

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**

VALÉRIA MARIA RUELA

**INTERCÂMBIO ENTRE AS ÁLGEBRAS DE LIE E OS GRUPOS DE
LIE**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ALFENAS

2022

VALÉRIA MARIA RUELA

**INTERCÂMBIO ENTRE AS ÁLGEBRAS DE LIE E OS GRUPOS DE
LIE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática, do Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG).

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira da Silva

ALFENAS

2022

Dedico este trabalho a sua memória e a seus
sonhos, Lidi.

AGRADECIMENTOS

Acredito que nós somos constituídos pelas experiências que vivenciamos, pelas pessoas que compartilham episódios de suas vidas conosco e que numa troca mútua de crenças, lições, acontecimentos e sentimentos, nos reconfiguram constantemente. Esse trabalho se deu num cenário jamais imaginado, por um momento, minhas crenças e esperanças ficaram obscuras e confusas devido as imprevisibilidades da vida, mas foi ai que vocês me reconfiguraram de novo, me devolveram minha força, esperança e fé nos meus sonhos e objetivos de vida.

Nessa seção gostaria de agradecer a todas as pessoas que compartilharam sua vida comigo, durante toda minha formação, nos ambientes escolares (Educação Infantil ao Ensino Superior), profissionais e sociais. Agradeço aos meus familiares, os amigos que ganhei durante esse processo, que estão e estiveram comigo durante essa etapa. Cada um, na sua maneira, me fortaleceu. Sem vocês, eu teria me perdido de mim.

Agradeço a Deus por não me abandonar e me fortalecer. Agradeço meus pais, Belchor e Terezinha, por toda a educação, os princípios, apoio e por compreenderem minhas escolhas e minha ausência. Durante toda minha formação, vocês me mostraram e me deram condições para ir muito longe, mesmo sentindo medo de me soltarem pro mundo. Agradeço meu irmão, Ueliton, por ser tão presente na vida dos meus pais, enquanto estive longe fisicamente. Saibam, vocês sempre estão comigo e sempre estarei aqui por vocês.

Marcelo, muito obrigada por acreditar em mim, por ser sempre presente, por me ouvir e me orientar, não apenas nos trabalhos acadêmicos que desenvolvemos desde meu primeiro período na graduação, mas também como pessoa, como profissional que quero ser. Obrigada, por todas as reuniões e conversas, por todos os direcionamentos, ensinamentos e impulsos em direção à área acadêmica. Mesmo ao final da graduação, você será sempre meu orientador, um norte sobre como quero ser como profissional.

Queria agradecer a todos(as) os(as) professores(as) do Departamento de Matemática da UNIFAL-MG e de outros departamentos que ministraram disciplinas durante minha graduação, por nos ajudarem a alcançarmos nossos objetivos acadêmicos, a concluirmos esse trabalho e possibilitarem o prosseguimento dos meus estudos na pós-graduação. Também vou levar vocês comigo. Por fim, mas não menos importante, agradeço a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), através da qual descobri meu interesse pela pesquisa em Matemática e ao CNPq e a Bolsa TIM pelo apoio Financeiro recebido durante o PICME e a graduação.

RESUMO

RUELA, Valéria Maria. **Intercâmbio entre as álgebras de Lie e os grupos de Lie**. 2022. 86 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Alfenas. Alfenas, 2022.

A teoria de Lie tem papel fundamental na pesquisa da Matemática contemporânea, a medida que contempla espontaneamente aspectos geométricos, topológicos e algébricos, por meio do intercâmbio entre a estrutura de grupo de Lie e da álgebra de Lie. Dessa forma, o projeto de pesquisa apresenta um estudo sobre as conexões entre as álgebras de Lie e os grupos de Lie, objetivando desenvolver a compreensão dos principais mecanismos que garantem o acesso ao grupo de Lie por meio de sua relativa álgebra e vice-versa, além de conhecer as relações entre as estruturas algébricas desses objetos. Para isso, realizamos um estudo teórico e bibliográfico, onde criamos base sobre as noções preliminares de Variedades Diferenciáveis e Topologia Geral necessárias à inserção na teoria, para assim, adentrarmos no estudo dos conceitos e resultados básicos sobre as conexões entre essas estruturas. Por fim, determinamos as álgebras de Lie associadas aos principais subgrupos de Lie de matrizes e compreendemos o acesso unívoco das álgebra de Lie pelos grupos de Lie conexos.

Palavras-chave: Topologia. Variedades Diferenciáveis. Grupo de Matrizes.

ABSTRACT

RUELA, Valéria Maria. **Exchange between Lie algebras and Lie groups**. 2022. 86 p.
Monografia (Licenciatura in Matemática) – Universidade Federal de Alfenas. Alfenas, 2022.

Lie's theory plays a fundamental role in the research of contemporary mathematics, as it spontaneously contemplates geometric, topological and algebraic aspects, through the exchange between Lie's group structure and Lie's algebra. Thus, the research project presents a study on the connections between Lie algebras and Lie groups, aiming to develop an understanding of the main mechanisms that guarantee access to the Lie group through its relative algebra and vice versa, in addition to knowing the relationships between the algebraic structures of these objects. For this, we carried out a theoretical and bibliographic study, where we created a basis on the preliminary notions of Manifolds and General Topology necessary for insertion in theory, in this way, we enter into the study of the basic concepts and results about the connections between these structures. Finally, we determine the Lie algebras associated with the main Lie subgroups of matrices and understand the access of Lie algebra by the related Lie groups.

Keywords: Topology. Manifolds. Matrix Groups.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Carta Local	26
Figura 2 – Mudança de coordenada	28
Figura 3 – Atlas C^∞ -compatível	30
Figura 4 – Cartas não C^∞ -compatível	32
Figura 5 – Mudança de coordenadas na espaço quociente	36
Figura 6 – Funções diferenciáveis entre variedades	38
Figura 7 – Exemplo de variedades difeomorfas	38
Figura 8 – Demonstração da Proposição 3.20	39
Figura 9 – Derivada de uma aplicação	47
Figura 10 – Hipóteses sobre a estrutura da subvariedade regular	51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	NOÇÕES ELEMENTARES DE TOPOLOGIA GERAL	10
2.1	ESPAÇO TOPOLÓGICO	10
2.2	CONTINUIDADE	13
2.3	TOPOLOGIA PRODUTO	15
2.4	SUBESPAÇOS TOPOLÓGICOS	17
2.5	CONJUNTOS FECHADOS	18
2.6	ESPAÇO DE HAUSDORFF	19
2.7	TOPOLOGIA QUOCIENTE	21
2.8	CONEXIDADE	22
3	VARIETADES DIFERENCIÁVEIS	25
3.1	APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS	37
3.2	CAMPOS VETORIAIS	43
3.3	APLICAÇÃO DERIVADA	46
3.4	ALUSÃO AS SUBVARIETADES DIFERENCIÁVEIS	49
4	GRUPOS DE LIE	53
4.1	ÁLGEBRA DE LIE ASSOCIADA A UM GRUPO DE LIE	58
4.2	HOMOMORFISMO	63
4.2.1	Aplicação exponencial	66
4.2.2	Representação	73
4.2.3	Representação adjunta	74
5	INTERCÂMBIOS ENTRE OS GRUPOS DE LIE E ÁLGEBRAS DE LIE 78	
5.1	SUBGRUPOS DE LIE E SUBÁLGEBRAS DE LIE	78
5.2	ALGUNS INTERCÂMBIOS ENTRE OS GRUPOS DE LIE E AS ÁLGEBRAS DE LIE	83
6	CONSIDERAÇÕES	85
	REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

Os estudos sobre as álgebras de Lie iniciaram com os trabalhos do matemático norueguês, Marius Sophus Lie (1842-1899), na tentativa de desenvolver uma teoria capaz de manejar as equações diferenciais de forma similar à teoria de Galois em relação as equações polinomiais. Por volta de 1870, o que hoje nomeamos de álgebras de Lie, figurava como objetos infinitesimais referente a grupos de transformações, os quais eram alcançados a partir de soluções de equações diferenciais ordinárias.

Mais tarde, outros matemáticos contribuíram com a ampliação e aplicação da teoria de Lie, de modo que, na contemporaneidade, ela é analisada a partir de duas visões: algébrica e como objeto geométrico. Dessa forma, dentre as diversas linhas de pesquisa sobre a teoria, há abordagens onde as álgebras de Lie são estudadas com foco exclusivamente algébrico e outras vertentes que exploram suas ligações na geometria, por meio dos grupos de Lie.

As álgebras de Lie são estruturas algébricas intrinsecamente ligada a exploração de variedades diferenciais e objetos geométricos não-euclidianos, os chamados grupos de Lie. Por definição, os grupos de Lie são variedades diferenciáveis dotadas de uma estrutura de grupo, cuja operação multiplicação e inversão são infinitamente diferenciáveis. A teoria de Lie, munida das ferramentas da teoria de Representações, explora potenciais conexões entre a Álgebra e a Geometria Diferencial, a medida que a estrutura do grupo de Lie está implícita na sua relativa álgebra de Lie.

De modo genérico, para se obter os elementos da álgebra de Lie associada a um grupo de Lie, deriva-se curvas no grupo e por meio da resolução de equações diferenciais é trabalhado ponto de vista inverso (MARTINS, 2016). Com isso, é possível simplificar os estudos sobre variedades diferenciáveis a partir das álgebras de Lie, uma vez que essa pode ser estudada sob a óptica da álgebra linear, por meio de sua representação no espaço das transformações lineares endomórficas.

Além da teoria de Lie promover um intercâmbio natural entre a Álgebra e a Geometria Diferencial, essa linha de pesquisa tem diversas aplicações e contribuições práticas e teóricas a várias áreas de estudo, no âmbito da Matemática e de outras ciências. Podemos citar como exemplo de aplicação na Física, a conexão estabelecida pelo físico teórico e matemático Eugene Wigner, por volta de 1930, entre a física de partículas e a teoria das representações, onde se mostra que as propriedades das partículas elementares, como o seus diversos estados quânticos e

seu espectro, se relacionam à representações da estrutura dos grupos de Lie e/ou das álgebras de Lie.

Acentuando seu potencial no desenvolvimento da pesquisa científica, a *XIV International Workshop: Lie theory and its applications in physics* a ser realizada entre os dias 21 e 27 de junho de 2021, em Varna na Bulgária, traz uma série de aplicações da teoria de Lie na Física, desde a simetria na teoria de Cordas até a assimetria em matéria condensada.

Visto o demasiado potencial no avanço da pesquisa científica e o caráter interdisciplinar da teoria, nesse trabalho, nos questionamos sobre quais fundamentações asseguram a existência de álgebras associadas aos grupos de Lie, como os homomorfismos dessas estruturas se relacionam e o acesso das álgebra de Lie pelos grupos de Lie conexos, ilustrando os resultados por meio dos grupos de Lie de matrizes.

Portanto, nosso objetivo geral é compreender os principais mecanismos (aplicação exponencial e representação adjunta) que garantem o acesso ao grupo por meio de sua álgebra e vice-versa e reconhecer o acesso unívoco das álgebras de Lie pelos grupos de Lie conexos. Buscando, gradativamente, ampliar e solidificar os conhecimentos prévios necessários sobre Topologia Geral, Análise no \mathbb{R}^n , Geometria Diferencial, Álgebra Abstrata e álgebra de Lie. Dessa forma, esperamos determinar os mecanismos que viabilizam a conexão da álgebra e do grupo de Lie e revelar um propriedade geométrica e topológica do grupo de Lie a partir da sua álgebra.

2 NOÇÕES ELEMENTARES DE TOPOLOGIA GERAL

Em Análise Real é feito um estudo sobre as propriedades topológicas dos subconjuntos dos espaços euclidianos que asseguram e possibilitam discussões sobre limite e continuidade de aplicações. A fim de generalizar esse trabalho, a Topologia Geral dedica-se a abstração dos espaços topológicos e a exploração das estruturas que garantem o estudo das noções de continuidade de aplicações entre espaços topológicos não-euclidianos.

2.1 ESPAÇO TOPOLÓGICO

Definição 2.1 (Espaço topológico). *Seja X um conjunto qualquer e τ uma coleção de subconjuntos de X , tal que:*

1. $X, \emptyset \in \tau$;
2. *Seja Γ um conjunto qualquer de índices. Se $A_\gamma \in \tau, \forall \gamma \in \Gamma$, então $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \tau$;*
3. *Se $A_i \in \tau, \forall i = 1, \dots, n$, então $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.*

Nessas condições, o par (X, τ) é dito um espaço topológico, ou ainda, X é um conjunto munido da topologia τ . Os elementos de τ recebem o nome de conjuntos abertos de X .

Um mesmo conjunto pode ser submetido a diferentes topologias, sendo cada uma para um espaço topológico próprio, com propriedades particulares determinadas pelos seus abertos. Como exemplos clássicos de topologia, podemos citar a topologia discreta, a topologia trivial e a topologia do complemento finito. Veja um exemplo:

Exemplo 2.2 (Topologia do complemento finito). *Considere X um conjunto qualquer e a coleção $\tau_f = \{A \subseteq X \mid X - A \text{ é finito ou } X - A = X\}$. Essa coleção é uma topologia de X , pois as três condições da definição de espaço topológico são satisfeitas. Veja:*

1. *Temos que $X \in \tau_f$, uma vez que $X - X = \emptyset$ é finito.*
Ainda $\emptyset \in \tau_f$, pois $X - \emptyset = X$;
2. *Agora, tome Γ um conjunto qualquer de índices. Se $A_\gamma \in \tau, \forall \gamma \in \Gamma$, então $X - A_\gamma$ é finito ou igual a $X, \forall \gamma \in \Gamma$. Como*

$$X - \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (X - A_\gamma)$$

e a intersecção de conjuntos finitos é finita, temos que $X - \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)$ é um conjunto finito ou igual a X , donde $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \tau_f$;

3. Por fim, se $A_i \in \tau_f$, com $i = 1, \dots, n$, a definição da topologia do complemento finito nos assegura que $X - A_i$ é finito ou igual a X , para todo i . Ainda

$$X - \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (X - A_i)$$

e como a união finita de conjuntos finitos é finita, temos que $X - \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)$ é finito ou igual a X , donde $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau_f$.

Reconhecendo a importância da caracterização dos abertos que formam uma topologia, nos questionamos sobre a possibilidade de construir e gerar diferentes topologias para um conjunto. Isso é possível por meio da noção de base.

Definição 2.3 (Base para uma topologia). *Uma base para uma topologia sobre um conjunto X é uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos de $B \subseteq X$, chamados de básicos, tal que:*

1. $\forall x \in X, \exists B \subseteq \mathcal{B}$, onde $x \in B$;

2. Sejam $B_1, B_2 \subseteq \mathcal{B}$.

Se $x \in B_1 \cap B_2$, então $\exists B_0 \subseteq \mathcal{B}$, onde $x \in B_0 \subseteq B_1 \cap B_2$.

A topologia gerada por uma base pode ser compreendida a partir do seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Seja \mathcal{B} uma base para uma topologia em X . Se $\tau_{\mathcal{B}}$ é uma coleção de subconjuntos de X da forma:*

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, \text{ onde } x \in B \subseteq U\}$$

então $\tau_{\mathcal{B}}$ é uma topologia em X , chamada topologia gerada por \mathcal{B} .

Demonstração. Mostraremos que os subconjuntos U que pertencem a coleção $\tau_{\mathcal{B}}$ são conjuntos abertos de X . Para isso, vamos verificar que essa coleção de subconjuntos satisfaz as três condições necessárias para ser uma topologia, de acordo com a Definição 2.1.

Em primeiro lugar, tome \mathcal{B} uma base para uma topologia em X . Pelo Item 1 da Definição 2.3, podemos afirmar que $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq X$. Esse fato corresponde diretamente a definição da coleção $\tau_{\mathcal{B}}$, por isso $X \in \tau_{\mathcal{B}}$.

Por outro lado, para que um subconjunto não pertença a $\tau_{\mathcal{B}}$, deve ocorrer a negação da sua definição. Em outras palavras, $S \notin \tau_{\mathcal{B}}$, se $\exists x \in S, \forall B \in \mathcal{B}, x \notin B \subseteq S$. Como $\nexists x \in \emptyset$, não ocorre a negação da definição dessa coleção, o que nos leva a admitir que $\emptyset \in \tau_{\mathcal{B}}$.

Avaliando o segundo critério, vamos tomar $\{U_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma} \in \tau_{\mathcal{B}}$ uma família de subconjuntos indexados por Γ , um conjunto qualquer de índices, se $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_{\gamma}$, significa que $\exists \gamma \in \Gamma, x \in U_{\gamma}$. Como $U_{\gamma} \in \tau_{\mathcal{B}}, \forall \gamma \in \Gamma$, a definição de $\tau_{\mathcal{B}}$ nos fornece que $\exists B \in \mathcal{B}$, onde $x \in B \subseteq U_{\gamma} \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_{\gamma}$.

Logo $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_{\gamma} \in \tau_{\mathcal{B}}$.

Por último, utilizaremos a indução em n , para mostrar que se $U_i \in \tau_{\mathcal{B}}$, com $i = 1, \dots, n$, então $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_{\mathcal{B}}$. Como base, tomemos $n = 2$. Seja $x \in U_1 \cap U_2$, onde $U_1, U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$, como $x \in U_i$, temos que $\exists B_i \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_i \subseteq U_i$, para $i = 1, 2$.

Assim, $x \in B_1 \cap B_2$. Pela Condição 2 da Definição 2.3 de base, temos que $\exists B_0 \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_0 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Então, $\exists B_0 \in \mathcal{B}, x \in B_0 \subseteq U_1 \cap U_2$, donde $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$.

Admitindo a hipótese indutiva para n , é possível mostrar sua validade para $n + 1$. Deixamos essa etapa a cargo do leitor, ressaltando que o processo é análogo ao caso $n = 2$. Dessa forma, temos que $\forall n \in \mathbb{N}$ fixado, se $U_i \in \tau_{\mathcal{B}}$, com $i = 1, \dots, n$, então $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_{\mathcal{B}}$.

Portanto, como $X, \emptyset, \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_{\gamma}$ e $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_{\mathcal{B}}$, temos que $\tau_{\mathcal{B}}$ é uma topologia em X . \square

Considerando a Proposição 2.4, é fácil mostrar que a coleção $\tau_{\mathcal{B}}$ também pode ser entendida da forma:

Proposição 2.5. *Seja X um conjunto qualquer. Se \mathcal{B} uma base para a topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ de X , então $\tau_{\mathcal{B}}$ é igual a coleção de todas as uniões de básicos.*

Isso significa, trivialmente, que os básicos são conjuntos abertos na topologia gerada pela base e o mais importante, os abertos da topologia se exprimem pela união de elementos básicos. Essa descrição não é única, uma vez que um mesmo aberto pode ser igual a união de

diferentes básicos. Por exemplo, se consideramos o conjunto dos números reais \mathbb{R} com a topologia usual (τ_{usual}), onde $\tau_{\text{usual}} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in A, \exists (a,b) \text{ intervalo aberto, tal que } x \in (a,b) \subseteq A\}$ gerada pela base $\mathcal{B} = \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b \text{ e } a,b \in \mathbb{R}\}$ e tomarmos $(0,3) \in \tau_{\text{usual}}$, temos que $(0,3) = (0,2) \cup (\frac{3}{2},3) = (0,1) \cup (\frac{1}{2},3)$.

Outra forma de descrever os conjuntos abertos é a partir da noção de interior, donde temos que:

Definição 2.6. *Seja (X,τ) um espaço topológico e $B \subseteq X$ um subconjunto de X . O interior de B , denotado por B° , é dado por $B^\circ = \bigcup \{A \in \tau \mid A \subseteq B\}$.*

É claro que $B^\circ \subset B$ e que B° é aberto em X . Isso nos motiva a dizer que $B \subseteq X$ é aberto, se e somente se, $B = B^\circ$.

Com efeito, suponhamos $B \subset X$ é aberto, sabemos que $B^\circ \subset B$, falta mostrarmos que $B \subset B^\circ$. Por hipótese, $B \in \tau$, ainda, $B \subseteq B$, logo pela definição de interior, $B \subset \bigcup \{A \in \tau \mid A \subseteq B\}$, donde $B = B^\circ$. Reciprocamente, suponhamos que $B = B^\circ$, como o interior é igual a união de abertos, temos que o interior é aberto, logo pela igualdade de conjunto, segue que B é aberto.

Ainda, outra maneira útil de descrever os conjuntos abertos é por meio da estrutura topológica dos conjuntos fechados, como veremos na Seção 2.5.

2.2 CONTINUIDADE

Como havíamos comentado no início do Capítulo 2, um dos objetivos da Topologia Geral é introduzir a noção de continuidade de aplicações entre espaços topológicos arbitrários. Isso já é possível a partir das discussões realizadas até o momento.

Definição 2.7 (Continuidade). *Sejam (X,τ) , (Y,τ') espaços topológicos. A função $f : X \rightarrow Y$ é dita contínua, se $\forall A' \in \tau'$, o conjunto $f^{-1}(A') \in \tau$.*

Vale lembrarmos que a imagem inversa de um subconjunto A' é definida como $f^{-1}(A') = \{x \in X \mid f(x) \in A' \subseteq Y\}$.

É visível que a continuidade não depende apenas da função, mas também da topologia do domínio e do contra-domínio da correspondência. Nesse sentido, para fixarmos as ideias, veja um exemplo onde a função não é contínua, de acordo com a Definição 2.7, que trata a continuidade em termos gerais.

Exemplo 2.8. Como domínio da função, tome o conjunto dos números reais \mathbb{R} com a topologia usual τ_{usual} gerada por $\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b \text{ e } a,b \in \mathbb{R}\}$. Já o contra-domínio será o espaço topológico \mathbb{R}_l de \mathbb{R} com a topologia gerada por $\{[a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b \text{ e } a,b \in \mathbb{R}\}$. Considere a função:

$$f : (\mathbb{R}, \tau_{usual}) \longrightarrow \mathbb{R}_l$$

$$x \longmapsto x$$

Essa função não é contínua. De fato, se tomarmos o elemento básico $[a,b)$ de \mathbb{R}_l , temos que $f^{-1}([a,b)) = [a,b) \notin \tau_{usual}$, pois $\nexists (c,d)$ intervalo real, tal que $a \in (c,d) \subseteq [a,b)$. Assim, como $[a,b)$ aberto em \mathbb{R}_l **não implica** que $f^{-1}([a,b))$ é aberto em $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$, temos que f não é contínua.

As funções contínuas têm um papel importante no estudo de morfismos entre espaços topológicos. Em várias áreas da Matemática, como na Álgebra, na Teoria dos Conjuntos, entre outras, a noção de morfismo é usada para estabelecer aplicações, de um objeto matemático a outro, capazes de transferirem e preservarem as estruturas dos objetos. Nesse sentido, na Topologia Geral, temos os homeomorfismos, aplicações que transferem as propriedades topológicas do domínio ao espaço do contra-domínio e vice-versa. Em termos formais, temos:

Definição 2.9 (Homeomorfismos). *Sejam (X, τ) , (Y, τ') espaços topológicos. A função $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo, se a função f é bijetora e tanto f quanto sua inversa f^{-1} são contínuas. Nesse caso, se existe esse homeomorfismo f , dizemos que os espaços (X, τ) , (Y, τ') são homeomorfos.*

Outra forma de compreender o homeomorfismo está alicerçada na noção de aplicação aberta. Dizemos que uma aplicação f entre os espaços (X, τ) e (Y, τ') é aberta se $\forall A \in \tau$, o conjunto $f(A) \in \tau'$. Então, suponhamos que a função $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ é um homeomorfismo, donde f e f^{-1} são contínuas. Assim, de acordo com a Definição 2.7, é verdade que:

- $\forall A' \in \tau'$, o conjunto $f^{-1}(A') \in \tau$, e
- $\forall A \in \tau$, o conjunto $f(A) \in \tau'$.

A ocorrência dessas duas afirmações são equivalentes a dizer que uma bijeção f é um homeomorfismo entre (X, τ) , (Y, τ') , desde que $A \in \tau$, se e somente se, o conjunto

$f(A) \in \tau'$. Em outras palavras, uma bijeção contínua e aberta entre espaços topológicos é um homeomorfismo.

Com isso, já vemos que os homeomorfismos transferem a estrutura dos conjuntos abertos entre os espaços. No decorrer da construção das noções desse capítulo, compreenderemos melhor o poder dessas aplicações. Mas antes disso, faz-se necessário conhecermos outros espaços topológicos e propriedades de suas estruturas.

2.3 TOPOLOGIA PRODUTO

Além da criação de diferentes espaços topológicos por meio da estruturação da coleção dos abertos com a base, é possível expandir essas construções através da topologia produto, dos subespaços topológicos e da topologia quociente.

Em primeiro momento, vamos tratar dos espaços topológicos munidos da topologia produto. Para isso, vale lembrar que se considerarmos X_n conjuntos, $n \in \mathbb{N}$, o produto cartesiano dessa sequência de conjuntos é representado por

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n = X_1 \times \cdots \times X_n \times \cdots$$

formado pelas sequências (x_1, \dots, x_n, \dots) , onde $x_n \in X_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Cabe ressaltar que assim como há o produto cartesiano infinito, podemos definir o produto dos conjuntos X_1, \dots, X_n , com $n \in \mathbb{N}$ fixado.

De modo geral, nosso trabalho envolverá somente o produto cartesiano finito, em particular, os espaços euclidianos reais de dimensão finita, \mathbb{R}^n . Com isso, nos questionamos sobre como se dá a construção de uma topologia sobre o conjunto do produto cartesiano de espaços com suas respectivas topologias, $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$. Respondendo essa dúvida, temos:

Definição 2.10 (Topologia Produto). *Sejam (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) espaços topológicos. A topologia (τ_{produto}) para $X_1 \times X_2$ é aquela que tem como base a coleção $\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \tau_1 \text{ e } A_2 \in \tau_2\}$.*

Ainda, conhecendo as bases para (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) é possível descrever uma base para a topologia produto. Isso é feito da seguinte forma:

Lema 2.11. *Sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 bases para os espaços topológicos X_1 e X_2 , respectivamente. Então a coleção $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1 \text{ e } B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ é uma base para a topologia de $X_1 \times X_2$.*

Exemplo 2.12. *Considere o conjunto dos números reais \mathbb{R} com a topologia usual τ . Sabemos que $\mathcal{B} = \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b \text{ e } a,b \in \mathbb{R}\}$ é uma base para τ .*

Então, pelo Lema 2.11, a coleção

$$\mathcal{C} = \left\{ \prod_{i=1}^n I_i \mid I_i \text{ são intervalos reais abertos} \right\}$$

é uma base para a topologia produto em \mathbb{R}^n , para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado.

As noções apresentadas na Definição 2.10 e no Lema 2.11 podem ser ampliadas, indutivamente, para o espaço $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

Outro artifício, potencialmente estratégico, para a resolução de questões envolvendo espaços topológicos com a topologia produto encontra-se no trabalho com as aplicações projetivas.

Definição 2.13 (Projeção coordenada). *Seja o conjunto $\prod_{i=1}^n X_i$ constituído das sequência coordenada (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_k \in X_k$ e $k \in \mathbb{N}$ fixado. As aplicações projeções π_k sobre X_k , para algum $k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ fixado, da forma:*

$$\begin{aligned} \pi_k : \quad \prod_{i=1}^n X_i &\longrightarrow X_k \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_k \end{aligned}$$

são chamadas de projeções coordenadas.

Um ponto vantajoso das projeções está no fato de serem contínuas. Para verificarmos sua continuidade, considere a projeção $\pi_n : \prod_{i=1}^n X_i \longrightarrow X_n$. Tome A um conjunto aberto de X_n . Então

$$\pi_n^{-1}(A) = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1} \times A$$

Sabemos que X_i , $i = 1, \dots, n-1$ são abertos em seus respectivos espaços e A é aberto em X_n . Então, de acordo com a Definição 2.11, $\pi_n^{-1}(A)$ é um elemento básico (em particular, um aberto) do espaço $\prod_{i=1}^n X_i$. Assim, pela Definição 2.7, π_n é contínua. Esse argumento vale para cada $i = 1, \dots, n$ fixado.

2.4 SUBESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Ao estudarmos as topologias de um conjunto qualquer X , podemos nos perguntar sobre a estrutura herdada pelos subconjuntos de X . Nesse sentido, há a noção de subespaço topológico de X , cujos abertos da topologia de subespaço são definidos por meio da intersecção do subconjunto com os abertos de X .

Definição 2.14 (Subespaço topológico). *Seja $Y \subseteq X$ um subconjunto de X e (X, τ) um espaço topológico. Dado um subconjunto $Y \subseteq X$, (Y, τ_Y) é um subespaço topológico de X , onde $\tau_Y = \{Y \cap A; A \in \tau\}$. Isso é equivalente a dizer que Y é um espaço com topologia induzida pelos abertos de X .*

De modo similar a indução da topologia do subespaço $Y \subseteq X$ por meio da topologia do espaço X , podemos induzir uma base para o subespaço, dada por:

Lema 2.15. *Seja \mathcal{B} uma base para uma topologia em X , então a coleção $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para o subespaço $Y \subseteq X$.*

Exemplo 2.16. *Seja $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Então, uma base para esse subespaço é $\{[0,1] \cap (a,b) \mid (a,b) \text{ intervalos reais abertos}\}$. Podemos descrevê-la como*

$$\{[0,b) \mid 0 < b \leq 1\} \cup \{(a,1] \mid 0 \leq a < 1\} \cup \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{[0,1]\}$$

Podemos observar que $[0, \frac{1}{2})$ é aberto do subespaço $[0,1]$, mas não é aberto de \mathbb{R} . Assim, os abertos de um subespaço $Y \subset X$ podem não ser abertos em X , a menos que o subespaço seja aberto em X , como segue do Lema 2.17

Lema 2.17. *Seja $Y \subset X$ um subespaço topológico. Se A é aberto em Y e Y é aberto em X , então A é aberto em X .*

Agora, uma questão pertinente se encontra na descrição da topologia induzida por um espaço produto. Nesse sentido, temos

Proposição 2.18. *Se $M \subseteq X$ e $N \subseteq Y$ subespaços topológicos de X e Y , respectivamente. Então, a topologia produto de $M \times N$ é igual a topologia induzida em $M \times N$ por $X \times Y$.*

Veja detalhes da demonstração na página 105 em (MUNKRES, 2000).

2.5 CONJUNTOS FECHADOS

A partir da topologia dos espaços podemos estudar algumas importantes estruturas dos subconjuntos e do espaço. Dentre elas podemos destacar os conjuntos fechados.

Definição 2.19. Um subconjunto $F \subseteq X$ do espaço topológico X é chamado de fechado, se $X - F$ é aberto.

Essa definição implica que, dado $A \subseteq X$, se $X - A$ é fechado, então A é aberto. Além de introduzir a estrutura dos conjuntos fechados, elas nos fornece uma outra maneira de caracterizar os abertos de um espaço topológico.

Exemplo 2.20. No plano \mathbb{R}^2 o conjunto $Y = \{(x,y) \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ é fechado, pois $\mathbb{R}^2 - Y = [(-\infty, 0) \times \mathbb{R}] \cup [\mathbb{R} \times (-\infty, 0)]$ aberto, isto é, o complementar de Y em relação a \mathbb{R}^2 é aberto, uma vez que se descreve como a união de dois elementos básicos da topologia produto.

É claro que a propriedade de um conjunto ser fechado depende diretamente dos abertos do espaço topológico. Dessa forma, é natural verificarmos que dado um subespaço topológico $Y \subseteq X$, temos que F é fechado em Y se, e somente se, $F = F' \cap Y$, com F' fechado em X .

Definição 2.21 (Fecho). O fecho de um conjunto C em (X, τ) é igual a $\overline{C} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, onde $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid C \subseteq F \text{ e } F \text{ é fechado em } X\}$.

Verifica-se facilmente que o fecho de um conjunto é fechado. Assim, podemos caracterizar os conjuntos fechados a partir do seu fecho, já que um conjunto F é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$.

Definição 2.22 (Ponto de Acumulação). Seja $C \subseteq X$, onde (X, τ) . Dado $x \in X$, dizemos que x é um ponto de acumulação de C , se

$$\forall A \in \tau, \text{ com } x \in A, \text{ temos que } A \cap (C - \{x\}) \neq \emptyset.$$

Denotamos o conjunto dos pontos de acumulação de C por C' .

Um exemplo simples é dado pelos subespaços $[0,1] \subset \mathbb{R}$ e $(0,1] \subset \mathbb{R}$ com a topologia usual da reta. É fácil ver que todos os pontos de $[0,1]$ são pontos de acumulação de $(0,1]$, em outras palavras, $[0,1] \subseteq (0,1]'$. Com efeito, tome $x \in [0,1]$, $\forall \epsilon > 0$, $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap ((0,1] - \{x\}) \neq \emptyset$. E mais ainda, $[0,1] = (0,1]'$, pois $\forall x < 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $x - \delta < x < x + \delta < 0$, donde

$(x - \delta, x + \delta) \cap ((0,1] - \{x\}) = \emptyset$ e $\forall x > 1, \exists \delta > 0$, tal que $1 < x - \delta < x < x + \delta$, donde $(x - \delta, x + \delta) \cap ((0,1] - \{x\}) = \emptyset$. Logo, os únicos pontos de acumulação do conjunto $(0,1]$ pertencem ao intervalo $[0,1]$.

Com essa definição podemos descrever o fecho de um conjunto C de (X, τ) , por:

Proposição 2.23.

$$\overline{C} = C \cup C'$$

Veja sua demonstração na página 113 em (MUNKRES, 2000). Em outras palavras, essa proposição nos mostra que um subconjunto de um espaço topológico é fechado, se e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

Pensando na relação dos conjuntos fechados com as aplicações contínuas, temos:

Teorema 2.24. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. f é contínua;
2. $\forall C \subseteq X$, temos que $f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)}$;
3. $\forall F \subseteq Y$ fechado em Y , temos que $f^{-1}(F)$ é fechado em X ;
4. Para cada $x \in X$ e cada aberto A' de Y , tal que $f(x) \in A'$, existe um aberto A em X , com $x \in A$, tal que $f(A) \subseteq A'$.

Veja a demonstração detalhada desse resultado na página 120 em (MUNKRES, 2000). Por meio dessa proposição, além de compreendermos a estrutura da imagem direta e imagem inversa de um função contínua sobre conjuntos fechados, também adquirimos os três últimos itens como formas de definir as funções contínuas entre espaços topológicos.

2.6 ESPAÇO DE HAUSDORFF

Definição 2.25. *Um espaço topológico X é chamado espaço de Hausdorff, se $\forall x_1, x_2 \in X$ distintos, existem A_1 e A_2 abertos disjuntos, onde $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$.*

Os espaços de Hausdorff asseguram inúmeros resultados importantes, dentre eles podemos destacar:

Proposição 2.26. *Seja X um espaço de Hausdorff. Se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ é convergente, então essa sequência converge para um único ponto de X .*

Em espaços topológicos arbitrários, uma maneira de dizer que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$ em (X, τ) é mostrar que $\forall A \in \tau$, onde $x \in A$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in A$.

Como exemplo de espaço de Hausdorff, temos, trivialmente, o conjunto dos números reais com a topologia usual.

Uma pergunta pertinente é se a propriedade ser Hausdorff é transferida para os subespaços e para os espaços produtos de espaços de Hausdorff. Os próximos resultados dessa seção nos mostram que sim.

Proposição 2.27. *O subespaço de um espaço de Hausdorff é Hausdorff.*

Veja demonstração na página 116 em (MUNKRES, 2000).

Proposição 2.28. *O espaço produto de espaços de Hausdorff é Hausdorff.*

Demonstração. Mostraremos indutivamente que se X_i são espaços de Hausdorff, para cada $i = 1, \dots, n$, então $\prod_{i=1}^n X_i$ é Hausdorff. Como caso base, tome X e Y espaços de Hausdorff, provaremos que $X \times Y$ é Hausdorff. Com efeito, sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$, tal que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Então, $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$, ou $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Se $x_1 \neq x_2$, como X é Hausdorff, $\exists U_{x_1}, U_{x_2}$ abertos de X , tais que $x_1 \in U_{x_1}$, $x_2 \in U_{x_2}$ e $U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$ e se $y_1 \neq y_2$, como Y é Hausdorff, $\exists U_{y_1}, U_{y_2}$ abertos de Y , tais que $y_1 \in U_{y_1}$, $y_2 \in U_{y_2}$ e $U_{y_1} \cap U_{y_2} = \emptyset$.

Ainda, $U_{x_1} \times U_{y_1}$ e $U_{x_2} \times U_{y_2}$ são abertos de $X \times Y$, pois são básicos da topologia produto em $X \times Y$, onde $(x_1, y_1) \in U_{x_1} \times U_{y_1}$ e $(x_2, y_2) \in U_{x_2} \times U_{y_2}$.

Afirmção: $(U_{x_1} \times U_{y_1}) \cap (U_{x_2} \times U_{y_2}) = \emptyset$.

Isso de fato ocorre, pois

$$(U_{x_1} \times U_{y_1}) \cap (U_{x_2} \times U_{y_2}) = (U_{x_1} \cap U_{x_2}) \times (U_{y_1} \cap U_{y_2}) = \emptyset$$

dado que $U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$ e/ou $U_{y_1} \cap U_{y_2} = \emptyset$.

Logo, se X e Y espaços de Hausdorff e tomarmos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ distintos, então existem $(U_{x_1} \times U_{y_1}), (U_{x_2} \times U_{y_2})$ abertos disjuntos de $X \times Y$, tais que $(x_1, y_1) \in (U_{x_1} \times U_{y_1})$ e $(x_2, y_2) \in (U_{x_2} \times U_{y_2})$.

Deixaremos o restante da demonstração a cargo do leitor. Para isso, basta supor que para um dado $n \in \mathbb{N}$, se X_i são espaços de Hausdorff, para cada $i = 1, \dots, n$, então $\prod_{i=1}^n X_i$ é

Hausdorff e mostrar que se X_i são espaços de Hausdorff, para cada $i = 1, \dots, n + 1$, então

$$\prod_{i=1}^{n+1} X_i.$$

□

2.7 TOPOLOGIA QUOCIENTE

Para descrevermos a topologia quociente, é necessário definirmos a aplicação quociente, a qual induzirá a coleção dos abertos de um espaço quociente. Dessa forma,

Definição 2.29. *Sejam X e Y espaços topológicos e $\rho : X \rightarrow Y$ uma aplicação sobrejetora. Se*

$$A \subseteq Y \text{ aberto} \Leftrightarrow \rho^{-1}(A) \text{ é aberto em } X$$

dizemos que ρ é uma aplicação quociente.

Com isso, se tomarmos X um espaço topológico, Y um conjunto qualquer e uma aplicação sobrejetora $\rho : X \rightarrow Y$, vai existir uma única topologia em Y , tal que ρ é a aplicação quociente. Essa será a topologia induzida pela aplicação ρ , de modo que subconjuntos $A \subseteq Y$ são abertos de Y , desde que $\rho^{-1}(A)$ é aberto em X , sendo chamada de topologia quociente em Y .

Definição 2.30 (Espaço quociente). *Sejam X um espaço topológico e \sim uma relação de equivalência em X . Os elementos do conjunto quociente X/\sim são classes de equivalência $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$. Na topologia induzida pela aplicação sobrejetora ρ*

$$\begin{aligned} \rho : \quad X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

o espaço X/\sim é chamado de espaço quociente.

A aplicação quociente ρ é uma aplicação aberta, desde que $U \subseteq X$ aberto, implique $[U] := \bigcup_{a \in U} [a]$ é aberto em X/\sim . Assim, temos um importante resultado que nos ajudará na construção das variedades quocientes.

Proposição 2.31. *Seja X um espaço topológico com a topologia induzida por uma aplicação quociente ρ .*

1. *Se X tem base enumerável de abertos, então X/\sim tem base enumerável de abertos.*

2. Se ρ é uma aplicação aberta, temos que X/\sim é um espaço de Hausdorff se e somente se $R = \{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ é fechado em $X \times X$.

Para detalhes da demonstração, veja nas páginas 68 e 69 em (LEE, 2011).

2.8 CONEXIDADE

Outra propriedade topológica importante para os estudos futuros sobre os grupos de Lie é a conexidade de um espaço topológico. Informalmente, a conexidade caracteriza espaços que não podem ser separados em conjuntos abertos disjuntos. O primeiro passo é compreendermos a noção de separação empregada nesse contexto. Assim, temos:

Definição 2.32. *Seja (X,τ) um espaço topológico. Uma separação de X é um par de subconjuntos abertos não-vazios U,V em X , satisfazendo:*

1. $U \cap V = \emptyset$;
2. $U \cup V = X$.

Quando X não admite nenhuma separação, dizemos que X é um espaço topológico conexo.

Uma outra maneira de caracterizar os espaços conexos consiste em mostrar que os únicos subconjuntos, simultaneamente, abertos e fechados são X e \emptyset . Como efeito, tome (X,τ) um espaço topológico e que os únicos abertos e fechados são X e \emptyset . Por absurdo, suponha que X não é conexo, então há uma separação de $X = U \cup V$, como na definição anterior. Tome $u \in \bar{U}$, então, necessariamente, $u \in U$ e $u \notin V$, pois $U \cap V = \emptyset$. Isso implica que $U = \bar{U}$ é fechado. O mesmo vale para V . Das hipóteses de separação, temos que $U = X - V \neq \emptyset$ é fechado e aberto diferente de X . Mas isso contradiz o fato de os únicos subconjuntos, simultaneamente, abertos e fechados serem X e \emptyset , donde X deve ser conexo. Dessa forma, essa maneira alternativa pode definir os espaços conexos. Como exemplo, dos estudos em Análise Real, temos que \mathbb{R} é um espaço conexo.

Da mesma forma que realizado para outras propriedades, nos interessa saber como os subespaços topológicos se comportam quanto essa característica do espaço no qual estão contidos. Para isso, temos:

Lema 2.33. *Seja Y um subespaço topológico de (X,τ) . Uma separação de Y é um par de conjuntos abertos não-vazios U,V em Y , tais que:*

1. $U \cap V = \emptyset$;
2. $U \cup V = X$;
3. $\overline{U} \cap V = \emptyset$;
4. $U \cap \overline{V} = \emptyset$.

Quando Y não admite nenhuma separação, dizemos que Y é um subespaço topológico conexo.

Veja sua demonstração na página 164 em (MUNKRES, 2000).

Exemplo 2.34. Seja $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$ e $Y = [-1, 1]$. Afirmamos que $[1, 0)$ e $[0, 1]$ não são uma separação de Y . Isso é claro, pois $\overline{[1, 0)} \cap [0, 1] = \{0\}$.

A seguir temos um resultado sobre os subespaços conexos de espaços desconexos que nos ajudará no estudo da extensão dessa propriedade ao espaço produto.

Lema 2.35. Se os conjuntos $U, V \in \tau$, formam uma separação para (X, τ) e $Y \subset X$ é um subespaço conexo de X , então $Y \subseteq U$ ou $Y \subseteq V$.

Demonstração. Como $U, V \in \tau$ formam uma separação de X , então $A = U \cap Y$, $B = V \cap Y$ são abertos em Y e $U \cap V = \emptyset$, implicando $A \cap B = \emptyset$. Por outro lado, $A \cup B = (U \cap Y) \cup (V \cap Y) = (U \cup V) \cap Y = X \cap Y = Y$, onde $A \cap B = \emptyset$. Como por hipótese Y é conexo, temos que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, pois caso contrário A e B seriam uma separação de Y . Se $A = \emptyset$, então $B = Y$, donde $Y \subseteq V$. Analogamente, se $B = \emptyset$, temos que $Y \subseteq U$. \square

Proposição 2.36. A união de subespaços topológicos conexos de X com pelo menos um ponto em comum é um subespaço conexo.

Demonstração. Seja $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ uma coleção de subespaços conexos de X , tal que $\exists p \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$.

Mostraremos, por absurdo, que $Y := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ é um subespaço conexo. Para isso suponhamos que Y admite a separação $Y = U \cup V$, onde temos que $p \in Y$, então $p \in U$ ou $p \in V$. Sem perda de generalidade, tomemos $p \in U$. Por A_γ ser conexo para todo $\gamma \in \Gamma$ e $p \in U$, temos pelo Lema 2.35 que $A_\gamma \subset U$, $\forall \gamma \in \Gamma$. Isso implica que $Y \subset U$, donde $V = \emptyset$. Portanto, Y não admite uma separação, donde temos que Y é conexo. O caso onde $p \in V$ é análogo. Assim, $Y = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ é conexo. \square

Reforçando a importância das funções contínuas sobre o estudo das propriedades dos espaços nos quais ela está definida, temos:

Proposição 2.37. *A imagem de uma função contínua sobre um espaço conexo é um espaço conexo.*

Demonstração. Seja X um espaço conexo e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Mostraremos que $f(X)$ é conexo. Para isso, como feito nas demonstrações anteriores, suponhamos por absurdo que $f(X)$ admita a separação $f(X) = U \cup V$, onde $U \cap V = \emptyset$, daí podemos descrever $U = U' \cap f(X)$, com U' é aberto em Y . Já que f é contínua, $f^{-1}(U')$ é aberto não-vazio em X , pois $U = U' \cap f(X) \neq \emptyset$. Do mesmo modo, $f^{-1}(V')$ é aberto não-vazio em X , onde $V = V' \cap f(X)$. Como $f(X) = U \cup V$, temos que $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, os quais são disjuntos (caso contrário, iríamos contradizer $U \cap V = \emptyset$). Assim, construímos uma separação para X , o que é um absurdo, pois X é conexo. Logo, $f(X)$ é conexo. \square

Agora temos condições para mostrarmos o seguinte resultado.

Proposição 2.38. *O produto cartesiano finito de espaços conexos é um espaço conexo.*

Demonstração. Provaremos esse resultado para dois espaços conexos, o caso geral segue indutivamente. Sejam X, Y espaços conexos e $(a,b) \in X \times Y$ um ponto pertencente ao cartesiano. Como o espaço $X \times \{b\}$ é homeomorfo a X , segue que $X \times \{b\}$ é conexo, o mesmo raciocínio vale para $\{x\} \in X$, donde temos que $\{x\} \times Y$ é conexo. Pela Proposição anterior, $(X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$ é conexo, considerando

$$\bigcup_{x \in X} (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y),$$

com (a,b) em comum, pois $(a,b) \in X \times \{b\}$, temos que $\bigcup_{x \in X} (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y) = X \times Y$ é conexo. \square

3 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

A fim de compreendermos a estrutura subjacente de um grupo de Lie, iniciaremos um estudo sobre as variedades diferenciáveis, as quais são objetos geométricos que generalizam a ideia de superfícies do \mathbb{R}^n , com a peculiaridade básica de não estarem, necessariamente, contidas em um espaço euclidiano. A priori, esses objetos matemáticos são espaços topológicos munidos de uma estrutura diferenciável (como veremos a frente).

O próximo passo será dado pela construção da estrutura que caracterizará a diferenciabilidade da variedade

Definição 3.1 (Carta Local). *Sejam M um espaço topológico, φ um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ de um subconjunto aberto $U \subseteq M$ sobre um aberto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$:*

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \varphi(U) \\ p &\longmapsto (\varphi_1(p), \dots, \varphi_m(p)) \end{aligned}$$

assim, (U, φ) é chamada de carta local ou sistema de coordenadas locais em M , onde os $\varphi_i(p) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ são as coordenadas de $p \in M$ no sistema φ .

Quando denotarmos uma carta local em M por (U_p, φ) , queremos indicar que $p \in U \subseteq M$, ou seja, U é um aberto de M ao redor de p .

Com base em aplicações tais como φ , podemos definir uma função localmente constante a $m \in \mathbb{Z}_+$. Essa função fornece a dimensão local do espaço topológico M . Nos casos onde M é conexo, podemos afirmar, globalmente, que a dimensão de M é m . Para mais detalhes, veja as Notas 1, página 1, em (GOMES, 2006).

Exemplo 3.2. *Seja $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, com a topologia induzida pelo espaço \mathbb{R}^2 . Tome o subconjunto $U_1^+ \subseteq \mathbb{S}^1$, da forma:*

$$U_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y > 0\}$$

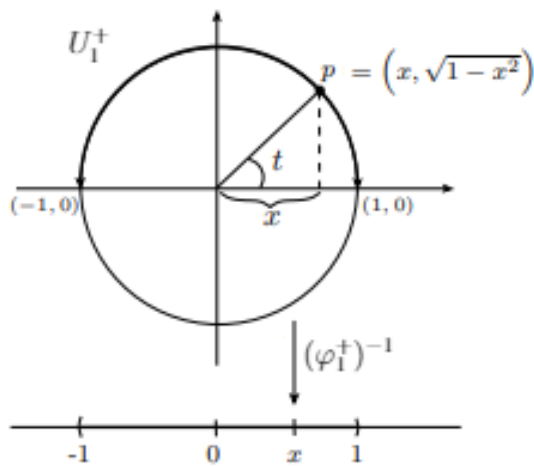
Então, U_1^+ é um conjunto aberto de \mathbb{S}^1 . A função φ_1^+ é uma parametrização de U_1^+ sob o intervalo aberto $(-1, 1)$ da reta.

$$\begin{aligned}\varphi_1^+ : (-1,1) &\longrightarrow U_1^+ \\ x &\longmapsto (x, \sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

como φ_1^+ é uma bijeção, $\exists (\varphi_1^+)^{-1} : U_1^+ \longrightarrow (-1,1)$, onde $(\varphi_1^+)^{-1}(x,y) = x$. É fácil ver que φ_1^+ e $(\varphi_1^+)^{-1}$ são contínuas, então $(U_1^+, (\varphi_1^+)^{-1})$ é uma carta local em \mathbb{S}^1 .

Visualize o raciocínio na Figura 1.

Figura 1 – Carta Local



Fonte: Adaptado de (LIMA, 2011).

Ainda nesse exemplo, podemos identificar facilmente que U_1^+ fornece a unidimensionalidade local de \mathbb{S}^1 pelo parâmetro x . Todavia, como \mathbb{S}^1 é conexa, concluímos que sua dimensão global é igual a 1. Isso fica mais claro, utilizando a parametrização natural do círculo por meio do ângulo, a saber $\xi : (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, dada por $\xi(t) = e^{it} = (\cos(t), \sin(t))$.

Exemplo 3.3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, $M(n, \mathbb{R})$ o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas no corpo dos números reais e considere os espaços:

$$\mathcal{L}(V) := \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ é uma transformação linear}\}$$

$$\text{GL}(V) := \{T \in \mathcal{L}(V) \mid T \text{ é invertível}\}$$

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A \text{ é invertível}\} = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

Tome $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base para V . E defina a aplicação

$$\phi_\beta : \text{GL}(V) \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$$

$$T \longmapsto \phi_\beta(T) = [T]_\beta$$

onde $[T]_\beta$ representa a matriz da transformação linear T na base β .

Sabemos que uma transformação linear T é invertível, se e somente se, o determinante da matriz dessa transformação, numa base fixada, é diferente de zero. Ainda, dado $A \in M(n, \mathbb{R})$, é de nosso conhecimento que A é invertível, se e somente se, $\det A \neq 0$. Esses resultados, juntamente com o fato de toda transformação linear pode ser representada por uma matriz e toda matriz poder definir uma transformação linear, implicam que $\phi_\beta(\text{GL}(V)) = \text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Por outro lado, $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ e como $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ é igual a imagem inversa de um conjunto aberto sob uma função contínua, temos que $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ é aberto em $M(n, \mathbb{R})$, que por sua vez é isomorfo a \mathbb{R}^{n^2} . Por fim, sendo ϕ_β a restrição de um isomorfismo linear, temos que ϕ_β é um homeomorfismo sobre sua imagem. Portanto, $(\text{GL}(V), \phi_\beta)$ é uma carta local em $\text{GL}(V)$.

Definição 3.4 (Atlas). Sejam $\varphi_j : U_j \rightarrow \varphi_j(U_j)$ cartas locais em M sobre \mathbb{R}^m , onde $j \in J$ um conjunto qualquer de índice. Se os domínios U_j cobrem M , então a coleção $\mathcal{A} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ é um atlas de dimensão m . Dessa forma, dizemos que os abertos U_j são vizinhanças coordenadas de \mathcal{A} .

Considerando $M = \bigcup_{j \in J} U_j$, vemos que um atlas de M assegura que para todo elemento p do espaço topológico M , existe algum j em J , tal que $p \in U_j$ e U_j é um aberto homeomorfo a um aberto do \mathbb{R}^m . Nessas circunstâncias, uma *variedade topológica de dimensão m* é um espaço topológico M , onde existe um atlas, tal como a Definição 3.4.

Retomando o Exemplo 3.2, podemos construir um atlas para \mathbb{S}^1 . Veja:

Exemplo 3.5. Seja $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, com a topologia induzida pelo espaço \mathbb{R}^2 e os subconjuntos abertos de \mathbb{S}^1 :

$$U_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y > 0\}$$

$$U_1^- = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y < 0\}$$

$$U_2^+ = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid x > 0\}$$

$$U_2^- = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid x < 0\}$$

As funções φ_1^\pm são parametrizações dos U_1^\pm sob o intervalo aberto $(-1, 1)$ da reta.

$$\begin{aligned}\varphi_1^\pm & : (-1,1) \longrightarrow U_1^\pm \\ x & \longmapsto (x, \pm \sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

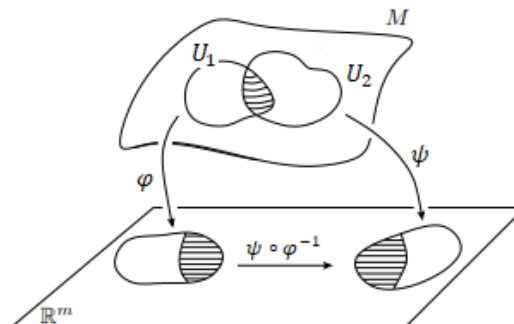
Assim como as funções φ_2^\pm são parametrizações dos U_2^\pm sob o intervalo aberto $(-1,1)$ da reta.

$$\begin{aligned}\varphi_2^\pm & : (-1,1) \longrightarrow U_2^\pm \\ y & \longmapsto (\pm \sqrt{1-y^2}, y)\end{aligned}$$

Como argumentado no Exemplo 3.2, $\exists (\varphi_1^\pm)^{-1} : U_1^\pm \longrightarrow (-1,1)$, onde $(\varphi_1^\pm)^{-1}(x,y) = x$ e $\exists (\varphi_2^\pm)^{-1} : U_2^\pm \longrightarrow (-1,1)$, onde $(\varphi_2^\pm)^{-1}(x,y) = y$ homeomorfismos, fazendo de $(U_i^\pm, (\varphi_i^\pm)^{-1})$, com $i = 1,2$ cartas em \mathbb{S}^1 . Ainda, por $\mathbb{S}^1 = U_1^+ \cup U_1^- \cup U_2^+ \cup U_2^-$, temos que $\{(U_1^+, (\varphi_1^+)^{-1}), (U_1^-, (\varphi_1^-)^{-1}), (U_2^+, (\varphi_2^+)^{-1}), (U_2^-, (\varphi_2^-)^{-1})\}$ é um atlas de dimensão 1 em \mathbb{S}^1 .

Agora, vamos tomar $\varphi : U_1 \longrightarrow \varphi(U_1)$ e $\psi : U_2 \longrightarrow \psi(U_2)$ duas cartas locais de M , onde $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Considerando a imagem das cartas dada na Definição 3.1, podemos estabelecer a correspondência $(\varphi_1(p), \dots, \varphi_m(p)) \longleftrightarrow (\psi_1(p), \dots, \psi_m(p))$ de forma que a mudança de coordenada $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \psi(U_1 \cap U_2)$ é um homeomorfismo. Uma interpretação simbólica dessa ideia é apresentada na Figura 2.

Figura 2 – Mudança de coordenada



Fonte: Adaptado de (LIMA, 2011).

Sobre as mudanças de coordenadas, introduziremos a estrutura básica da variedade diferenciável.

Definição 3.6 (Atlas C^∞ - compatíveis). *Duas cartas (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) do espaço topológico M , tal que as mudanças $\psi \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ \psi^{-1}$ são diferenciáveis de classe C^∞ , são chamadas de cartas C^∞ - compatíveis. Dessa forma, um atlas \mathcal{A} de M é C^∞ , quando quaisquer duas de suas cartas são C^∞ - compatíveis.*

Como as mudanças de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ \psi^{-1}$ são aplicações definidas no \mathbb{R}^m , é conveniente recapitularmos a natureza da diferenciabilidade relativa a aplicações entre espaços euclidianos. Nesse sentido, seja a aplicação, definida no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^m$:

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto (f_1((x_1, \dots, x_m)), \dots, f_n((x_1, \dots, x_m)))$$

onde $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ são funções coordenadas. Então f é diferenciável em $a \in U$, se $\exists T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, tal que:

$$f(a + v) - f(a) = Tv + r(v)$$

onde $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$. Nesses termos, T é chamada de derivada de f em a , também denotada por $f'(a)$.

Como sistematizado na página 274 em (LIMA, 1999) temos que a matriz da transformação linear T , em relação as bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , é a matriz jacobiana de f no ponto a , denotada por $Jf(a)$, $Df(a)$ ou $f'(a)$, onde

$$f'(a)v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right) = (df_1(a)v, \dots, df_n(a)v)$$

Assim, se $v = e_j$, o j -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^m , temos que:

$$f'(a)e_j = \frac{\partial f}{\partial e_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right)$$

Da álgebra linear, sabemos que o vetor $f'(a)e_j$, fornece a j -ésimo coluna da matriz de $f'(a)$, nas bases canônicas, tendo a forma:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} df_1(a) \\ df_2(a) \\ \vdots \\ df_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}_{n \times m}$$

onde a i -ésima linha da matriz é a diferencial da f_i função coordenada.

Familiarizados com a matemática por trás da compatibilidade entre as cartas de uma variedade, é vantajoso refletirmos sobre essa noção, por meio do exemplo a seguir:

Exemplo 3.7. No mesmo cenário do Exemplo 3.3, tome $(GL(V), \phi_\beta)$, $(GL(V), \phi_{\beta'})$ cartas locais de $GL(V)$. Vale lembrar que $M(n, \mathbb{R})$ é isomorfo a \mathbb{R}^{n^2} , esse fato assegura $(GL(V), \phi_\beta)$, $(GL(V), \phi_{\beta'})$ serem cartas locais de $GL(V)$, além de viabilizar o trabalho com as mudanças de coordenadas no espaço das matrizes quadradas de ordem n com entrada no corpo dos números reais, sem fugir da definição dessas mudanças nos espaços euclidianos.

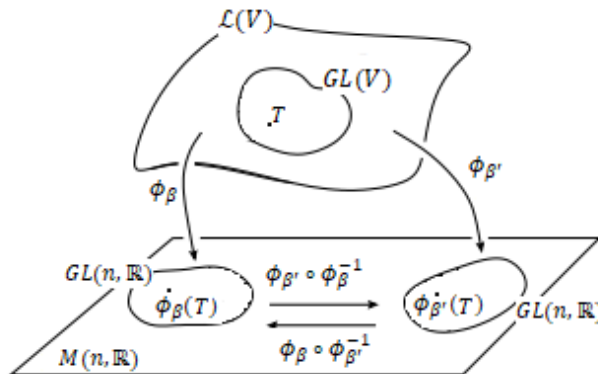
Assim, seja B a matriz de passagem da base β' para a base β . Então, $\forall A, A' \in GL(n, \mathbb{R})$, as mudanças de coordenadas entre as cartas são da forma:

$$\phi_\beta \circ \phi_{\beta'}^{-1}(A') = BA'B^{-1} = A \quad e \quad \phi_{\beta'} \circ \phi_\beta^{-1}(A) = B^{-1}AB = A'$$

As aplicações $\phi_\beta \circ \phi_{\beta'}^{-1}$ e $\phi_{\beta'} \circ \phi_\beta^{-1}$ são difeomorfismos, de acordo com os resultados do Cálculo no \mathbb{R}^n . Nessas condições, $\mathcal{A} = \{(GL(V), \phi_\beta) \mid \beta \text{ é base de } V\}$ é um atlas C^∞ para $GL(V)$.

Veja a figura abaixo:

Figura 3 – Atlas C^∞ -compatível



Fonte: Adaptado de (LIMA, 2011).

Com as discussões levantadas até o momento, poderíamos intuir que as variedades diferenciáveis são espaços topológicos munidos de um atlas C^∞ . Porém, essa definição condiciona as variedades aos sistemas de coordenadas adotados, em detrimento do espaço topológico. Desse modo, se tomássemos dois atlas distintos, tais que as cartas entre si são C^∞ - compatíveis, teríamos duas variedades diferenciáveis diferentes, cada uma definida por um dos atlas, podendo gerar ambiguidades.

A fim de evitar patologias, dado um atlas C^∞ para uma variedade M , completamo-lo com todas as cartas que não pertencem a ele, mas são C^∞ - compatíveis com suas próprias cartas. Fazendo isso, construímos um atlas maximal \mathcal{A} em M , em que se \mathcal{B} é um atlas C^∞ em M e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, então $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Assim, um atlas maximal C^∞ constitui a estrutura diferenciável de uma variedade, donde podemos definir as variedades diferenciáveis como:

Definição 3.8 (Variedades diferenciáveis). *Uma m - variedade diferenciável M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e possui um atlas maximal C^∞ de dimensão m .*

No decorrer do texto, estaremos assumindo que as variedades diferenciáveis são de classe C^∞ , exceto quando dito o contrário. E denotaremos por M^m as variedades de dimensão m .

Exemplo 3.9. *Sejam \mathbb{R} o conjunto dos números reais e a aplicação identidade $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dessa forma, $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})\}$ é um atlas C^∞ de dimensão 1, com uma única carta, que faz de \mathbb{R} uma 1-variedade C^∞ .*

Exemplo 3.10. *Sejam o espaço euclidiano \mathbb{R}^n e a aplicação identidade $\text{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dessa forma, $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ é um atlas C^∞ de dimensão n , com uma única carta, que faz de \mathbb{R}^n uma n -variedade C^∞ .*

A fim de compreendermos a importância da compatibilidade das cartas na caracterização de uma variedade, considere o exemplo a seguir:

Exemplo 3.11. *Tome as seguintes variedades diferenciáveis:*

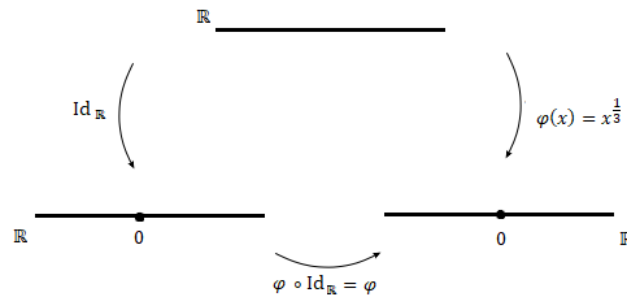
- M_1 , com o atlas $\{(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})\}$ é uma 1- variedade C^∞ e
- M_2 , com o atlas $\{(\mathbb{R}, \varphi(x) = x^{\frac{1}{3}})\}$ é uma 1- variedade C^∞ .

Afirmamos que a mudança $\varphi \circ \text{id}_{\mathbb{R}}$ não é diferenciável em 0. De fato, temos que $\varphi \circ \text{id}_{\mathbb{R}}(x) = \varphi(x)$. A derivada dessa mudança de coordenadas no ponto 0 é igual a $\varphi'(0)$. Mas como o limite a seguir não existe,

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

temos que $\varphi \circ \text{id}_{\mathbb{R}}$ não é diferenciável no ponto 0. Logo, as cartas $\{(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})\}$, $\{(\mathbb{R}, \varphi(x) = x^{\frac{1}{3}})\}$ não são C^∞ -compatíveis, donde M_1 e M_2 são variedades distintas.

Figura 4 – Cartas não C^∞ -compatível



Embora, tenhamos apontado a condição de maximalidade do atlas C^∞ para corrigir uma anomalia na definição das variedades diferenciáveis, nas páginas 63 à 66 em (LACERDA, 2007), é realizado um estudo detalhado que mostra que cada atlas sobre um espaço topológico determina uma única estrutura diferenciável, assim se tomarmos atlas compatíveis entre si, a estrutura de variedade definidas por eles será a mesma. Dessa forma, para efeitos práticos, ao construirmos uma variedade diferenciável é suficiente fornecermos um atlas C^∞ , não necessariamente, maximal.

Vejamos mais alguns exemplos que solidificam a teoria:

Exemplo 3.12. *Seja M uma m -variedade com o atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$ e $U \subseteq M$ um aberto não vazio. Assim, a partir do atlas de M , podemos construir um atlas para U , tornando esse subespaço uma variedade diferenciável. Para isso, basta tomar o seguinte atlas:*

$$\{(U \cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{U \cap U_\alpha}) \mid \alpha \in \Gamma\}$$

De fato, $U \subseteq M$ como subespaço herda as propriedades topológicas de M , ou seja, é um espaço de Hausdorff e tem base enumerável.

Por outro lado, como U e U_α são abertos de M , $\forall \alpha \in \Gamma$, temos que $U \cap U_\alpha$ é aberto de M e ainda é aberto de U , pela topologia de subespaço. Assim, a aplicação

$$\varphi_\alpha|_{(U \cap U_\alpha)} : (U \cap U_\alpha) \subseteq U \longrightarrow \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subseteq \varphi_\alpha(U)$$

é um homeomorfismo.

A compatibilidade entre as cartas desse atlas, também podem ser verificadas através do seu comportamento nos abertos de U , dados pela topologia induzida por M . Portanto, esse atlas faz de U uma variedade diferenciável, chamada de subvariedade aberta.

Exemplo 3.13. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis, com os atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$ e $\{(V_\beta, \psi_\beta) \mid \beta \in \Lambda\}$, respectivamente. Vamos construir um atlas C^∞ para o espaço $M \times N$, com a topologia produto, a fim de torná-lo uma $(m + n)$ -variedade diferenciável. Para isso, considere a aplicação $\eta_{\alpha\beta}$, para cada $\alpha \in \Gamma$ e $\beta \in \Lambda$, definida por:

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta &\longrightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (p, q) &\longmapsto (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \end{aligned}$$

O domínio dessa aplicação é um aberto do espaço $M \times N$, com a topologia produto. Analogamente, $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. A bijetividade segue imediatamente da definição. Agora, mostraremos que essa aplicação é um homeomorfismo sobre a imagem, para isso, provaremos que $\eta_{\alpha\beta}$ é contínua e é uma aplicação aberta.

- **Continuidade:** Afirmamos que a imagem inversa de um conjunto aberto é aberto no domínio. Com efeito, seja $(p, q) \in U_\alpha \times V_\beta$. Considere $A \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta)$ aberto, onde $(\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in A$. Então, existem abertos A_α, A_β , tais que $\varphi_\alpha(p) \in A_\alpha \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha)$, $\psi_\beta(q) \in A_\beta \subseteq \psi_\beta(V_\beta)$ e $A_\alpha \times A_\beta \subseteq A$. Então:

$$W = \eta_{\alpha\beta}^{-1}(A_\alpha \times A_\beta) = \varphi_\alpha^{-1}(A_\alpha) \times \psi_\beta^{-1}(A_\beta) \subseteq U_\alpha \times V_\beta$$

Como, por hipótese, as aplicações coordenadas são homeomorfismos, temos que $\varphi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$ e $\psi_\beta^{-1}(A_\beta)$ são abertos em U_α e V_β , respectivamente. Assim, pela Definição 2.10, temos que $\varphi_\alpha^{-1}(A_\alpha) \times \psi_\beta^{-1}(A_\beta) \subseteq U_\alpha \times V_\beta$ é aberto, donde segue que W é aberto.

Portanto, $\eta_{\alpha\beta}$ é contínua.

- **Aplicação aberta:** Afirmamos que a imagem direta de um conjunto aberto é aberto no conjunto imagem da aplicação. De fato, basta considerar $A \subseteq U_\alpha \times V_\beta$ aberto. Isso significa que existe A_α e A_β abertos em U_α e V_β , respectivamente, tal que $A_\alpha \times A_\beta = A$. Assim:

$$Y = \eta_{\alpha\beta}(A_\alpha \times A_\beta) = \varphi_\alpha(A_\alpha) \times \psi_\beta(A_\beta) \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta)$$

Como, por hipótese, as aplicações coordenadas são homeomorfismos, temos que $\varphi_\alpha(A_\alpha)$ e $\psi_\beta(A_\beta)$ são abertos em $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ e $\psi_\beta(V_\beta)$, respectivamente. Assim, pela Definição 2.10, temos que $\varphi_\alpha(A_\alpha) \times \psi_\beta(A_\beta)$ é aberto, donde segue que Y é aberto.

Logo, $\eta_{\alpha\beta}$ é uma aplicação aberta e contínua, donde segue que é um homeomorfismo.

Dessa forma, temos que $(U_\alpha \times V_\beta, \eta_{\alpha\beta})$ é uma carta para $M \times N$. Ainda, se tomarmos a coleção

$$\mathcal{C} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \eta_{\alpha\beta}) \mid \alpha \in \Gamma \text{ e } \beta \in \Lambda\},$$

temos,

$$M \times N = \bigcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \times V_\beta)$$

onde, claramente, os domínios das cartas locais de \mathcal{C} cobrem $M \times N$. Afirmamos que \mathcal{C} é um atlas C^∞ para $M \times N$. Para verificarmos essa proposição, basta mostrarmos que duas cartas quaisquer de \mathcal{C} são C^∞ -compatíveis entre si. Com efeito, tome $\alpha, \alpha' \in \Gamma$ e $\beta, \beta' \in \Lambda$. Assim, a interseção entre os abertos de $M \times N$ é:

$$(U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_{\alpha'} \times V_{\beta'}) = (U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \times (V_\beta \cap V_{\beta'})$$

Aplicando $\eta_{\alpha\beta}$ e $\eta_{\alpha'\beta'}$ na interseção dos abertos, temos os seguintes abertos no \mathbb{R}^{m+n} :

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta}((U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_{\alpha'} \times V_{\beta'})) &= \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \times \psi_\beta(V_\beta \cap V_{\beta'}) \\ \eta_{\alpha'\beta'}((U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_{\alpha'} \times V_{\beta'})) &= \varphi_{\alpha'}(U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \times \psi_{\beta'}(V_\beta \cap V_{\beta'}) \end{aligned}$$

Por fim, a mudança de coordenadas é dada por:

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} \circ \eta_{\alpha'\beta'}^{-1} &= (\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha'}^{-1}, \psi_\beta \circ \psi_{\beta'}^{-1}) \\ \eta_{\alpha'\beta'} \circ \eta_{\alpha\beta}^{-1} &= (\varphi_{\alpha'} \circ \varphi_\alpha^{-1}, \psi_{\beta'} \circ \psi_\beta^{-1}) \end{aligned}$$

Como as mudanças $\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha'}^{-1}$, $\varphi_{\alpha'} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ são diferenciáveis em \mathbb{R}^m e $\psi_\beta \circ \psi_{\beta'}^{-1}$, $\psi_{\beta'} \circ \psi_\beta^{-1}$ são diferenciáveis em \mathbb{R}^n , temos que $\eta_{\alpha\beta} \circ \eta_{\alpha'\beta'}^{-1}$ e $\eta_{\alpha'\beta'} \circ \eta_{\alpha\beta}^{-1}$ são diferenciáveis em \mathbb{R}^{m+n} , ou seja,

são C^∞ -compatíveis. Dessa forma, \mathcal{C} é uma atlas para o espaço $M \times N$, donde leva o nome de variedade produto. Essa construção pode ser expandida, indutivamente, para o cartesiano finito de espaços topológicos.

Exemplo 3.14. Agora discorremos sobre a construção de uma variedade quociente. Para isso, considere M^m uma variedade e $\mathcal{D}(M) = \{F : M \rightarrow M \mid F \text{ é difeomorfismo}\}$ um grupo com respeito a composição de funções (a noção de diferenciabilidade entre variedades é tratada na Seção 3.1, veja para compreender as aplicações $F \in \mathcal{D}(M)$). Tome, ainda $G \subseteq \mathcal{D}(M)$ um subgrupo.

Diremos que G age sobre M^m de maneira própria e descontínua sem pontos fixos. Se

1. Dados $x, y \in M$ com $y \notin Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$, órbita de x , então existem U e V abertos de M , contendo x e y , respectivamente, tal que $g(U) \cap V = \emptyset, \forall g \in G$.
2. Dado $x \in M$, existe U aberto de M contendo x , tal que $g(U) \cap U = \emptyset, \forall g \in G - \{\text{id}_M\}$.

Agora vamos definir a relação de equivalência \sim sobre M , da forma:

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in Gx$$

Considere $M/\sim = M/G$, com a topologia quociente.

Afirmção: O espaço M/G possui uma estrutura de m - variedade diferenciável, onde a aplicação $\pi : M \rightarrow M/G$ é um difeomorfismo local.

Com efeito, temos:

- Em primeiro lugar, π é uma aplicação aberta, pois, dado $U \subseteq M$ aberto, temos que $\pi(U) = [U] = \bigcup_{a \in U} [a] = \bigcup_{a \in U} Ga = \bigcup_{g \in G} g(U)$ aberto, uma vez que $g(U)$ é aberto, $\forall g \in G$. Dessa forma, a relação de equivalência dada por G é aberta, donde vale a Proposição 2.31.
- M/G tem base enumerável de abertos, de acordo com a Proposição 2.31.
- M/G é um espaço de Hausdorff. De fato, seja

$$R = \{(x,y) \in M \times M \mid x \sim y\},$$

tome $(x,y) \in (M \times M) - R$. Então $y \notin Gx$. Pela definição de G agir sobre M de maneira própria, temos que existem U e V abertos de M , contendo x e y , respectivamente, tal que

$g(U) \cap V = \emptyset, \forall g \in G$. Portanto, $(x,y) \in U \times V \subseteq (M \times M) - R$, donde $(M \times M) - R$ é aberto em $M \times M$ e por fim, R é fechado em $M \times M$. Então, pela Proposição 2.31, segue que M/G é um espaço de Hausdorff.

- O próximo passo será construir um atlas C^∞ para M/G . Nesse sentido, tome $[p] \in M/G$ e uma carta (U_p, φ) de M , tal que $g(U_p) \cap U_p = \emptyset, \forall g \in G - \{id_M\}$. Assim, definimos ψ_p , tal que o diagrama a seguir comute.

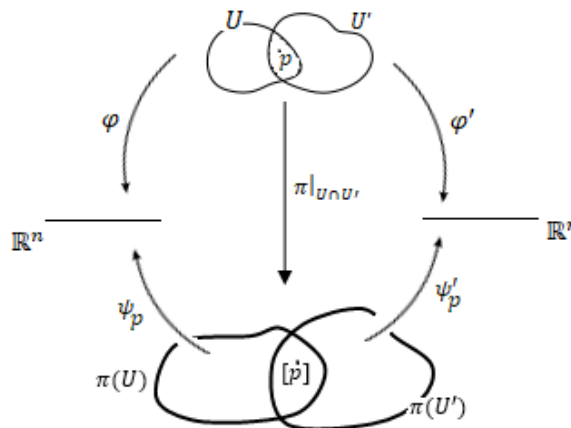
$$\begin{array}{ccc}
 U_p & \xrightarrow{\pi} & \pi(U_p) \\
 \downarrow \varphi & \swarrow \psi_p = \varphi \circ \pi|_{U_p}^{-1} & \\
 \mathbb{R}^m & &
 \end{array}$$

Afirmamos que $\pi(U_p)$ é aberto em M/G e $\psi_p = \varphi \circ \pi|_{U_p}^{-1}$ é um homeomorfismo, consequentemente, $(\pi(U_p), \psi_p)$ é uma carta para M/G . De fato, por definição, π é sobrejetora, tal como a aplicação quociente, donde segue a continuidade de π . Ainda, vimos que ela é uma aplicação aberta, dessa forma, mostraremos que π é injetora, donde existe inversa.

Com efeito, se $\pi(u) = \pi(u')$, então $u \sim u'$, donde $u = g(u')$, para algum $g \in G$. Como $u, u' \in U_p$ e $g(U_p) \cap U_p = \emptyset, \forall g \in G - \{id_M\}$, temos que $g = id_M$. Assim, $u = g(u') \Rightarrow u = id_M(u') \Rightarrow u = u'$. Portanto, π é injetiva.

Dessa forma, como π é uma bijeção contínua e uma aplicação aberta, temos que π é homeomorfismo. Assim, a afirmação segue de ψ_p ser uma composição bem definida de homeomorfismos. Observe o diagrama a seguir, o qual nos auxilia na compreensão e construção das mudanças de coordenadas nos espaços quocientes.

Figura 5 – Mudança de coordenadas na espaço quociente



Agora, basta mostrarmos que duas cartas quaisquer do atlas $\mathcal{A} = \{(\pi(U_p), \psi_p)\}_{p \in M}$ são C^∞ -compatíveis entre si. Tome duas cartas (U_p, ψ_p) e (U'_p, ψ'_p) de M/G , mostraremos que $\psi_p \circ (\psi'_p)^{-1}$ é diferenciável. Para isso precisamos analisar dois casos, o primeiro quando $p \in U \cap U'$ e o segundo quando $p \sim q$, com $p \in U$ e $q \in U'$ e $U \cap U'$ não, necessariamente, diferente de vazio. Verificando a compatibilidade das cartas independente do representante das classes de M/G .

Com efeito, no primeiro caso temos:

$$\begin{aligned} \psi_p \circ (\psi'_p)^{-1} &= (\varphi \circ \pi|_{U \cap U'}^{-1}) \circ (\varphi' \circ \pi|_{U \cap U'}^{-1})^{-1} \\ &= (\varphi \circ \pi|_{U \cap U'}^{-1}) \circ (\pi|_{U \cap U'} \circ (\varphi')^{-1}) \\ &= \varphi \circ (\pi|_{U \cap U'}^{-1} \circ \pi|_{U \cap U'}) \circ (\varphi')^{-1} \\ &= \varphi \circ (\varphi')^{-1} \text{ é diferenciável} \end{aligned}$$

O segundo caso, segue de modo similar, atentando que se $p \sim q$, então $\exists g \in G$, tal que $g(q) = p$, com $p \in U \cap g(U')$ e $q \in U'$. Veja mais detalhes nas Notas 2 páginas 1 e 2 em (GOMES, 2006).

3.1 APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Caminhando em direção a ampliação das noções e resultados estudados nos espaços euclidianos para as variedades diferenciáveis, temos:

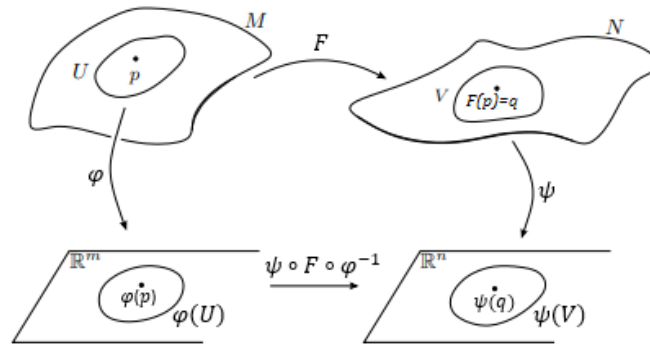
Definição 3.15. Uma aplicação $F : M^m \longrightarrow N^n$ entre variedades é diferenciável em p , se dado $p \in M$, $\exists (U, \varphi)$, (V, ψ) cartas em M e N , respectivamente, onde $p \in U$, $F(p) \in V$ e $F(U) \subseteq V$, de modo que a aplicação $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ é diferenciável em $\varphi(p)$. Ainda, F é diferenciável, se é diferenciável $\forall p \in M$.

Veja a Figura 6 a seguir, que ilustra a definição anterior.

Essa definição independe da escolha das cartas das variedades. Essa afirmação é discutida com mais detalhe nas páginas 67 e 68 em (LACERDA, 2007). Com isso, sobre a diferenciabilidade de F , podemos concluir que:

Proposição 3.16. Dizemos que F é diferenciável se, somente se, $\forall (U, \varphi)$, (V, ψ) cartas em M e N , respectivamente, onde $F(U) \subseteq V$, temos que a aplicação $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ é diferenciável.

Figura 6 – Funções diferenciáveis entre variedades



Fonte: (LIMA, 2011).

Exemplo 3.17. A aplicação coordenada relativa a qualquer carta de uma variedade é uma aplicação diferenciável. Para vermos isso, tome (U, φ) uma carta da variedade M , o aberto $\varphi(U)$ em \mathbb{R}^m e a carta $(\varphi(U), \text{id}_{\varphi(U)})$ em \mathbb{R}^m , como a aplicação $\text{id}_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_{\varphi(U)}$ é diferenciável, segue da Proposição anterior que φ é diferenciável.

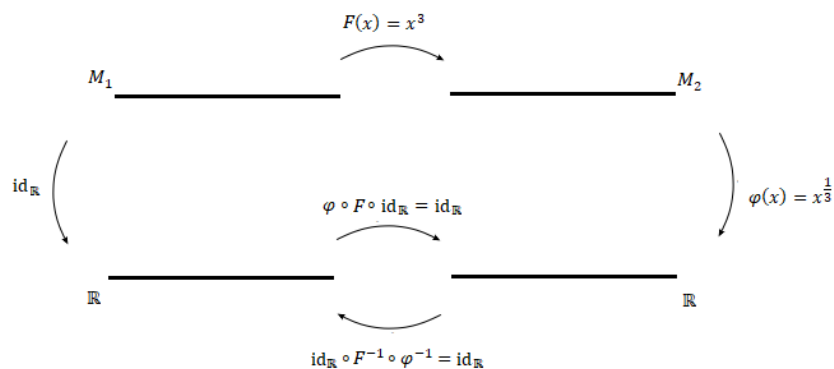
Definição 3.18. Sejam M e N variedades. A aplicação $F : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo entre variedades se F é bijetora e F e F^{-1} são diferenciáveis. Nesse caso, se existe um difeomorfismo, dizemos que M e N são difeomorfas.

Exemplo 3.19. As variedades

- M_1 , com o atlas $\{(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})\}$ e
- M_2 , com o atlas $\{(\mathbb{R}, \varphi(x) = x^{\frac{1}{3}})\}$.

são difeomorfas, pois $F : M_1 \rightarrow M_2$, da forma $F(x) = x^3$ é difeomorfismo, tal como a Definição 3.18. Veja a Figura 7:

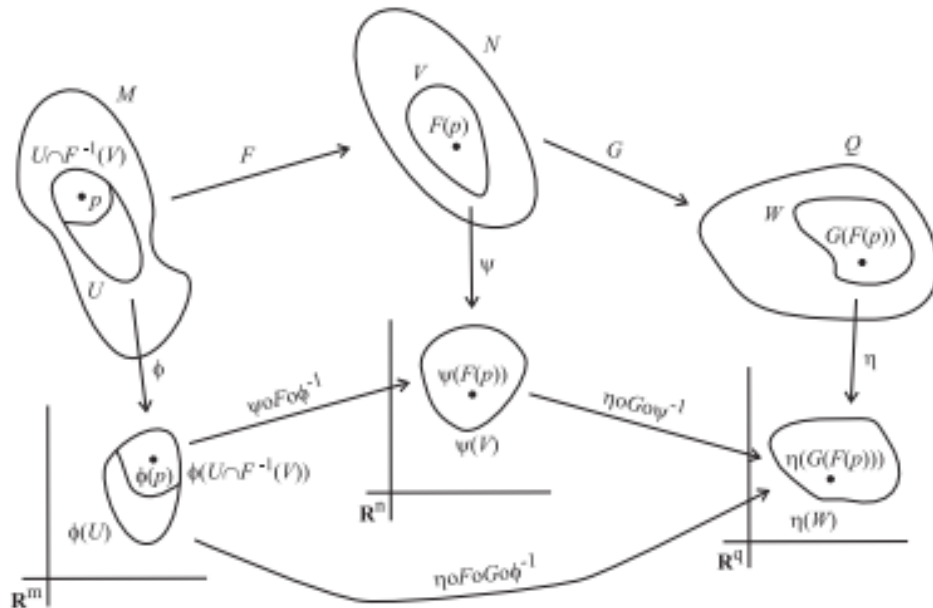
Figura 7 – Exemplo de variedades difeomorfas



Proposição 3.20. *Sejam M^m, N^n, Q^q variedades diferenciáveis. Sejam $F : M \rightarrow N$ e $G : N \rightarrow Q$ aplicações diferenciáveis em $p \in M$ e $F(p) \in N$, respectivamente. Então, $G \circ F : M \rightarrow Q$ é diferenciável em p .*

Podemos ter uma ideia da demonstração dessa proposição a partir da Figura 8:

Figura 8 – Demonstração da Proposição 3.20



Fonte: (LACERDA, 2007)

Outra questão que nos interessa é o espaço tangente de uma variedade diferenciável M . Uma maneira de defini-lo é através das curvas diferenciáveis.

Definição 3.21. *Uma curva suave em uma variedade M é uma aplicação C^∞ , dada por $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$.*

Conforme os estudos sobre Análise no \mathbb{R}^n , podemos dizer que um vetor v é tangente a uma superfície $M \subseteq \mathbb{R}^n$ em $p \in M$, se existe $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável, tais que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. O conjunto dos vetores que satisfazem essas condições para o ponto p formam o espaço tangente a superfície M em p , denotado por $T_p M$.

No caso das variedades diferenciáveis, poderíamos definir os vetores tangentes a partir de uma relação de equivalência entre curvas suaves em variedades, como é mostrado na página 71 em (LACERDA, 2007). Essa perspectiva tem viés predominantemente geométrico, porém nos interessa apresentar outra forma mais algébrica.

Para isso, considere a seguinte classe de funções

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é diferenciável}\},$$

com ela podemos definir a noção de vetor tangente a uma variedade diferenciável.

Definição 3.22. *Seja M^m uma variedade diferenciável e $p \in M$. O vetor tangente a variedade M em p é uma função $v \in \mathcal{F}(M)^*$:*

$$v : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$
2. $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

O conjunto de todos os vetores tangentes a M no ponto p é denotado por $T_p M$ e chamado de espaço tangente a M em p .

As condições da definição nos diz que o vetor tangente é um funcional linear e ainda age sobre o produto de funções em $\mathcal{F}(M)$, similarmente, a regra de Leibniz para a derivação do produto de funções diferenciáveis. Embora, a princípio, essa noção seja abstrata, podemos compreendê-la mais naturalmente, ao mostrarmos que $T_p M$ é um espaço vetorial real, gerado pela base $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$, onde $\partial_i|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$, $f \in \mathcal{F}(M)$ e (U, φ) é uma carta de M contendo p , como veremos a frente.

Proposição 3.23. *Dado $p \in M$, temos que $T_p M$ é um espaço vetorial real*

Demonstração. Como $\mathcal{F}(M)$ é um espaço vetorial e $T_p M \subseteq \mathcal{F}(M)$, mostraremos que $T_p M$ é fechado pela operação soma e multiplicação por escalar, ou seja, é um subespaço vetorial. Com efeito, dados $v, w \in T_p M$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$ e $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} (v + \lambda w)(f + \alpha g) &= v(f + \alpha g) + \lambda w(f + \alpha g) \\ &= v(f) + \alpha v(g) + \lambda w(f) + \lambda \alpha w(g) \\ &= (v + \lambda w)(f) + \alpha(v + \lambda w)(g) \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
(v + \lambda w)(fg) &= v(fg) + \lambda w(fg) \\
&= v(f)g(p) + f(p)v(g) + \lambda w(f)g(p) + \lambda f(p)w(g) \\
&= (v(f) + \lambda w(f))g(p) + f(p)(v(g) + \lambda w(g)) \\
&= (v + \lambda w)(f)g(p) + f(p)(v + \lambda w)(g)
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $v + \lambda w$ satisfaz as condições da Definição 3.22, donde $v + \lambda w \in T_p M$, $\forall v, w \in T_p M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto, $T_p M$ é um espaço vetorial real. \square

Continuando nessa direção, seja $\partial_i|_p : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$, como dada anteriormente, para $i = 1, \dots, m$. Quero mostrar que $\partial_i|_p \in T_p M$, $\forall i = 1, \dots, m$. Então, sejam $f, g \in \mathcal{F}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
((f + \lambda g) \circ \varphi^{-1})(p) &= (f + \lambda g)(\varphi^{-1}(p)) \\
&= f(\varphi^{-1}(p)) + \lambda g(\varphi^{-1}(p)) \\
&= (f \circ \varphi^{-1})(p) + (\lambda g \circ \varphi^{-1})(p) \\
&= (f \circ \varphi^{-1} + \lambda g \circ \varphi^{-1})(p)
\end{aligned}$$

assim, $(f + \lambda g) \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} + \lambda g \circ \varphi^{-1}$, onde:

$$\begin{aligned}
\partial_i|_p(f + \lambda g) &= \frac{\partial((f + \lambda g) \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1} + \lambda g \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) + \lambda \frac{\partial(g \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\
&= \partial_i|_p(f) + \lambda \partial_i|_p(g)
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\partial_i|_p$ é linear, $\forall i = 1, \dots, m$. Ainda,

$$\begin{aligned}
\partial_i|_p(fg) &= \frac{\partial((fg) \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1}) \cdot (g \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \cdot (g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) + (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial(g \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \\
&= \partial_i|_p(f)g(p) + f(p)\partial_i|_p(g)
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\forall i = 1, \dots, m$, $\partial_i|_p$ satisfaz a segunda condição da Definição 3.22.

Portanto, $\partial_i|_p \in T_pM$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Agora mostraremos que $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ é uma base para T_pM , onde $\partial_i|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$, $f \in \mathcal{F}(M)$ e (U, φ) é uma carta de M contendo p . Para isso precisaremos do seguinte Lema:

Lema 3.24. *Sejam $p \in M$ e uma carta (U, φ) de M contendo p . Então, existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p , de modo que para cada $f \in \mathcal{F}(M)$, $\exists f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}(M)$, funções, tais que:*

1. $f_i(p) := \partial_i|_p(f)$;
2. $\varphi_i := \pi_i \circ \varphi$;
3. $f|_V = f(p) + \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i - \varphi_i(p))$.

sendo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ o homeomorfismo e a i -ésima projeção coordenada $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\pi_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$.

Veja sua demonstração na página 78 em (LACERDA, 2007). Por fim, como queríamos:

Proposição 3.25. *Sejam M uma variedade e $p \in M$. Então, $\{\partial|_p\}_{i=1}^m$ é uma base para T_pM , para toda carta (U, φ) de M contendo p . Assim, os vetores tangentes v a M no ponto p , se exprimem como:*

$$v = \sum_{i=1}^m v(\varphi_i(p)) \partial_i|_p,$$

$\forall v \in T_pM$. Ainda, temos que $\dim(T_pM) = m$.

Demonstração. Sabemos que a função $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável, $\forall j = 1, \dots, m$.

Ainda, $\forall j$, temos:

$$\partial_i|_p(\varphi_j) = \frac{\partial(\varphi_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

Assim, se $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, são tais que $\sum_{i=1}^m a_i \partial_i|_p = 0$, então

$$0 = \left(\sum_{i=1}^m a_i \partial_i|_p \right) (\varphi_j) = \sum_{i=1}^m a_i \partial_i|_p(\varphi_j) = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i}(\varphi(p)) = a_j,$$

$\forall j = 1, \dots, m$. De onde, concluímos que $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ é linearmente independente.

Falta mostrarmos que $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ gera o espaço T_pM . Para isso, tome $v \in T_pM$ e $V \subseteq U$ um aberto contendo p , dada como no Lema anterior. Para uma $f \in \mathcal{F}(M)$, sejam $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}(V)$, onde $f_i(p) = \partial_i|_p(f)$ e

$$f|_V = f(p) + \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i - \varphi_i(p))$$

Ao aplicarmos v em f , temos:

$$v(f) = v(f|_V) = \sum_{i=1}^m f_i(p)v(\varphi_i) = \sum_{i=1}^m v(\varphi_i)\partial_i|_p(f) = \left(\sum_{i=1}^m v(\varphi_i)\partial_i|_p \right) (f)$$

Sabendo que a igualdade acima é válida para todo $f \in \mathcal{F}(M)$, temos que:

$$v = \sum_{i=1}^m v(\varphi_i)\partial_i|_p$$

Logo, $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ gera o espaço T_pM . □

Proposição 3.26. *Os espaços T_pU e T_pM são isomorfos, sendo $U \subseteq M$ um aberto da variedade M contendo p .*

Para um demonstração detalhada desse resultado, veja na página 76 em (LACERDA, 2007).

3.2 CAMPOS VETORIAIS

Para iniciarmos nosso estudo sobre os campos vetoriais no contextos das variedades, precisamos definir um conjunto que expresse os vetores tangentes em cada ponto da variedade. Nesse sentido, temos o **fibrado tangente**, dado por:

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

em que seus elementos são da forma $(p, v) := v_p$, onde $v_p \in T_pM$.

Tal como é definido, o fibrado tangente induz uma projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$, dada por $\pi(v_p) = p$. Nessas condições, $\forall p \in M$, chamamos $\pi^{-1}(p) = T_pM$ de **fibra** sobre p .

Com essas considerações, podemos definir os campos vetoriais como:

Definição 3.27. *Um campo vetorial é uma função*

$$X : M \rightarrow TM$$

$$p \mapsto X(p) := X_p = v_p$$

onde $v_p \in T_pM$, $\forall p \in M$, tal que o diagrama a seguir comute.

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{X} & TM \\
& \searrow \text{id}_M & \downarrow \pi \\
& & M
\end{array}$$

De acordo as discussões realizadas na página 26 em (MATHEUS, 2014), podemos restringir a noção de fibrado tangente à variedades para abertos na variedade diferenciável, uma vez que $T_p U \approx T_p M$.

Definição 3.28 (Campo vetorial diferenciável). *Seja M uma variedade diferenciável. Um campo vetorial diferenciável definido em $U \subseteq M$ aberto é uma aplicação diferenciável $X : U \rightarrow TM$, tal que $X_q = X(q) \in T_q M$, $\forall q \in U$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(U)$ o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em U .*

Teorema 3.29. *Se (U, φ) é uma carta em M e $X : U \rightarrow TM$ é um campo vetorial, então, $\forall p \in M$, as afirmações abaixo são equivalentes:*

1. X é diferenciável,
2. $X = \sum_{i=1}^n X_p(\varphi_i) \partial_i|_p$, com $X_p(\varphi_i) \in \mathcal{F}(U)$ e $i = 1, \dots, n$.
3. $X_p(f) \in \mathcal{F}(U)$, $\forall f \in \mathcal{F}(U)$.

Exemplo 3.30. *Seja $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ uma 3-variedade. Considere:*

$$X_{(x,y,w,z)} = -y \frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y,w,z)} + x \frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y,w,z)} + z \frac{\partial}{\partial w}|_{(x,y,w,z)} - w \frac{\partial}{\partial z}|_{(x,y,w,z)} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$$

se tomarmos $(1,0,0,0) \in \mathbb{S}^3$, $f \in \mathcal{F}(U)$ arbitrário, onde $U \subseteq \mathbb{S}^3$ aberto, temos que:

$$\begin{aligned}
X_{(1,0,0,0)}(f) &= -0 \frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,0,0,0)} + 1 \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,0,0,0)} + 0 \frac{\partial f}{\partial w}|_{(1,0,0,0)} - 0 \frac{\partial f}{\partial z}|_{(1,0,0,0)} \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,0,0,0)} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)
\end{aligned}$$

Como a imagem dos elementos da variedade pelos campos vetoriais são vetores tangentes no fibrado, é intuitivo inferirmos que o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis se comporta de modo semelhante as condições da definição 3.22. De fato, como podemos ver nas discussões feitas nas páginas 83 e 84 em (LACERDA, 2007), das quais nos interessa o seguinte resultado:

Proposição 3.31. *Se X, Y são campos vetoriais diferenciáveis em M e $f \in \mathcal{F}(M)$, então as funções $X + Y : M \rightarrow TM$, tal que $(X + Y)(p) = X(p) + Y(p)$ e $fX : M \rightarrow TM$, tal que $(fX)(p) = f(p)X(p)$ são campos vetoriais diferenciáveis.*

Os campos vetoriais tem uma íntima conexão com as equações diferenciais, que pode ser observada por meio dos fluxos associados a eles. Para compreendermos essa noção, precisamos introduzir a noção de curva integral.

Definição 3.32. *Seja X um campo de vetores de uma variedade diferenciável M e uma curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$. Se $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}, \forall t \in I$ um intervalo real, então α é chamada de curva integral do campo X .*

Estabelecendo essa conexão, nas Notas 4, páginas 2 e 3 em (GOMES, 2006) traz:

Teorema 3.33. *Seja X um campo de vetores de M . Então $\forall p \in M$, existe $I_p \subset \mathbb{R}$ um intervalo real e uma curva $\gamma_p : I_p \rightarrow M$, tal que:*

1. $0 \in I_p$ e $\gamma_p(0) = p$;
2. γ_p é uma curva integral de X ;
3. I_p é um intervalo maximal, isto é, se $\exists \sigma : I \rightarrow M$ que satisfaz (1) e (2), então $I \subset I_p$ e $\sigma = \gamma_p|_I$.

Sabendo da existência das curvas integrais definidas em intervalos maximais, temos:

Teorema 3.34. *Seja $D_t = \{p \in M \mid t \in I_p\}$ o conjunto para cada $t \in \mathbb{R}$, e munidos das hipóteses do Teorema 3.33, temos que $\forall p \in M$, existe $U \subseteq M$ aberto contendo p e $\epsilon > 0$ real, tais que:*

$$\begin{aligned} \Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times (U \subseteq D_t) &\longrightarrow M \\ (t, q) &\longmapsto \Psi(t, q) := \gamma_q(t) \end{aligned}$$

está bem definida e é de classe C^∞ .

Nesses termos, podemos indicar

$$\begin{aligned} X_t : U &\longrightarrow M \\ q &\longmapsto X_t(q) := \Psi(t, q) \end{aligned}$$

Assim, chamamos X_t de fluxo local de X . Quando a Ψ satisfaz o Teorema 3.34 para todo o conjunto $\mathbb{R} \times D_t$, podemos dizer que X é um campo vetorial completo. Nesses termos, $\{X_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ é chamado de fluxo do campo de vetores X e segundo o Apêndice A, página 347 em (MARTINS, 2016), X_t satisfaz:

Proposição 3.35. *Seja X uma campo de vetores em uma variedade diferenciável M . Dados $p \in M$, e $t, s \in \mathbb{R}$, temos:*

1. $X_0 = \text{id}$;
2. $X_{-t} = (X_t)^{-1}$;
3. *As trajetórias de X e sX coincidem e seus fluxos satisfazem $(sX)_t = X_{st}$;*
4. $X_{t+s} = X_t \circ X_s = X_s \circ X_t$;
5. $\frac{d}{dt}(X_t(p)) = X(X_t(p))$.

Essas propriedades serão úteis no estudo das aplicações exponenciais que relacionam os grupos às álgebras de Lie. Além disso, do ponto de vista algébrico, podemos acentuar uma importante natureza do conjunto dos campos vetoriais. Veremos com mais detalhe no Exemplo 4.8, que o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em U , denotado por $\mathfrak{X}(U)$, sendo um espaço vetorial, admite um colchete binário, tal que $\mathfrak{X}(U)$ tenha uma estrutura de álgebra de Lie.

3.3 APLICAÇÃO DERIVADA

Sabemos da álgebra linear que o espaço vetorial $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ é formado pelas matrizes correspondentes as transformações lineares $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, nas bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n . Sobre esse espaço é definida a aplicação derivada, conhecida do cálculo para aplicações diferenciáveis de várias variáveis por:

$$\begin{aligned} F' & : U \longrightarrow M_{n \times m}(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto F'(x) \end{aligned}$$

onde $F'(x)$ é a derivada de F em $x \in U$, desde que F seja diferenciável no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Buscando expandir essas noções para o contexto das variedades diferenciáveis, iniciamos definindo a derivada de aplicações diferenciáveis entre variedades num dado ponto.

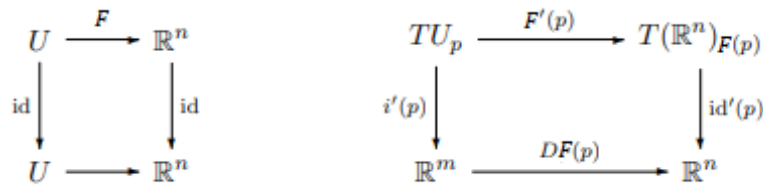
Definição 3.36. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e a aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$. A derivada de F em p é a aplicação $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, tal que $\forall v \in T_p M$, $dF_p(v)$ é um vetor tangente de $T_{F(p)} N$ que age sobre $\mathcal{F}(N)$, da seguinte forma:*

$$[dF_p(v)](g) = v(g \circ F)$$

para cada $g \in \mathcal{F}(N)$. Da forma que é definida, a chamamos de diferencial da aplicação diferenciável F em p .

Exemplo 3.37. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e a aplicação diferenciável $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, a aplicação derivada no contexto das variedades diferenciáveis, a saber, $dF_p : T_p U \rightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^n$, se reduz aos trabalhos do cálculo no \mathbb{R}^n . Assim, tomando $T_p U = \mathbb{R}^m$ e $T_{F(p)} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, temos que a derivada de F em $p \in U$ é a matriz jacobiana da aplicação $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Veja o diagrama a seguir:

Figura 9 – Derivada de uma aplicação



Fonte: (LIMA, 2011)

Como é de se esperar, a aplicação dF_p entre os espaços vetoriais $T_p M$ e $T_{F(p)} N$ é linear, conforme a proposição a seguir:

Proposição 3.38. Sejam M e N variedades diferenciáveis e a aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$, então $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ é linear, $\forall p \in M$.

Demonstração. De fato, dados $v, w \in T_p M$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomando arbitrariamente $g \in \mathcal{F}(N)$, temos:

$$\begin{aligned}
 dF_p(v + \lambda w)(g) &= (v + \lambda w)(g \circ F) \\
 &= v(g \circ F) + \lambda w(g \circ F) \\
 &= dF_p(v)(g) + \lambda dF_p(w)(g) \\
 &= [dF_p(v) + \lambda dF_p(w)](g)
 \end{aligned}$$

□

Como dF_p é uma transformação linear, podemos determinar sua matriz em relação a um par de bases fixadas. Nosso interesse está na matriz dada pelas bases de $T_p M$ e $T_{F(p)} N$, determinadas pela cartas locais de M e N . Nesse caminho, temos:

Proposição 3.39. *Sejam $F : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável e $p \in M$. Tome as cartas locais (U_p, φ) em M e $(V_{F(p)}, \psi)$ em N . Dadas as bases $\{\partial_j|_p\}_{j=1}^m$ e $\{\tilde{\partial}_i|_{F(p)}\}_{i=1}^n$ de T_pM e $T_{F(p)}N$, determinadas, respectivamente, por (U, φ) e (V, ψ) . Então, a matriz de dF_p com relação a estas bases é a matriz jacobiana de $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ em $\varphi(p)$.*

Considerando a aplicação diferenciável $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_p) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V_{F(p)}) \subseteq \mathbb{R}^n$ e a i -ésima projeção coordenada $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, tomamos

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_i := \pi_i \Big|_{\psi(V_{F(p)})} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}.$$

Nesses termos, nas páginas 77 à 79 em (LACERDA, 2007), é feita a construção da demonstração do resultado anterior, onde, $\forall j = 1, \dots, m$, obtemos que:

$$dF_p(\partial_j|_p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_i}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} \cdot \tilde{\partial}_i|_{F(p)}$$

Dessa forma, a matriz de dF_p nas bases indicadas na Proposição 3.39 é a matriz $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ com as entradas

$$a_{ij} = \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_i}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)}$$

para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

No contexto das variedades, podemos trabalhar de modo semelhante a regra da cadeia para a diferencial da composição de aplicações diferenciáveis entre espaços euclidianos. Em primeiro momento, tome M , N e Q variedades diferenciáveis e as aplicações diferenciáveis $F : M \rightarrow N$, $G : N \rightarrow Q$ e $G \circ F : M \rightarrow Q$. Nos interessa saber a forma de $d(G \circ F)_p : T_pM \rightarrow T_{G \circ F(p)}Q$. Por definição, temos as aplicações:

$$\begin{aligned} dF_p : T_pM &\longrightarrow T_{F(p)}N & dG_{F(p)} : T_{F(p)}N &\longrightarrow T_{G(F(p))}Q \\ v &\longmapsto dF_p(v) & dF_p(v) &\longmapsto dG_{F(p)}(dF_p(v)) \end{aligned}$$

A partir disso, afirmamos que $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$. Com efeito, dado $v \in T_pM$, $\forall f \in \mathcal{F}(Q)$, temos:

$$d(G \circ F)_p(v)(f) = v(f \circ G \circ F) = dF_p(v)(f \circ G)$$

Por outro lado, temos (para facilitar a visualização considere $dF_p(v) = v_F$):

$$\begin{aligned}
 [dG_{F(p)} \circ dF_p](v)(f) &= dG_{F(p)} \circ (dF_p(v))(f) \\
 &= dG_{F(p)}((dF_p(v)))(f) \\
 &= dG_{F(p)}(v_F)(f) \\
 &= (v_F)(f \circ G) \\
 &= dF_p(v)(f \circ G)
 \end{aligned}$$

Como queríamos, $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \forall v \in T_pM$ e $\forall f \in \mathcal{F}(Q)$.

Com a definição da derivada de F em um ponto, nos questionamos como se é definida a aplicação derivada, chamada de diferencial de F . Para isso, tome $(p, v) \in TM$. Podemos definir a aplicação derivada como:

$$\begin{aligned}
 dF &: TM \longrightarrow TN \\
 (p, v) &\longmapsto (F(p), dF_p(v))
 \end{aligned}$$

Já que, $v \in T_pM$, temos que $dF_p(v) \in T_{F(p)}N$, onde $dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$.

3.4 ALUSÃO AS SUBVARIÉDADES DIFERENCIÁVEIS

Agora, introduziremos as caracterizações das subvariedades imersas, mergulhadas e por fim, das subvariedades regulares, as quais desempenham papel importante no estudo dos subgrupos de Lie.

Definição 3.40. *O posto de uma aplicação diferenciável $F : M^m \longrightarrow N^n$, no ponto $p \in M$ é igual a dimensão da imagem de $dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$.*

Definição 3.41 (Imersão em variedades). *Seja $F : M^m \longrightarrow N^n$, com $m \leq n$ uma aplicação C^∞ entre variedades. Se o posto de F em $p \in M$ é igual a $m, \forall p \in M$, então dizemos que F é uma imersão .*

Compreenda melhor essas noções por meio do exemplo:

Exemplo 3.42. *Considere a aplicação:*

$$\begin{aligned}
 F &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (x, y) &\longmapsto (x, y, 3)
 \end{aligned}$$

onde $f_1(x,y) = x$, $f_2(x,y) = y$ e $f_3(x,y) = 3$. Sabemos que

$$dF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, vemos que a matriz da aplicação $dF_{(x,y)}$ tem duas colunas linearmente independente, donde podemos afirmar que o posto de F é igual a 2, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dessa forma, pela Definição 3.41, temos que F é uma imersão.

É importante acentuar que a ocorrência da hipótese exigida na Definição 3.41 é equivalente a afirmarmos que a aplicação dF_p é injetora, $\forall p \in M$. Isso se faz possível, a medida que podemos entender a aplicação derivada de F em p sob a óptica da análise real em multivariáveis, já que a matriz de dF_p , nas bases naturais dos espaços $T_p M$ e $T_{F(p)} N$ é uma matriz em $M_{n \times m}(\mathbb{R})$, como é mostrado na Proposição 3.39.

Com a noção de imersão, podemos iniciar a construção das subvariedades. Para isso, tome $F : M^m \rightarrow N^n$ uma imersão injetora entre variedades. É possível mostrar que $F(M)$ admite uma estrutura de variedade diferenciável, independente de N . Isso se dá, considerando:

1. A topologia de $F(M)$ dado por $\tau : \{A \subseteq F(M) \mid F^{-1}(A) \text{ é aberto de } M\}$. Nesses termos, $F : M \rightarrow F(M)$ é um homeomorfismo.
2. O atlas $\mathcal{A} = \{(F(U_p), \varphi \circ F^{-1}|_{F(U_p)})\}$, definido pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U_p \subseteq M & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{F^{-1}} \end{array} & \pi(U_p) \subseteq N \\ \downarrow \varphi & \swarrow \varphi \circ F^{-1}|_{F(U_p)} & \\ \varphi(U_p) \subseteq \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

Deixamos a cargo do leitor verificar que τ é uma topologia e a coleção \mathcal{A} é um atlas C^∞ que determina uma estrutura de variedade diferenciável para $F(M)$.

Definição 3.43. Considere $F : M^m \rightarrow N^n$ uma imersão injetora entre variedades e $F(M)$ satisfazendo as hipóteses anteriores (1) e (2), nesses termos $F(M)$ é chamada de **subvariedade imersa** em N . Ainda, $F(M)$ é dita uma **subvariedade mergulhada** em N , quando F é um homeomorfismo sobre sua imagem, com $F(M)$ subespaço topológico de N .

Seja a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $F(x,y) = (x,y,3)$. É fácil ver, com o exemplo 3.42, que F é uma imersão injetora. Ainda, do cálculo no \mathbb{R}^n , $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow F(\mathbb{R}^2)$ é contínua, assim como F^{-1} . Logo, $F(\mathbb{R}^2)$ é uma subvariedade mergulhada.

Em algumas abordagens, os subgrupos de Lie são definidos, naturalmente, a partir das subvariedades regulares. Porém, nossas referências mostram uma definição munida das propriedades topológicas do subgrupo de um grupo de Lie fechado, a qual optamos, uma vez que caminha mais diretamente ao objetivo desse trabalho. Dessa forma, encerramos essa seção apresentando as subvariedades regulares, a título de curiosidade.

Definição 3.44. *Seja N^n uma variedade diferenciável e $M \subseteq N$ subespaço topológico. Se M é tal que, dado $p \in M$, $\exists (U_p, \varphi)$ de N , onde:*

1. $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$;
2. $\varphi(U_p) = B_\epsilon^n(0)$ (Bola aberta em \mathbb{R}^n centrada em 0 de raio ϵ);
3. $\varphi(U_p \cap M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in B_\epsilon^n(0) \mid x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

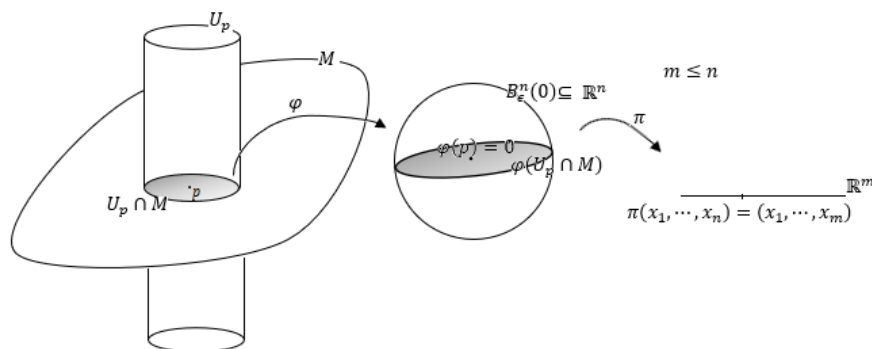
Nessas condições, M é uma m -variedade diferenciável, com o atlas C^∞ dado por

$$\mathcal{A} = \{(U \cap M, \pi \circ \varphi|_{U \cap M})\},$$

chamada de subvariedade regular de M .

Compreenda a ideia das condições da definição no diagrama a seguir:

Figura 10 – Hipóteses sobre a estrutura da subvariedade regular



Fonte: Autor

Como podemos observar, as subvariedades definidas nessa seção são obtidas a partir de aplicações com posto constante. Dessa forma, o seguinte resultado é útil para determinarmos subvariedades regulares.

Proposição 3.45. *Seja $F : N^n \rightarrow L^l$ uma aplicação C^∞ , entre variedades diferenciáveis e $q \in F(N)$. Considere $M := F^{-1}(q)$. Se F tem posto l sobre M , então M é uma subvariedade regular de N de dimensão $m = n - l$.*

Mais ainda, o espaço tangente de $p \in M$ é dado por $T_p M = \ker dF_p$.

Veja detalhes da construção dessa proposição nas Notas 3, página 4 em (GOMES, 2006). Uma versão desse resultado é apresentada no Teorema 7.11, na página 186 em (BAKER, 2002), porém, equivalentemente, ele substitui a hipótese do posto constante igual a n , para a de dF_p ser sobrejetiva $\forall p \in S$ e conclui que $S \subset M$ é uma subvariedade, mas não a caracteriza como regular e afirma que $\ker dF_p = T_p M$. Usaremos esse fato, para mostrarmos a condição de subvariedade dos subgrupos de Lie.

4 GRUPOS DE LIE

Os grupos de Lie, em geral, são objetos geométricos não-lineares. Dessa forma, algo notável e fundamental na teoria de Lie encontra-se no fato desses grupos estarem associados a certas álgebras, as quais, por meio de sua representação no espaço das transformações lineares, podem transferir problemas de natureza não linear para problemas típicos da álgebra linear. Por definição, os grupos de Lie são variedades diferenciáveis dotadas de uma estrutura de grupo, cuja operação multiplicação e inversão são infinitamente diferenciáveis, enquanto as álgebras de Lie são espaços vetoriais, munidos de uma operação binária, chamada comutador ou colchete de Lie, que atende a bilinearidade, a alternatividade e a identidade de Jacob. Nesse sentido, buscaremos explorar algumas das ligações entre a estrutura do grupo de Lie com sua relativa álgebra de Lie, e vice-versa, conhecendo os resultados que esses intercâmbios fornecem sobre esses objetos.

Definição 4.1 (Grupo de Lie). *Sejam G um conjunto e as aplicações:*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G & i : G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh & g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

Dizemos que G é um grupo de Lie se:

1. (G, \cdot) é um grupo;
2. G tem uma estrutura subjacente de variedade diferenciável;
3. As aplicações \cdot e i são diferenciáveis.

Com o conhecimento de todos os subsídios necessários para um conjunto ser um grupo de Lie, solidificaremos a compressão dessa noção apresentando alguns exemplos.

Exemplo 4.2. *Seja \mathbb{R}^n e a operação soma “+” e subtração “−” usuais do espaço euclidiano. É fácil ver que $(\mathbb{R}^n, +)$ é um grupo. Vimos do Exemplo 3.9 que o espaços euclidianos n -dimensionais admitem uma estrutura diferenciável que os tornam variedades diferenciáveis. Trivialmente, com as operações soma e subtração são lineares, temos que são diferenciais. Portanto, \mathbb{R}^n é uma grupo de Lie.*

Exemplo 4.3. Seja $GL(n, \mathbb{R})$ o espaço das matrizes $n \times n$ invertíveis com entrada no corpo dos números \mathbb{R} . Sabemos, pelos fundamentos de álgebra, que o conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ munido do produto usual entre matrizes é um grupo, chamado grupo linear geral.

Como vimos no Exemplo 3.3, $GL(n, \mathbb{R})$ é um aberto de \mathbb{R}^{n^2} e pelo Exemplo 3.12, temos que é uma subvariedade aberta. Dessa forma, $GL(n, \mathbb{R})$ admite estrutura de variedade diferenciável.

Ainda, como a aplicação em $GL(n, \mathbb{R})$ provêm do produto usual de matrizes, temos que ela é diferenciável. Com efeito, se tomarmos $X, Y \in GL(n, \mathbb{R})$, dadas por $X = (x_{ij})$ e $Y = (y_{ij})$, tais que $i, j = 1, \dots, n$, temos que $Z = XY = (z_{ij})$, onde:

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik} y_{kj}$$

é um polinômio de grau dois nas variáveis x_{ij} e y_{ij} , sendo, portanto, diferenciável.

Por fim, como os elementos de $GL(n, \mathbb{R})$ são invertíveis, isto é, $\det X \neq 0, \forall X \in GL(n, \mathbb{R})$, temos que existe $X^{-1} = \frac{C^T}{\det X}$, onde C^T é a transposta da matriz de cofatores C de X . Dessa forma, as entradas de X^{-1} são polinômios, donde a aplicação $i : X \mapsto X^{-1}$ é diferenciável.

Logo, $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Conhecida a estrutura básica de um grupo de Lie, podemos iniciar os estudos sobre esse objeto. Para começar, iremos explorar a estrutura subjacente de variedades, definir e construir alguns resultados sobre as aplicações translações e os campos invariantes, os quais nos ajudaram a criar o primeiro elo de ligação entre o grupo e a álgebra de Lie. Assim, temos:

Definição 4.4. Seja G um grupo de Lie, tome $g \in G$. as translações à direita, à esquerda e a conjugação são definidas, respectivamente, por:

$$\begin{array}{lll} D_g : G \longrightarrow G & E_g : G \longrightarrow G & C_g : G \longrightarrow G \\ h \longmapsto D_g(h) = hg & h \longmapsto E_g(h) = gh & h \longmapsto C_g(h) = ghg^{-1} \end{array}$$

As aplicações da definição anterior são, claramente, diferenciáveis. Ainda, tanto as translações à esquerda e à direita, quanto a conjugação são difeomorfismos, uma vez que:

- $E_g \circ E_{g^{-1}} = \text{id}$
- $D_g \circ D_{g^{-1}} = \text{id}$

$$\bullet C_g \circ C_{g^{-1}} = (E_g \circ D_{g^{-1}}) \circ (D_g \circ E_{g^{-1}}) = \text{id}$$

Por meio das translações, podemos definir o fibrado tangente de um grupo de Lie. Afirmamos que TG é difeomorfo ao produto cartesiano entre G e T_1G , onde $1 \in G$ a identidade do grupo G . Com efeito, tome $g \in G$ arbitrário, então $d(E_g)_1 : T_1G \rightarrow T_gG$ é a diferencial de E_g em 1, a qual é um isomorfismo, visto que E_g é um difeomorfismo. Dessa forma, a aplicação

$$\begin{aligned} G \times T_1G &\longrightarrow TG \\ (g, v) &\longmapsto d(E_g)_1(v) \end{aligned}$$

é uma bijeção, com a inversa:

$$\begin{aligned} TG &\longrightarrow G \times T_1G \\ v &\longmapsto (\pi(v), d(E_g)_{\pi(v)^{-1}}(v)) \end{aligned}$$

onde $\pi : TG \rightarrow G$ é a projeção canônica. Escrivendo essas aplicações a partir da sua diferencial parcial, podemos mostrar que elas são diferenciáveis, como queríamos. Um raciocínio similar é feito para a translação a direita.

Outra noção importante para nossos estudos é a de campo invariante.

Definição 4.5. *Seja G um grupo de Lie. Dizemos que um campo de vetores X em G é:*

- **invariante à direita**, se $\forall g, h \in G$, temos que $d(D_g)_h(X(h)) = X(hg)$, em outras palavras, $d(D_g) \circ X = X \circ D_g$ para todo $g \in G$.
- **invariante à esquerda**, se $\forall g, h \in G$, temos que $d(E_g)_h(X(h)) = X(hg)$, em outras palavras, $d(E_g) \circ X = X \circ E_g$ para todo $g \in G$.

Iremos denotar por Inv^d o conjunto de todos os campos invariantes à direita de G e Inv^e o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda de G . Esses conjuntos são subespaços vetoriais reais do espaço de todos os campos invariantes de G . Com efeito, tome Inv^e (o mesmo raciocínio vale para Inv^d). Sejam $X, Y \in \text{Inv}^e$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $g, h \in G$ arbitrários, então

$$(X + \lambda Y)(gh) = X(gh) + \lambda Y(gh)$$

como $X, Y \in \text{Inv}^e$,

$$X(gh) + \lambda Y(gh) = d(E_g)_h X(h) + \lambda d(E_g)_h Y(h)$$

visto que $d(E_g)_h$ é linear, temos:

$$d(E_g)_h X(h) + \lambda d(E_g)_h Y(h) = d(E_g)_h (X(h) + \lambda Y(h))$$

como $g, h \in G$ são tomados arbitrariamente, segue que

$$(X + \lambda Y) = d(E_g)_h (X + \lambda Y)$$

portanto $X + \lambda Y \in \text{Inv}^e$. Logo, Inv^e é um espaço vetorial real.

Os espaços Inv^e e Inv^d são isomorfos a T_1G , uma vez que existe um isomorfismo que associa cada vetor de T_1G a um único campo invariante à esquerda (ou à direita) em G . Construiremos um isomorfismo entre os espaços Inv^e e T_1G , para isso tome a aplicação linear:

$$\begin{aligned} T &: \text{Inv}^e \longrightarrow T_1G \\ X &\longmapsto X(1) \end{aligned}$$

a qual é linear, dada as operações soma e multiplicação por função escalar nos campos vetoriais. Agora, definiremos uma aplicação \tilde{v} , que será auxiliar para determinarmos a inversa de T . Assim, dado $v \in T_1G$, $\forall g \in G$, $d(E_g)_1(v) \in T_gG$, definimos:

$$\begin{aligned} \tilde{v} &: G \longrightarrow TG \\ g &\longmapsto d(E_g)_1(v) \end{aligned}$$

dessa forma, \tilde{v} é um campo vetorial, tal que $\tilde{v}(1) = v$, conseqüentemente,

$$\tilde{v}(g) = d(E_g)_1(v) = d(E_g)_1(\tilde{v}(1))$$

donde temos que $\tilde{v} \in \text{Inv}^e$.

Afirmamos que a aplicação:

$$\begin{aligned} F &: T_1G \longrightarrow \text{Inv}^e \\ v &\longmapsto \tilde{v} \end{aligned}$$

é a inversa de T , ou seja, $F = T^{-1}$. Com efeito, dados $v \in T_1G$, $X \in \text{Inv}^e$ e $g \in G$, temos:

$$\begin{aligned}
((F \circ T)(X))(g) &= (F(T(X)))(g) \\
&= (F(X(1)))(g) \\
&= (\widetilde{X(1)})(g) \\
&= d(E_g)_1(X(1)) \\
&= X(g)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(T \circ F)(v) &= T(F(v)) \\
&= T(\tilde{v}) \\
&= \tilde{v}(1) \\
&= v
\end{aligned}$$

Como queríamos, existe uma transformação linear bijetora entre os espaços Inv^e e T_1G , desse modo esses espaços são isomorfos. Com um raciocínio análogo, vemos que Inv^d e T_1G são isomorfos. Dessa forma, tais campos são facilmente determinados pelos vetores tangentes a identidade do grupo. Os campos invariantes a direita e a esquerda são representado por X^d e X^e , onde $X^d(g) = d(D_g)_1X(1)$ e $X^e(g) = d(E_g)_1X(1)$.

Exemplo 4.6. *Seja $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ o grupo linear geral. Fixemos $g \in G$, as translações à direita e à esquerda são transformações lineares restritas a $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. Num primeiro momento cabe mostrarmos que $T_1G = M(n, \mathbb{R})$. É claro que $T_1G \subset M(n, \mathbb{R})$. Resta mostrar que $M(n, \mathbb{R}) \subset T_1G$. Para isso, tome $A \in M(n, \mathbb{R})$ arbitrário. Seja a curva:*

$$\begin{aligned}
\gamma &: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M(n, \mathbb{R}) \\
t &\longmapsto e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (tA)^n
\end{aligned}$$

Dessa forma, a aplicação está bem definida, uma vez que a série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (tA)^n$ converge sempre que $\|A\| < \infty$, sendo $\|A\|$ a norma euclidiana ao identificarmos $A \in M(n, \mathbb{R})$ com um vetor em \mathbb{R}^{n^2} , veja Seção 2.1 em (BAKER, 2002). Ainda a aplicação é diferenciável, pois para cada entrada da matriz é derivável.

Dada essa curva, a estratégia é mostrar que $\text{Im}(\gamma) \subset G$. De fato, como:

$$\det(e^{tA}) = e^{\text{tr}(tA)}$$

e a imagem da exponencial real é igual a \mathbb{R}_+ , segue que $e^{\text{tr}(tA)} \neq 0$, donde e^{tA} é invertível, isto é, $e^{tA} \in G$, para todo $t \in \mathbb{R}$, que por sua vez está contido em $M(n, \mathbb{R})$. Assim, pela Proposição 2.4 da página 33 em (HALL, 2015), existe a curva diferenciável γ em que $\gamma'(t) = Ae^{At}$, satisfazendo

$$\gamma'(0) = A \quad e \quad \gamma(0) = e^{0A} = e^0 = I$$

Portanto, $A \in T_1G$, conseqüentemente, $M(n, \mathbb{R}) \subset T_1G$.

Isso permite dizermos que os campos vetoriais X em G são aplicações de G em $M(n, \mathbb{R})$, já que $TG = G \times M(n, \mathbb{R})$.

Por outro lado, como a derivada de transformações lineares é a própria transformação avaliada na identidade do espaço vetorial, temos que $d(E_g)_h = E_g$ e $d(D_g)_h = D_g$, $\forall g, h \in G$.

Com isso, podemos descrever os campos invariantes à direita em $GL(n, \mathbb{R})$ como:

$$\begin{aligned} X : G &\longrightarrow M(n, \mathbb{R}) \\ g &\longmapsto d(D_g)X(1) = D_g(X(1)) = X(1)g \end{aligned}$$

Dessa forma, os campos invariantes à direita são da forma $X(g) = Ag$, onde $A \in T_1G$. Esse campo induz a equação diferencial linear $\frac{dg}{dt} = Ag$, que é o sistema linear $\frac{dx}{dt} = Ax$, repetido para cada uma das n colunas de g . De modo análogo, podemos definir os campos invariantes a esquerda.

Um aspecto interessante desse exemplo está no fato de mostrar que não necessariamente um campo invariante a direita é também invariante a esquerda. Isso se deve ao produto usual entre matriz, em geral, não ser comutativo.

Munidos dessas noções, temos propriedade para adentrarmos ao estudo uma das conexões entre as álgebras e os grupos de Lie. Para isso, faz-se necessário definirmos a estrutura das álgebras de Lie, para posteriormente, construirmos a álgebra associada a um grupo de Lie.

4.1 ÁLGEBRA DE LIE ASSOCIADA A UM GRUPO DE LIE

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial \mathfrak{g} sob um corpo \mathbb{K} , munido por uma operação binária chamada de comutador de Lie $[X, Y]$, que aplicado aos elementos da álgebra satisfaz as propriedades abaixo:

- Bilinearidade $\forall X, X', Y, Y' \in \mathfrak{g}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$

$$[X + \alpha X', Y] = [X, Y] + [\alpha X', Y] = [X, Y] + \alpha [X', Y]$$

$$[X, Y + \alpha Y'] = [X, Y] + [X, \alpha Y'] = [X, Y] + \alpha [X, Y']$$

- Alternatividade $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$

$$[X, X] = 0$$

e por conseguinte, temos a anti-simetria

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

- Identidade de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]], \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

Exemplo 4.7. O espaço das transformações lineares $\mathcal{L}(V)$ de um espaço vetorial V de dimensão n sobre \mathbb{K} , também entendido como o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas sobre o corpo \mathbb{K} , tem estrutura de álgebra de Lie com o colchete definido por

$$[X, Y] = XY - YX, \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{L}(V),$$

sendo (\cdot) o produto e $(-)$ subtração usuais do espaço das matrizes. Denotaremos por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ ou $\mathfrak{gl}(V)$ o espaço vetorial $\mathcal{L}(V)$ ou $M(n, \mathbb{K})$ quando visto como álgebra Lie.

Outro exemplo bastante interessante é o espaço vetorial dos campos vetoriais sobre uma variedade diferenciável, munido do colchete de Lie dos campos vetores, como vemos a seguir:

Exemplo 4.8. Seja M uma variedade diferenciável e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, defina o colchete de X e Y por:

$$\begin{aligned} [X, Y]: M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto [X, Y]_p: \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto [X, Y](f)(p) \end{aligned}$$

em que $[X, Y]_p := X_p \circ Y_p - Y_p \circ X_p$ definida da seguinte forma: para toda função $f \in \mathcal{F}(M)$, associamos uma função real $[X, Y](f): M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$[X, Y](f)(p) = X_p(Y_p(f)) - Y_p(X_p(f)).$$

Assim, $[X, Y]$ é um campo vetorial em M . Para simplificar a notação, denotaremos $[X, Y]_p := X_p Y_p - Y_p X_p$.

Sabendo que $\mathfrak{X}(M)$ é um espaço vetorial, temos que $\mathfrak{X}(M)$ munido do colchete definido anteriormente é uma álgebra de Lie. Para mostrarmos essa afirmação devemos verificar a validade da bilinearidade, da alternatividade e da identidade de Jacobi. Mostraremos a segunda propriedade a fim de familiarizar o leitor com a definição do colchete, as outras propriedades seguem de simples manipulações algébricas e da aplicação da definição.

Com efeito, vale a alternatividade, pois dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, temos:

$$[X, X](p) = X_p X_p - X_p X_p = 0$$

Definição 4.9. (Álgebra de Lie abeliana) Chamamos uma álgebra de Lie \mathfrak{g} de abeliana ou comutativa, quando o comutador aplicado a quaisquer elementos da álgebra não acrescenta nada a estrutura do espaço vetorial, ou seja, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = 0$.

Assim como em outras estruturas algébricas, são definidas as subálgebras de Lie como um subconjunto fechado pelo colchete da álgebra, como segue:

Definição 4.10 (Subálgebras de Lie). Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie com colchete $[-, -]$ e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ um subespaço vetorial de \mathfrak{g} . Dizemos que \mathfrak{h} é uma subálgebra de \mathfrak{g} se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Alguns exemplos de subálgebras de Lie são:

Exemplo 4.11. O espaço das matrizes diagonais é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Veja na página 19 em (MARTINS, 2010).

Exemplo 4.12. Seja $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$. Como $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, para ser subálgebra de Lie, falta mostrar que, dados $X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$, temos $[X, Y] \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$, ou seja, $\text{tr}([X, Y]) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}([X, Y]) &= \operatorname{tr}(XY - YX) \\
&= \operatorname{tr}(XY) + \operatorname{tr}(-YX) \\
&= \operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(YX) \\
&= \operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(XY) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Exemplo 4.13. Seja $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X + X^T = 0\}$, sendo X^T a matriz transposta de X , temos que $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ é o conjunto das matrizes anti-simétricas:

Sejam X e $Y \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$, então:

$$\begin{aligned}
[X, Y] + [X, Y]^T &= XY - YX + (XY - YX)^T \\
&= XY - YX + Y^T X^T - X^T Y^T
\end{aligned}$$

Como $X, Y \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$, tem-se:

$$\begin{aligned}
[X, Y] + [X, Y]^T &= XY - YX + (-Y)(-X) - (-X)(-Y) \\
&= XY - YX + YX - XY \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ e $[X, Y] \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$, conclui-se que $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ é uma subálgebra.

Exemplo 4.14. Seja $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + \overline{X}^T = 0\}$, sendo \overline{X} a matriz obtida de X após conjugação dos seus entrada. Na pagina 20, em (MARTINS, 2010), temos que $\mathfrak{u}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ é um subespaço vetorial real e uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Do mesmo modo, $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$ é um subespaço vetorial real e uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 4.15. Sejam

$$\mathfrak{g} = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A álgebra \mathfrak{g} é conhecida como álgebra de Heisenberg. Tomando o colchete de Lie convencional do espaço de matrizes, temos facilmente que \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{K})$.

Proposição 4.16. *Seja Inv^e o espaço dos campos invariantes à esquerda de G . Sabemos que $\text{Inv}^e \subset \mathfrak{X}(G)$. Se tomarmos $X, Y \in \text{Inv}^e$ e o colchete de Lie definido no Exemplo 4.8, temos que $\text{Inv}^e \subset \mathfrak{X}(G)$ é uma subálgebra de Lie. O mesmo vale para o espaço dos campos invariantes à direita.*

Para conferir a demonstração desse resultado, veja as páginas 115 e 116 em (LACERDA, 2007).

Como mencionamos, o espaço T_1G é isomorfo ao espaço dos campos invariantes à esquerda ou à direita. Esse isomorfismo, induz os colchetes de Lie, como mostrado nas páginas 111 e 112 em (MARTINS, 2016),

- $[A, B]_d = [A^d, B^d](1)$
- $[A, B]_e = [A^e, B^e](1)$

sobre T_1G , para todo $A, B \in T_1G$.

Com essas considerações podemos definir a álgebra de Lie de um grupo de Lie, como:

Definição 4.17. *A álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G é qualquer uma das álgebras de Lie isomorfas Inv^d , Inv^e , $(T_1G, [\cdot, \cdot]_d)$ ou $(T_1G, [\cdot, \cdot]_e)$. Denotaremos essa álgebra por \mathfrak{g} .*

Nas páginas 111 à 114 em (LACERDA, 2007) é realizada uma discussão detalhada sobre o isomorfismos entre esses espaços vetoriais. Certos de que o são, durante o texto deixaremos explícito quais dos espaços estão sendo tomados como a álgebra \mathfrak{g} associada ao grupo de Lie G . Em geral, adotaremos $(T_1G, [\cdot, \cdot]_d)$, exceto quando dito o contrário.

Exemplo 4.18. *Com vimos 4.6, os campos invariantes à direita de $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = G$ são dados por $X_A(g) = Ag$, com $A \in M(n, \mathbb{R}) = T_1G$. Com isso, queremos dizer que os campos invariantes em G podem ser identificados por matrizes em $M(n, \mathbb{R})$. Dessa forma, associaremos os campos invariantes à direita (ou esquerda) a matrizes, ou seja, o campo invariante X_A corresponde a uma matriz $A \in M(n, \mathbb{R})$. Então, para $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ e $g \in G$, temos:*

$$[X_A, X_B](g) = X_A(X_B(g)) - X_B(X_A(g)) = A(B(g)) - B(A(g)) = (AB - BA)(g)$$

De agora em diante, todo campo invariante à direita X_A de G será representado pela matriz A . Desse modo, como vimos $[X_A, X_B] = X_{AB-BA}$, em termos da operação colchete, temos $[A, B](g) = (AB - BA)(g)$.

4.2 HOMOMORFISMO

Assim como em outras estruturas algébricas mapeamos os objetos por meio de homomorfismos, para os grupos de Lie, temos:

Definição 4.19. *Sejam G e H grupos de Lie e $\Phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupo diferenciável é chamada de homomorfismo de grupos de Lie.*

Quando temos um homomorfismo de grupo de Lie $\Phi : G \rightarrow G$, dizemos que a aplicação é um **endomorfismo**. Agora se tomarmos Φ um homomorfismo de Lie inversível, ou seja, Φ bijetora, admitindo o homomorfismo Φ^{-1} , então dizemos que $\Phi : G \rightarrow H$ é um **isomorfismo** de Lie, e G e H são grupos de Lie isomorfos. Já quando Φ é um isomorfismo de G em G , a aplicação é chamada de **automorfismo**.

A ideia inicial é estudar os grupos de Lie por meio de suas álgebras de Lie associadas. Dessa forma, buscaremos descrever as ligações entre os homomorfismos de Lie e a relação entre os homomorfismos de álgebra de Lie. Nesse sentido, temos:

Definição 4.20 (Homomorfismo de álgebra de Lie). *Sejam \mathfrak{g} , \mathfrak{h} álgebras de Lie. A transformação linear dada por:*

$$\begin{aligned} \phi &: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h} \\ X &\mapsto \phi(X) \end{aligned}$$

tal que $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $\phi([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{h}}$ é chamada de homomorfismo de álgebra de Lie.

As definições de endomorfismo, isomorfismos e automorfismos de álgebras de Lie são análogas as dadas anteriormente, considerando o operador colchete de Lie.

Exemplo 4.21. *Seja P uma transformação linear inversível do espaço vetorial V de dimensão finita. Então, a conjugação por P*

$$A \in \mathfrak{gl}(V) \mapsto PAP^{-1} \in \mathfrak{gl}(V)$$

é um automorfismo de $\mathfrak{gl}(V)$.

É dado que P é uma transformação linear inversível e

$$\begin{aligned}\phi : \mathfrak{gl}(V) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ X &\longmapsto PXP^{-1}\end{aligned}$$

Quero mostrar que ϕ é um homomorfismo de álgebra de Lie. Tomando o comutador usual do espaço das transformações endomórficas, temos:

$$\begin{aligned}\phi([X,Y]) &= P[X,Y]P^{-1} \\ &= P(XY - YX)P^{-1} \\ &= PXP^{-1}PY - PYXP^{-1}\end{aligned}$$

Usando, entre X e Y , que $I = PP^{-1} = P^{-1}P$:

$$\begin{aligned}\phi([X,Y]) &= PXIYP^{-1} - PYIXP^{-1} \\ &= PXP^{-1}PYP^{-1} - PYP^{-1}PXP^{-1} \\ &= \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X) \\ &= [\phi(X),\phi(Y)]\end{aligned}$$

Agora, para mostrar que ϕ é um isomorfismo, precisamos provar que ϕ é injetora e sobrejetora. Como

$$\begin{aligned}\phi(X) = \phi(Y) &\Rightarrow PXP^{-1} = PYP^{-1} \\ &\Rightarrow P^{-1}PXP^{-1}P = P^{-1}PYP^{-1}P \\ &\Rightarrow IXI = IYI \\ &\Rightarrow X = Y\end{aligned}$$

segue que ϕ é injetora.

Ainda, pelo teorema do núcleo e da imagem de uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensões finita, sabemos que:

$$\dim \mathfrak{gl}(V) = \dim \ker(\phi) + \dim \text{Im}(\phi)$$

Como ϕ é injetora, temos que $\ker(\phi) = 0$, então:

$$\dim \mathfrak{gl}(V) = \dim \text{Im}(\phi)$$

juntamente com o fato de $\text{Im}(\phi) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, temos que $\text{Im}(\phi) = \mathfrak{gl}(V)$, donde ϕ é sobrejetora. Logo ϕ é um homomorfismo de Lie bijetor, ou seja, é um isomorfismo de Lie.

Podemos definir ϕ^{-1} da forma:

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : \mathfrak{gl}(V) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ C &\longmapsto P^{-1}CP \end{aligned}$$

Observe que:

$$\phi \circ \phi^{-1}(C) = \phi(P^{-1}CP) = PP^{-1}CPP^{-1} = C$$

$$\phi^{-1} \circ \phi(A) = \phi^{-1}(PAP^{-1}) = P^{-1}PAP^{-1}P = A$$

Como ϕ é um homomorfismo bijetor de $\mathfrak{gl}(V)$ em $\mathfrak{gl}(V)$, conclui-se que ϕ é um automorfismo de Lie.

De modo análogo ao feito para a aplicação ϕ , podemos mostrar que ϕ^{-1} é um isomorfismo de Lie.

Uma forma prática de verificar se álgebras de Lie de dimensão finita são isomorfas se dá por meio do colchete aplicado nos elementos da base. Isso é, seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie finita com base $\{X_1, \dots, X_n\}$. Calculando, dois a dois, o colchete dos elementos da base, temos que são descritos como a combinação linear:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k,$$

onde os coeficientes são chamados de constantes de estrutura da álgebra de Lie em relação a base. Então, na página 22, (MARTINS, 2010) nos mostra que duas álgebras de Lie são isomorfas se tem as mesmas constantes de estrutura. Considere os exemplos das subálgebras de Lie dadas anteriormente.

Exemplo 4.22. Seja $\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$, sendo X^T a matriz transposta de X , o conjunto das matrizes anti-simétricas. Sabemos que $\mathfrak{so}(3) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ é uma subálgebra. Seja $\mathcal{B}_1 = \{F_1, F_2, F_3\}$ uma base para $\mathfrak{so}(3)$, onde:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando o colchete de Lie $[X, Y] = XY - YX$, para todo $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$, vemos que $[F_1, F_2] = F_3$, $[F_2, F_3] = F_1$ e $[F_3, F_1] = F_2$.

Exemplo 4.23. $\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \mid X + \overline{X}^T = 0 \text{ e } \text{tr } X = 0\}$, sendo \overline{X} a matriz obtida de X após conjugação dos seus entrada. Sabemos que $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ é uma subálgebra. Seja $\mathcal{B}_2 = \{E_1, E_2, E_3\}$ uma base para $\mathfrak{su}(2)$, onde:

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando o colchete de Lie $[X, Y] = XY - YX$, para todo $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$, vemos que $[E_1, E_2] = E_3$, $[E_2, E_3] = E_1$ e $[E_3, E_1] = E_2$.

Caminhando em direção aos nossos objetivos desse capítulo, outro importante exemplo de um homomorfismo do grupo de Lie em sua álgebra de Lie é dado pela aplicação exponencial, a qual se apresenta como uma das principais vias de intercâmbio entre as álgebras e os grupos de Lie, como veremos na seções seguintes.

4.2.1 Aplicação exponencial

Para introduzirmos a noção da aplicação diferenciável, considere X um campo invariante à direita do grupo de Lie G , e X_t seu fluxo. Dados $g \in G$, $h \in G$ numa vizinhança de g e a curva

$$\begin{aligned} \alpha &: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G \\ &t \longmapsto X_t(h)g \end{aligned}$$

fica claro que $\alpha(0) = hg$, uma vez que $X_0(h) = h$ (relembre em 3.35). Então, pela regra da cadeia

$$\alpha'(t) = d(D_g)_{X_t(h)}X(X_t(h))$$

pela invariância à direita de X_t

$$\alpha'(t) = X(X_t(h)g) = X(\alpha(t))$$

Isso implica que $X_t(hg) = X_t(h)g$, se $X \in \text{Inv}^d$. De maneira parecida, temos $X_t(gh) = gX_t(h)$, se $X \in \text{Inv}^e$.

Portanto, α é solução para a equação diferencial $\frac{dg}{dt} = X(g)$ com condição inicial $\alpha(0) = hg$, donde $\alpha(t) = X_t(h)g$. A aplicação exponencial é definida através da solução dessa equação diferencial. Nas páginas 114 e 115 em (MARTINS, 2016), vemos que se os campos invariantes são completos e se $X^d(1) = X^e(1)$, então $(X^d)_t(1) = (X^e)_t(1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Definição 4.24. *Seja $T_1G = \mathfrak{g}$ a álgebra de Lie associada do grupo de Lie G , e seja $X \in \mathfrak{g}$. Dado X invariante à direita ou à esquerda, a aplicação*

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \exp(X) = e^X = X_1(1) \end{aligned}$$

é a aplicação exponencial de \mathfrak{g} sobre G .

Na página 16 em (MARTINS, 2016), vemos com detalhes que a aplicação exponencial está bem definida. Como havíamos mencionado, a aplicação exponencial dada anteriormente é um homomorfismo. De fato, para mostraremos essa afirmação, considere a invariância a direita e a esquerda dos campos vetoriais X^d e X^e , respectivamente, e as propriedades da Proposição 3.35, temos que se $X^d(1) = X^e(1)$, então dado X invariante a direita ou a esquerda:

$$X_t(1) = tX_1(1) = e^{tX}$$

donde, para cada $X \in \mathfrak{g}$ fixado e $t, s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \{X\} &\longrightarrow G \\ (t, X) &\longmapsto e^{tX} \end{aligned}$$

é um homomorfismo, pois

$$\begin{aligned}
 e^{(t+s)X} &= ((t+s)X)_1(1) \\
 &= X_{(t+s)}(1) \\
 &= X_t(X_s(1)) \\
 &= X_t(1)X_s(1) \\
 &= (tX)_1(1)(sX)_1(1) \\
 &= e^{tX}e^{sX}
 \end{aligned}$$

Como $X_t(1)X_s(1) = X_s(1)X_t(1)$, segue que

$$e^{(t+s)X} = e^{tX}e^{sX} = e^{sX}e^{tX}$$

como queríamos.

Exploreemos tanto as propriedades algébricas, quanto a diferenciabilidade da exponencial nos intercâmbios a serem estudados. Assim, na página 116, (MARTINS, 2016) compila alguns resultados na seguinte Proposição:

Proposição 4.25. *Seja X um campo vetorial de um grupo de Lie G :*

1. *Se $X \in \text{Inv}^d$, então $X_t = E_{e^{tX}}$, donde $X_t(g) = e^{tX}g$*
2. *Se $X \in \text{Inv}^e$, então $X_t = D_{e^{tX}}$, donde $X_t(g) = ge^{tX}$*
3. $e^0 = 1$
4. *Se $n \in \mathbb{Z}$, então $(e^X)^n = e^{nX}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$*
5. $(d \exp)_0 = \text{id}$

Nessas condições, a imagem $\{e^{tX} \mid t \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo de G , chamado de subgrupo a 1-parâmetro gerado por $X \in \mathfrak{g}$. Essa terminologia generaliza o que é feito no contexto matricial, na página 41, vemos que (HALL, 2015) entende os subgrupos a 1-parâmetro como:

Definição 4.26. *Seja $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Essa aplicação é chamada de subgrupo a 1-parâmetro de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ se:*

1. Ψ é contínua,

2. $\Psi(0) = I$,
3. $\Psi(t + s) = \Psi(t)\Psi(s)$

Em (HALL, 2015), vemos na página 41, no Teorema 2.14 que se a imagem de $\phi(t)$ é um subgrupo a 1-parâmetro de $GL(n, \mathbb{R})$, então $\exists! X \in M(n, \mathbb{R})$, tal que $\phi(t) = e^{tX}$. Isso será usado para estabelecer a relação entre o homomorfismo entre grupos de Lie de matrizes e suas respectivas álgebras associadas.

Exemplo 4.27. Como visto no Exemplo 4.6, os campos invariantes do grupo linear $GL(n, \mathbb{R})$ é dado por $X(g) = Ag$, com $A \in M(n, \mathbb{R})$, o qual induz a equação diferencial

$$\frac{dg}{dt} = Ag$$

cuja solução fundamental é dada por $e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$. Essa solução coincide com a aplicação exponencial em $GL(n, \mathbb{R})$, tal como a Definição 4.24.

Por meio da aplicação exponencial, nas páginas 119 e 120, (MARTINS, 2016) mostra que podemos estabelecer uma relação entre os homomorfismo de grupos de Lie com os homomorfismos entre as suas álgebras de Lie associadas. Para isso, precisamos descrever um homomorfismo de álgebra de Lie a partir do homomorfismo diferenciável. De modo geral, temos:

Proposição 4.28. *Sejam G e H grupos de Lie com suas álgebras de Lie associadas \mathfrak{g} e \mathfrak{h} , respectivamente. Se $\Phi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo diferenciável, então $d\Phi_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Vale lembrar que $d\Phi_1 : T_1G \rightarrow T_1H$, em que $T_1G = \mathfrak{g}$ e $T_1H = \mathfrak{h}$. Para o colchete invariante à direita ou à esquerda, a Proposição 4.28 diz que $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, vale $d\Phi_1[X, Y] = [d\Phi_1 X, d\Phi_1 Y]$.

A prova desse resultado utiliza uma propriedade dos campos invariantes que desvia dos objetivos desse trabalho, nesse sentido, para mais detalhes veja na página 120 a Proposição 5.16 e na página 348 Proposição A.2 em (MARTINS, 2016). Agora, conhecendo o homomorfismo entre as álgebras de Lie associados, temos a seguinte relação entre essas aplicações de grupos de Lie e álgebras de Lie.

Proposição 4.29. *Sejam G e H grupos de Lie com as suas álgebras de Lie associadas \mathfrak{g} e \mathfrak{h} , respectivamente, e $X \in \mathfrak{g}$. Se $\Phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo diferenciável, então*

$$\Phi(e^X) = e^{d\Phi_1(X)}$$

Como nosso repertório de exemplos se concentra nos matriciais, traremos uma versão desse resultado, apresentada na página 60 em (HALL, 2015), para os homomorfismos de Lie associados aos grupos lineares e suas álgebras de Lie.

Proposição 4.30. *Sejam G e H grupos de Lie de matrizes, e as suas álgebras associadas \mathfrak{g} e \mathfrak{h} , respectivamente. Se $\Phi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupo de Lie, então existe uma única transformação linear $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, tal que:*

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$$

$\forall X \in \mathfrak{g}$. Ainda, ϕ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A^{-1})$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $A \in G$;
2. $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$;
3. $\phi(X) = \left. \frac{d}{dt}(\Phi(e^{tX})) \right|_{t=0}$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Como Φ é um homomorfismo de grupo de Lie, é por hipótese diferenciável e em particular uma aplicação contínua, então $\Phi(e^{tX})$ é um subgrupo a 1-parâmetro de H , $\forall X \in \mathfrak{g}$. Então, pelo Teorema 2.14 na página 41 em (HALL, 2015), temos que $\exists! Z \in M(n, \mathbb{R})$, tal que

$$\Phi(e^{tX}) = e^{tZ} \tag{1}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$. Vamos definir $\phi(X) = Z$ e mostraremos que ela satisfaz as propriedades da Proposição. Primeiro, para $t = 1$, a equação (1) fica $\Phi(e^X) = e^Z$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. Agora, se $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \Phi(e^{tsX}) &= e^{tsZ} \\ &= (e^{tZ})^s \\ &= \underbrace{e^{tZ} \cdots e^{tZ}}_{s \text{ vezes}} \end{aligned}$$

mostrando que $\phi(sX) = s\phi(X)$. Agora, pelo Teorema 2.11 da Fórmula do Produto de Lie, na página 40 em (HALL, 2015), sabemos que $\forall X, Y \in M(n, \mathbb{R})$, $e^{X+Y} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{X}{m}} e^{\frac{Y}{m}} \right)^m$, então, juntamente com a continuidade do homomorfismo de grupo Φ , temos:

$$\begin{aligned} e^{t\phi(X+Y)} &= \Phi \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{tX}{m}} e^{\frac{tY}{m}} \right)^m \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\Phi \left(e^{\frac{tX}{m}} \right) \Phi \left(e^{\frac{tY}{m}} \right) \right)^m \end{aligned}$$

Portanto, $e^{t\phi(X+Y)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{t\phi(X)}{m}} e^{\frac{t\phi(Y)}{m}} \right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{(t\phi(X)+t\phi(Y))m}{m}} \right) = e^{(t\phi(X)+t\phi(Y))}$.

Diferenciando em t e aplicando $t = 0$, temos $\phi(X + Y) = \phi(X) + \phi(Y)$, donde temos a linearidade de ϕ .

Até agora, temos uma aplicação linear ϕ que é única. De fato, se existe $\bar{\phi}$ com tal propriedade, temos que:

$$e^{t\phi(X)} = e^{t\bar{\phi}(X)} = \Phi(e^{tX})$$

Ao diferenciarmos em t e aplicar a diferencial em $t = 0$, teremos $\phi(X) = \bar{\phi}(X)$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. Quanto as propriedades, temos para $A \in G$:

$$e^{t\phi(AXA^{-1})} = e^{\phi(tAXA^{-1})} = \Phi(e^{tAXA^{-1}})$$

Usando a definição de exponencial de matrizes e a observação que $(AXA^{-1})^m = AX^m A^{-1}$, para número natural m , temos que $e^{A(tX)A^{-1}} = Ae^{tX}A^{-1}$, então

$$\begin{aligned} e^{t\phi(AXA^{-1})} &= \Phi(e^{A(tX)A^{-1}}) \\ &= \Phi(Ae^{tX}A^{-1}) \\ &= \Phi(A)\Phi(e^{tX})\Phi(A)^{-1} \\ &= \Phi(A)e^{t\phi(X)}\Phi(A)^{-1} \end{aligned}$$

Diferenciando em t e aplicando em $t = 0$, temos $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A^{-1})$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $A \in G$.

O colchete de Lie no espaço das matrizes é convencionalmente tomado por $[X, Y] = XY - YX$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$. Então, pela Proposição 2.4, na página 33, e pela regra do produto, na página 40, apresentados em (HALL, 2015), temos que:

$$\begin{aligned} \phi([X, Y]) &= \phi \left(\left. \frac{d}{dt} e^{tX} Y e^{-tX} \right|_{t=0} \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \phi(e^{tX} Y e^{-tX}) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

estamos usando o fato da derivada comutar com a transformação linear. Então, pela propriedade mostrada acima,

$$\begin{aligned}
\phi([X,Y]) &= \left. \frac{d}{dt} \Phi(e^{tX}) \phi(Y) \Phi(e^{-tX}) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} e^{t\phi(X)} \phi(Y) e^{-t\phi(X)} \right|_{t=0} \\
&= \left. \phi(X) e^{t\phi(X)} \phi(Y) e^{-t\phi(X)} - e^{t\phi(X)} \phi(Y) \phi(X) e^{-t\phi(X)} \right|_{t=0} \\
&= \phi(X) \phi(Y) - \phi(Y) \phi(X) \\
&= [\phi(X), \phi(Y)]
\end{aligned}$$

Isso mostra o item 2, ou seja, ϕ é um homomorfismo de álgebra de Lie.

O item 3 é imediato do fato de $\Phi(e^{tX}) = e^{t\phi(X)}$, pois

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi(e^{tX}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} e^{t\phi(X)} \right|_{t=0} = \phi(X) e^{t\phi(X)} \Big|_{t=0} = \phi(X).$$

□

Exemplo 4.31. *Sejam os subgrupos lineares de $GL(n, \mathbb{R})$:*

$$SO(3) = SO(3, \mathbb{R}) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) \mid A^T A = I \text{ e } \det(A) = 1\}$$

$$SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid A(\bar{A})^T = I \text{ e } \det(A) = 1\}.$$

Esses subgrupos são grupos de Lie, como veremos na Seção 5.1.

Seja a aplicação:

$$\begin{aligned}
\Phi: SU(2) &\longrightarrow SO(3) \\
U &\longmapsto \Phi_U: V \longrightarrow V \\
&X \longmapsto UXU^{-1}
\end{aligned}$$

$$\text{onde } V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Observe que o espaço vetorial V é isomorfo a \mathbb{R}^3 , isso implica que a matriz da aplicação Φ_U tem ordem 3, donde faz sentido $\Phi_U \in SO(3)$. Agora, na página 24 em (HALL, 2015), vemos que Φ é um homomorfismo com $\ker \Phi = \{-I, I\} \neq \{0\}$. E o homomorfismo de álgebra de Lie associado $\phi: \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{so}(3)$, da forma $\phi(E_j) = F_j$, para cada $j = 1, \dots, 3$ e sendo E_j, F_j elementos das bases do espaço vetorial dessas álgebras, respectivamente, dadas nos exemplos

4.23 e 4.22 é um isomorfismo de álgebra de Lie, como mostrado nas páginas 59 e 60 em (HALL, 2015).

Temos que ϕ leva a base de $\mathfrak{su}(2)$ na base de $\mathfrak{so}(3)$, sendo um isomorfismo de álgebra de Lie, embora Φ não seja um isomorfismo de grupo, pois $\ker \Phi \neq 0$.

Veja mais detalhes na página 62 em (HALL, 2015).

4.2.2 Representação

Por meio do homomorfismo chamado de representação, podemos transferir o trabalho matemático sobre objetos de natureza complexa para o contexto da álgebra linear, simplificando o olhar sobre problemas obscuros através das ferramentas da álgebra linear. Dessa forma, temos:

Definição 4.32 (Representação do grupo de Lie). *Seja G um grupo de Lie, uma representação finita de G é um homomorfismo de grupo de Lie*

$$\rho: G \longmapsto \text{GL}(V)$$

em que V é um espaço vetorial de dimensão finita e $\text{GL}(V)$ o grupo linear dado pelas transformações lineares invertíveis de V em V .

A álgebra de Lie de $\text{GL}(V)$ é denotada por $\mathfrak{gl}(V)$, que corresponde ao espaço das transformações lineares endomórficas do espaço vetorial V . Considerando a relação, dada anteriormente, entre o homomorfismo de grupos de Lie com o das álgebras associadas, podemos definir a representação da álgebra do grupo de Lie no espaço $\mathfrak{gl}(V)$, como

$$d\rho_1: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

Para simplificar, normalmente usamos a mesma notação para a representação de grupo e de álgebra, quero dizer, $\rho = d\rho_1$. Assim, uma representação de álgebra de Lie é dada por:

Definição 4.33 (Representação da álgebra de Lie). *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, uma representação finita de \mathfrak{g} é um homomorfismo de álgebra Lie*

$$\rho: \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{gl}(V)$$

em que V é um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V .

Na página 26 em (MARTINS, 2010), temos sobre as representações das álgebras de Lie que:

- ρ é dita fiel, se $\ker \rho = \{0\}$;
- Se $\ker \rho = \{0\}$, então $\mathfrak{g} \simeq \text{Im } \rho$. Isso significa que a álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra do espaço das transformações lineares endomórficas. Nesse caso, podemos olhar para a álgebra como um espaço das transformações lineares;
- $\dim V = \dim \rho$.

Seja \mathfrak{g} a álgebra associada ao grupo de Lie G , pela Proposição 4.29, por serem homomorfismos, as representações do grupo e da sua álgebra associada se conectam da seguinte forma, para cada $X \in \mathfrak{g}$:

$$\rho(e^X) = e^{d\rho_1(X)}$$

vale notar que $\rho(e^X) \in \text{GL}(V)$, onde o segundo membro da igualdade fornece a imagem da aplicação exponencial de $\mathfrak{gl}(V)$ em $\text{GL}(V)$.

Exemplo 4.34. *Seja $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das transformações lineares invertíveis $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, também entendido como espaço das matrizes $n \times n$ invertíveis. Uma representação de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n é a aplicação identidade, assim como uma representação de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n , uma vez que:*

$$\left. \frac{d}{dt}(e^{tA}) \right|_{t=0} = A$$

4.2.3 Representação adjunta

Uma outra maneira de olhar os grupos de Lie através de homomorfismos é por meio da representação adjunta, a qual representa um grupo de Lie G em sua álgebra de Lie \mathfrak{g} associada. Isso ocorre do seguinte modo:

Definição 4.35. *A representação adjunta do grupo de Lie G em sua álgebra de Lie \mathfrak{g} é dada por:*

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto \text{Ad}(g) = d(C_g)_1 \end{aligned}$$

Em primeiro lugar, é válido lembrar que \mathfrak{g} como álgebra de Lie, em particular, é um espaço vetorial, fazendo sentido usarmos a notação $\text{GL}(\mathfrak{g})$, como definido em 4.32. Agora, vemos facilmente que $C_g(1) = 1$, donde $d(C_g)_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma aplicação linear. Por outro lado, dados $g, h, x \in G$

$$C_g \circ C_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = C_{gh}(x)$$

donde $d(C_g)_1 \circ d(C_h)_1$, onde temos que Ad é de fato um homomorfismo diferenciável e portanto, uma representação de G em \mathfrak{g} . Ainda, de $C_g = E_g \circ D_{g^{-1}} = D_{g^{-1}} \circ E_g$, podemos entender essa aplicação da forma:

$$d(C_g)_1 = d(E_g \circ D_{g^{-1}})_1 = d(D_{g^{-1}} \circ E_g)_1 = (d(E_g))_{g^{-1}} \circ (dD_{g^{-1}})_1 = d(D_{g^{-1}})_g \circ (dE_g)_1$$

Uma expressão útil para relacionar essas estruturas é dada pela Proposição 4.29, tomando $\Phi = C_g$, temos:

$$ge^Xg^{-1} = e^{\text{Ad}(g)X} \quad (2)$$

Ainda, como Ad é uma representação diferenciável, nos interessa determinar a relativa representação entre sua álgebra de Lie nela própria. Mas antes disso, considere a definição da representação adjunta de álgebras de Lie.

Definição 4.36. *O homomorfismo ad é dito representação adjunta da álgebra de Lie \mathfrak{g} nela própria. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(X)$ é uma transformação linear. Assim, ad age da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \text{ad}: \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto \text{ad}(X): \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\longmapsto \text{ad}(X)(Y) := [X, Y] \end{aligned}$$

A linearidade de $\text{ad}(X)$ é assegurada por:

$$\text{ad}(X + \alpha Y)Z = [X + \alpha Y, Z] = [X, Z] + \alpha[Y, Z] = \text{ad}(X)Z + \alpha \text{ad}(Y)Z$$

Usando a identidade de Jacobi $[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] + [[X, Z], Y]$, a propriedade de homomorfismo de Lie de ad é garantida por:

$$\begin{aligned} \text{ad}([X, Y])Z &= [[X, Y], Z] \\ &= [X, [Y, Z]] + [[X, Z], Y] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= \text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)(Z) - \text{ad}(Y) \circ \text{ad}(X)(Z) \\ &= [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)](Z) \end{aligned}$$

Na página 123 em (MARTINS, 2016), como de se esperar, mostra $d(\text{Ad})_1$ corresponde a representação adjunta da álgebra de Lie associada ao grupo. Como vemos na seguinte proposição:

Proposição 4.37. *Seja G um grupo de Lie, com sua álgebra de Lie \mathfrak{g} , com o colchete dado pelos campos invariantes à esquerda $d(\text{Ad})_1(X) = \text{ad}_e(X)$, e pelos campos invariantes à direita $d(\text{Ad})_1(X) = -\text{ad}_d(X)$, $\forall X \in \mathfrak{g}$ e valem as igualdades*

$$\text{Ad}(e^X) = e^{\text{ad}_e(X)} \quad e \quad \text{Ad}(e^X) = e^{-\text{ad}_d(X)}.$$

Exemplo 4.38. *Seja G um grupo abeliano. Então, sua álgebra de Lie associada é abeliana.*

Demonstração. Dados $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ e $t \in \mathbb{R}$ arbitrários. Pela Proposição 4.29, tomando $\Phi = C_g$, recaímos na Equação 2, onde temos:

$$e^{t\text{Ad}(g)X} = g e^{tX} g^{-1}$$

como, por hipótese, G é grupo abeliano e sabemos que $g, g^{-1}, e^{tX} \in G$, então, em particular, $e^{tX} g^{-1} = g^{-1} e^{tX}$, donde:

$$e^{t\text{Ad}(g)X} = g g^{-1} e^{tX} = 1 e^{tX} = e^{tX}$$

Assim, temos $e^{t\text{Ad}(g)X} = e^{tX}$. Derivando essa equação e aplicando em $t = 0$, temos:

$$\text{Ad}(g)X = X,$$

$\forall g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, donde $\text{Ad}(g) = \text{id}$. Então, pela Proposição 4.37, se $Y \in \mathfrak{g}$, então

$$\text{id} = \text{Ad}(e^{ty}) = e^{t\text{ad}_e(Y)},$$

derivando a igualdade anterior e aplicando em $t = 0$, temos:

$$\text{ad}_e(Y) = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{g},$$

isso implica que \mathfrak{g} é uma álgebra abeliana, como na Definição 4.9. □

Proposição 4.39. *Seja \mathfrak{h} uma subálgebra de Lie de \mathfrak{g} . Dado $Y \in \mathfrak{h}$, então,*

$$\text{Ad}(e^Y) \in \mathfrak{h}.$$

Demonstração. Pela Proposição 4.37, sabemos que:

$$\text{Ad}(e^Y)X = e^{\text{ad}(Y)}X = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \text{ad}(Y)^k X$$

Por hipótese, \mathfrak{h} é uma subálgebra, cada termo da série pertence a \mathfrak{h} , ie, $\text{ad}(Y)X = [Y, X] \in \mathfrak{h}$, $\text{ad}(Y)^2 X = [Y, [Y, X]] \in \mathfrak{h}$, e assim sucessivamente, para $k \geq 0$. Assim, o somatório converge para um elemento de \mathfrak{h} , visto que é um subespaço vetorial. \square

Para mais detalhes veja página 137 em (MARTINS, 2016). Essa proposição é útil na demonstração da conexão entre os grupos e as álgebras de Lie dada no Teorema 5.9.

5 INTERCÂMBIOS ENTRE OS GRUPOS DE LIE E ÁLGEBRAS DE LIE

Nesse capítulo iremos apresentar algumas conexões entre os grupos de Lie e suas álgebras associadas. No que se refere a teoria de Lie e os intercâmbios entre essas duas estruturas algébricas, há diversos resultados, os quais, majoritariamente, exigem um conhecimento teórico denso e complexo, desviando dos objetivos introdutórios desse trabalho. O primeiro passo está em compreendermos a estrutura dos subgrupos de Lie de um grupo de Lie G , para então expressarmos a conexão entre as relativas álgebras de Lie associadas.

5.1 SUBGRUPOS DE LIE E SUBÁLGEBRAS DE LIE

Uma maneira de definirmos os subgrupos de Lie baseia-se nas propriedades topológicas do conjunto subjacente ao grupo. Como um grupo de Lie G tem estrutura de variedade diferenciável, em particular, é um espaço topológico com estruturas de aberto bem definidas. Dessa forma, nessa seção, ao explorarmos as propriedades topológicas dos subgrupos, estamos entendendo-as como apresentado no Capítulo 2.

Definição 5.1. *Seja G um grupo de Lie. Seja $H \subset G$ um subgrupo fechado que também é uma subvariedade de G , então H é chamado de subgrupo de Lie.*

É claro que ao restringirmos as aplicações multiplicação e inversão do grupo de Lie G ao subgrupo H , elas continuam sendo diferenciáveis. Dessa forma, H é um grupo de Lie com as estruturas herdadas de G .

Nessa seção buscaremos mostrar alguns dos subgrupos lineares do grupo linear $GL(n, \mathbb{R})$ que são subgrupos de Lie, bem como determinar a álgebra de Lie associada a cada um deles. Em primeiro momento, temos:

Exemplo 5.2. *Seja $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.*

É claro que $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Primeiro mostraremos que é um subgrupo, como $SL(n, \mathbb{R}) \neq \emptyset$ e $\forall A, B \in SL(n, \mathbb{R})$, temos que $\det(AB^{-1}) = \det(A) \det(B^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)} = 1$, donde $AB^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$. Logo $SL(n, \mathbb{R}) \leq GL(n, \mathbb{R})$. Quero mostrar que $SL(n, \mathbb{R})$ é fechado. Pela definição de $SL(n, \mathbb{R})$ e por \det ser contínua, temos $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$, como $\{1\}$ é fechado em \mathbb{R} , temos que $SL(n, \mathbb{R})$ é fechado em $M(n, \mathbb{R})$.

Isso mostra que $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo fechado. Agora vamos mostrar que é uma subvariedade. Para isso, usaremos a Proposição 3.45. Como \mathbb{R} é uma variedade diferenciável e $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável, queremos mostrar que $d \det_A : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva para $\forall A \in GL(n, \mathbb{R})$. Vale lembrar que $T_q \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\forall q \in \mathbb{R}$ e $T_A GL(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$, $\forall A \in GL(n, \mathbb{R})$.

Para isso, considere a curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, com $\alpha(0) = A$. Temos que $d \det_A$ aplicado em $\alpha'(0)$ é igual a

$$d \det_A(\alpha'(0)) = \left. \frac{d \det(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

Agora, defina outra curva a partir de $\alpha(t)$, da forma:

$$\begin{aligned} \alpha_0 : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ t &\mapsto \alpha_0(t) := A^{-1} \alpha(t) \end{aligned}$$

É claro que $\alpha_0(0) = I$

No cálculo de matrizes, existe a fórmula de Jacobi:

$$d \det(A(t)) = \det A(t) \operatorname{tr}(A(t)^{-1} dA(t)).$$

Voltando para a curva α , aplicaremos essa fórmula:

$$\begin{aligned} d \det_A(\alpha'(0)) &= \left. \frac{d \det(A \alpha_0(t))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \det(A \alpha_0(0)) \operatorname{tr}((A \alpha_0(0))^{-1} A \alpha_0'(0)) \\ &= \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1} \alpha'(0)) \end{aligned}$$

Assim, a transformação linear $d \det_A$ é tal que:

$$\begin{aligned} d \det_A : M(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1} X) \end{aligned}$$

Seja a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(X) = 0\}$ definida anteriormente. Assim, fica claro que $\ker d \det_A = A \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ e é sobrejetor, uma vez que o tr é sobrejetor. Isso é válido, para todo $A \in SL(n, \mathbb{R})$. Então, pela Proposição 3.45, $SL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ é uma subvariedade. Portanto, de acordo com a Definição 5.1, $SL(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo de Lie.

Agora, pela Proposição 3.45, temos que $T_I SL(n, \mathbb{R}) = \ker d \det_I$.

Pelas considerações acima, temos que $\ker d \det_I(X) = I \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, com I a matriz identidade, então $T_I SL(n, \mathbb{R}) = I \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Com isso, temos que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é a subálgebra de Lie associada ao subgrupo de Lie $SL(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 5.3. Seja $A \in M(n, \mathbb{R})$, tal que $A^T A = I$, chamamos A de matriz ortogonal. Vale lembrar que A^T é a matriz transposta de $A = a_{ij}$, dada por $(A^T)_{ij} = a_{ji}$, com $i, j = 1, \dots, n$. Com isso, temos que se A é uma matriz ortogonal, ela tem inversa A^T .

Assim, definimos $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$ que é um subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. Munidos desse subgrupo, definimos:

$$SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})$$

Pelas discussões do exemplo anterior e a intersecção anterior, temos que $SO(n, \mathbb{R})$ e $O(n, \mathbb{R})$ são subgrupos fechados de $GL(n, \mathbb{R})$.

Tome o grupo

$$\text{Sym}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A = A^T\},$$

o qual, segundo Notas 10, página 2 em (GOMES, 2006), é isomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, e a aplicação diferenciável:

$$\begin{aligned} F : GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto AA^T \end{aligned}$$

Vamos mostrar que dF é sobrejetora. O primeiro passo é determinar $dF_A(B)$. Para isso, tome $A \in O(n, \mathbb{R})$, $B \in T_A GL(n, \mathbb{R})$ e a curva diferenciável $\alpha(t) = A + tB$, para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. É claro que $\alpha(0) = A$ e $\alpha'(0) = B$. Sabendo que $(F \circ \alpha)'(t) = dF_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$, temos:

$$\begin{aligned} (F \circ \alpha)(t) &= F(A + tB) \\ &= (A + tB)(A + tB)^T \\ &= (A + tB)(A^T + tB^T) \\ &= AA^T + tAB^T + tBA^T + t^2BB^T \end{aligned}$$

Isso implica que:

$$(F \circ \alpha)'(t) = AB^T + BA^T + 2tBB^T$$

Calculando $(F \circ \alpha)'(t)$ para $t = 0$, temos:

$$dF_A(B) = dF_{\alpha(t)}\alpha'(t) \Big|_{t=0} = (F \circ \alpha)'(0) = AB^T + BA^T$$

Agora, tome $S \in T_{F(A)} \text{Sym}(n, \mathbb{R})$, vamos mostrar que $\exists B \in T_A \text{GL}(n, \mathbb{R})$, tal que $dF_A(B) = S$. Afirmamos que $B = \frac{SA}{2}$. De fato, pois:

$$dF_A \left(\frac{SA}{2} \right) = \frac{AA^T S^T}{2} + \frac{SAA^T}{2} = \frac{S^T}{2} + \frac{S}{2} = S$$

Logo, dF_A é sobrejetora em $O(n, \mathbb{R})$. Então, pela Proposição 3.45 temos que $O(n, \mathbb{R})$ é uma subvariedade. Em particular, por $\text{SO}(n, \mathbb{R}) \subset O(n, \mathbb{R})$, o raciocínio anterior também é válido, donde $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ também é uma subvariedade. Dessa forma, $O(n, \mathbb{R})$ e $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ são subgrupos de Lie.

Quanto a álgebra de Lie associada aos subgrupos $O(n, \mathbb{R})$ e $\text{SO}(n, \mathbb{R})$, defina $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$ o espaço das matrizes anti-simétricas. Afirmamos que $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = T_I \text{SO}(n, \mathbb{R}) = T_I O(n, \mathbb{R})$.

Provarei a primeira igualdade, já a $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = T_I O(n, \mathbb{R})$, segue analogamente.

Tome a curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \text{SO}(n, \mathbb{R})$, tal que $\alpha(0) = I$, então para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\alpha(t)^T \alpha(t) = I \Rightarrow (\alpha(t)^T \alpha(t))' = 0$$

Derivando, temos

$$(\alpha(t)^T \alpha(t))' = \alpha'(t)^T \alpha(t) + \alpha(t)^T \alpha'(t)$$

daí

$$\alpha'(t)^T \alpha(t) + \alpha(t)^T \alpha'(t) = 0$$

Ampliando em $t = 0$, temos:

$$\alpha'(0)^T + \alpha'(0) = 0 \Rightarrow \alpha'(0)^T = -\alpha'(0)$$

Portanto, $\alpha'(t) \in T_I \text{SO}(n, \mathbb{R})$ é um operador anti-simétrico, donde $T_I \text{SO}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$.

Quanto a outra inclusão, temos pelo Lema 3.23 na página 78 em (BAKER, 2002), que $\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$. Então, se $X \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$, lembramos que o traço das matrizes anti-simétricas é zero, segue

$$(e^X)^T = e^{X^T} = e^{-X} = (e^X)^{-1}$$

$$\det(e^X) = e^{\text{tr} X} = e^0 = 1,$$

implicando que $e^X \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$.

Podemos definir a curva diferenciável:

$$\begin{aligned}\alpha &: \mathbb{R} \longrightarrow \text{SO}(n, \mathbb{R}) \\ t &\longmapsto e^{tX}\end{aligned}$$

tal que $\alpha(0) = I$ e $\alpha'(t) = Xe^{tX}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Portanto, $X = \alpha'(0) \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$. Portanto, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = T_I \text{SO}(n, \mathbb{R})$.

Com isso, temos que $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ é a subálgebra de Lie associada ao subgrupo de Lie $\text{SO}(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 5.4. Seja $A \in M(n, \mathbb{R})$, temos que \bar{A} é a matriz obtida depois de conjugar cada entrada da matriz A . Com isso, definimos o subgrupo

$$\text{U}(n) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A(\bar{A})^T = I\}$$

chamado de grupo unitário. A partir dele definimos:

$$\text{SU}(n) = \text{U}(n) \cap \text{SL}(n, \mathbb{R})$$

Com raciocínio similar ao usado nos exemplos anteriores e atentando as peculiaridades da definição desses grupos, na página 83 em (BAKER, 2002), mostra-se que eles são subgrupos de Lie de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, com as álgebras de Lie associadas $\mathfrak{u}(n) = T_I \text{U}(n)$ e $\mathfrak{su}(n) = T_I \text{SU}(n)$.

Exemplo 5.5. Sejam

$$H = \left\{ A \in \text{GL}(3, \mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é chamado de grupo de Heisenberg. A Proposição 3.26 na página 59 em (HALL, 2015), mostra que a álgebra de Heisenberg, definida em 4.15, é a álgebra de Lie associada ao grupo de H .

Para finalizarmos essa seção, definiremos uma importante estrutura dos subgrupos de Lie de matrizes que asseguram o acesso as subálgebras de Lie associadas.

Definição 5.6. Sejam G um grupo de Lie de matriz com a álgebra de Lie associada \mathfrak{g} e $H \subset G$. Temos que H é um subgrupo de Lie conexo, se satisfaz as condições:

1. H é subgrupo de Lie de G ;

2. A álgebra de Lie \mathfrak{h} associada a H é subálgebra de \mathfrak{g} ;
3. $\forall h \in H$, se exprime da forma $h = e^{X_1} \dots e^{X_m}$, com $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{h}$.

Isso nos permite entender os subgrupos de Lie conexos H como

$$H = \{e^{X_1} \dots e^{X_m} \mid X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{h}\} = \langle e^{\mathfrak{h}} \rangle,$$

onde \mathfrak{h} é uma subálgebra de Lie associada a H .

Exemplo 5.7. *Seja \mathfrak{h} a subálgebra de Lie da álgebra de Lie associada ao grupo de Heisenberg. Então, $\exp(\mathfrak{h})$ é um subgrupo conexo do grupo de Heisenberg. Para mais detalhes, veja seção 5.11 em (HALL, 2015).*

Exemplo 5.8. *Se G é um grupo de Lie conexo e sua álgebra de Lie associada \mathfrak{g} for abeliana, então G é abeliano.*

Esse exemplo apresenta uma recíproca para o Exemplo 4.38. E de fato, pela Proposição 4.37, temos:

$$\text{Ad}(e^Y) = e^{\text{ad}_e(Y)}$$

Como \mathfrak{g} é abeliano, $\text{ad}_e(Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}$, donde $\text{Ad}(e^Y) = 1$.

Tomando $g = e^Y$ na Equação 2, temos $e^Y e^X e^{-Y} = e^{\text{Ad}(e^Y)X} = e^X$. Multiplicando e^Y do lado direito em ambos os membros, temos $e^Y e^X = e^X e^Y, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$. Como G é conexo, é gerado por exponenciais de elementos de \mathfrak{g} . Portanto, $g = e^{X_1} \dots e^{X_m}, h = e^{Y_1} \dots e^{Y_{m'}}$, com $X_i, Y_i \in \mathfrak{g}$, comutam, isto é, $gh = hg$, considerando a operação produto do grupo de Lie G .

5.2 ALGUNS INTERCÂMBIOS ENTRE OS GRUPOS DE LIE E AS ÁLGEBRAS DE LIE

Nessa seção buscamos apresentar como podemos acessar um grupo de Lie a partir de uma dada álgebra de Lie de dimensão finita.

Teorema 5.9. *Seja G um grupo de Lie de matriz com sua álgebra de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} uma subálgebra de \mathfrak{g} . Então existe um único subgrupo conexo $H \subseteq G$, cuja álgebra de Lie é \mathfrak{h} .*

A demonstração desse importante Teorema é construída na Seção 5.9 em (HALL, 2015). Uma versão mais abrangente é dada na Proposição 6.6, na página 140 em (MARTINS, 2016). Como ela exige a construção de variedades integrais que se dá com auxílio da Proposição 4.39,

as quais não definirmos por desviarem dos nos objetivos de estudo, optamos por essa versão mais específica.

Nosso objetivo é construir um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ associado a uma álgebra de Lie isomorfa a uma álgebra de Lie real de dimensão finita. Isso fornece uma demonstração para um caso mais restrito do Terceiro Teorema de Lie, que em sua forma geral, nos diz que para toda álgebra de Lie \mathfrak{g} real e de dimensão finita, existe um grupo de Lie G associado a álgebra \mathfrak{g} .

Para isso precisamos do Teorema de Ado, demonstrado na seção 10.2 em (MARTINS, 2010), o qual garante:

Teorema 5.10. *Toda álgebra de Lie de dimensão finita admite uma representação fiel ρ de dimensão finita.*

A grosso modo, esse resultado nos permiti enxergar as álgebras de Lie de dimensão finita como uma subálgebra de matrizes. Com isso, em termos mais precisos, temos:

Teorema 5.11. *Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie real de dimensão finita, então existe um subgrupo de Lie conexo de $GL(n, \mathbb{R})$, com álgebra de Lie isomorfa a \mathfrak{g} .*

Demonstração. Pelo Teorema de Ado, existe uma representação fiel ρ de \mathfrak{g} em $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, então $\mathfrak{g} \simeq \text{Im } \rho$, donde podemos entender \mathfrak{g} como uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Agora, pelo Teorema 5.9, existe um subgrupo de Lie conexo de $GL(n, \mathbb{R})$, com álgebra de Lie \mathfrak{g} . \square

Exemplo 5.12. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita. sabemos que a imagem da representação adjunta da álgebra de Lie \mathfrak{g} é a álgebra de Lie das transformações lineares de \mathfrak{g} em \mathfrak{g} (lembrando que \mathfrak{g} é um espaço vetorial), dada por*

$$\text{ad}(\mathfrak{g}) = \{\text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

Seja $\langle e^{\text{ad}(\mathfrak{g})} \rangle$ o único subgrupo conexo de $GL(\mathfrak{g})$ cuja álgebra de Lie associada é $\text{ad}(\mathfrak{g})$. Como, pela Proposição 4.37, $e^{\text{ad}(X)} = \text{Ad}(e^X)$, os elementos de $\langle e^{\text{ad}(\mathfrak{g})} \rangle$ são automorfismos de \mathfrak{g} . Agora, se G é conexo, então $\langle e^{\text{ad}(\mathfrak{g})} \rangle$ é a imagem da representação adjunta Ad de G , pois nesse caso G e $\langle e^{\text{ad}(\mathfrak{g})} \rangle$ são gerados por exponenciais.

6 CONSIDERAÇÕES

Em suma, esse trabalho permitiu ampliarmos os conhecimentos sobre as álgebras de Lie, a medida que reconhecemos seu intercâmbio natural com os grupos de Lie. Através do estudo dos homomorfismos que estabelecem os elos de ligação entre essas estruturas, pudemos ter uma noção introdutória das características exigidas e transferidas durante os intercâmbios estudados.

Por outro lado, no processo de compreensão da natureza algébrica e geométrica desses objetos, durante os estudos preliminares, recapitulamos, complementamos e desenvolvemos conhecimentos sobre Álgebra, Análise, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Diferencial e Topologia. Além de introduzimos o trabalho com a Topologia Geral e as Variedades Diferenciáveis, geralmente, não contemplados nos cursos de Licenciatura em Matemática, contribuindo com a ampliação e solidificação dos conteúdos acadêmicos, bem como no vislumbre das amplas possibilidades de pesquisa em Matemática.

Portanto, o desenvolvimento desse projeto incitou importantes passos formativos, potencialmente, contribuindo com o prosseguimento acadêmico na área, por meio de estudos futuros mais profundos.

REFERÊNCIAS

- BAKER, Andrew. **Matrix Groups: An introduction to lie group theory.** [S.l.]: Springer, New York, 2002. 330 p. (Graduate Texts in Mathematics).
- GOMES, André de Oliveira. **Variedades diferenciáveis e grupos de Lie.** Notas de Aulas do Curso de Variedades diferenciáveis e grupos de Lie sob código MAT5799 - Instituto de Matemática e Estatística da USP. 2006.
- HALL, Brian C. **Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An elementary introduction.** USA: Springer, 2015. 451 p.
- LACERDA, Conrado Damato de. **Introdução aos Grupos de Lie e às Variedades Diferenciáveis.** dez 2007. 152 p. Dissertação (Mestrado) — Curso de graduação em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, dez 2007.
- LEE, John M. **Introduction to topological manifolds.** Second. [S.l.]: Springer, New York, 2011. v. 202. xviii+433 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 202).
- LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise, Volume 2.** Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 1999. 543 p.
- LIMA, Elon Lages. **Variedades Diferenciáveis.** Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2011. 289 p.
- MARTINS, Luiz Antônio Barrera San. **Álgebra de Lie.** Campinas: Unicamp, 2010. 491 p.
- MARTINS, Luiz Antônio Barrera San. **Grupos de Lie.** Campinas: Unicamp, 2016. 379 p.
- MATHEUS, Carlos José. **Grupos e álgebras de Lie.** RJ: SBM, 2014. 45 p.
- MUNKRES, James R. **Topology.** Second. [S.l.]: Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 p.