N$.

De (3.2) resulta que para quaisquer $t_1, t_2 \in I$,

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int_{t_2}^{t_1} f(s, x(s)) ds \right| \leq M|t_1 - t_2|,$$

isto é, o caminho $x(t)$ é uniformemente contínuo em I e, portanto, possui uma extensão contínua $\bar{x} : [t_0, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com valor $\bar{x}(\beta^-) = \lim_{r \rightarrow \beta} x(r)$ no extremo β .

Ainda de (3.2), tem-se que

$$x(r) - x(t_0) = \int_{t_0}^r f(s, x(s)) ds,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \bar{x}(\beta) - \bar{x}(t_0) &= \lim_{r \rightarrow \beta^-} x(r) - x(t_0) \\ &= \lim_{r \rightarrow \beta^-} [x(r) - x(t_0)] \\ &= \lim_{r \rightarrow \beta^-} \int_{t_0}^r f(s, x(s)) ds \\ &= \int_{t_0}^{\beta} f(s, \bar{x}(s)) ds. \end{aligned}$$

Assim, a função $\bar{x}(t)$ é solução da equação (3.2) e do PVI associado a ela. Pela unicidade de solução $\bar{x} = x$, o que implica que a solução máxima está definida em $t = \beta$, o que contradiz a hipótese que o intervalo maximal da solução $x(t)$ é $I(x_0) = (\alpha, \beta)$.

Portanto, dado qualquer compacto $K \subset E$ existe $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $x(t) \in E - K$.

De maneira análoga obtém-se a outra afirmação. ■

Segue como consequência da Proposição 3.1.8, um resultado muito útil para o estudo de campos de vetores de EDO's não lineares, que será demonstrada a seguir.

Corolário 3.1.9 *Se o campo f tem domínio \mathbb{R}^n e se $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma trajetória de f tal que $|x(t)|$ é limitado para todo $t \in I$, então $I = \mathbb{R}$*

Demonstração: Se $|x(t)| \leq r$ para todo $t \in I$, então a solução $x(t)$ cabe na bola fechada de centro $0 \in \mathbb{R}^n$ e raio r , que é compacta.

Logo pela contra positiva da Proposição 3.1.8, $I = \mathbb{R}$. ■

O Corolário 3.1.9, apresenta que se uma trajetória $x(t)$ possui algum $t \in \mathbb{R}$ indefinido, então $|x(t)|$ assume valores arbitrariamente grandes.

Exemplo 3.1.10 *Seja a EDO*

$$\begin{cases} x' = x(t)^2 \\ x(5) = 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Busca-se uma solução para a equação diferencial (3.3), assim:

$$\frac{x'}{x^2} = 1,$$

integrando ambos os lados na variável t , resulta

$$\int \frac{x'}{x^2} dt = \int dt,$$

ou ainda,

$$\frac{-1}{x} = t + k,$$

portanto,

$$x(t) = \frac{-1}{t + k}.$$

Para a condição inicial da expressão (3.3), há que,

$$1 = \frac{-1}{5 + k},$$

ou seja, $k = -6$. Logo $x(t) = \frac{-1}{t - 6}$.

Destaca-se que $x(t)$ não está definida para $t = 6$, e pelo Teorema 3.1.8 há que a solução não está em compactos. De fato há que

$$\lim_{t \rightarrow 6} x(t) = \lim_{t \rightarrow 6} \frac{-1}{t - 6} = \infty$$

por definição, há que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, se $|t - 6| < \delta$ então $|x(t)| > \varepsilon$. Portanto $x(t)$ é ilimitada.

◇

Proposição 3.1.11 *Seja Ω aberto de \mathbb{R}^{n+1} e E aberto de \mathbb{R}^n . Se $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o fluxo de um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, então*

$$\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$$

para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ tais que $s, t + s \in I(x)$

Demonstração: Seja $\phi(t, \phi(s, x))$ solução maximal de

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \phi(s, x). \end{cases} \quad (3.4)$$

Nota-se que $\phi(t + s, x)$ satisfaz (3.4) pois $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t + s, x) = f(\phi(t + s, x))$ pela Definição 3.1.3.

Logo pela unicidade de soluções maximais, decorrente da Proposição 2.2.3, há que

$$\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x).$$

■

A Proposição 3.1.11 apresenta que o fluxo não muda de solução $x(t)$ ao decorrer de um determinado tempo s .

Teorema 3.1.12 *Seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$. O domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ do fluxo $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , com $1 \leq k \leq +\infty$ é um aberto e o fluxo ϕ é uma aplicação de mesma classe C^k em Ω .*

O Teorema 3.1.12, decorre da aplicação de outros dois resultados, que garantem a continuidade e diferenciabilidade do fluxo $\phi(t, x)$ de acordo com a continuidade e diferenciabilidade do campo f . Ambos os resultados, a respeito de continuidade e diferenciabilidade estão demonstrados em Doering [9].

O outro tipo de trajetória que possui propriedades particulares são definidas a seguir.

Definição 3.1.13 *Dizemos que uma trajetória $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de f é uma trajetória periódica do campo f , se a trajetória não é singular e existem $t_1, t_2 \in I$ tais que $t_1 \neq t_2$ e $x(t_1) = x(t_2)$.*

Observação 3.1.14 *Nota-se que a Definição 3.1.13 indica que uma trajetória é periódica se o caminho que a define não é constante nem injetor.*

Exemplo 3.1.15 *O sistema linear dado por $x' = Ax$, em que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ com condições iniciais $x_1(0) = k_1$ e $x_2(0) = k_2$, em que k_1 e k_2 são constantes reais, produz trajetórias periódicas.*

Destaca-se que, da teoria de EDO's lineares, para a EDO $x' = Ax$, o fluxo $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dá-se por

$$\phi(t, x) = \phi_t(x) = e^{tA}(x). \quad (3.5)$$

Aplica-se o conceito e obtêm-se

$$\phi_t(x_1, x_2) = e^{tA}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Ao fixar-se as condições iniciais e variar-se t , determina-se, o fluxo que é a única solução que satisfaz as condições iniciais.

Utiliza-se as coordenadas polares simplificando a escrita da solução, por meio de, $x(t) = r(\cos(t - \theta), -\sin(t - \theta))$ em que r e θ são as coordenadas polares de $x_1(0) = k_1$ e $x_2(0) = k_2$ e obtêm-se

$$\phi_t(k_1, k_2) = r(\cos(t - \theta), -\sin(t - \theta)). \quad (3.6)$$

Conclui-se, de (3.6), que o fluxo é periódico, de período 2π , exceto no ponto singular.

Explicitando o que construiu-se acima, fixa-se as constantes da condição inicial por $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$, decorre que $r = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

A solução determinada, pelo fluxo (3.5) e a solução (3.6), dá-se por

$$x(t) = \left(\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), -\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right) = (\sin(t), \cos(t)). \quad (3.7)$$

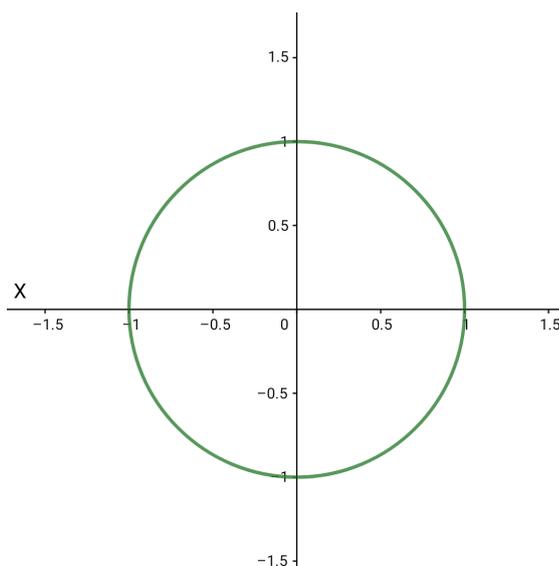


Figura 3.1: Gráfico da solução em (3.7)

Fonte: Autor

◇

Definição 3.1.16 *Seja $U : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que o campo de vetores $f = -\nabla U : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o campo gradiente do potencial U .*

Observação 3.1.17 *Nota-se que os pontos de equilíbrio do campo gradiente f são os pontos críticos do potencial U .*

Além disso, da Definição 3.1.5, se $x_1 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ é singular então $f(x_1) = 0$. Também, pela Definição 3.1.16, conclui-se que $-\nabla U(x_1) = f(x_1) = 0$.

Agora, do cálculo de funções de várias variáveis, sabe-se que

$$\nabla U(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \frac{\partial U}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(x) \right),$$

e quando o $\nabla U(x)$ é aplicado em um ponto crítico, tem valor nulo.

Proposição 3.1.18 *Seja $x(t)$ é uma solução do PVI (3.1). Então $(U \circ x)(t)$ é não crescente ao longo das trajetórias de um campo gradiente.*

Demonstração: Observa-se que

$$\begin{aligned} (U \circ x)'(t) &= DU(x(t)) \cdot x'(t) = \langle \nabla U(x(t)), f(x(t)) \rangle \\ &= \langle -f(x(t)), f(x(t)) \rangle = -|f(x(t))|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Do Cálculo Diferencial e Integral, conclui-se que $(U \circ x)(t)$ é não crescente.

■

Esse resultado auxilia a determinar uma função de Lyapunov, pois ver-se-á que U é um candidato a função de Lyapunov por satisfazer certas condições.

Exemplo 3.1.19 *Toda solução do PVI (3.1) ou é trivial ou é regular, não podendo o campo ser nulo em algum ponto da curva integral e não nulo em outro.*

Com efeito, inicialmente, mostra-se que se $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de $x' = f(x)$, com $0 \in I$, as seguintes afirmações são equivalentes.

1. O caminho x é constante.
2. $x'(t) = 0 \in \mathbb{R}^n$ para todo $t \in I$.
3. $x'(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.
4. $f(x(0)) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

De fato:

1) \Rightarrow 2)

Se $x(t) = k$, para algum $k \in \mathbb{R}^n$, então deriva-se em relação t , obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}k \\ x'(t) &= 0, \end{aligned}$$

para qualquer $t \in I$.

2) \Rightarrow 3)

Se $x'(t) = 0$, para todo $t \in I$ então, em particular, escolhe-se $t = 0$ e concluí-se que $x'(0) = 0$.

3) \Rightarrow 4)

Se $x'(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$, do PVI (3.1), sabe-se, $x'(t) = f(x(t))$ então para $t = 0$ ocorre

$$f(x(0)) = x'(0) = 0.$$

4) \Rightarrow 1)

Se $f(x(0)) = 0$ então $x(0) = x_*$ é solução singular, pois dado $\bar{x}(t) = x_*$, ocorre que $\bar{x}'(t) = 0$ e $f(\bar{x}(t)) = f(x_*) = 0$, pela unicidade de solução, a solução $x(t) = \bar{x}(t) = x_*$ constante.

Assim, concluem-se as equivalências.

Agora, seja $x(t)$ uma solução regular e suponha-se que existe um $t^* \in I$ tal que $f(x(t^*)) = 0$

Aplicando as equivalências apresentadas, anteriormente, em específico 4) \Rightarrow 1).

Concluí-se que a solução $x^*(t) = k_1$ é solução singular, em que $k_1 = x(t^*)$

Observa-se que $x^*(t) \cap x(t) = k_1$, aplica-se o Lema 2.2.2, obtendo que as soluções coincidem, logo $x(t) = k_1$, em que $f(k_1) = f(x(t^*)) = 0$, portanto é singular em todo o intervalo I que contradiz a hipótese inicial, de $x(t)$ ser regular.

Assim $x(t)$ ou é regular ou é singular.

◇

De acordo com o objetivo de estudar as trajetórias e as suas respectivas condições iniciais, depara-se com a possibilidade de duas condições iniciais, diferentes, estarem em uma mesma trajetória. Para evitar essa situação utiliza-se a definição a seguir.

Definição 3.1.20 *Denomina-se a curva integral definida pela imagem da trajetória de $x' = f(x)$ por x_0 , por órbita de f por x_0 . Isto é, a órbita é o conjunto $\gamma_p = \{x(t) \mid t \in I_p\}$, em que I_p é o intervalo máximo da solução $x(t)$ que passa pela condição inicial $x(t_0) = p$.*

Observação 3.1.21 *Uma mesma órbita, pode ser definida por uma infinidade de Problemas de Valor Inicial (PVI).*

Com efeito, pela Proposição 3.1.11, translada-se no parâmetro t uma solução. Logo, cada trajetória, fornece uma parametrização do mesmo conjunto, que é a órbita.

Explicitamente, temos a seguinte equivalência $q \in \gamma_p \Leftrightarrow \gamma_q = \gamma_p$.

De fato, se $q \in \gamma_p$ então existe $t_1 \in I_p$ tal que $q = x(t_1)$, logo, $\phi(t, q) = \phi(t_1, p)$ e $I_p - \{t_1\} = I_q$.

Observa-se também que, como as trajetórias $x(t)$ são de classe C^2 , as órbitas, por um ponto regular são conjuntos conexos e são curvas parametrizadas de classe C^2 .

Por fim, decorrente do campo f ser de classe C^1 , as órbitas não apresentam auto-interseções. Da Proposição 2.2.3, que garante unicidade de soluções no intervalo máximo, há que por cada ponto de E passa uma única órbita do campo f .

Definição 3.1.22 *Denomina-se espaço de fase o domínio E de um campo de vetores f . O retrato de fase de f é a partição do espaço de fase E em órbitas orientadas no sentido do tempo crescente.*

Como a órbita não possui auto-interseção, há que o domínio aberto E é particionado em órbitas do campo. Assim a Definição 3.1.22 nomeia a partição do domínio E .

Define-se algumas órbitas com propriedades particulares.

Definição 3.1.23 *Diz-se que uma órbita é singular quando a órbita de uma singularidade consiste em um único ponto, a singularidade.*

Semelhante ao caso das trajetórias singulares, as órbitas singulares são conjuntos unitários, com o único ponto que é a singularidade.

Definição 3.1.24 *Diz-se que uma órbita é periódica quando a órbita é descrita por uma trajetória periódica. Cada ponto de uma órbita periódica é um ponto periódico do campo.*

Proposição 3.1.25 *Se $x(t)$ é uma solução máxima de (3.1) definida no intervalo máximo I e $x(t_1) = x(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, então $I = \mathbb{R}$ e $x(t+c) = x(t)$, em que $c = t_2 - t_1$.*

Demonstração: Define-se $y : [t_2, t_2 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $y(t) = x(t - c)$, tem-se que

$$y'(t) = x'(t - c) = f(x(t - c)) = f(y(t)),$$

e $y(t_2) = x(t_2)$, pois

$$y(t_2) = x(t_2 - c) = x(t_2 - t_2 + t_1) = x(t_1) = x(t_2).$$

Pelo Teorema 3.1.8, tem-se a unicidade de solução. Decorre que para $[t_2, t_2 + c] \subseteq I$, $y(t) = x(t)$. Ou seja, $x(t - c) = x(t)$.

De forma semelhante, obtêm-se $I = \mathbb{R}$ e $x(t + c) = x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

■

A Proposição 3.1.25 indica que as trajetórias não injetivas possuem intervalo máximo \mathbb{R} e período c . Porém não se conclui que são órbitas periódicas, pois o caso que a trajetória é constante também se encaixa nas condições da proposição.

Teorema 3.1.26 *Se $x(t)$ é uma solução máxima de (3.1) em I , verifica-se apenas uma das seguintes alternativas.*

1. $x(t)$ é uma curva diferenciável injetora.
2. $I = \mathbb{R}$ e $x(t)$ é constante.
3. $I = \mathbb{R}$ e $x(t)$ é periódica.

Demonstração: Se $x(t)$ não é injetora, então $x(t_1) = x(t_2)$ para algum $t_1 \neq t_2$.

Aplica-se a Proposição 3.1.25, então garante-se que $I = \mathbb{R}$ e $x(t+c) = x(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $c = t_2 - t_1 \neq 0$.

Seja $C = \{c \in \mathbb{R} \mid x(t+c) = x(t), \forall t \in I\}$. O conjunto C é um subgrupo aditivo fechado de \mathbb{R} .

De fato, se $c, d \in C$, então $c+d, -c \in C$, pois

$$x(t+c+d) = x(t+c) = x(t)$$

e

$$x(t-c) = x(t+c-c) = x(t)$$

e portanto C é um subgrupo aditivo de \mathbb{R} .

Por outro lado, se $c_n \in C$ e $c_n \rightarrow c$, tem-se $c \in C$, pois

$$\begin{aligned} x(t+c) &= x(t + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n) \\ &= x(\lim_{n \rightarrow \infty} (t+c_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x(t+c_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x(t) \\ &= x(t) \end{aligned}$$

De $C \neq \{0\}$, segue que $C \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$, em que \mathbb{R}_+ denota os reais positivos, pois existe $c \in C$, $c \neq 0$, o que implica que c ou $-c$ está em $C \cap \mathbb{R}_+$.

Seja $\tau = \inf[C \cap \mathbb{R}_+]$. Se $\tau > 0$, $C = \tau\mathbb{Z}$, pois se $c \in C - \tau\mathbb{Z}$, existe um único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k\tau < c < (k+1)\tau$ e portanto $0 < c - k\tau < \tau$ e $c - k\tau \in C \cap \mathbb{R}_+$. Contradição com $\tau = \inf[C \cap \mathbb{R}_+]$.

Se $\tau = 0$, verifica-se que C é denso em \mathbb{R} .

De fato, dado $\varepsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, existe $c \in C$ tal que $|c-t| < \varepsilon$.

Toma-se $c_0 \in C \cap \mathbb{R}_+$, tal que $0 < c_0 < \varepsilon$. Todo número real t dista menos ε de um ponto $c_0\mathbb{Z} \subseteq C$, pois este conjunto divide \mathbb{R} em intervalos de comprimento $c_0 < \varepsilon$, com extremos nele.

Logo, todo subgrupo aditivo C de \mathbb{R} é descrito na forma $\tau\mathbb{Z}$, $\tau > 0$, ou C é denso em \mathbb{R} .

De $C \neq \{0\}$ e C ser um subgrupo aditivo fechado, segue que $C = \mathbb{R}$ ou $C = \tau\mathbb{Z}$, em que $\tau > 0$.

Caso $C = \tau\mathbb{Z}$, significa que $x(t)$ é periódica.

Caso $C = \mathbb{R}$ então $x(t)$ é constante.



O Teorema 3.1.26, classifica os tipos de órbitas, que no caso 1 são injetoras, definidas em todo o \mathbb{R} . No caso 2, as órbitas desse tipo, são constantes, ou seja, um ponto, ou ainda, a singularidade. Já a órbita do caso 3 é um difeomorfismo de uma circunferência.

Exemplo 3.1.27 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, um campo com as singularidades em 0 e 1, apenas. A solução máxima de $x' = f(x)$ com condição inicial entre 0 e 1 tem intervalo máximo $I(x_0) = \mathbb{R}$. Existem exatamente 10 tipos de órbitas distintas.*

Observa-se que f tem, como possibilidade, dois tipos de comportamento fora das singularidades 0 e 1, isto é, ou $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$.

Do Cálculo Diferencial e Integral, ocorre que se $f(x) > 0$, em um intervalo, $x(t)$ será crescente, ao longo deste intervalo. E se $f(x) < 0$, em um intervalo, $x(t)$ será decrescente neste intervalo. Assim constrói-se a Tabela 3.1 combinando-se os possíveis sinais assumidos por $f(x)$ nos três intervalos definidos entre os pontos singulares.

Tabela 3.1: Possibilidades de sinais da $f(x)$ nos intervalos fora das singularidades.

$] - \infty, 0[$	$]0, 1[$	$]1, +\infty[$
$f(x) > 0$	$f(x) > 0$	$f(x) > 0$
$f(x) > 0$	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$
$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) < 0$
$f(x) < 0$	$f(x) > 0$	$f(x) > 0$
$f(x) < 0$	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
$f(x) < 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$
$f(x) < 0$	$f(x) < 0$	$f(x) < 0$

Analisando-se as possíveis combinações do sinal da aplicação $f(x)$ no intervalo \mathbb{R} considerando as singularidades, obtêm-se 8 comportamentos de órbitas possíveis. Adiciona-se os dois sentidos para as órbitas singulares e conclui-se 10 possibilidades de órbitas.

Orienta-se a órbita de acordo com o valor crescente de t para que seja possível representar graficamente as órbitas. Dessa forma, na Figura 3.2 são apresentados os comportamentos possíveis de uma órbita com singularidades em 0 e 1. Ressalta-se que é necessário manter um paralelo com o apresentado na Tabela 3.1 para facilitar a compreensão da figura. Este exemplo será citado, adiante, quando for discutido conjugação de fluxos.

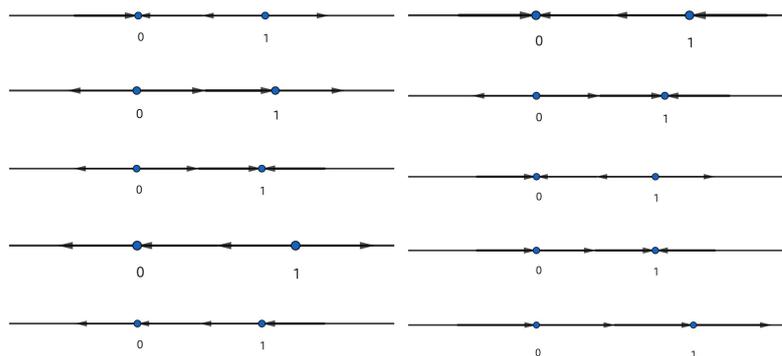


Figura 3.2: Representação gráfica das possibilidades de órbitas com singularidades em 0 e 1.

Fonte: Autor

◇

Teorema 3.1.28 *O fluxo $\phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é uma aplicação de classe C^1 que satisfaz a equação*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x))$$

e, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, o fluxo $\phi_t : E \rightarrow E$ no tempo t é difeomorfismo de classe C^1 de E sobre E . Além disso, vale a propriedade de grupo

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$; em particular, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$ é a aplicação inversa de ϕ_t e, no tempo $t = 0$, $\phi_0 = id|_E$ é a aplicação identidade restrita a E .

Demonstração: Da Proposição 3.1.11 e do Teorema 3.1.12, concluí-se esse resultado. ■

O Teorema 3.1.28, indica que fluxo de campos não-lineares compartilha a propriedade típica do fluxo de campos lineares, ou seja, é sempre um sistema dinâmico.

Exemplo 3.1.29 *Dada uma equação diferencial $x' = f(x)$ definida em $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, pode-se passar das coordenadas $x \in E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ para as coordenadas $y \in E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ por meio de uma mudança de variáveis $y = g(x)$ determinada por uma aplicação $g : E_1 \rightarrow E_2$.*

Para isso, calcula-se y' a partir de x' e obtêm-se uma equação equivalente $y' = \hat{f}(y)$ na nova variável y .

A mudança de coordenadas têm sentido se $g : E_1 \rightarrow E_2$ for um difeomorfismo e, então, defini-se

$$\hat{f}(y) = Dg(x) \cdot f(x)$$

em que $y = g(x)$ e D indica a aplicação derivada de uma função de mais de uma variável definida em um aberto de \mathbb{R}^n .

Verifica-se que quando $x(t)$ é uma solução de $x' = f(x)$ e $x(0) = 0$, então $y(t) = g(x(t))$ é uma solução de $y' = \hat{f}(y)$, $y(0) = g(x_0)$.

◇

A mudança de coordenadas apresentada, no Exemplo 3.1.29, destaca que existe a possibilidade associar duas diferentes equações diferenciais por meio de um difeomorfismo. Essa associação serve para facilitar o estudo da equação. Esse tipo de associação receberá um nome específico de acordo com a situação, como será visto a diante.

Definição 3.1.30 *Dados dois campos de vetores $f_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ com respectivos fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2 , e sejam $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$ pontos dados. Diz-se que os campos f_1 em x_1 e f_2 em x_2 são localmente topologicamente conjugados se existem vizinhanças U_1 de x_1 em E_1 e U_2 de x_2 em E_2 e um homeomorfismo $g : U_1 \rightarrow U_2$, denominado conjugação local, tal que $g(x_1) = x_2$ e*

$$\phi_t^2 \circ g = g \circ \phi_t^1$$

para qualquer $x \in U_1$ e cada $t \in \mathbb{R}$.

No caso da Definição 3.1.30 existe uma aplicação, no caso g , que conjuga ou associa os fluxos dos campos f_1 e f_2 , ou seja, as EDO's. Contudo g não é diferenciável, o que pode implicar em perda de propriedades importantes, já que estamos busca-se conectar equações diferenciáveis.

Ainda ao relembrar do Exemplo 3.1.27, as 10 órbitas podem ser reduzidas a 5 órbitas quando pensamos no comportamento topológico, pois existe um aplicação que conjuga as órbitas ao inverter o sinal da $f(x)$.

Exemplo 3.1.31 *Toda conjugação topológica leva singularidades em singularidades e órbitas periódicas em órbitas periódicas preservando o período.*

Sejam $\phi_1(t, x)$ e $\phi_2(t, x)$, respectivos fluxos dos campos f_1 e f_2 topologicamente conjugados pelo homeomorfismo g . Isto é

$$\phi_2(t, g(x)) = g(\phi_1(t, x)). \quad (3.8)$$

Seja x_0 uma singularidade do campo f_1 , isto é, $f_1(x_0) = 0$. Logo a solução $x(t) = x_0$ é a trivial e $\phi_1(t, x) = x_0$.

Nota-se que $g(\phi_1(t, x)) = g(x_0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Da equação (3.8), há que $\phi_2(t, g(x)) = g(\phi_1(t, x)) = g(x_0)$.

Então $\phi_2(t, g(x))$ é constante de valor $g(x_0)$. Da diferenciabilidade do fluxo, e do Teorema 3.1.28, há que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\phi_2(t, g(x))) &= f_2(\phi_2(t, g(x))) \\ \frac{d}{dt}(g(x_0)) &= f_2(\phi_2(t, g(x))) \\ 0 &= f_2(\phi_2(t, g(x_0))).\end{aligned}$$

Logo $g(x(t)) = g(x_0)$ é uma singularidade para o campo f_2 .

Seja f_1 um campo, tal que o fluxo $\phi_1(t, x)$ associado ao campo f_1 é periódico, de período T . Seja, ainda, γ_p a órbita dada por $\gamma_p = \{\phi_1(t, x) \mid t_0 \leq t < t_0 + T\}$.

O campo f_1 é topologicamente conjugado ao campo f_2 de fluxo $\phi_2(t, x)$ pelo homeomorfismo h , ou seja,

$$\phi_2(t, h(x)) = h(\phi_1(t, x)). \quad (3.9)$$

Do fluxo $\phi_1(t, x)$ ser periódico, há que se $\phi_1(s, x) = \phi_1(s + T, x)$, então $h(\phi_1(s, x)) = h(\phi_1(s + T, x))$.

Logo a órbita $\gamma_q = \{\phi_2(t, h(x)) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{h(\phi_1(t, x)) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{h(\phi_1(t, x)) \mid t_0 \leq t < t_0 + T\}$. Ou seja $\gamma_q = \{\phi_2(t, h(x)) \mid t_0 \leq t < t_0 + T\}$.

Assim a órbita γ_q é periódica. Suponha, por absurdo, que existe $0 < T^* < T$ tal que, $\phi_2(t, x) = \phi_2(t + T^*, x)$.

Nota-se, que $\gamma_p = \{\phi_1(t, x) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{h^{-1}(\phi_2(t, x)) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{h^{-1}(\phi_2(t, h(x))) \mid t_0 \leq t < t_0 + T^*\}$. Ou seja $\gamma_p = \{\phi_1(t, x) \mid t_0 \leq t < t_0 + T^*\}$. O que contraria o fato de T ser o período da ϕ_1 .

◇

No Exemplo 3.1.31 apresenta-se que as singularidades não precisam de condições de diferenciabilidade para o transporte para outros fluxos, que estão conjugados. Também ocorre que órbitas periódicas são associadas a órbitas periódicas de mesmo período, sem a exigência de diferenciabilidade sobre g . Portanto o comportamento dinâmico é preservado por meio da conjugação topológica.

Definição 3.1.32 *Dados dois campos de vetores $f_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ com respectivos fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2 , e sejam $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$ pontos dados. Diz-se que os campos f_1 em x_1 e f_2 em x_2 são localmente diferenciavelmente conjugados se existem vizinhanças U_1 de x_1 em E_1 e U_2 de x_2 em E_2 e um difeomorfismo $g : U_1 \rightarrow U_2$, denominado conjugação local, tal que $g(x_1) = x_2$ e*

$$\phi_t^2 \circ g = g \circ \phi_t^1$$

para qualquer $x \in U_1$ e cada $t \in \mathbb{R}$.

No caso da Definição 3.1.32, há que localmente existe um difeomorfismo entre os campos f_1 e f_2 . Ao decorrer do trabalho ver-se-á que a diferenciabilidade da aplicação de conjugação permite transportar a função de Lyapunov de um campo para o outro. Esse transporte facilita no processo de identificar propriedades das singularidades dos campos.

Definição 3.1.33 *Diz-se que $A \in M(n)$ é um campo linear hiperbólico se todos seus autovalores generalizados têm parte real não-nula.*

Exemplo 3.1.34 *Dois campos lineares hiperbólicos em $M(n)$ quaisquer são topologicamente conjugados se, e somente se, têm o mesmo Índice de estabilidade, isto é o mesmo número de autovalores com parte real negativa.*

Este resultado está demonstrado em Sotomayor [3] página 81 com detalhamento satisfatório. Não será apresentado a demonstração do resultado neste trabalho, pela necessidade de uma construção ampla de teoria suplementar.

Exemplo 3.1.35 *$A, B \in M(n)$ são linearmente conjugados se, e somente se, são diferencialmente conjugados.*

Se A e B são conjugadas, então existe $Q \in M(n)$, tal que

$$A = QBQ^{-1}$$

Dá teoria de Álgebra Linear, há que associa-se a toda matriz uma transformação linear. Logo seja g a transformação linear associada a Q . Então g conjugua os fluxos de A e B .

De Lima [12] página 251, há que toda aplicação linear é diferenciável. Então g é um difeomorfismo.

Se os fluxos de A e B são diferencialmente conjugados, então existe g tal que,

$$\phi_A(t, g(x)) = g(\phi_B(t, x)),$$

e g é homeomorfismo diferenciável. Logo g é uma bijeção do fluxo de A no fluxo de B . Por fim da Teoria linear de equações diferenciais, sabe-se que $\phi_A = e^{tA}$, assim

$$\begin{aligned} g(\phi_{B_1}(t, x) + \phi_{B_2}(t, x)) &= g(e^{t(B_1+B_2)}) = e^{t(A_1+A_2)}g(x) = e^{tA_1}g(x) + e^{tA_2}g(x) = \\ &= \phi_{A_1}(t, g(x)) + \phi_{A_2}(t, g(x)) = g(\phi_{B_1}(t, g(x))) + g(\phi_{B_2}(t, x)) \end{aligned}$$

e

$$g(\alpha\phi_B(t, x)) = \alpha\phi_A(t, x) = \alpha g(\phi_B(t, x)).$$

Logo g é uma transformação linear e associa-se uma matriz Q , a essa transformação. Logo, existe Q tal que

$$A = QBQ^{-1}$$

ou seja, A e B são linearmente conjugados.

◇

No Exemplo 3.1.35, a grosso modo, mostrou-se que a conjugação g é um difeomorfismo se e somente se a conjugação g é um isomorfismo linear. Mais a frente no texto, após definir uma função de Lyapunov, mostrar-se-á que a conjugação diferenciável permite transportar as funções de Lyapunov de um fluxo para o outro por meio do difeomorfismo.

Generaliza-se a noção de energia total de um sistema mecânico conservativo, para equações diferenciais, por meio da Definição 3.1.36.

Definição 3.1.36 *Diz-se que uma função diferenciável $V : E \rightarrow \mathbb{R}$, em que $E \subseteq \mathbb{R}^n$, é uma integral primeira da equação diferencial $x' = f(x)$ se não for constante em conjuntos abertos, mas é constante ao longo de cada solução da equação diferencial.*

Observação 3.1.37 *Em outras palavras, a função V , dada na Definição 3.1.36, não pode ser constante em aberto algum de E . Contudo deve satisfazer*

$$(V \circ x)'(t) = 0,$$

para qualquer solução $x = x(t)$ de $x' = f(x)$.

Aqui, observa-se da Definição 3.1.16, que um campo gradiente, possui integral primeira. E que a integral primeira tornar-se-á uma candidata a função de Lyapunov.

Ao final dessa seção, mostrar-se-á a propriedade tubular das trajetórias regulares. Para tal, inicia-se com algumas fundamentações.

Definição 3.1.38 *Define-se como campo constante $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada pela lei*

$$\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0) = e_1 \in \mathbb{R}^n,$$

com condição inicial $y(0) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definição 3.1.39 *Diz-se que o fluxo do campo constante \bar{f} é laminar ou tubular.*

A Definição 3.1.38 e a Definição 3.1.39 descrevem trajetórias que a partir de um hiperplano afim $y_1 = c$ estarão em um hiperplano afim $y_1 = c + t$ após o decorrer de um tempo t .

A Figura 3.3 apresenta um fluxo tubular no plano. Será mostrado que essa propriedade do fluxo tubular constante pode ser compartilhada para outros campos f desde de que este seja diferencialmente conjugado ao fluxo constante \bar{f} .

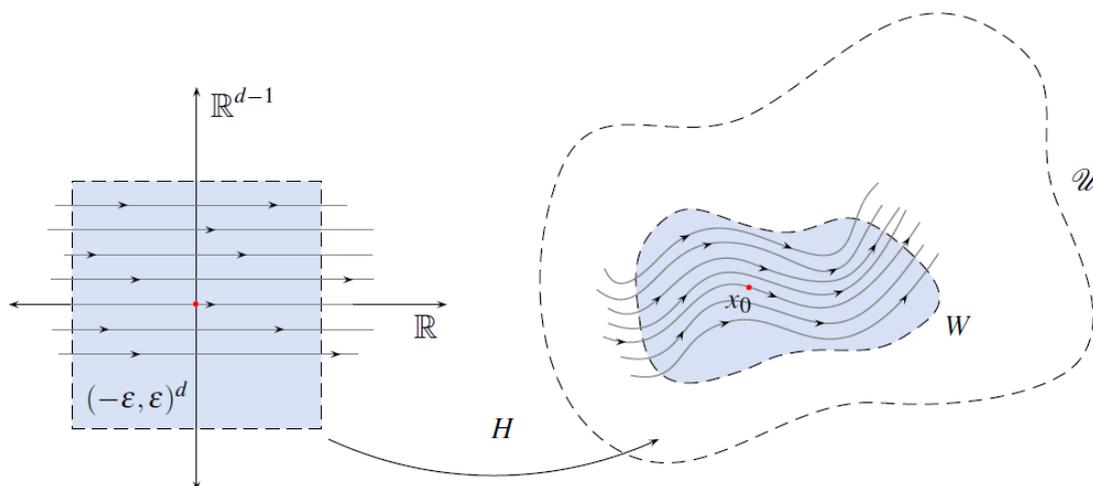


Figura 3.3: Fluxo Tubular.

Fonte: <http://edo.impa.br/Gallery> [13]

Definição 3.1.40 Dado um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, diz-se que o ponto $x_0 \in E$ possui a propriedade de fluxo tubular se existem uma vizinhança $U \subseteq E$ de x_0 denominada vizinhança tubular de x_0 , um aberto $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$, uma constante $r > 0$ e um difeomorfismo $g : U \rightarrow (-r, r) \times W$ que conjuga ϕ_t de f em U com o fluxo ψ_t do campo constante $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0)$ em $(-r, r) \times W$, isto é, vale

$$\psi(t, g(x)) = g(\phi(t, x))$$

para qualquer $x \in U$ e cada $|t| < r$.

Observação 3.1.41 Destaca-se que em uma vizinhança tubular de U não há singularidades do campo.

Isso ocorre devido ao Exemplo 3.1.31, que nos mostra que uma conjugação leva singularidades em singularidades, e como o fluxo \bar{f} não possui singularidades, não haverá uma vizinhança em torno da singularidade que possua a propriedade tubular.

Definição 3.1.42 Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe $C^k, k \geq 1$ e $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $h : V \rightarrow E$ de classe C^k chama-se seção transversal local de f , de classe C^k quando para todo $v \in V$, $Dh(v)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $f(h(v))$ geram o espaço \mathbb{R}^n . Seja $H = h(V)$ munido da topologia induzida se a $h : V \rightarrow H$ for um homomorfismo, diz-se que H é uma seção transversal de f .

Teorema 3.1.43 (Teorema do Fluxo Tubular) Seja x_0 um ponto não singular de $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k e $h : V \rightarrow H$ uma seção transversal local f de classe C^k com $h(0) = x_0$, em que $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Então existe uma vizinhança U de x_0 em E e um difeomorfismo $g : U \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$ de classe C^k em que $\epsilon > 0$ e B é uma bola aberta em

\mathbb{R}^{n-1} de centro na origem $0 = h^{-1}(x_0)$ tal que:

a) $g(H \cap U) = \{0\} \times B$.

b) g uma conjugação de classe C^k entre $f|_U$ e o campo constante $\bar{f} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Seja $\phi(t, x) : D \rightarrow E$ o fluxo de f . Seja $F : D_A = \{(t, x) \mid (t, h(x)) \in D\} \rightarrow E$ definida por

$$F(t, x) = \phi(t, h(x)).$$

A aplicação F aplica linhas paralelas em curvas integrais de f .

Tem-se que F é um difeomorfismo local em $0 = (0, \bar{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Pelo Teorema da Função inversa (esse resultado pode ser encontrado em Lima [12]) é suficiente provar que $DF(0)$ é um isomorfismo.

Há que

$$D_1F(0) = \frac{d}{dt}\phi(t, h(0))|_{t=0} = f(\phi(0, x_0)) = f(x_0)$$

e

$$D_jF(0) = D_{j-1}h(\bar{0})$$

para todo $j = 2, \dots, n$, pois $\phi(0, h(x)) = h(x)$ para qualquer $x \in V$.

Portanto, decorre da Definição 3.1.42 vetores $D_jF(0)$, $j = 1, \dots, n$ geram \mathbb{R}^n e $DF(0)$ é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Função Inversa existem $\varepsilon > 0$ e uma bola B em \mathbb{R}^{n-1} com centro na origem 0 tais que $F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $U = h((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$.

Seja $g = (F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B})^{-1}$.

Então $g(H \cap U) = \{0\} \times B$, pois $F(0, x) = x \in H$, para qualquer $x \in B$. Assim conclui-se a prova de a).

Por outro lado g^{-1} , conjuga f e \bar{f} :

$$\begin{aligned} Dg^{-1}(t, x)\Psi(t, x) &= DF(t, x) \cdot (1, \dots, 0) = D_1F(t, x) = f(\phi(t, h(x))) = f(F(t, x)) \\ &= f(g^{-1}(t, x)) \end{aligned}$$

para todo $(t, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$. Assim conclui-se a prova de b). ■

O Teorema 3.1.43 apresenta que em uma vizinhança de um ponto regular x_0 é possível encontrar uma integral primeira para a EDO.

3.2 Estabilidade

Nessa seção serão abordados as definições, proposições e teoremas sobre a estabilidade das singularidades, segundo a teoria de Lyapunov e a teoria de conjuntos invariantes.

Para desenvolver a respectiva teoria considera-se $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, com fluxo global $\phi(t, x)$ definido em cada $(t, x) \in \Omega = \mathbb{R} \times E$.

Definição 3.2.1 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio para o campo f . Diz-se que x_0 é um ponto de equilíbrio estável para f se, para qualquer vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que $W \subseteq E \cap U$ e $\phi(t, x) \in U$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$.*

Dito de outra forma, a Definição 3.2.1 apresenta que x_0 é estável para f se, para qualquer $\varepsilon > 0$, encontra-se $r > 0$ tal que $|\phi(t, x) - x_0| \leq \varepsilon$ para cada $t > 0$ e cada $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ com $|x - x_0| \leq r$.

Exemplo 3.2.2 *Voltando ao Exemplo 3.1.15, olhando para o fluxo gerado pelo campo $x' = Ax$, em que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, mostrar-se-á que o ponto de equilíbrio é estável.*

Inicialmente observa-se que o campo escreve-se da forma $f(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$, com o ponto de equilíbrio $x_0 = (0, 0)$.

Como já foi visto no Exemplo 3.1.15 o fluxo é dado por

$$\phi_t(x_1, x_2) = e^{tA}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},$$

em que (k_1, k_2) é o ponto de condição inicial do problema. Ao utilizar as coordenadas polares chega-se a solução da forma $x(t) = r(\cos(t - \theta), -\sin(t - \theta))$, que são círculos de raio r e centro em $(0, 0)$.

De fato basta tomar $\varepsilon = r > 0$, tal que se $|x - x_0| \leq r$ então para cada $t > 0$ e $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ ocorre que $|\phi(t, x) - (0, 0)| \leq \varepsilon$.

◇

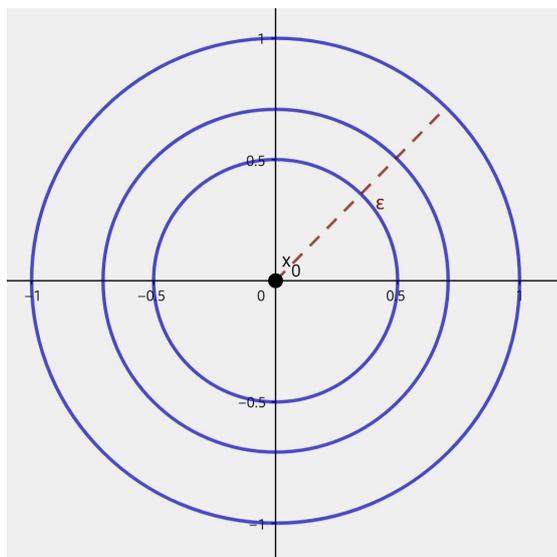
Definição 3.2.3 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio para um campo f . Diz-se x_0 é um ponto de equilíbrio instável se x_0 não é um ponto de equilíbrio estável.*

Definição 3.2.4 *Diz-se que x_0 é um ponto de equilíbrio isolado se existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 tal que x_0 é a única singularidade de f em $E \cap W$.*

Observação 3.2.5 *Como foi visto no Exemplo 3.2.2 o ponto $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável e também satisfaz a Definição 3.2.4 ou seja, um ponto de equilíbrio isolado.*

De fato, em torno de x_0 existem apenas órbitas periódicas, então dado uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^2$ ao tomarmos um ponto $(t_1, x_1) \in W$ tal que $(t_1, x_1) \neq (0, 0)$, têm-se que a trajetória que passa por ele está a uma certa distância $\varepsilon > 0$ de $(0, 0)$.

Portanto esse ponto está na trajetória que é um círculo centrado na origem.

Figura 3.4: Representação da estabilidade de $x_0 = (0, 0)$.

Definição 3.2.6 Seja x_0 um ponto de equilíbrio para o campo f . Diz-se que x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para f se, para qualquer vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que $W \subseteq E \cap U$, $\phi(t, x) \in U$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_0$, para qualquer $x \in W$.

Exemplo 3.2.7 Uma conjugação topológica local entre campos de vetores leva singularidades assintoticamente estáveis em singularidades assintoticamente estáveis.

Com efeito, no Exemplo 3.1.31 foi apresentado que as singularidades são levadas em singularidades através de conjugações topológicas. Resta mostrar que se uma delas for assintoticamente estável a sua respectiva imagem através da conjugação também será. Em outras palavras dado dois fluxos $\phi_1(t, x)$ e $\phi_2(t, x)$ e um homeomorfismo g tal que $\phi_2(t, g(x)) = g(\phi_1(t, x))$. Sejam, também, x_1, x_2 respectivos pontos de equilíbrio de ϕ_1 e ϕ_2 localmente topologicamente conjugados.

Suponha que x_1 seja assintoticamente estável. Então de fato vale, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_1(t, x) = x_0$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_2(t, x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} g(\phi_1(t, g^{-1}(x))) \\ &= g\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_1(t, g^{-1}(x))\right) \\ &= g(x_0) \end{aligned}$$

Portanto $\phi_2(t, x)$ tem como singularidade assintoticamente estável o ponto $g(x_0)$.

◇

Definição 3.2.8 Diz-se que x_0 é um ponto de equilíbrio indiferente se x_0 é um ponto de equilíbrio estável que não é assintoticamente estável.

Proposição 3.2.9 *Se existe um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o campo f então a equação diferencial $x' = f(x)$ não possui integrais primeiras.*

Demonstração:

Pela Definição 3.1.36 é suficiente provar que: qualquer função diferenciável V que é constante ao longo das trajetórias de $x' = f(x)$ é, necessariamente, constante em toda uma vizinhança de cada ponto de equilíbrio assintoticamente estável de f .

Seja $V : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável, que é constante ao longo das trajetórias de $x' = f(x)$ na vizinhança W da singularidade x_0 . Então x_0 é assintoticamente estável para f .

Dado $x \in W$ segue que $V(\phi(t, x))$ é constante para $t \in \mathbb{R}$, portanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_0$.

Decorre da continuidade de V que $V(x) = V(x_0)$. Como $x \in W$ é qualquer conclui-se que $V(x)$ é constante na vizinhança W de x_0 . ■

Ao utilizar a contra positiva da Proposição 3.2.9, observa-se que se a equação $x' = f(x)$ possuir integrais primeiras então não existe um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o campo f .

Definição 3.2.10 *Seja $A \in M(n)$. Diz-se que o fluxo e^{tA} de A é contrativo, se existem constantes $C > 0$ e $\tau > 0$ tais que*

$$|e^{tA}x| \leq Ce^{-\tau t}|x|,$$

para quaisquer $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 3.2.11 *Seja $A \in M(n)$. Diz-se que a singularidade na origem $0 \in \mathbb{R}^n$ de um campo linear A é um poço para A se, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}x = 0. \quad (3.10)$$

Definição 3.2.12 *Seja $A \in M(n)$. Diz-se que A é um atrator se todos os autovalores generalizados de A têm parte real negativa.*

O lema a seguir auxilia a demonstrar uma propriedade sobre os campos $A \in M(n)$ ao analisar os autovalores da matriz A .

Lema 3.2.13 *Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções*

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos bt \quad e \quad t \mapsto t^j e^{at} \sin bt,$$

com $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor generalizado de A .

Demonstração: Dada $A \in M(n)$, toma-se uma matriz invertível $Q \in M(n)$ tal que $Q^{-1}AQ = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_r)$ é a forma canônica de Jordan de A . Da teoria de equações diferenciais ordinárias linear tem-se que,

$$x(t) = Qe^{tJ}Q^{-1}x(0),$$

é a solução geral de $x' = Ax$.

Decorre que cada entrada de cada uma das matrizes e^{tJ_i} dos blocos da diagonal e^{tJ} é zero ou da por

$$\frac{t^j}{j!}e^{at} \cos bt \quad \text{e} \quad \frac{t^j}{j!}e^{at} \sin bt, \quad (3.11)$$

Ao multiplicar-se e^{tJ} por Q , Q^{-1} e $x(0)$, apenas produz-se combinações lineares dessas funções. ■

Corolário 3.2.14 *Se todos os autovalores de uma matriz $A \in M(n)$ têm parte real negativa, então qualquer solução de $x' = Ax$ tende a $0 \in \mathbb{R}^n$, quando $t \rightarrow +\infty$.*

Demonstração:

Aplica-se o Teorema 3.2.13. Assim sabe-se que as soluções são dadas por combinações lineares de (3.11). Aplica-se o limite quando $t \rightarrow +\infty$ nas soluções e de, $-1 \leq \cos bt \leq 1$, $-1 \leq \sin bt \leq 1$, há que.

$$-\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at} \cos bt \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at}$$

$$-\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at} \sin bt \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at}$$

No caso dos autovalores reais negativos há que $a < 0$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at} = 0$ então pelo

Teorema do Confronto há que, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at} \cos bt = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at} \sin bt = 0$

No caso os autovalores generalizados terem parte real negativa, há que $a < 0$ e conclui-se que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at} \cos bt = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{j!}e^{at} \sin bt = 0$. Logo toda solução tende a $0 \in \mathbb{R}^n$, com $t \rightarrow +\infty$. ■

O Corolário 3.2.14 diz que se todos os autovalores de A tem parte real negativa o ponto 0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, mas ainda conclui-se que se existir ao menos um autovalor com parte real positivo não ocorrerá a estabilidade assintótica para o ponto 0 .

Teorema 3.2.15 *Seja $A \in M(n)$ um campo linear qualquer. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *A origem é um poço para A .*
2. *A é um atrator.*
3. *O fluxo de A é contrativo.*
4. *A origem é uma singularidade assintoticamente estável de A .*

Demonstração:

1 \rightarrow 2

Se a origem é um poço então vale que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}x = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Sabe-se que $x(t) = e^{tA}x_0$ é solução para $x' = Ax$ então $e^{tA} = \alpha t^j e^{at} \cos bt + \beta t^j e^{at} \sin bt$. Assim $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha t^j e^{at} \cos bt + \beta t^j e^{at} \sin bt = 0$, possível apenas se $a < 0$ logo os autovalores tem parte real negativa, ou seja, A é um atrator.

2 \rightarrow 3.

Se $A \in M(n)$ é um atrator, existe uma constante $\tau > 0$ tal que a parte real de cada autovalor generalizado de A é menor do que $-\tau$. Dessa hipótese decorre a existência de $C \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{-\tau t},$$

para cada $t \geq 0$, em que $\|\cdot\|$ indica a norma do operador da matriz. Essa decorrência é originada pelo Lema 9.8 da Seção 9.4 de Doering [9] (Esse resultado não é demonstrado por fugir ao tema do trabalho).

Logo,

$$|e^{tA}x| \leq \|e^{tA}\| |x| \leq Ce^{-\tau t} |x|,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Logo o fluxo de A é contrativo de acordo com a Definição 3.2.10.

3 \rightarrow 4.

Se o fluxo A é contrativo, então vale (3.10) e decorre que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}x \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} Ce^{-\tau t} |x| = C|x| \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\tau t} = 0.$$

Segue que, dado $\varepsilon > 0$, toma-se $\delta = C^{-1}\varepsilon$ para obter

$$|e^{tA}x| \leq Ce^{-\tau t} |x| < C|x| \leq C\delta = \varepsilon,$$

para cada $|x| \leq \delta$ e $t > 0$.

Portanto a origem é assintoticamente estável.

4 \rightarrow 1.

Se a origem é uma singularidade assintoticamente estável de A , então existe $\delta > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}x = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x| \leq \delta$.

Dado qualquer $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, tem-se

$$e^{tA}u = \frac{1}{\alpha} e^{tA}\alpha u$$

por linearidade, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Toma-se $\alpha = \frac{\delta}{|u|}$ há que $|\alpha u| = \delta$ e, assim, também $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}u = 0$, o que mostra que a origem é um poço para A .

■

O Teorema 3.2.15 mostra que para um campo linear a Definição 3.2.10 é equivalente a Definição 3.2.12 e equivalente a Definição 3.2.11.

Definição 3.2.16 Diz-se que x_0 é um poço de f se a matriz $Df(x_0) \in M(n)$ tem todos os autovalores generalizados com parte real negativa.

Pelo Teorema 3.2.15 x_0 é poço de f se, e somente se, 0 é um poço do campo linear $Df(x_0)$. Desataca-se que o próximo teorema é uma versão local do Teorema 3.2.15 de sistemas lineares mas para sistemas não-lineares.

Antes da demonstração de um próximo resultado apresenta-se uma definição de um conceito envolvido em sua demonstração

Definição 3.2.17 Seja (a_n) uma sequência limitada. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a sequência $(\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\})$. Defini-se o limite superior de (a_n) por

$$\limsup a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\} = \inf_k (\sup_{n \geq k} a_n).$$

Teorema 3.2.18 (Lyapunov-Perron) Seja $x_0 \in E$ uma singularidade do campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se x_0 é um poço de f , então x_0 é uma singularidade assintoticamente estável para f .

Demonstração:

Para simplificar a notação, toma-se $x_0 = 0 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$, pois como se viu no Exemplo 3.2.7, as singularidades assintoticamente estáveis são invariantes por conjugação e denota-se $A = Df(0)$. Seja $0 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ uma singularidade de $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Decorre da definição de diferenciabilidade que $f(x) = f(0) + Ax + r(x) = Ax + r(x)$, em que $\frac{|r(x)|}{|x|} \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow 0$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - Ax|}{|x|} = 0. \quad (3.12)$$

Como todas as normas em \mathbb{R}^n são equivalentes, (3.12) é válida para qualquer norma em \mathbb{R}^n . Em particular, fixa-se um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com norma associada $\| \cdot \|$, utiliza-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtendo $\langle f(x) - Ax, x \rangle \leq \|f(x) - Ax\| \|x\|$, assim

$$\frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} - \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle f(x) - Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \leq \frac{\|f(x) - Ax\|}{\|x\|}.$$

Utiliza-se o limite superior e de (3.12), há que

$$\limsup \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \limsup \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \quad (3.13)$$

Da hipótese de x_0 ser uma singularidade de f , e ainda ser um poço, escolhe-se $\beta > 0$ tal que a parte real de cada autovalor generalizado λ de $A = Df(0) \in M(n)$ é menor que -2β .

Pelo Lema 9.11 da seção 9.4 de [9] considera-se um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ adaptado tal que $\langle Ax, x \rangle \leq -2\beta$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ em que $\|x\| = 1$, ou seja, $\langle Ax, x \rangle \leq -2\beta \|x\|^2$, vale para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Então (3.13) fica da forma

$$\limsup \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \limsup \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \leq -2\beta \leq -\beta,$$

e, portanto pode-se encontrar $\gamma > 0$ tal que

$$\langle f(x), x \rangle \leq -\beta \|x\|^2, \quad (3.14)$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ o qual $\|x\| < \gamma$.

Afirma-se que

$$\|\phi_t(x)\| \leq \|x\| e^{-\beta t} \quad (3.15)$$

decorre de (3.14).

De fato, para $x = 0$, a equação (3.15) é válida. Fixa-se, então, $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 < \|x\| < \gamma$ e estuda-se a função real $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha(t) = \|\phi_t(x)\|$. Como $\alpha(t) > 0$ para cada $t \geq 0$, decorre que α é derivável e, portanto têm-se

$$\alpha'(t) = \frac{\langle f(\phi_t(x)), \phi_t(x) \rangle}{\alpha(t)}, \quad (3.16)$$

para cada $t \geq 0$. Se $\alpha(t) < \gamma$ para cada $0 \leq t < t^*$ então, de (3.14), segue que, $\alpha'(t) \leq -\beta \alpha(t) < 0$ para cada $0 \leq t < t^*$.

Suponha-se que exista $\bar{t} > 0$ tal que $\alpha(\bar{t}) > \gamma$. Por continuidade, obtêm-se um primeiro $0 < t^* < \bar{t}$ tal que $\alpha(t^*) = \gamma$. Como $\alpha(t) < \gamma$ para $0 \leq t < t^*$, segue de (3.14) e (3.16) que $\alpha'(t) < 0$ para cada $0 \leq t < t^*$, e portanto contradiz o Teorema do Valor Médio, que

garante a existência de $0 < c < t^*$ tal que

$$0 < \gamma - \|x\| = \alpha(t^*) - \alpha(0) = \alpha'(c)(t^* - 0) = \alpha'(c)t^*,$$

portanto $\alpha'(c) > 0$.

Desse modo, $\alpha(t) < \gamma$ para cada $t \geq 0$ e, de (3.14) e (3.16), há que $\alpha'(t) \leq -\beta\alpha(t)$, para cada $t \geq 0$.

Assim, para cada $t \geq 0$, há que, $\frac{d}{dt} \ln \alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \leq -\beta$ e integrando ambos os lados da desigualdade de 0 a t ,

$$\ln \alpha(t) - \ln \alpha(0) \leq -\beta t,$$

ou seja,

$$\ln \frac{\alpha(t)}{\|x\|} \leq -\beta t.$$

Portanto, ao aplicar a exponencial, resulta que (3.15) é válida para todo $t \geq 0$.

Resta mostrar que a singularidade $x_0 = 0 \in E$ é assintoticamente estável para f . De fato, dado $0 < \varepsilon \leq \gamma$ qualquer, decorre de (3.15) que $\|\phi_t(x)\| \leq \varepsilon$ para $t \geq 0$ suficientemente grande e para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| < \gamma$.

Portanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| < \gamma$.

■

Exemplo 3.2.19 Diz-se que um ponto de equilíbrio x_0 de um campo de vetores f no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma fonte se a matriz $Df(x_0) \in M(n)$ tem todos os autovalores generalizados com parte real positiva. Ainda diz-se que um ponto de equilíbrio x_0 é assintoticamente instável se x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o campo oposto $-f$. Se x_0 é uma fonte de f então x_0 é uma singularidade assintoticamente instável para f .

Inicia-se, mostrando que se $\phi(t, x)$ é o fluxo para a equação $x' = f(x)$, então $\phi(-t, x)$ é o fluxo para a equação $x' = -f(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi(-t, x)) &= \frac{d}{dt} (x(-t)) \\ &= -x'(-t) \\ &= -f(x(-t)) \\ &= -f(\phi(-t, x)) \end{aligned}$$

Se x_0 é uma fonte de f então a matriz $Df(x_0)$ possui todos os autovalores generalizados com parte real positiva.

Nota-se que $D(-f)(x_0) = -Df(x_0)$ então os autovalores generalizados passam a ter parte real negativa.

Assim pelo Teorema 3.2.18 x_0 é uma singularidade assintoticamente estável para $-f$.

◇

Teorema 3.2.20 *Seja $x_0 \in E$ uma singularidade do campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se $Df(x_0) \in M(n)$ tem algum autovalor generalizado com parte real positiva, então x_0 é uma singularidade instável para f .*

Demonstração: Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma singularidade de $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, pois, pode-se tomar $g(x) = f(x_0 + x)$, tal que $g(0) = f(x_0)$. Denota-se $A = Df(0)$.

Suponha-se, também, que A possua ao menos um autovalor generalizado com parte real positiva, mostrar-se-á que, 0 é um ponto de equilíbrio instável.

Seja $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$ a decomposição de \mathbb{R}^n em subespaços invariantes por $A = \text{diag}(A_1, A_2)$ em dois blocos na diagonal pelo seguinte critério: todos os autovalores generalizados de A_1 têm parte real positiva e todos os autovalores de A_2 têm parte real negativa ou nula.

Decorre da suposição inicial que $\dim(V_1) \geq 1$ e será mostrado que, em V_1 , as trajetórias do campo f se comportam como as do campo linear repulsor A_1 , ao menos localmente em torno da origem.

Toma-se $\beta > 0$ tal que a parte real de cada auto valor generalizado λ de A_1 é maior do que 8β e também toma-se $\alpha > 0$ tal que a parte real de cada autovalor generalizado de A_2 é maior ou igual a $-\alpha$.

Utiliza-se o Lema 9.11 da seção 9.4 de [9] duas vezes, para obter $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ em V_1 e V_2 com normas associadas $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$, respectivamente, tais que

$$8\beta|x|_1^2 \leq \langle A_1x, x \rangle_1, \quad (3.17)$$

para qualquer $x \in V_1$, e

$$-\alpha|y|_2^2 \leq \langle A_2y, y \rangle_2, \quad (3.18)$$

para qualquer $y \in V_2$.

Para cada $z = (x, y) \in V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$, definimos a norma $|z|^2 = |x|_1^2 + |y|_2^2$ associada ao produto interno $\langle z_1, z_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_1 + \langle y_1, y_2 \rangle_2$ de $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$, em que $z_i = (x_i, y_i)$, com $x_i \in V_1$ e $y_i \in V_2$, para $1 \leq i \leq 2$.

Da definição de derivada e de $f(0) = 0$, têm-se $f(z) = Az + r(z)$, com $\frac{|r(z)|}{|z|} \rightarrow 0$ sempre que $|z| \rightarrow 0$. Assim obtêm-se $\delta > 0$ tal que

$$|r(z)| < \beta|z|, \quad (3.19)$$

para cada $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $|z| \leq \delta$.

Sem perda de generalidade, supõem-se que a bola aberta de centro na origem e raio 2δ está contida em E , ou seja, $z \in E$ se $|z| < 2\delta$.

Finalmente, escolhe-se uma constante $0 < a \leq 1$ tal que $a \leq 4\alpha^{-1}\beta$. E no produto $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$ escreve-se

$$C_a = \{(x, y) \in V_1 \oplus V_2 \mid |y|_2 \leq a|x|_1\},$$

para o cone sólido de vértice na origem de \mathbb{R}^n , cujo o “eixo de rotação” é o espaço V_1 e

$$C = C_a(\delta) = \{z \in C_a \mid |z| \leq \delta\},$$

para o tronco de cone C_a dentro da bola fechada de centro $0 \in \mathbb{R}^n$ e raio δ .

Observa-se que $C \subseteq E$ então têm-se

$$|z|^2 = |x|_1^2 + |y|_2^2 \leq |x|_1^2 + a^2|x|_1^2 \leq 2|x|_1^2$$

para $z \in C$ e como

$$f(z) = Az + r(z) = (A_1x, A_2y) + r(z), \quad (3.20)$$

as equações (3.17), (3.18) e (3.19), a escolha da constante a e a desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que

$$\begin{aligned} \langle f(z), z \rangle &= \langle A_1x, x \rangle_1 + \langle A_2y, y \rangle_2 + \langle r(z), z \rangle \\ &\geq 8\beta|x|_1^2 - \alpha|y|_2^2 - |\langle r(z), z \rangle| \\ &\geq (8\beta - a^2\alpha)|x|_1^2 - |r(z)||z| \\ &\geq \frac{1}{2}(8\beta - a^2\alpha)|z|^2 - \beta|z|^2 \\ &\geq \beta|z|^2, \end{aligned}$$

logo

$$\langle f(z), z \rangle \geq \beta|z|^2 \quad (3.21)$$

■

O Teorema 3.2.20 auxilia a identificar quando uma singularidade de um campo f é instável. Observa-se que a existência de um único autovalor generalizado positivo é suficiente para que ocorra a instabilidade na singularidade do campo linear $Df(x_0)$.

Definição 3.2.21 *Sejam $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ um ponto de equilíbrio de f e $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua numa vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 . Dizemos que V é uma função de Lyapunov para f em x_0 se*

1. $V(x_0) = 0$, com $V(x) > 0$ para cada $x \in W - \{x_0\}$
2. $V(\phi(t_1, x)) \geq V(\phi(t_2, x))$ para quaisquer $x \in E$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t_1, x), \phi(t_2, x) \in W$.

Como prometido na seção anterior, mostrar-se-á que a função de Lyapunov é conjugada através de um difeomorfismo g .

Exemplo 3.2.22 *Sejam $f_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos de vetores e seus respectivos fluxos $\phi(t, x)$ e $\psi(t, y)$, ainda seja $g : U_1 \rightarrow U_2$ um difeomorfismo que conjuga localmente o campo f_1 ao campo f_2 em que $U_1 \subseteq E_1$ e $U_2 \subseteq E_2$. Seja $x_0 \in E_1$ um ponto de equilíbrio, $V_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov para f_1 em x_0 . Então $V_2 : W_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $V_2 = V_1(g^{-1}(x))$ é um funcional para o campo f_2 .*

Destaca-se que se x_0 é uma singularidade do campo f_1 e existe a conjugação g com o campo f_2 então como apresentou-se no Exemplo 3.1.31 o ponto $y_0 = g(x_0)$ é uma singularidade para o campo f_2 . Dessa forma existe uma vizinhança W_2 em $y_0 \subseteq E_2$ tal que podemos definir a função $V_2(y) = V_1(g^{-1}(y))$.

De fato $V_2(y)$ é contínua pois V_1 é contínua (por ser uma função de Lyapunov para f_1) e g^{-1} é contínua pois é a inversa do difeomorfismo g entre os campos f_1 e f_2 .

Mostrar-se-á que V_2 atende as condições de função de Lyapunov para f_2 em y_0 .

Observa-se que:

$$V_2(y_0) = V_1(g^{-1}(y_0)) = V_1(g^{-1}(g(x_0))) = V_1(x_0) = 0.$$

Para cada $y \in W_2 - \{y_0\}$ ocorre que, $\forall x \in g^{-1}(W_2 - y_2)$ em que $W_2 \subseteq E_2 \cap E_2$.

$$V_2(y) = V_1(g^{-1}(y)) = V_1(g^{-1}(g(x))) = V_1(x) > 0.$$

Por fim, para cada $y \in U_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\psi(t_1, y), \psi(t_2, y) \in W_2$ ocorre.

$$\begin{aligned} V_2(\psi(t_1, y)) &= V_1(g^{-1}(\psi(t_1, y))) \\ &= V_1(\phi(t_1, g^{-1}(y))) \\ &= V_1(\phi(t_1, x)) \\ &\geq V_1(\phi(t_2, x)) \\ &= V_1(\phi(t_2, g^{-1}(y))) \\ &= V_1(g^{-1}(\psi(t_2, y))) \\ &= V_2(\psi(t_2, y)) \end{aligned}$$

Portanto V_2 é um funcional de Lyapunov para o campo f_2 .

◇

Assim, é possível “transferir” uma função de Lyapunov por meio de um difeomorfismo. Logo, apresenta-se o próximo teorema, que classifica a estabilidade da singularidade dado uma função de Lyapunov.

Teorema 3.2.23 (Teorema de Lyapunov - parte I) *Seja x_0 um ponto de equilíbrio de um campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Lyapunov para f em x_0 , então x_0 é um ponto de equilíbrio estável de f .*

Demonstração: Seja x_0 um ponto de equilíbrio de f e suponha que exista uma função de Lyapunov para f em x_0 isto é, existe $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ contínua na vizinhança W de x_0 em \mathbb{R}^n tal que $V(x_0) = 0$, com $V(x) > 0$ para cada $x \in W - \{x_0\}$, e tal que $V \circ x : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-crescente para qualquer solução $x : I \rightarrow E$ de $x' = f(x)$ tal que $x(t) \in W$ para cada $t \in I$.

Demonstrar-se-á que o ponto de equilíbrio x_0 é estável, em resumo, quer se mostrar que, para qualquer vizinhança U de x_0 em \mathbb{R}^n , existe uma vizinhança W_0 de x_0 tal que $W_0 \subseteq U$ e $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$.

Seja U uma vizinhança qualquer de x_0 , em \mathbb{R}^n . Escolhe-se $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subseteq U \cap W$, em que $B(v, r) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid |u - v| < r\}$ denota a bola em \mathbb{R}^n de centro $v \in \mathbb{R}^n$ e raio r . Como V é contínua e a esfera $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| = \delta\} \subseteq W$ é compacta, logo têm-se que

$$\alpha = \min_{|x-x_0|=\delta} V(x) > 0,$$

já que $V(x) > 0$ para $x \in W - \{x_0\}$. Ainda pela continuidade de V , o conjunto $W_0 = \{x \in B(x_0, \delta) \mid V(x) < \alpha\}$ é aberto e, portanto, como $V(x_0) = 0$, W_0 é uma vizinhança de x_0 que satisfaz $W_0 \subseteq U \cap W$ devido a construção. Resta provar que $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$.

Dado qualquer $x \in W_0$, suponha, por absurdo, que ocorra $\phi_t(x) \notin U$, para algum $t > 0$. Em particular, segue que $\phi_t(x) \notin B(x_0, \delta)$ e portanto, como $x \in W_0 \subseteq B(x_0, \delta) \subseteq U \cap W$, em algum instante $0 < t_* < t$, a trajetória por x deve passar uma primeira vez pela esfera de centro x_0 e raio δ , ou seja, $|\phi_{t_*}(x) - x_0| = \delta$.

Mas então ocorreria $V(\phi_0(x)) = V(x) < \alpha \leq V(\phi_{t_*}(x))$, o que contradiz nossa hipótese, que afirma que V não cresce ao longo das trajetórias de f . Isso prova que $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$ e, portanto, que x_0 é um ponto de equilíbrio estável. ■

No próximo exemplo aplica-se o Teorema 3.2.23 para a singularidade de um sistemas de equação.

Exemplo 3.2.24 Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_2(x_3 - 1) \\ x'_2 = -x_1(x_3 - 1) \\ x'_3 = -x_3 \end{cases} \quad (3.22)$$

definida pelo campo de vetores não-linear

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2x_3 - 2x_2, x_1 - x_1x_3, -x_3).$$

A parte linear do sistema (3.22) no ponto de equilíbrio dado pela origem $x_0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ é

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$ e -1 e, portanto, não vale que todos autovalores generalizados têm parte real negativa e assim não há condições para utilizar os resultados a respeito da estabilidade do sistema na origem.

Então buscar-se-á uma função de Lyapunov para o sistema na origem no formato quadrático $V(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$, com $a, b, c > 0$, ao avaliar V em $0 \in \mathbb{R}^3$ há que $V(0, 0, 0) = 0$ e $V(x) > 0$, para cada $x \neq x_0 = (0, 0, 0)$.

Também, há que

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), f(x_1, x_2, x_3) \rangle &= \langle (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3), (2x_2x_3 - 2x_2, x_1 - x_1x_3, -x_3) \rangle \\ &= (2b - 4a)x_1x_2 + (4a - 2b)x_1x_2x_3 - 2cx_3^2 \end{aligned}$$

e assim, ao escolher-se $a = 1$, $b = 2a = 2$ e $c = 1$, a simplificação resulta em

$$\langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), f(x_1, x_2, x_3) \rangle = -2x_3^2 \leq 0,$$

para $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Logo pelo Teorema 3.2.23, pode-se concluir que x_0 é um ponto de equilíbrio estável para o sistema.

◇

Definição 3.2.25 Sejam $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ um ponto de equilíbrio de f e $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua numa vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 . Dizemos que V é uma função de Lyapunov estrita para f em x_0 se

1. $V(x_0) = 0$, com $V(x) > 0$ para cada $x \in W - \{x_0\}$
2. $V(\phi(t_1, x)) > V(\phi(t_2, x))$ para quaisquer $x \in E$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t_1, x), \phi(t_2, x) \in W$.

Eventualmente esse ponto de equilíbrio pode ser considerado globalmente assintoticamente estável. Pois as trajetórias dentro do conjunto E aproximam-se de x_0 . Quando o conjunto E é todo domínio do campo f então toda trajetória tende para x_0 .

No Teorema de Lyapunov parte II, apresenta-se que a desigualdade estrita das condições da Definição 3.2.25 alteram a conclusão sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio.

Teorema 3.2.26 (Teorema de Lyapunov - parte II) *Seja x_0 um ponto de equilíbrio de um campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Lyapunov estrita para f em x_0 , então x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de f .*

Demonstração: Sejam x_0 um ponto de equilíbrio para f e $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov estrita para f em x_0 , isto é, V é contínua na vizinhança W de x_0 em \mathbb{R}^n e $V(\phi(t_1, x)) > V(\phi(t_2, x))$ para quaisquer $x \in E$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t_1, x), \phi(t_2, x) \in W$.

Deseja-se mostrar em resumo que dada uma vizinhança qualquer U de x_0 em \mathbb{R}^n , existe uma vizinhança W_0 de x_0 tal que $W_0 \subseteq U$ e, além de $\phi_t(x) \in U$ para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$, também há que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0$, para qualquer $x \in W_0$.

Toma-se δ tal que $B(x_0, \delta) \subseteq U \cap E$ e $\alpha = \min_{|x-x_0|=\delta} V(x)$. Como $V(x) > 0$ para cada $x \in W - \{x_0\}$, pela hipótese, então $\alpha > 0$, defini-se $W_0 = \{x \in B(x_0, \delta) \mid V(x) < \alpha\}$. Pela continuidade de V , o conjunto $W_0 = \{x \in B(x_0, \delta) \mid V(x) < \alpha\}$ é aberto e, portanto, como $V(x_0) = 0$, W_0 é uma vizinhança de x_0 que devido a sua construção satisfaz $W_0 \subseteq U \cap W \subseteq U$.

Dado qualquer $x \in W_0$, suponha, por contradição, que valha $\phi_t(x) \notin U$, para algum $t > 0$. Em particular, decorre que, $\phi_t(x) \notin B(x_0, \delta)$ e portanto, como $x \in W_0 \subseteq B(x_0, \delta) \subseteq U \cap W$, em algum instante $0 < t_* < t$, a trajetória por x deve passar uma primeira vez pela esfera de centro x_0 e raio δ , ou seja, $|\phi_{t_*}(x) - x_0| = \delta$.

Logo $V(\phi_0(x)) = V(x) < \alpha \leq V(\phi_{t_*}(x))$, o que contradiz a hipótese, que afirma que V não cresce ao longo das trajetórias de f . Isso prova que $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$. Resta mostrar que para qualquer $x \in W_0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0$.

Decorre de forma direta para $x = x_0$, pois x_0 é um ponto de equilíbrio para f . Resta mostrar que para os demais $x \neq x_0$. Suponha, por contradição, que existam $\bar{x} \in W_0 - \{x_0\}$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que, para cada $T > 0$, encontra-se $t > T$ tal que $|\phi_t(\bar{x}) - x_0| \geq \varepsilon_0$.

Para cada $T = k$, em que $k \in \mathbb{Z}$, obtêm-se $t_k > k$ tal que $\phi_{t_k}(\bar{x}) \notin B(x_0, \varepsilon)$. Por outro lado, pela escolha de δ e de W_0 , têm $\phi_{t_k}(\bar{x}) \in B(x_0, \delta)$ para cada k , ou seja, a sequência dada por $x_k = \phi_{t_k}(\bar{x})$ é limitada.

Pode-se, portanto tomar uma subsequência convergente, cujo limite x_1 está em U mas não está em $B(x_0, \varepsilon_0)$, em particular, $x_1 \neq x_0$. Por hipótese, têm-se $f(x_1) \neq 0$, pois, caso contrário, x_1 seria uma singularidade e, portanto, teria-se $V(\phi_t(x_1)) = V(x_1)$ constante em t , contrariando a hipótese de que V é decrescente ao longo das trajetórias fora de x_0 .

De x_1 não ser um ponto de equilíbrio, o Teorema 3.1.43 garante que x_1 tem a propriedade do fluxo tubular, ou seja, existe uma vizinhança de x_1 contendo uma caixa na qual as trajetórias de f entram por um lado e saem pelo outro.

Escolhe-se essa vizinhança tubular de maneira conveniente. Já que $x_1 \in W$ e $x_1 \neq x_0$, têm-se $V(\phi_{-\varepsilon}(x_1)) > V(x_1) > V(\phi_{\varepsilon}(x_1))$, para qualquer $\varepsilon > 0$ pequeno: fixa-se a caixa de tal modo que os pontos $V(\phi_{-\varepsilon}(x_1))$ e $V(\phi_{\varepsilon}(x_1))$ estejam nas faces extremas de entrada na caixa e de saída da caixa, respectivamente.

Por continuidade de V , estabelece-se que os valores de V nos pontos da face de entrada na caixa são todos estritamente maiores que os valores de V nos pontos da face de saída da caixa, tomando, se necessário, uma caixa de faces menores. Mais precisamente, existem $v_1 > V(x_1) > v_2$ tais que, para qualquer x do lado de entrada da caixa vale $V(x) > v_1$ e, para qualquer x do lado de saída, vale $v_2 > V(x)$.

Por outro lado, como uma subsequência $x_k = \phi_{t_k}(\bar{x})$ converge a x_1 , a trajetória por \bar{x} passa infinitas vezes pela caixa; mas entre um tempo de saída e o seguinte de entrada, V decresce. Vê-se então que a trajetória por \bar{x} sai da caixa com valor de V menor do que v_2 e em seguida volta à entrar na caixa com uma valor V menor ainda, e certamente menor do que v_1 , o que acarreta em uma contradição.

Isso prova que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0$ para qualquer $x \in W_0$ e, portanto, que o ponto de equilíbrio x_0 é assintoticamente estável.

■

Este final de seção apresentará algumas definições e resultados sobre conjuntos invariantes que são úteis para avaliar a estabilidade de pontos de equilíbrio.

Definição 3.2.27 *Diz-se que um conjunto $C \subseteq E$ é invariante pelo fluxo ϕ do campo de vetores f se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, diz-se que C é positivamente invariante se $\phi_t(C) \subseteq C$, para todo $t \geq 0$.*

Exemplo 3.2.28 *Um conjunto E é invariante pelo fluxo do campo se, e somente se, contém a órbita de cada um de seus pontos.*

(\implies) Suponha que E seja invariante pelo fluxo do campo.

Seja $x \in E$, e γ_x a órbita de x , da definição de órbita, há que $\gamma_x = \{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Daí, dado $q \in \gamma_x$ existe $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $x(t^*) = q$, segue do fluxo que $\phi(t^*, x) = q$.

Como o conjunto E é invariante pelo fluxo do campo, por hipótese, decorre que $\phi(E) \subseteq E$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então para o tempo t^* há que $\phi(t^*, x) \in E$, ou seja, $q \in E$.

Logo $\gamma_x \subseteq E$.

(\impliedby) Suponha que E contém a órbita de cada um de seus pontos.

Dado $x \in E$ há que $\gamma_x \subset E$, destaca-se que $\gamma_x = \{\phi(t, x) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Logo para todo $t \in \mathbb{R}$ se $x \in E$ há que $\phi(t, x) \in E$ então E é invariante pelo fluxo do campo.



Destaca-se do Exemplo 3.2.28 que as orbitas periódicas e os pontos de equilíbrio são conjuntos invariantes pelo fluxo, pois são órbitas que contém todos os seus pontos para tempos $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.2.29 Diz-se que uma singularidade x_0 de f é hiperbólica se todos os autovalores generalizados da parte linear $Df(x_0)$ do campo f em x_0 têm parte real não nula.

A definição diz que uma singularidade é hiperbólica se o campo $Df(x_0)$ é um campo hiperbólico.

Teorema 3.2.30 (Grobman-Hartman) Seja $x_0 \in E$ um ponto de equilíbrio do campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 definido no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^m$. Se x_0 é uma singularidade hiperbólica, então o campo f em x_0 é localmente topologicamente conjugado ao campo linear $Df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ em 0.

A demonstração para esse resultado encontra-se em Sotomayor [3]. O Teorema 3.2.30 indica que em uma vizinhança do ponto de equilíbrio o campo não linear f comporta-se, topologicamente, de forma igual ao campo linear $Df(x_0)$.

Lema 3.2.31 (Lema de Barbalat) Seja $\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 cuja derivada ϕ' é uniformemente contínua. Se o limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = a$ existe e é finito então $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi'(t) = 0$.

Demonstração: Suponha que não seja verdade a conclusão. Então existe $b > 0$ e uma sequência (t_n) , tal que $\|\phi'(t_n)\| \geq b$ para todo n .

Por continuidade uniforme, existe $\delta > 0$ tal que $|s - t| \leq \delta$ implica $\|\phi'(s) - \phi'(t)\| \leq \frac{b}{2}$. Em particular para todo $t \in [t_n - \delta, t_n + \delta]$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $|\phi'(t)| \geq \frac{b}{2}$.

Utilizando o Teorema fundamental do Cálculo.

$$|\phi(t_n + \delta) - \phi(t_n - \delta)| = \left| \int_{t_n - \delta}^{t_n + \delta} \phi'(s) ds \right| \geq 2\delta \frac{b}{2}$$

para todo n .

Mas a expressão do lado esquerdo converge para 0 quando $n \rightarrow +\infty$, uma vez que tanto $\phi(t_n + \delta)$ quanto $\phi(t_n - \delta)$ convergem para a . Esta contradição prova a conclusão do Lema. ■

O próximo resultado pode ser encontrado com o nome de Teorema do conjuntos invariantes ou ainda como Teorema de Krasovskii-LaSalle.

Esse resultando será demonstrado em uma versão mais geral, utilizando o conceito de relativamente compacto.

Definição 3.2.32 Diz-se que um subconjunto S de um espaço topológico X é relativamente compacto quando seu fecho é um subconjunto compacto de X .

Em particular, um conjunto compacto é relativamente compacto.

Teorema 3.2.33 (Princípio de Invariância de La Salle) Seja $V : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida em um aberto $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n$ e seja X o maior subconjunto invariante em $E = \{x \in \mathcal{U}_0 : V'(x) = 0\}$. Suponha que exista $\rho > 0$ tal que $Y_\rho = \{x \in \mathcal{U}_0 : V'(x) \leq \rho\}$ é relativamente compacto em \mathcal{U}_0 e $V'(x) \leq 0$ para todo x em uma vizinhança de Y_ρ . Então toda trajetória β com condição inicial $\beta(0) \in Y_\rho$ está definida para $t \in [0, +\infty)$ e converge para X quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração: Dada qualquer trajetória β da equação (3.1) com condição inicial $\beta(0) \in Y_\rho$, toma-se $\phi(t) = V(\beta(t))$ para todo t no domínio de β .

Nota-se que ϕ é de classe C^1 , no seu domínio, pois é composição de funções de classe C^1 . Da hipótese de $V' \leq 0$, há que ϕ é não crescente, portanto $\phi(t) \leq \phi(0) \leq \rho$ para todo $t \geq 0$.

Isto é,

$$\beta(t) \in Y_\rho, \forall t \geq 0. \quad (3.23)$$

Como Y_ρ é relativamente compacto, segue do Teorema 2.2.4 que $\beta(t)$ está definida para todo $t \in [0, +\infty)$, além disso a norma do campo de vetores f restrito a Y_ρ é limitada. Decorre deste fato que, $\beta'(t) = f(\beta(t))$ é limitada, então pelo Teorema do Valor Médio, β é lipschitziana. Em particular, β é uniformemente contínua.

Como V é de classe C^1 e Y_ρ é relativamente compacto, também há que a restrição de V' ao conjunto Y_ρ é uniformemente contínua.

Daí, concluí-se que

$$t \rightarrow \phi'(t) = V'(\beta(t))f(\beta(t))$$

é uniformemente contínua.

Por outro lado, como V é contínua e Y_ρ é relativamente compacto, a função ϕ é minorada. De acordo com o visto ϕ é não crescente, então o limite de ϕ quando $t \rightarrow +\infty$ existe e é finito.

Agora, há todas as condições para utilizar o Lema 3.2.31 (Lema de Barbalat) e concluir que $\phi'(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Agora destaca-se que Ω -limite é o conjunto de todos os pontos de acumulação de $\beta(t)$, quando $t \rightarrow +\infty$, ou seja,

$$\Omega = \{x \in \mathcal{U} : \text{existe } (t_n)_n \rightarrow +\infty \text{ tal que } (\beta(t_n))_n \rightarrow x\}.$$

A propriedade (3.23) indica que $\Omega \subset \bar{Y}_\rho$, isto é, Ω está contido no fecho de Y_ρ . Em particular Ω é relativamente compacto em \mathcal{U}_0 . Como $V'(\beta(t)) = \phi'(t)$ converge para zero,

quando $t \rightarrow +\infty$ e função V' é contínua, o domínio Ω está contido em $\{x \in \mathcal{U}_0 : V'(x) = 0\}$.

Dado qualquer $x \in \Omega$, considera-se $(t_n)_n \rightarrow +\infty$ tal que $(\beta(t_n))_n \rightarrow x$. Então, para cada $t > 0$, f^t está definido,

$$\beta(t_n + t) = f^t(\beta(t_n)) \rightarrow f^t(x), \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

Portanto $f^t(x) \in \Omega$. Como ω é relativamente compacto em \mathcal{U}_0 , segue que f^t está definido para todo $t \in [0, +\infty)$. Isto prova que Ω é um conjunto invariante e, portanto, Ω está contido no subconjunto invariante maximal X .

Por fim, decorrente da ultima afirmação $\beta(t)$ converge para X quando $t \rightarrow +\infty$

■

Capítulo 4

Aplicação ao Modelo da Toxoplasmose

Neste capítulo utiliza-se a teoria desenvolvida nos Capítulos 2 e 3 para descrever a dinâmica da doença Toxoplasmose a respeito de populações de humanos, empregando para a população de gatos o papel de vetor transmissor da doença. O modelo epidemiológico aplicado, é do tipo compartimentado que utiliza de um sistema de equações diferenciais para descrever as interações entre as populações, tendo em vista, a transmissão horizontal proporcionada pelo contato entre gatos contaminados e humanos saudáveis.

Ressalta-se que de acordo com [14], o fator de reprodução básica \mathcal{R}_0 controla completamente a dinâmica da infecção da Toxoplasmose, isto é, de acordo com o valor de \mathcal{R}_0 se tem a estabilidade dos pontos de equilíbrio do campo associado às equações diferenciais do modelo.

4.1 Doença Toxoplasmose

A Toxoplasmose é uma zoonose causada pelo protozoário *Toxoplasma gondii*, o único parasita capaz de causar a doença em seu hospedeiro definitivo *Felis catus*, isto é, os gatos. Os gatos são os hospedeiros mais importantes, de um ponto de vista epidemiológico, devido ao fato de entre 4 a 13 dias lançarem ao meio ambiente cerca de 20 milhões de oocistos [14]. Os oocistos contaminam o ambiente e permitem a perpetuação da doença, [15].

A transmissão da doença ocorre pela ingestão de bradizoítos presentes em tecidos ou fezes contaminadas, ou ainda, acidentalmente por rações contaminadas com restos de animais, [14]. Ainda para [14] os oocistos liberados pelas fezes dos gatos contaminam vegetais e outros alimentos. A principal forma de contaminação humana é por meio da via oral.

Ocorrem casos de mulheres grávidas que são infectadas por Toxoplasmose. Neste caso a doença é dita Toxoplasmose congênita. Os danos ao feto abrangem problemas físicos

e/ou mentais, morte do feto ou aborto espontâneo [15]. Ainda, se associada a Síndrome da Imune Deficiência Adquirida - HIV ou indivíduos que recebem quimioterapia, a doença pode ser fatal.

Por esses fatos, é conveniente construir modelos matemáticos, que permitam o estudo do comportamento da doença em suas populações alvo, possibilitando a construção de estratégias que provoquem o controle da Toxoplasmose.

4.2 Modelo da Toxoplasmose

O modelo apresentado por Parra [14] para a transmissão da doença toxoplasmose para a população de humanos e gatos conta com as seguintes características.

1. Pode-se assumir as taxas de natalidade de humanos e gatos iguais às suas taxas de mortalidade. Portanto, considera-se o tamanho população constante.
2. A população de humanos $N_h(t)$ é dividida em outras três sub populações.

Suscetível: Membros da população de humanos que podem ser infectados pelo parasita *Toxoplasma Gondii*.

Infectado: Membros da população de humanos que estão infectados pelo parasita da toxoplasmose.

Controlado: Membros da população de humano que foram tratados para a toxoplasmose.

3. A população de gatos $N_c(t)$ é dividida em outras duas sub populações.

Suscetível: Membros da população de gatos que podem ser infectado pelo parasita *Toxoplasma Gondii*.

Infectado: Membros da população de gatos que estão infectados pelo parasita *Toxoplasma Gondii*.

4. Um ser humano suscetível pode ser infectado por meio de contato direto ou indireto efetivo com um gato infectado e ir para o subpopulação de humanos infectados I_h . Um humano infectado passa para a subpopulação controlada C_h a uma taxa γ .
5. Um gato suscetível pode ser infectado por meio de contato direto ou indireto com um gato infectado e ir para a subpopulação de gatos infectados I_c . Um gato não se recupera da infecção.
6. Assume-se a contaminação vertical na população humana. Mas para a população de gatos ocorre com uma probabilidade $1 - p_c$, em que p_c é a probabilidade de um gato nascer contaminado.

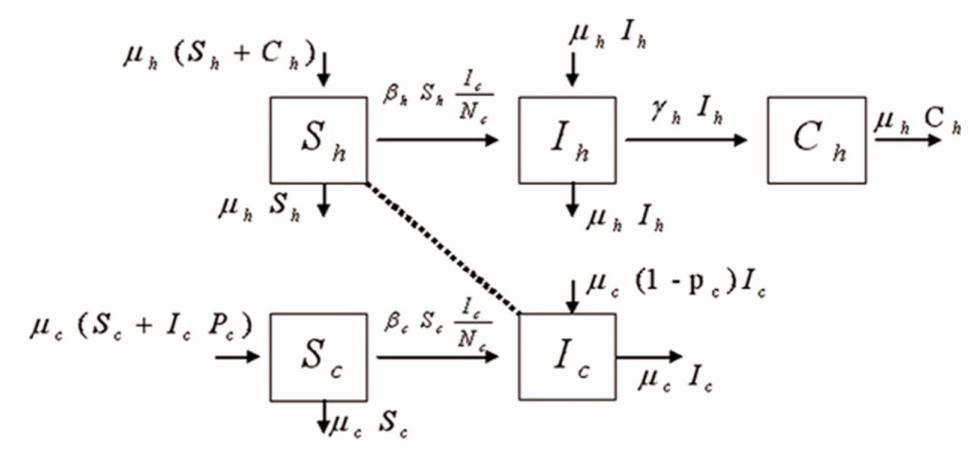


Figura 4.1: Representação gráfica para o modelo dinâmico da Toxoplasmose com a população de gatos e humanos.

Fonte: Parra[14]

A população de humanos é descrita por $N_h = S_h(t) + I_h(t) + C_h(t)$, a taxa de nascimento e óbito são assumidas iguais, portanto considera-se a população N_h constante. A população de gatos é descrita por $N_c = S_c(t) + I_c(t)$.

Assumindo todas as condições enumeradas anteriormente e descrição das populações citadas, o modelo dinâmico para a toxoplasmose para a população humana e felina é representado graficamente pela Figura 4.1. E é dado analiticamente pelo sistema de equações diferenciais de primeira ordem não linear (4.1).

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_h(t) &= \mu_h(S_h + C_h) - \beta_h S_h \frac{I_c}{N_c} - \mu_h S_h, \\
 \dot{I}_h(t) &= \beta_h S_h \frac{I_c}{N_c} + \mu_h I_h - \gamma I_h - \mu_h I_h, \\
 \dot{C}_h(t) &= \gamma I_h - \mu_h C_h, \\
 \dot{S}_c(t) &= \mu_c(S_c + I_c p_c) - \beta_c S_c \frac{I_c}{N_c} - \mu_c S_c, \\
 \dot{I}_c(t) &= \beta_c S_c \frac{I_c}{N_c} + \mu_c(1 - p_c)I_c - \mu_c I_c.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Simplifica-se os sistemas de equação (4.1) e obtêm-se

$$\begin{aligned}
\dot{S}_h(t) &= \mu_h C_h - \beta_h S_h \frac{I_c}{N_c}, \\
\dot{I}_h(t) &= \beta_h S_h \frac{I_c}{N_c} - \gamma I_h, \\
\dot{C}_h(t) &= \gamma I_h - \mu_h C_h, \\
\dot{S}_c(t) &= \mu_c I_c p_c - \beta_c S_c \frac{I_c}{N_c}, \\
\dot{I}_c(t) &= \beta_c S_c \frac{I_c}{N_c} - \mu_c I_c p_c.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Agora escalona-se o sistema de equações (4.2). Dessa forma, multiplica-se as 3 primeiras linhas do sistema (4.2) por $\frac{1}{N_h(t)}$ e as duas últimas linhas do sistema serão multiplicadas por $\frac{1}{N_c(t)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{S}_h(t)}{N_h(t)} &= \mu_h \frac{C_h}{N_h} - \beta_h \frac{S_h}{N_h} \frac{I_c}{N_c}, \\
\frac{\dot{I}_h(t)}{N_h(t)} &= \beta_h \frac{S_h}{N_h} \frac{I_c}{N_c} - \gamma \frac{I_h}{N_h}, \\
\frac{\dot{C}_h(t)}{N_h(t)} &= \gamma \frac{I_h}{N_h} - \mu_h \frac{C_h}{N_h}, \\
\frac{\dot{S}_c(t)}{N_c(t)} &= \mu_c \frac{I_c}{N_c} p_c - \beta_c \frac{S_c}{N_c} \frac{I_c}{N_c}, \\
\frac{\dot{I}_c(t)}{N_c} &= \beta_c \frac{S_c}{N_c} \frac{I_c}{N_c} - \mu_c \frac{I_c}{N_c} p_c.
\end{aligned}$$

Defina as razões $X(t) = \frac{S_h(t)}{N_h(t)}$, $Y(t) = \frac{I_h(t)}{N_h(t)}$, $Z(t) = \frac{C_h(t)}{N_h(t)}$, $A(t) = \frac{S_c(t)}{N_c(t)}$, $B(t) = \frac{I_c(t)}{N_c(t)}$.

Utilizando que a população de humanos $N_h = S_h(t) + I_h(t) + C_h(t)$ é constante então,

$$1 = \frac{S_h(t)}{N_h(t)} + \frac{I_h(t)}{N_h(t)} + \frac{C_h(t)}{N_h(t)} = X(t) + Y(t) + Z(t).$$

Portanto $\dot{X}(t) + \dot{Y}(t) + \dot{Z}(t) = 0$, então têm-se que $\dot{Z}(t) = -(\dot{X}(t) + \dot{Y}(t))$. Dessa forma a terceira linha do sistema é uma combinação linear das duas primeiras linhas. E ainda mais, como $N_h(t)$ é constante há que: $\dot{X}(t) = \frac{\dot{S}_h(t)}{N_h(t)}$, $\dot{Y}(t) = \frac{\dot{I}_h(t)}{N_h(t)}$, $\dot{Z}(t) = \frac{\dot{C}_h(t)}{N_h(t)}$.

De forma semelhante, a população de gatos descrita por $N_c = S_c(t) + I_c(t)$ também é constante, então

$$1 = \frac{S_c(t)}{N_c(t)} + \frac{I_c(t)}{N_c(t)} = A(t) + B(t).$$

Portanto $\dot{A}(t) + \dot{B}(t) = 0$, então têm-se que $\dot{A}(t) = -\dot{B}(t)$. Dessa forma a última linha do sistema é uma combinação linear da quarta linha. E ainda mais, como $N_c(t)$ é

constante há que: $\dot{A}(t) = \frac{\dot{S}_c(t)}{N_c(t)}$, $\dot{B}(t) = \frac{\dot{I}_c(t)}{N_c(t)}$.

Utiliza-se das informações apresentadas para reduzir o sistema (4.2) para o sistema a seguir.

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \mu_h(1 - X(t) - Y(t)) - \beta_h X(t)(1 - A(t)), \\ \dot{Y}(t) &= \beta_h X(t)(1 - A(t)) - \gamma Y(t), \\ \dot{A}(t) &= \mu_c p_c(1 - A(t)) - \beta_c A(t)(1 - A(t)).\end{aligned}\tag{4.3}$$

O sistema (4.3) é a forma do sistema para o modelo da toxoplasmose (4.1) após as simplificações possíveis.

De acordo com [14] o sistema (4.3) é positivamente invariante quando restrito ao conjunto $\Omega = \{(X, Y, A)^T \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1, 0 \leq A \leq 1\}$.

4.3 Análise do modelo

Nesta seção analisa-se os pontos de equilíbrio do sistema (4.3), isto é, sua existência e comportamento quanto a conceitos de estabilidade.

Assumindo a notação de [14], A^* , X^* , Y^* denotam os pontos de equilíbrio do sistema (4.3).

Proposição 4.3.1 *O sistema (4.3) possui dois pontos de equilíbrio dados por*

$$(X_1^*, Y_1^*, A_1^*) = (1, 0, 1)$$

e

$$(X_2^*, Y_2^*, A_2^*) = \left(\frac{\mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h(\mu_h + \gamma)(\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma}, \frac{\beta_h(\beta_c - \mu_c p_c)\mu_h}{\beta_h(\mu_h + \gamma)(\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma}, \frac{\mu_c p_c}{\beta_c} \right).$$

Demonstração: Determina-se os pontos de equilíbrio igualando-se as derivadas $\dot{X}(t), \dot{Y}(t)$ e $\dot{A}(t)$ a zero, obtendo-se:

$$\begin{aligned}\mu_h(1 - X^* - Y^*) - \beta_h X^*(1 - A^*) &= 0, \\ \beta_h X^*(1 - A^*) - \gamma Y^* &= 0, \\ \mu_c p_c(1 - A^*) - \beta_c A^*(1 - A^*) &= 0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Para a terceira equação do sistema (4.4) opera-se de forma que

$$(\mu_c p_c - \beta_c A^*)(1 - A^*) = 0$$

Daí, obtêm-se dois valores

$$A_1^* = 1,\tag{4.5}$$

ou,

$$A_2^* = \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}. \quad (4.6)$$

Assim, substitui-se o valor de (4.5) no sistema (4.4) e encontra-se

$$\begin{aligned} \mu_h(1 - X_1^* - Y_1^*) - \beta_h X_1^*(1 - 1) &= 0, \\ \beta_h X_1^*(1 - 1) - \gamma Y_1^* &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \mu_h(1 - X_1^* - Y_1^*) &= 0, \\ \gamma Y_1^* &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De (4.7) concluí-se que $Y_1^* = 0$ então decorre que

$$\mu_h(1 - X_1^* - 0) = 0.$$

Isto é,

$$X_1^* = 1. \quad (4.8)$$

Portanto, de (4.5), (4.7), (4.8), um ponto de equilíbrio para o sistema (4.3) é dado por $(X_1^*, Y_1^*, A_1^*) = (1, 0, 1)$

Ao substituir o valor de (4.6) em (4.3) encontra-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \mu_h(1 - X_2^* - Y_2^*) - \beta_h X_2^* \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}\right) &= 0, \\ \beta_h X_2^* \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}\right) - \gamma Y_2^* &= 0. \end{aligned}$$

Utiliza-se o método de isolar Y_2^* na segunda equação e substituir na primeira equação do sistema, então o sistema fica da forma:

$$\begin{aligned} \mu_h(1 - X_2^* - Y_2^*) - \beta_h X_2^* \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}\right) &= 0, \\ Y_2^* &= \frac{\beta_h}{\gamma} X_2^* \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substituindo o Y_2^* , na primeira equação pela expressão encontrada em (4.9), chega-se na expressão:

$$\mu_h \left(1 - X_2^* - \frac{\beta_h}{\gamma} X_2^* \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}\right)\right) - \beta_h X_2^* \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}\right) = 0.$$

Então,

$$\mu_h \left(1 - X_2^* \left(1 + \frac{\beta_h}{\gamma} - \frac{\mu_c p_c \beta_h}{\beta_c \gamma}\right)\right) - \beta_h X_2^* \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}\right) = 0.$$

Segue que,

$$\mu_h - X_2^* \left(\mu_h + \frac{\beta_h \mu_h}{\gamma} - \frac{\mu_c p_c \beta_h \mu_h}{\beta_c \gamma} + \beta_h - \frac{\mu_c p_c \beta_h}{\beta_c} \right) = 0.$$

Ainda há que,

$$X_2^* \left[\frac{\mu_h \beta_c \gamma + \beta_h \mu_h \beta_c - \mu_c p_c \beta_h \mu_h + \beta_h \beta_c \gamma - \mu_c p_c \beta_h \gamma}{\beta_c \gamma} \right] = \mu_h.$$

Logo,

$$X_2^* \left[\frac{(\mu_h + \gamma)(\beta_h \beta_c - \mu_c p_c \beta_h) + \mu_h \beta_c \gamma}{\beta_c \gamma} \right] = \mu_h.$$

Portanto,

$$X_2^* = \frac{\mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h (\mu_h + \gamma) (\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma}. \quad (4.10)$$

Substituindo o valor encontrado em (4.10) para X_2^* na segunda equação de (4.9), obtêm-se:

$$Y_2^* = \frac{\beta_h}{\gamma} \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c} \right) \left(\frac{\mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h (\mu_h + \gamma) (\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma} \right).$$

Simplifica-se a expressão para obter:

$$Y_2^* = \frac{\beta_h (\beta_c - \mu_c p_c) \mu_h}{\beta_h (\mu_h + \gamma) (\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma}. \quad (4.11)$$

Portanto, de (4.6), (4.10), (4.11), outro ponto de equilíbrio para o sistema (4.3) é dado por $(X_2^*, Y_2^*, A_2^*) = \left(\frac{\mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h (\mu_h + \gamma) (\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma}, \frac{\beta_h (\beta_c - \mu_c p_c) \mu_h}{\beta_h (\mu_h + \gamma) (\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma}, \frac{\mu_c p_c}{\beta_c} \right)$. ■

O próximo resultado têm como objetivo avaliar a estabilidade do ponto de equilíbrio (X_1^*, Y_1^*, A_1^*) . Para isso, é necessário apresentar o conceito de Razão de Reprodução Básica \mathcal{R}_0 . Este fator representa a quantidade de casos secundários que um infectado pode gerar se tiver contanto com uma população suscetível e, é fundamental para estabelecer o comportamento assintótico da solução da equação do modelo.

Proposição 4.3.2 *O ponto de equilíbrio (X_1^*, Y_1^*, A_1^*) é localmente assintoticamente estável se $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_c}{\mu_c p_c} < 1$ e instável se $\mathcal{R}_0 > 1$.*

Demonstração: A matriz Jacobiana para (4.3) é dada por:

$$J(X^*, Y^*, A^*) = \begin{bmatrix} -\mu_h - \beta_h(1 - A^*) & -\mu_h & \beta_h X^* \\ \beta_h(1 - A^*) & -\gamma & -\beta_h X^* \\ 0 & 0 & -\mu_c p_c - \beta_c + 2\beta_c A^* \end{bmatrix}.$$

Avalia-se no ponto (X_1^*, Y_1^*, A_1^*) e obtêm-se:

$$J(1, 0, 1) = \begin{bmatrix} -\mu_h - \beta_h(1-1) & -\mu_h & \beta_h 1 \\ \beta_h(1-1) & -\gamma & -\beta_h 1 \\ 0 & 0 & -\mu_c p_c - \beta_c + 2\beta_c 1 \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$J(1, 0, 1) = \begin{bmatrix} -\mu_h & -\mu_h & \beta_h \\ 0 & -\gamma & -\beta_h \\ 0 & 0 & -\mu_c p_c + \beta_c \end{bmatrix}$$

Daí, busca-se os autovalores, para tal calcula-se $\det(J(1, 0, 1) - \lambda I_d) = 0$, assim obtêm-se:

$$J(1, 0, 1) = \begin{vmatrix} -\mu_h - \lambda & -\mu_h & \beta_h \\ 0 & -\gamma - \lambda & -\beta_h \\ 0 & 0 & -\mu_c p_c + \beta_c - \lambda \end{vmatrix}$$

Então determina-se a seguinte expressão:

$$(\mu_h + \lambda)(\gamma + \lambda)(-\mu_c p_c + \beta_c - \lambda) = 0 \quad (4.12)$$

De (4.12) obtêm-se os seguintes auto valores $\lambda_1 = -\mu_h$, $\lambda_2 = -\gamma$ e $\lambda_3 = -\mu_c p_c + \beta_c$. De fato μ_h e γ são reais positivos, então λ_1 e λ_2 possuem a parte real negativa.

Para que λ_3 possua parte real negativa é necessário que:

$$-\mu_c p_c + \beta_c < 0,$$

ou seja, $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_c}{\mu_c p_c} < 1$.

Assim, desde que $\mathcal{R}_0 < 1$ pode se aplicar o Corolário 3.2.14 e garantir a estabilidade assintótica para o ponto (X_1^*, Y_1^*, A_1^*) .

Contudo se $\mathcal{R}_0 > 1$ existirá λ_3 , autovalor de $J(1, 0, 1)$, com parte real positiva então pelo Teorema 3.2.20 o ponto (X_1^*, Y_1^*, A_1^*) será instável. ■

Proposição 4.3.3 *O ponto de equilíbrio (X_1^*, Y_1^*, A_1^*) é globalmente assintoticamente estável se $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_c}{\mu_c p_c} \leq 1$.*

Demonstração: Toma-se como candidato a funcional de Lyapunov $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por:

$$V(t) = V(X(t), Y(t), A(t)) = \frac{1 - A(t)}{\mu_c p_c}. \quad (4.13)$$

Mostrar-se-á que V é uma função de Lyapunov.

Nota-se que:

$$V(1, 0, 1) = \frac{1 - 1}{\mu_c p_c} = 0.$$

Como o domínio de V é Ω , então $0 \leq A(t) \leq 1$, assim $1 - A(t) \geq 0$, portanto $V(t) \geq 0$.
Calcula-se a derivada de $V(t)$ e obtêm-se:

$$\dot{V}(t) = \frac{-\dot{A}(t)}{\mu_c p_c}.$$

Substitui-se $\dot{A}(t)$ pela sua igualdade de acordo com o sistema (4.3) e decorre que.

$$\dot{V}(t) = \frac{\mu_c p_c (1 - A(t)) - \beta_c A(t) (1 - A(t))}{\mu_c p_c}. \quad (4.14)$$

Simplifica-se (4.14) e chega-se à:

$$\dot{V}(t) = (1 - A(t)) \left[A(t) \frac{\beta_c}{\mu_c p_c} - 1 \right]. \quad (4.15)$$

Observa-se que $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu_c p_c} < 1$, então

$$\frac{\beta}{\mu_c p_c} A(t) - 1 < A(t) - 1 \leq 0. \quad (4.16)$$

Portanto, de (4.16) e de $1 - A(t) \geq 0$ concluí-se que

$$\dot{V}(t) = (1 - A(t)) \left[A(t) \frac{\beta_c}{\mu_c p_c} - 1 \right] \leq 0. \quad (4.17)$$

Logo V é um funcional de Lyapunov.

Mas ainda, observa-se que $\dot{V}(t) = 0$ apenas para os pontos da forma $(X(t), Y(t), 1)$, pois o caso em que $A(t) \frac{\beta_c}{\mu_c p_c} - 1 = 0$ gera um ponto fora do domínio de V .

Logo dado o conjunto $E = (X(t), Y(t), A(t) \mid A(t) = 1)$ o maior subconjunto positivamente invariante de E é dado por $\{(1, 0, 1)\}$ que é o ponto de equilíbrio (X_1^*, Y_1^*, A_1^*) .

Assim pelo Teorema 3.2.33 (Princípio de Invariância de La Salle) (X_1^*, Y_1^*, A_1^*) é globalmente assintoticamente estável.

■

O ponto (X_1^*, Y_1^*, A_1^*) é dito o ponto de livre da doença, isto é, se $\mathcal{R}_0 \leq 1$ então a doença tende a desaparecer das populações de humanos e gatos à medida que o tempo t cresce.

O próximo resultado tem como objetivo avaliar a estabilidade do ponto de equilíbrio (X_2^*, Y_2^*, A_2^*) .

Proposição 4.3.4 *O ponto de equilíbrio (X_2^*, Y_2^*, A_2^*) é localmente assintoticamente estável se $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_c}{\mu_c p_c} > 1$ e instável se $\mathcal{R}_0 < 1$.*

Demonstração: A matriz Jacobiana para (4.3) é dada por:

$$J(X^*, Y^*, A^*) = \begin{bmatrix} -\mu_h - \beta_h(1 - A^*) & -\mu_h & \beta_h X^* \\ \beta_h(1 - A^*) & -\gamma & -\beta_h X^* \\ 0 & 0 & -\mu_c p_c - \beta_c + 2\beta_c A^* \end{bmatrix}.$$

Avalia-se no ponto

$$(X_2^*, Y_2^*, A_2^*) = \left(\frac{\mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h(\mu_h + \gamma)(\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma}, \frac{\beta_h(\beta_c - \mu_c p_c)\mu_h}{\beta_h(\mu_h + \gamma)(\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma}, \frac{\mu_c p_c}{\beta_c} \right)$$

e obtêm-se:

$$J(X_2^*, Y_2^*, A_2^*) = \begin{bmatrix} -\mu_h - \beta_h \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}\right) & -\mu_h & \frac{\beta_h \mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h(\mu_h + \gamma)(\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma} \\ \beta_h \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}\right) & -\gamma & -\frac{\beta_h \mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h(\mu_h + \gamma)(\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma} \\ 0 & 0 & -\mu_c p_c - \beta_c + 2\beta_c \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}. \end{bmatrix}$$

Isto é,

$$J(X_2^*, Y_2^*, A_2^*) = \begin{bmatrix} -\mu_h - \frac{\beta_h}{\beta_c}(\beta_c - \mu_c p_c) & -\mu_h & \frac{\beta_h \mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h(\mu_h + \gamma)(\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma} \\ \frac{\beta_h}{\beta_c}(\beta_c - \mu_c p_c) & -\gamma & -\frac{\beta_h \mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h(\mu_h + \gamma)(\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma} \\ 0 & 0 & \mu_c p_c - \beta_c \end{bmatrix}.$$

Daí busca-se os autovalores para tal calcula-se $\det(J(X_2^*, Y_2^*, A_2^*) - \lambda' I_d) = 0$. Assim obtêm-se

$$J(X_2^*, Y_2^*, A_2^*) = \begin{vmatrix} -\mu_h - \frac{\beta_h}{\beta_c}(\beta_c - \mu_c p_c) - \lambda' & -\mu_h & \frac{\beta_h \mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h(\mu_h + \gamma)(\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma} \\ \frac{\beta_h}{\beta_c}(\beta_c - \mu_c p_c) & -\gamma - \lambda' & -\frac{\beta_h \mu_h \beta_c \gamma}{\beta_h(\mu_h + \gamma)(\beta_c - \mu_c p_c) + \mu_h \beta_c \gamma} \\ 0 & 0 & \mu_c p_c - \beta_c - \lambda' \end{vmatrix}$$

Então determina-se a seguinte expressão:

$$[\mu_c p_c - \beta_c - \lambda'] \left[\left(-\mu_h - \frac{\beta_h}{\beta_c}(\beta_c - \mu_c p_c) - \lambda' \right) (-\gamma - \lambda') - \left(\frac{\beta_h}{\beta_c}(\beta_c - \mu_c p_c) \right) (-\mu_h) \right] = 0 \quad (4.18)$$

Simplifica-se a notação por meio da substituição $L = \mu_h + \frac{\beta_h}{\beta_c}(\beta_c - \mu_c p_c)$ e expandindo-

se parte da expressão (4.18) obtêm-se

$$[\mu_c p_c - \beta_c - \lambda'] \left[\lambda'^2 + \lambda'(\gamma + L) + \left(\gamma L + \mu_h \frac{\beta_h}{\beta_c} (\beta_c - \mu_c p_c) \right) \right] = 0 \quad (4.19)$$

Por outro lado, ao avaliar o discriminante de $\lambda'^2 + \lambda'(\gamma + L) + \left(\gamma L + \mu_h \frac{\beta_h}{\beta_c} (\beta_c - \mu_c p_c) \right)$, obtêm-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \Delta &= (\gamma + L)^2 - 4(\gamma L) - 4\mu_h \frac{\beta_h}{\beta_c} (\beta_c - \mu_c p_c) \\ &= \gamma^2 + 2(\gamma L) + L^2 - 4(\gamma L) - 4\mu_h \frac{\beta_h}{\beta_c} (\beta_c - \mu_c p_c) \\ &= \gamma^2 - 2(\gamma L) + L^2 - 4\mu_h \frac{\beta_h}{\beta_c} (\beta_c - \mu_c p_c) \\ &= (\gamma - L)^2 - 4\mu_h \beta_h \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right). \end{aligned}$$

Então (4.19) torna-se,

$$[\mu_c p_c - \beta_c - \lambda'] \left[\lambda' - \left(-(\gamma + L) + \sqrt{(\gamma - L)^2 - 4\mu_h \beta_h \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)} \right) \right] \left[\lambda' + \left((\gamma + L) + \sqrt{(\gamma - L)^2 - 4\mu_h \beta_h \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)} \right) \right] = 0. \quad (4.20)$$

De (4.20) obtemos os seguintes autovalores $\lambda'_1 = \frac{\mu_c p_c - \beta_c}{\mu_c p_c - \beta_c}$, $\lambda'_2 = -(\gamma + L) + \sqrt{(\gamma - L)^2 - 4\mu_h \beta_h \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)}$ e $\lambda'_3 = -(\gamma + L) + \sqrt{(\gamma - L)^2 - 4\mu_h \beta_h \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)}$.

Observa-se que,

$$L = \mu_h + \frac{\beta_h}{\beta_c} (\beta_c - \mu_c p_c) = \mu_h + \beta_h \left(1 - \frac{\mu_c p_c}{\beta_c}\right) = \mu_h + \beta_h (1 - (\mathcal{R}_0)^{-1}) = \mu_h + \beta_h \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right).$$

Supondo que $\mathcal{R}_0 > 1$ então $\beta_h \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) > 0$. Assim, como $\mu_h > 0$, concluí-se que $L > 0$.

Ainda, nota-se que,

$$\lambda'_1 = \mu_c p_c - \beta_c = 1 - \mathcal{R}_0 < 0.$$

Quando $\Delta \geq 0$ destaca-se que $\gamma > 0$ e $L > 0$, assim $(\gamma + L) \geq \sqrt{\Delta} \geq -\sqrt{\Delta}$, então,

$$-(\gamma + L) + \sqrt{\Delta} \leq 0, \quad (4.21)$$

ainda ocorre,

$$-(\gamma + L) - \sqrt{\Delta} \leq 0. \quad (4.22)$$

Portanto para $\Delta \geq 0$, há que λ'_2 e λ'_3 possuem parte real negativa.

Quando $\Delta < 0$ então a parte real de λ'_2 e λ'_3 é dada por $-(\gamma + L) < 0$.

Logo, para os dois casos, a parte real dos autovalores generalizados são negativos. Então aplica-se o Corolário 3.2.14 concluindo que (X_2^*, Y_2^*, A_2^*) é localmente assintoticamente estável quando $\mathcal{R}_0 > 1$, por outro lado se $\mathcal{R}_0 < 1$ há que $\lambda'_1 > 0$ então pelo Teorema 3.2.20 o ponto (X_2^*, Y_2^*, A_2^*) é instável.

■

O ponto (X_2^*, Y_2^*, A_2^*) é dito o ponto de equilíbrio endêmico, ou seja, se $\mathcal{R}_0 > 1$ as populações de suscetíveis, infectados e recuperados tende uma situação de equilíbrio à medida que o tempo t cresce. Esse comportamento é chamado de equilíbrio endêmico.

Capítulo 5

Conclusão

Como foi proposto neste trabalho, apresentou-se uma revisão dos resultados básicos sobre a teoria qualitativa partindo dos resultados de existência de soluções até os resultados de estabilidade de Lyapunov e Princípio de Invariância de La Salle.

Quanto ao modelo compartimentado apresentado para a toxoplasmose, estudou-se seus pontos de equilíbrio quanto a estabilidade e concluiu-se a existência de dois pontos de equilíbrio que, de acordo com o valor de \mathcal{R}_0 , são estáveis ou instáveis de forma local e global para o ponto (X_1^*, Y_1^*, A_1^*) e de forma local para o ponto (X_2^*, Y_2^*, A_2^*) .

Portanto conclui-se que a teoria qualitativa possui uma aplicação prática na compreensão da dinâmica existente entre as populações de um determinado modelo que envolve equações diferenciais ordinárias. Junto a isso possibilita compreender condições que podem auxiliar na intervenção de um determinado problema e produzir os resultados desejados.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução de Valéria Magalhães Iorio. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [2] ANDRADE, M. A; FERREIRA FILHO, L. G. Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 2, 2015.
- [3] SOTOMAYOR, J. M. T. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [4] ARANDA, D. F. et al. A mathematical model for Babesiosis disease in bovine and tick populations. **Mathematical Methods in the Applied Sciences, Stuttgart**, v. 35, n. 3, p. 249-256, 2012.
- [5] FARIA T. A. **Estudo da dinâmica de transmissão da tuberculose bovina por meio de equações diferenciais ordinárias**. 2019. 122f. Dissertação (Mestrado em Estatística aplicada e biometria) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2019.
- [6] AGUSTO, F. B. et al. **Mathematical analysis of a model for the transmission dynamics of bovine tuberculosis**. *Mathematical Methods in the Applied Science*, Medford, v. 34, n. 15, p. 1873–1887, out. 2011. Disponível em: < <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1486> >. Acesso em: 26 nov. 2020.
- [7] ABAKAR, M. F. et al. **Transmission dynamics and elimination potential of zoonotic tuberculosis in morocco**. *PLoS Negl Dis*, San Francisco, v. 11, n. 2, p. 1–17, fev. 2017. Disponível em: < <https://journals.plos.org/plosntds/article?id=10.1371/journal.pntd.0005214> >. Acesso em: 26 nov. 2020.
- [8] RIBEIRO R. **Um estudo das doenças brucelose e babiose bovina com população constante**. 2017. 123f. Dissertação (Mestrado em Estatística aplicada e biometria) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2017.

- [9] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [10] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 6^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.
- [11] LIMA, E. L. **Curso de análise**. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.
- [12] LIMA, E. L. **Curso de análise**. Vol. 2, 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [13] VIANA M.; ESPINAR J. **EDO@IMPA**. Disponível em: < <http://edoimpa.br> >. Acesso em: 04/11/2020.
- [14] PARRA, G. C. G. et al. Dynamics of a model of Toxoplasmosis disease in human and cat populations **Computers and Mathematics with Applications** v. 57, 2009.
- [15] POLETTI, E. C. C; MEYER, J. F. C. A; CONEGLIAN, C. M. R. Dispersão de infecção por *Toxoplasma gondii*: modelagem matemática e simulação numérica. **Biomatemática**. Campinas, v. 20, p. 37-46, 2010.