UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

VINÍCIUS GABRIEL SILVA NOGUEIRA

ANÁLISE DOS DIÁLOGOS QUE OCORREM EM UMA ATIVIDADE INVESTIGATIVA ENVOLVENDO MATEMÁTICA

Alfenas-MG

2021

Vinícius Gabriel Silva Nogueira

Análise dos diálogos que ocorrem em uma atividade investigativa envolvendo matemática

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Alfenas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Rejane Siqueira Julio.
Coorientador: Prof. Dr. Guilherme Henrique Gomes da Silva.

Alfenas-MG

2021

Vinícius Gabriel Silva Nogueira

ANÁLISE DOS DIÁLOGOS QUE OCORREM EM UMA ATIVIDADE INVESTIGATIVA ENVOLVENDO MATEMÁTICA

A banca examinadora, abaixo-assinada, aprova a monografia apresentada como parte dos requisitos para obtenção do Certificado de Conclusão do Curso de Matemática-Licenciatura pela Universidade Federal de Alfenas.

Aprovado em:

____

Profa. Dra. Rejane Siqueira Julio (Orientadora)
Universidade Federal de Alfenas

Prof. Dr. Guilherme Henrique Gomes da Silva (Coorientador)
Universidade Federal de Alfenas

Profa. Ma. Luciana Borges Goecking
Universidade Federal de Alfenas

Profa. Dra. Natalia da Silva Martins Fonseca
Universidade Federal de Alfenas

Profa. Dra. Andréa Cardoso (Suplente)
Universidade Federal de Alfenas

Agradecimentos

Gratidão é a palavra-chave pra tudo! Este espaço não seria suficiente para descrever tudo o que sinto e o quão importante cada pessoa citada aqui é para mim. Primeiramente, agradeço a Deus pela minha vida, por estar ao meu lado em todos os momentos e ser o motivo para eu sempre erguer a cabeça e avançar.

Agradeço à minha mãe Lourdes por ser minha inspiração. Sua dedicação, força e alegria são contagiantes. Você é tudo pra mim! Obrigado por sempre me incentivar. Ao meu pai Marcos, que nunca mediu esforços para me apoiar, com toda certeza, não escolhi ser professor por acaso e você tem uma parcela fundamental para isso acontecer. A minha irmã Larissa, companheira de todos os momentos, não sei o que seria de mim sem você. Te amo! Enfim, a todos meus familiares, o meu muito obrigado.

A todos meus amigos, em especial, aos mais chegados que irmãos, Flávio, Ludmila e Camila. Vocês foram fundamentais em todo o processo e sempre estiveram ao meu lado quando eu precisei. Contem sempre comigo! Aos meus amigos da igreja, do Alike e Estação Vida, considero-os como da minha família. Obrigado por cada oração, conselho, risada, choro, tudo o que vivemos me tornou alguém melhor e disposto a olhar para o próximo com mais empatia, amor e carinho.

Aos meus professores, não só o agradecimento como minha profunda admiração. Em especial, agradeço à minha orientadora Rejane e coorientador Guilherme por aceitarem o desafio de escrever este trabalho. Aprendi demais com vocês, suas aulas sempre me motivaram a ir além, a refletir e pensar fora da caixa. Com certeza, guardarei e tentarei colocar em prática cada ensinamento por toda a minha carreira.

A professora Daniela, pela coragem e confiança ao ceder um grande espaço das suas aulas para que as atividades dessa pesquisa pudessem acontecer e aos alunos, que aceitaram participar ativamente das aulas ministradas.

Por fim, agradeço a compreensão de todos os amigos e familiares pelo tempo dedicado a pesquisa e escrita desse trabalho, por não estar presente em algumas ocasiões.

"Saber dialogar é muito mais do que saber falar. Dialogar pressupõe ouvir e analisar, antes de responder."

Eugenio Mussak

Resumo

Muitos estudos estão sendo realizados na tentativa de compreender e sugerir melhorias para o atual cenário das aulas de Matemática no ensino básico e superior, que têm se caracterizado, na maioria dos casos, por uma forte presença do ensino tradicional, que consiste na exposição de conceitos, resolução de exercícios, o professor como figura central e o aluno como receptor passivo de conhecimentos. O objetivo desta pesquisa foi analisar como ocorrem diálogos em uma sala de aula por meio de uma atividade investigativa envolvendo matemática, visto que essa metodologia convida os alunos a se envolverem no processo de aprendizagem, conjecturando, argumentando e justificando suas escolhas, em outros termos, a assumir uma postura ativa, diferente do que ocorre no ensino tradicional. Para isso, foi elaborado um conjunto de atividades investigativas sobre probabilidade que foram desenvolvidas, em onze aulas, em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de Alfenas/MG. A análise dos diálogos foi feita utilizando três aulas e baseou-se nos três elementos essenciais da caracterização de diálogo (realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade), bem como as características (estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar) do Modelo de Cooperação Investigativa propostos pelo educador matemático Ole Skovsmose. Assim, considero que houve dificuldade em internalizar um espírito investigativo, tanto para o professor quanto para os alunos, mas o diálogo sempre esteve presente, permeando o ensino e uma aprendizagem mútua. A realização dessa análise permitiu uma reflexão sobre prática, visto que foi observada e discutida diferentes perspectivas sobre o jeito de ser, agir, falar e ouvir dos participantes envolvidos na interação.

Palavras-chave: Probabilidade. Diálogo. Investigação Matemática. Educação Matemática.

Abstract

Many studies are being carried out trying to understand and suggest improvements to the current scenario of mathematics classes in primary and higher education. These have been characterized, in most cases, by a strong presence of traditional teaching, which consists in the exposure of concepts, exercise resolution, the teacher as a central figure and the student as a passive recipient of knowledge. The objective of this research was to analyze how dialogues occur in a classroom through an investigative activity involving mathematics, since this methodology invites students to get involved in the learning process by conjecturing, arguing and justifying their choices. In other terms, students assume an active posture, different from what occurs in traditional teaching. To do so, a set of investigative activities on probability was elaborated and they were developed in eleven classes in a second year of high school class of a state school in the city of Alfenas/MG. The analysis of the dialogues was made using three classes and was based on the three essential elements of characterization of dialogue (conducting an investigation, taking risks and promoting equality), as well as the characteristics of the Model of Investigative Cooperation proposed by the mathematical educator Ole Skovsmose (i.e., establishing contact, perceiving, recognizing, positioning, thinking loudly, reformulating, challenging and evaluating). Thus, we consider that there was difficulty in internalizing an investigative spirit, both for the teacher and the students. However, the dialogue has always been present, permeating teaching and mutual learning. The realization of this analysis allowed a reflection on practice since different perspectives on the participants' way of being, acting, speaking, and listening were observed and discussed.

Keywords: Probability. Dialog. Mathematical Investigation. Mathematics Education.

SUMÁRIO

1. **INTRODUÇÃO**..08

2. **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**...12

3. **METODOLOGIA**..19

4. **DESCRIÇÃO DAS AULAS E ANÁLISES**...23

   4.1 LINGUAGEM PROBABILÍSTICA...23

   4.1.1 ROTEIRO DA AULA...23

   4.1.2 RELATOS E ANÁLISE DE TRECHOS DE INTERAÇÃO 24

   4.2 EXPERIMENTOS DETERMINÍSTICOS E ALEATÓRIOS...............................26

   4.2.1 ROTEIRO DA AULA...26

   4.2.2 RELATOS E ANÁLISE DE TRECHOS DE INTERAÇÃO.....................27

   4.3 CORRIDA DE CAVALOS...32

   4.3.1 ROTEIRO DA AULA...32

   4.3.2 RELATOS E ANÁLISE DE TRECHOS DE INTERAÇÃO.....................33

5. **CONSIDERAÇÕES FINAIS**...39

   REFERÊNCIAS..40

1. INTRODUÇÃO

Desde o nascimento, o ser humano busca compreender o mundo à sua volta, colocando-se, a partir de uma atitude investigativa e, muitas vezes mediado por atos dialógicos, procura agir e produzir significado para as coisas. Intimamente ligado a isso, o diálogo permite essa interação e aproximação com o outro, onde cria-se subsídios para uma aprendizagem mútua. A palavra diálogo, segundo Bohm (1996 apud ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) vem do grego *dia,* que significa "através", e *logos,* traduzido como "significado". Assim, Stewart (1999 apud ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) conclui que, nesse sentido, diálogo quer dizer *significar através,* ou seja, o processo de facilitar ou contribuir para o desenvolvimento de produção de significados por pessoas envolvidas em sua construção.

Devido às complexidades existentes nas interações entre professores e estudantes, o estudo sobre as diferentes formas de diálogos presentes em uma sala de aula mostra-se importante. Por exemplo, nas aulas de matemática, muitas vezes observamos estudantes sem autonomia e que somente comunicam-se em sala para responder, de forma correta ou errada, questões levantadas pelos professores.

Neste estudo, meu foco foi analisar diálogos que podem ocorrer em sala de aula a partir de uma atividade investigativa envolvendo matemática. Quando penso na motivação para me engajar neste estudo, me vem uma situação ocorrida em 2012, em uma noite de quinta-feira. Naquele ano, havia iniciado minha colaboração num projeto social que auxilia crianças de bairros carentes de Alfenas/MG e após o término de uma das atividades do projeto, estava levando um menino de 11 anos para casa, o mesmo estava comportando-se diferente aquele dia, estava muito quieto, não conversava com as outras crianças do projeto e não queria fazer nada. Minha preocupação me levou a ir conversando com ele durante o caminho, falando, falando e tentando entender o que estava acontecendo. Ele foi em silêncio durante o trajeto e deixei ele em sua casa, explicando pra sua mãe o que havia acontecido. Perguntei a ela se havia ocorrido alguma coisa e ela não soube me dizer. Me despedi, saí da casa e estava virando a esquina quando ouço a voz do menino me gritando, dizendo que precisava falar comigo. Foram 30 minutos de silêncio, ele demonstrava estar angustiado e falei comigo mesmo que dessa vez só ouviria o que ele tinha a dizer. Após esse momento desesperador de silêncio, ele desabou a chorar, contando o que estava acontecendo. Sua mãe tinha vários problemas de saúde, podia morrer e o que mais afetava isso era o seu vício, ela era alcóolatra. Seu padrasto era extremamente nervoso e também tinha problemas com bebida. Foram algumas horas de conversa em que eu não sabia o que fazer diante de uma situação tão complicada para uma criança, mas que estava disposto a fazer algo. Compreendi naquele exato momento, que o *ouvir* muitas vezes é melhor do que o *falar*.

Este episódio foi o *ponto de partida* para que eu pensasse, mesmo não sabendo como, contribuir de alguma forma na vida das pessoas. Mas fazer o que além do projeto? Eu? Aquele menino extremamente tímido, que por tamanha timidez andava de cabeça baixa temendo olhar nos olhos das pessoas? Os dois anos seguintes comecei a fazer teatro e dar algumas aulas no projeto, experiências que foram decisivas na minha escolha de fazer uma licenciatura.

Dessa forma, faço a prova do Enem no final de 2013 e consigo ingressar no curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG). O início foi bem complicado, meu rendimento acadêmico era bem fraco devido não saber estudar, ainda por cima trabalhava, mas nada me faria desistir desse sonho de lecionar e mudar a vida de pessoas.

Na universidade, meu olhar estava sempre atento a ouvir o que o outro tinha a dizer e alguns trabalhos acadêmicos que produzi foram nessa direção. O primeiro trabalho que desenvolvi na disciplina de Seminários II, no segundo período do curso foi analisar a perspectiva dos professores de matemática das escolas públicas de Alfenas (MG) sobre trigonometria em suas aulas. Através de um questionário, buscamos identificar as metodologias que eles utilizavam em sala de aula, compreender se os alunos tinham dificuldade neste conteúdo e se os professores acreditavam que o estudo de trigonometria seria importante no futuro de seus alunos (NOGUEIRA; MORENO, 2017). O segundo, desenvolvido através de experiências no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), foi analisar as aulas de Matemática, só que agora em outra perspectiva: a discente. Fizemos uma outra pesquisa de campo com 30 discentes escolhidos de forma aleatória nas escolas alfenenses e consideramos o olhar dos alunos sobre as metodologias utilizadas pelos professores, pela forma com que realizavam trabalhos/pesquisas e as formas de avaliação utilizadas (HENRIQUE; NOGUEIRA; MORENO, 2018). Outro trabalho desenvolvido como prática pedagógica da disciplina de Inferência e Estatística foi incentivar o estudo de algum dos conceitos estudados durante a disciplina com alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, especificamente o conceito de estimação, realizado por meio de uma oficina na universidade. A ideia foi observar como seria a experiência dos alunos com o contato dessa parte tão importante da estatística que muitas vezes é omitida em sala de aula (OLIVEIRA; NOGUEIRA; NOGUEIRA, 2018). E por fim, no trabalho mais recente, realizado durante meu último ano como bolsista do PIBID, fizemos uma análise de uma intervenção utilizando a abordagem investigativa para o ensino-aprendizagem de áreas, onde durante três meses desenvolvemos e observamos o contato dos alunos com essa metodologia, as falas durante a atividade e a avaliação feita por eles durante este período (REIS; NOGUEIRA; MORENO, 2018). Como é possível perceber a partir de meu caminho trilhado, ele me levou aos poucos a escolher o tema diálogo para o desenvolvimento do meu TCC, mas o momento decisivo ocorreu na disciplina de Estágio II, quando a docente realizou uma leitura sobre suas observações das regências realizadas pelos estagiários. Foi algo incrível pra mim, analisar minha regência de uma outra visão, considerando detalhes que eu não havia percebido, ouvindo atentamente cada palavra que eu falava e também as reações dos alunos durante a intervenção. A partir disso e diante do meu histórico, decidi pesquisar mais a fundo sobre os processos de comunicação em sala de aula a partir do desenvolvimento de aulas pautadas nas investigações matemáticas, mais precisamente, que tentam constituir cenários para investigação em salas de aula.

Segundo Alrø e Skovsmose (2006), o ensino baseado em uma abordagem tradicional é pautado em livros-texto (como apostilas e livros didáticos) que ocupam, juntamente com o professor o papel central no ambiente escolar, onde cabe aos alunos resolver exercícios e obter respostas únicas tidas como certas ou erradas. Não é que não possa existir uma interação de qualidade neste tipo de ensino, mas estes autores colocam que ela ocorre de um modo padrão em que o professor fala, o aluno escuta e quando o professor pergunta, a resposta considerada é, geralmente, a que o aluno fornece como certa, sendo a errada, descartada. Estes modelos de ensino e de interação são os que têm tido maior presença em salas de aula de matemática. Mas, ainda que um aluno responda algo que um professor deseja ouvir, pode ocorrer que ele pense de modo diferente do professor e isso impacte nas práticas futuras de sala de aula, como desânimo em participar de forma mais ativa das aulas de Matemática. Esse modelo de ensino e interação, deixa, muitas vezes, de olhar para os alunos e seus modos de produzir significados, que deveriam ser o foco do processo educacional. Então, uma pergunta se fez presente: que tipo de diálogo pode acontecer em aulas elaboradas e desenvolvidas com o intuito de serem investigativas?

Essa reflexão sobre a prática torna-se importante para nós professores em busca de melhorias no ensino e na aprendizagem dos alunos, visto que podemos analisar por diferentes perspectivas o nosso jeito de ser, agir, falar e ouvir dentro de sala de aula. Neste trabalho, serão apresentados trechos de interações ocorridas no desenvolvimento de uma atividade investigativa envolvendo probabilidade, realizada em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Alfenas (MG) no contexto de regências do subprojeto Multidisciplinar do Programa Residência Pedagógica da UNIFAL-MG. O objetivo foi realizar uma análise desses trechos buscando compreender como ocorrem essas interações, baseando-se na teorização sobre diálogo e no Modelo de Cooperação Investigativa descritos por Alrø e Skovsmose (2006). Para isso, realizei estudos sobre a teoria de diálogo (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, MILANI, 2017, 2020) e investigação nas aulas de matemática (SKOVSMOSE, 2000, PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006), acompanhei a turma escolhida durante alguns meses para conhecer as suas características, facilidades, dificuldades bem como me aproximar dos alunos e por último, elaborei e desenvolvi uma atividade investigativa envolvendo probabilidade, que consta no currículo do segundo ano do Ensino Médio, com base em Batanero (2005), Carvalho e Macedo (2015), Pietropaolo et al. (2015), Santos (2015) e Carvalho (2017).

Todo o desenvolvimento dessa pesquisa foi estruturado da seguinte forma: primeiramente, é apresentado o referencial teórico buscando discutir os conceitos de investigação matemática e diálogo. Após isso, relata-se como foi todo o processo metodológico desde a escolha do tema até a confecção do conjunto de atividades investigativas e finaliza-se com os resultados e discussões sobre as interações ocorridas na atividade.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) relatam que diferentes estudos na área da educação trazem a investigação como uma importante ferramenta para os estudantes construírem seu conhecimento. Para eles, investigar significa procurar conhecer o que não se sabe. Isso não consiste em solucionar problemas “impossíveis”, mas trabalhar com situações pedagógicas que demandem o desenvolvimento de determinadas estratégias por parte dos estudantes.

A investigação realizada por matemáticos profissionais acontece com o desenrolar de quatro momentos principais. O primeiro é o do reconhecimento do problema, explorações acerca dele e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao levantamento de hipóteses. No terceiro, realiza-se testes e, talvez, o refinamento das conjecturas formuladas. Por último, a explanação dos argumentos necessários para a demonstração e, também, a avaliação do que foi feito (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006).

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), os estudantes podem utilizar de processos semelhantes aos utilizados por matemáticos profissionais ao envolverem-se com investigações matemáticas em sala de aula e, segundo os autores, isso pode contribuir para o desenvolvimento de processos de aprendizagem ao mobilizar seus recursos cognitivos e afetivos para alcançar um objetivo. Nessa perspectiva, Braumann (apud PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 19) destaca a importância dessas atividades para a aprendizagem quando diz que

> Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andarem e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2002 apud PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p.19).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) – um documento de caráter normativo para o desenvolvimento curricular brasileiro homologado no dia 20 de dezembro de 2017 – reafirma o processo investigativo como estratégia para o ensino e a aprendizagem ao citar que

> [...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p.529)

Para a BNCC (BRASIL, 2018), este processo investigativo é uma forma privilegiada de atividade matemática, tanto é que das cinco competências[1] específicas de matemática e tecnologias para o Ensino Médio que devem ser garantidas aos estudantes, a segunda e a quinta dizem respeito às investigações:

> 2. Propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. [...] 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 523)

No entanto, este documento não aborda a forma como as investigações matemáticas podem ser desenvolvidas em sala de aula. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) nos oferecem subsídios para isso, afirmando que as atividades investigativas podem ser utilizadas na sala de aula de Matemática levando em consideração três fases:

> (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2006, p.25).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) afirmam que essas fases podem ser concretizadas de diferentes modos, afirmando que uma pequena introdução do problema a ser investigado, a investigação propriamente dita e a discussão dos resultados têm sido mais utilizadas por professores.

Na primeira fase de introdução do problema, que eles denominaram por arranque da aula, "o professor tem de garantir que todos os alunos entendem o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006,

1 Na BNCC (BRASIL, 2018, p. 8), "competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho."

p.26). Esse momento torna-se essencial devido ao ambiente favorável que se cria: os alunos têm suas ideias ouvidas e entendem que o professor espera que ele as discuta com os colegas.

Na segunda fase, que está relacionada ao desenvolvimento do trabalho investigativo, os alunos iniciam a exploração da atividade buscando se familiarizar com as informações apresentadas e, a partir daí, organizam suas ideias, buscam regularidades e formulam questões para os problemas encontrados. Após isso, os alunos devem testar suas conjecturas e, também, justificá-las, visto que muitos deles tendem a intitular suas ideias como conclusões. Neste momento, é importante que haja um registro dessas ideias, justamente para que eles as explicitem e entrem em consenso com o grupo de trabalho.

Por fim, a terceira fase é um momento importante de partilha de conhecimentos, em que os alunos podem divulgar e refletir sobre o trabalho realizado, colocar em confronto os principais resultados encontrados durante o processo de investigação e sistematizar as principais ideias, tudo isso, por meio da mediação do professor.

Skovsmose (2000) também discute o desenvolvimento de atividades investigativas em sala de aula, a partir da criação do que denomina de "cenários para investigação", que seria "um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação" (SKOVSMOSE, 2000, p. 3), em outros termos "é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações" (SKOVSMOSE, 2000, p. 6). Este autor afirma que aulas pautadas em cenários para investigação diferem de abordagens baseadas em exercícios, típicas das abordagens tradicionais de ensino, diferenciando-as por meio das chamadas "referências", que visam levar os alunos a produzirem significados para conceitos e atividades matemáticas. Essas referências são divididas em três tipos: atividades baseadas na matemática, atividades referindo-se a uma semirrealidade (realidade construída, como algumas criadas por autores de livros didáticos) e, por último, quando professores e alunos trabalham com atividades da vida real, chamada de realidade. Combinando essas referências e dois paradigmas de sala de aula (tradicional e cenários para investigação), Skovsmose (2000) propôs seis ambientes de aprendizagem, conforme o Quadro 1, que podem dar suporte a um trabalho de investigação.

Quadro 1 - Ambientes de Aprendizagem

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à Matemática	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências ao mundo real	(5)	(6)

Fonte: Adaptado de Skovsmose (2000)

Para o autor, é importante que as práticas pedagógicas em sala de aula não privilegiem unicamente o paradigma do exercício, mas que caminhem pelos diversos ambientes de aprendizagem. Skovsmose (2000) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) afirmam a importância do trabalho do professor em atividades envolvendo investigações. Para o primeiro, o professor tem a função de orientar os alunos no processo de ensino e aprendizagem e se depara com o que ele chama de “zona de risco” no movimento entre os ambientes de aprendizagem, em especial, no cenário para investigação pelo elevado grau de incerteza ou imprevisibilidade. A tarefa é que alunos e professores trabalhem juntos e façam da atividade um momento de aprendizado. É importante ressaltar que um cenário para investigação só é constituído em um cenário para investigação a partir do momento que os alunos aceitam o convite feito pelo professor. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), o professor é chamado a desafiar seus alunos durante todo o processo, motivando-os a realizar a tarefa desejada e avançar nas investigações. Cabe também ao professor, avaliar o progresso dos alunos e apoiá-los, mantendo uma postura interrogativa, buscando compreender os seus pensamentos, questionando-os, pedindo explicações. Por último, o papel do professor é explicitar o seu raciocínio matemático para os alunos como forma de auxílio na aprendizagem, pois quando isso acontece, os alunos podem aprender aspectos importantes do processo de investigação.

Tanto nos textos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) quanto de Skovsmose (2000), os autores trazem o que é investigar, abordam os papeis do aluno e do professor em uma aula investigativa, bem como evidenciam as interações entre eles. Mas Skovsmose (2000) fornece, ainda, mais elementos relacionados a interação, que estão presentes, por exemplo, em Alrø e Skovsmose (2006) e nos textos de Milani (2017, 2020), que toma como base as teorizações realizadas por Ole Skovsmose e aprofunda nas discussões sobre diálogo, uma vez que o autor está igualmente preocupado com questões relacionadas ao desenvolvimento do que chama de competência crítica. Para ele, cenários para investigação podem favorecer o desenvolvimento desta competência nos estudantes durante as aulas de matemática.

Segundo Alrø e Skovsmose (2006), normalmente, na comunicação em sala de aula, cujo professor utiliza de uma abordagem de ensino tradicional, podemos observar uma relação de desigualdade entre o professor e os alunos, denominado pelos autores como *absolutismo burocrático.* Nesse contexto, estabelece-se o que é certo e o que é errado sem deixar claro o porquê de tais decisões e, a partir disso, as interações ocorrem na forma de um padrão *sanduichado,* um jogo-de-perguntas e adivinhação, onde o professor pergunta, o aluno responde, e o professor avalia a resposta. O aluno não assume qualquer responsabilidade pelo processo de aprendizagem, sendo o professor o centro da atividade educacional.

Buscando uma alternativa aos padrões de comunicação presente no ensino tradicional, Alrø e Skovsmose (2006) propõem o Modelo de Cooperação Investigativa (Modelo-CI) conforme pode ser observado na figura abaixo.

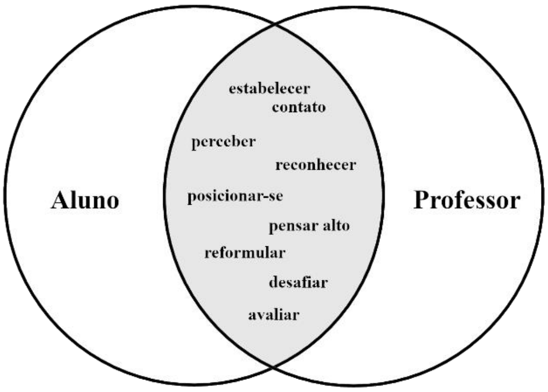

Figura 1: O Modelo de Cooperação Investigativa
Fonte: Alrø; Skovsmose (2006)

A elaboração do Modelo-CI foi realizada pelos autores a partir de uma conversa entre um professor e um grupo de alunos que exploraram um cenário para investigação conjuntamente. A expectativa é que o Modelo-CI "represente certas qualidades de comunicação que nos conduzirão a certas qualidades de aprendizagem" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p.108). Vale ressaltar, que segundo eles, a noção de "modelo" foi utilizada de forma neutra, não como um padrão de comunicação prescrito e recomendado.

Os elementos do Modelo-CI acima especificados são chamados de *atos dialógicos* e, referem-se a diversos conceitos inter-relacionados e características de comunicação que podem fazer parte de um processo de aprendizagem investigativa. Dessa forma, não necessariamente todos eles devem aparecer ou apresentar-se nessa ordem. São eles:

> [...] *estabelecer contato* envolve: questões investigativas, prestar atenção, *tag question*s, confirmação recíproca, apoio mútuo e bom humor. *Perceber* foi descrito valendo-se de indícios de investigação, curiosidade, questões ampliadoras e elucidativas, aproximação, questões de conferência, exame de possibilidades e questões hipotéticas. *Reconhecer* envolve esforços de explicação e justificação e o delineamento de ideias matemáticas. *Posicionar-se* é crucial para esgotar as possibilidades das justificações e está intimamente ligado a argumentação e observação. *Pensar alto* frequentemente surge na forma de questões hipotéticas e na manifestação de pensamentos e sentimentos. *Reformular* pode ocorrer como parafraseamento, complementação de meias-falas e manutenção do contato. Pode-se *desafiar* por intermédio de questões hipotéticas, exame de novas possibilidades, elucidação de perspectivas, atingindo, assim, um ponto de inflexão na investigação. *Avaliar* pressupõe apoio, crítica e feedback construtivos. (ALRØ, SKOVSMOSE, 2006, p.107-108).

Alrø e Skovsmose (2006) discutem algumas teorias acerca do conceito de diálogo e buscam relacioná-lo como uma conversação que desenvolve uma aprendizagem crítica. Eles caracterizam diálogo em três aspectos essenciais: (1) *realizar uma investigação*; (2) *correr riscos* e (3) *promover a igualdade*.

Realizar uma investigação está ligado a engajar-se numa reflexão conjunta: professor e alunos desejam descobrir algo de forma colaborativa. Nesse contexto, são identificados alguns atos investigativos: explicar, elaborar, sugerir, apoiar, avaliar as consequências. O primeiro aspecto leva os participantes a *correr riscos,* pois eles não conseguem prever os rumos que o diálogo pode tomar, visto que há diversas perspectivas em jogo e como não há respostas prontas, surge um sentimento de vulnerabilidade. Esse desconforto não pode ocorrer de forma exagerada, pois pode levar os alunos a se sentirem perdidos e consequentemente, desistirem da atividade. E por último, dialogar envolve uma relação *igualitária* onde todos têm direito a se expressar e são respeitadas as diferenças e a diversidade por meio da justiça, que "não tem a ver somente com aspectos emocionais, ela também se refere à forma com que se lida com o conteúdo do diálogo." (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 123).

Com o objetivo de analisar essas interações de uma forma ainda mais aprofundada, Milani (2017) foca no diálogo e sua importância. Para esta autora, o diálogo é uma forma de interação entre as pessoas envolvidas em atividades investigativas em que falar, escutar e discutir ideias é fundamental. Esta concepção de diálogo "tem como base uma postura política que acredita que não pode haver a fala dominada por apenas uma das partes, mas, sim, compartilhada entre as partes" (MILANI, 2017, p. 50).

Milani (2017, p.38) cita que "Ouvir os alunos é uma ferramenta poderosa para compreender o que eles dizem, mostram, sentem e fazem nas tarefas matemáticas". Complementando esta ideia, ela diz, baseada em Alrø e Skovsmose (2006), que para promover a aprendizagem em um diálogo o professor deve-se atentar a três características:

> [...] coerência, empatia e consideração. Ser coerente significa ser transparente e verdadeiro em relação ao que se pensa e faz. A empatia do professor aparece quando ele tenta entender o ponto de vista dos alunos, coloca-se no lugar do outro e tem consciência da perspectiva do outro. A consideração está relacionada a aceitar e respeitar o outro com quem se dialoga, sem a intenção de mudá-lo. (MILANI, 2017, p.40).

A autora teoriza sobre diálogo dizendo que ele é uma forma de interação entre professor e alunos, e que nesse processo de aprendizagem a fala e a escuta ativa são compartilhadas, há uma discussão sobre as ideias, e é necessário um entendimento sobre o que o outro quer e o que ambos querem dizer. O conceito de escuta ativa citado pela autora é descrito por Alrø e Skovsmose (2006, p.60) como o movimento de “fazer perguntas e dar apoio não verbal ao mesmo tempo em que tenta descobrir o que se passa com o outro.” Assim, Milani et al. (2017) diz que dialogar é:

> [...] “um movimento de ir até onde o outro está para compreender o que ele diz. O professor, preocupado com a aprendizagem de seu aluno, assume uma postura dialógica que procura sair de seu centro para compreender de onde o outro fala, em um movimento de idas e recuos, entre o seu conhecimento e o do aluno (MILANI, 2017, p.231).

Segundo Milani (2020), sua concepção sobre diálogo se modificou ao decorrer dos anos diante de suas reflexões e experiências nas aulas de Matemática. Assim, ela ampliou sua visão e entende diálogo como algo “subjetivo, pertence ao sujeito que dele diz, inserido em um contexto, num determinado tempo” (MILANI, 2020, p. 1037). Assim, não é algo permanente, mas transitório, o qual pode-se observar múltiplas interpretações, não desconexas entre si, descritas a seguir:

> Diálogo é estar com o outro, um movimentar-se para o outro. Ao dizer isso, já abordo o *diálogo como movimento*. Engajamento e compartilhamento de falas; *o diálogo como participação*. Perguntas, respostas e um prolongar de ideias; *o diálogo como discussão*. Será? O professor, os alunos, a atividade, as perguntas, as diversas intenções. Será que o diálogo vai acontecer? Assim é o *diálogo visto como incerteza*. A comunicação em atividades relacionadas a cenários para investigação; *o diálogo como investigação*. (MILANI, 2020, p.1037 – grifo nosso).

Importante notar que alguns atos dialógicos, tais como descritos por Alrø e Skovsmose (2006), ocorriam em outras atividades de aprendizagem que não necessariamente as de caráter investigativo e isso contribuiu para que Milani (2020), na nossa leitura, trouxesse sua modificação no conceito de diálogo, sugerindo múltiplas leituras para este conceito. Mesmo assim, ela mantém a crença de que “[...] dialogar é estar com o outro, é escutar ativamente o outro, é mover-se em direção ao outro” (MILANI, 2020, p. 1054).

Nesta seção, apresentei conceitos sobre investigações matemáticas, ambientes de aprendizagem e diálogo. Eles foram fundamentais para a elaboração e desenvolvimento de um conjunto de aulas, conforme discutirei abaixo na metodologia, e para a análise de algumas dessas aulas.

3. METODOLOGIA

Esta pesquisa possui uma abordagem qualitativa, visto que foi realizada uma análise dos diálogos de aulas elaboradas com a intenção de se constituírem como cenários para investigação, ou seja, não há uma quantificação dos dados para expor um quadro geral do que foram as aulas, mas ressaltar aspectos delas que nos permitem analisar a natureza dos diálogos ocorridos e sua importância para a prática docente. Quanto aos procedimentos técnicos, classifica-se como pesquisa-ação que, segundo Cervo, Bervian e Silva (2007), acontece quando pesquisadores e participantes estão envolvidos de modo colaborativo.

Para analisar como ocorreram os diálogos em uma sala de aula, foram elaboradas onze aulas para serem desenvolvidas em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de Alfenas (MG) tendo como como referencial teórico as discussões realizadas acima. O tema escolhido para as aulas foi probabilidade e elas foram desenvolvidas para o contexto de regências do subprojeto Multidisciplinar do Programa Residência Pedagógica da UNIFAL-MG (RP/UNIFAL-MG) com a orientação da professora orientadora, que é a minha orientadora de TCC, e acompanhamento da professora da escola que é chamada na RP/UNIFAL-MG de professora preceptora.

Por probabilidade, Carvalho (2017) entende que é um conceito de natureza multifacetada, ou seja, há diferentes perspectivas acerca dos significados de probabilidade, conforme Batanero (2005), que as sistematizou em cinco: intuitiva, clássica, frequentista, subjetiva e axiomática. Nas aulas, foram desenvolvidas duas perspectivas: a clássica e a frequentista, que abordarei aqui.

A probabilidade clássica, segundo Carvalho e Macedo (2015), foi sistematizada por Laplace e é a mais adotada no ensino até nos dias de hoje, com a seguinte abordagem:

> [...] centra-se na ideia da atribuição de um valor, representado por uma fração, que indica a probabilidade de um evento ocorrer de modo que o seu numerador representa os casos considerados sucessos em um experimento aleatório e o denominador representa todos os casos possíveis deste mesmo experimento. (CARVALHO, 2017, p.54).

A probabilidade de um evento A, denominada P(A), de acordo com essa definição pode ser expressa na fórmula abaixo, onde $n(A)$ são os casos favoráveis e $n(\Omega)$ são os resultados possíveis de um experimento aleatório, também chamado de espaço amostral e representado, por convenção, pela letra grega Ω.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Entretanto, Carvalho (2017) afirma que o referido significado apresenta fragilidades por não ser possível de aplicação nas diversas situações de caráter probabilístico, como por exemplo, em experimentos com o espaço amostral não-equiprovável (quando a probabilidade de diferentes resultados de um evento não são as mesmas) – por exemplo: lançar dois dados e somar os pontos obtidos, a probabilidade de cair um número será a variação que produz essa soma, no caso de sair o número dois (1+1) é 1/36 e de sair o número sete (1+6; 2+5; 3+4; 4+3; 5+2; 6+1) é 6/36 = 1/6 – ou nos experimentos em que a variável é contínua (os espaços amostrais são infinitos) – por exemplo: suponha que temos de escolher um número ao acaso no intervalo [0,1] e calcular a probabilidade de escolhermos o número 0,19031995.

Já a probabilidade frequentista, se dedica a calcular a probabilidade de determinado evento a partir de um número crescente de experimentos como, por exemplo, uma pessoa jogar um dado 50 vezes, anotar o resultado de cada jogada e calcular a probabilidade de sair o número 3 diante das 50 jogadas efetuadas. Assim, o objetivo é "relacionar a probabilidade da experiência aleatória com a frequência relativa do acontecimento, que tende a estabilizar quando se repete esta experiência um número grande de vezes tendendo a infinito: $\lim_{n \to \infty} Fr_n(A) = P(A)$" (CARVALHO, MACEDO, 2015, p.3), em que $Fr_n(A)$ é a frequência relativa do evento A e n é o número de vezes que se repete o evento.

As aulas foram elaboradas com inspiração nos cinco caminhos que Pietropaolo et al. (2015) sugerem ao se tratar de Probabilidade: o desenvolvimento do pensamento probabilístico, a compreensão dos significados de eventos aleatórios e determinísticos, o estudo do espaço amostral, definições de probabilidade e propriedades e a resolução de situações envolvendo o cálculo de probabilidades.

Para desenvolvimento do pensamento probabilístico, foi elaborada a primeira aula que tinha como objetivo promover um diálogo com os alunos na forma de uma roda de conversa sobre os termos envolvidos no que Santos (2010) chama de Linguagem Probabilística: "*impossível, pode ser, possível, bastante provável, certo, se espera que, seguro, há alguma possibilidade, há alguma probabilidade, incerto* - que são utilizadas pelos alunos para expressar as medidas de chances de determinados eventos" (SANTOS, 2015, p.41).

Segundo a autora, uma discussão sobre o uso da linguagem torna-se importante, pois as respostas dos alunos derivam-se de diferentes contextos (pessoais, escolares e externos) e, ao relacionar a linguagem formal com a utilizada em seu cotidiano, os alunos desenvolvem conceitos científicos sobre probabilidade. Assim, apresentamos alguns exemplos sobre cada termo probabilístico e propomos uma tarefa de refletirem sobre como classificariam os possíveis resultados de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas, onde cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos (Figura 2). Ao final deixamos uma tarefa (Figura 3) que iríamos desenvolver na próxima aula, sobre experimentos determinísticos e aleatórios, para que os alunos tentassem realizar em suas casas.

Em relação a compreensão dos significados de eventos aleatórios e determinísticos, na segunda aula discutimos com os alunos as diferenças existentes entre esses experimentos com base em Silva (2002). O autor classifica os experimentos determinísticos como eventos que podem ser repetidos várias vezes, em condições semelhantes e apresentam resultados previsíveis – por exemplo: calcular o tempo que um carro percorre um trajeto de 100Km numa velocidade média de 80Km/h – e, experimentos aleatórios, como aqueles eventos que repetidos várias vezes, nas mesmas condições, apresentam variações no resultado, ou seja, não conseguimos prevê-los – por exemplo: lançar uma moeda e observar a face voltada para cima. Após esse primeiro momento, como os alunos não tinham realizado a tarefa deixada na última aula, buscamos promover um diálogo a fim de entender como cada um dos alunos classificaria os eventos propostos na tarefa (Figura 3).

A fim de estudar o conceito de espaço amostral, a terceira e a quarta aulas foram dedicadas para que os alunos jogassem o *"Corrida de Cavalos"*, baseado em Skovsmose (2000), e, após o jogo, discutissem as decisões tomadas, as probabilidades de cada cavalo ganhar a corrida e se familiarizassem de uma forma prática com os termos probabilísticos vistos na primeira aula.

As próximas quatro aulas (quinta, sexta, sétima e oitava aulas) foram utilizadas para uma fundamentação teórica com os alunos acerca das definições e propriedades das probabilidades clássica e frequentista. Após cada conceito estudado realizamos algumas atividades em dupla para que os alunos pudessem colocar em prática as discussões realizadas até aqui.

Na nona e na décima aulas realizamos uma atividade com o jogo *"Blackjack"*, que tinha como objetivo observar se a tomada de decisão dos alunos diante as jogadas seria baseada nas probabilidades envolvidas ou simplesmente intuitiva.

Para finalizar a sequência de aulas, levamos a turma para o Laboratório de Educação Matemática da UNIFAL-MG para assistir ao filme "Quebrando a banca", que relata a história de um grupo de jovens que se juntam ao professor da universidade para jogar *Blackjack* nos cassinos de Las Vegas, utilizando probabilidade.

Para a elaboração dessas aulas, tentamos transitar pelos ambientes de aprendizagem, conforme discutido por Skovsmose (2000). Por exemplo, nas terceira e quarta aulas, em que abordamos corrida de cavalos, estas aulas transitaram em um ambiente de semirrealidade (ambiente 4) de um cenário para investigação. A quinta, sexta, sétima e oitava aulas foram mais baseadas em exercícios como nos ambientes (1) e (3), com referências a matemática e a semirrealidade.

É importante dizer que as aulas foram elaboradas e desenvolvidas por mim e por uma residente do subprojeto Multidisciplinar do Programa Residência Pedagógica da UNIFAL-MG. Nos trechos de diálogo, vou me referir a mim como pesquisador e a residente como residente. Tendo em vista a grande quantidade de dados, optei por selecionar e analisar trechos de interação de três aulas: (1) Linguagem Probabilística, (2) Experimentos Determinísticos e Aleatórios e (3) Corrida de Cavalos. Essas aulas foram escolhidas por serem exemplares em termos de diálogos (ou não) que conseguimos realizar em sala de aula, sendo a primeira e terceira com mais elementos dialógicos e a segunda em que parece que o diálogo não aconteceu. Essas aulas foram ministradas de forma conjunta, onde em determinados momentos eu assumia a frente da atividade e em outros, a residente, sendo os trechos de diálogos trazidos oriundos de minhas notas de campo – anotações pessoais em um caderno. Essas aulas serão descritas e analisadas na próxima seção.

4. DESCRIÇÃO DAS AULAS E ANÁLISES

Nas subseções abaixo descreverei e analisarei as aulas com base nos referenciais teóricos abordados nesse TCC.

4.1 LINGUAGEM PROBABILÍSTICA

A primeira aula, Linguagem Probabilística, teve o seguinte roteiro:

4.1.1 ROTEIRO DA AULA

Esta aula foi planejada de acordo com as discussões de Santos (2015), que desenvolveu a atividade "Linguagem Probabilística" com o objetivo dos alunos produzirem significados para os termos e conceitos probabilísticos. A atividade pode ser observada a seguir:

Tarefa 1 – Linguagem probabilística Considerando os possíveis resultados de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas − em que cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos −, classifique com uma das palavras do quadro abaixo os acontecimentos citados:
Impossível - *pode ser* – *possível* - *bastante provável* – *certo* - *se espera que* – *seguro*- *há alguma possibilidade* - *há alguma probabilidade* - *incerto*
a) A soma ser um número ímpar: b) A soma ser um número menor do que 10: c) A soma ser o número 12: d) A soma ser um número maior do que 0: e) A soma ser o número 0: f) Os colegas apresentarem números de dedos distintos: g) Os colegas apresentarem números de dedos iguais:

Figura 2: Atividade sobre a Linguagem Probabilística
Fonte: Santos (2015)

Pedimos para que os alunos formassem duplas. Essa fase da atividade é de grande importância, pois é com o colega da dupla que o aluno explicitará suas primeiras ideias sobre probabilidade. Assim, com as duplas formadas, entregamos a tarefa e questionamos os alunos se eles já ouviram esses termos em seu cotidiano. Como eles responderam afirmativamente, pedimos que eles dessem alguns exemplos. Após isso, pedimos que eles discutissem entre si quais os termos apropriados para cada uma das afirmações. Fomos conversando com algumas duplas, mediando as discussões e apoiando nas dúvidas que surgiram.

O último momento da atividade consistiu nas duplas apresentarem as suas conclusões para a turma. Essa reflexão conjunta é importante para a elaboração do conceito de probabilidade, pois os alunos conseguem identificar relações e distinções entre seus pensamentos com os dos colegas, chegando (ou não) a um consenso. Vale ressaltar que os termos discutidos, estavam presentes nas próximas atividades, assim, equívocos na interpretação de enunciados e na apresentação de ideias poderiam ser discutidos mais vezes.

4.1.2 RELATOS E ANÁLISE DE TRECHOS DE INTERAÇÃO

Ao chegar em sala, nos deparamos com um imprevisto. Os alunos estavam agitados devido ao interclasse (jogos estudantis) que estava acontecendo em horário síncrono à aula. A professora de Educação Física retirou dez alunos de sala e com isso, passaram-se dez minutos da regência. Após o ocorrido e com a agitação mais controlada, iniciamos o planejamento realizando uma conversa com os alunos sobre o objetivo dessas aulas utilizando a metodologia investigativa, demonstrando a importância que daríamos aos processos de comunicação e de construção de cada conceito, e que buscaríamos analisar os diálogos entre eles e com a gente. Assim, pedimos que se sentassem em duplas para a realização da primeira atividade. Foi um momento de *estabelecer contato* com os alunos, de dizer da importância do apoio mútuo e propor a primeira tarefa (Figura 2). A partir disso, decorreu o seguinte trecho de interação:

> *Aluno 1: Posso mostrar zero? (numa disputa de par ou ímpar em que cada jogador só pode usar uma das mãos)*
> *Pesquisador: Por que não?*
> *Aluno 1: Mas o zero é par ou ímpar?*
> *Aluno 2: Par, porque 1 é ímpar.*
> *Aluno 3: Qual a diferença entre possibilidade e probabilidade? (fala em um tom de voz alto)*
> *Pesquisador: O que você acha?*
> *Aluno 3: As palavras parecem muito.*
> *Pesquisador: Sim, mas possuem alguma diferença. Qual será? Pensa mais um pouco que já vamos discutir com todo mundo.*
> *Aluno 4: É possível existir números negativos no par ou ímpar?*
> *Aluno 5: Lógico que não, vou mostrar como -1 dedo? -2 dedos? Não faz sentido.*
> *Aluno 6: A atividade tem resposta certa?*
> *Residente: Não, queremos analisar o que vocês pensam, o que vocês acham para cada caso. Não estamos avaliando se a resposta está certa ou errada.*

Pelo trecho de interação acima, considero que alguns alunos aceitaram o convite proposto de discutir a atividade. Digo alguns, porque havia muitas duplas e eu não consegui estar em todas ao mesmo tempo. A minha tentativa foi de ouvir atentamente o que eles pensavam – para posteriormente discutirmos com a turma – de realizar uma escuta ativa e promover uma interação que não estivesse interessada no certo ou no errado, mas que fosse problematizadora e pudesse contribuir para discussões entre os alunos e para produção de conhecimento. Considero ainda que nessa interação houve diálogo porque observo alguns atos dialógicos como *estabelecer contato*, já mencionado, e por outros elementos como o *perceber*, pelos questionamentos sobre o mostrar o zero, o *desafiar*, quando há questões sobre a possibilidade de ter números negativos pares e ímpares e o *posicionar-se* por dizer da não possibilidade de ter números negativos pares e ímpares na tarefa (Figura 2), pela associação com os dedos das mãos.

Os minutos finais da aula foram dedicados para realizar a discussão com toda a turma sobre a resposta de cada dupla. Dessa forma, montamos uma tabela na lousa, de forma que todos visualizassem a resposta de cada dupla para uma afirmação do jogo de par ou ímpar. Nesse momento, houve uma grande participação dos alunos e aí vemos de forma mais efetiva a aceitação do convite para participar de uma atividade investigativa. Prelo trecho abaixo vemos uma discussão sobre os termos probabilísticos incerto e impossível.

> *Aluno 7: Qual a diferença entre incerto e impossível? [fala ao observar uma divisão entre a opinião das duplas sobre a possibilidade da soma ser o número 12 no caso do par ou ímpar]*
> *Aluno 8: O incerto não nos diz nada. Já o impossível não acontece.*
> *Aluno 9: Os dois são iguais.*
> *Pesquisador: Será mesmo que são iguais?*
> *Aluno 4: Não, porque a maior soma possível é 10. Então, é impossível o resultado ser 12.*
> *Aluno 9: Agora entendi.*

Essas palavras causaram um estranhamento nos alunos, sendo que um afirmou serem iguais e outros não. A turma ficou dividida, enquanto alguns perceberam as diferenças, outros ainda ficaram com dúvidas. O mesmo ocorre no diálogo seguinte, quando o Aluno 3 retoma sua pergunta do primeiro diálogo e quer saber a diferença entre possibilidade e probabilidade. A residente então discute que a única diferença será que a probabilidade poderá ser quantificada. Poderíamos ter aprofundado e talvez questionado o aluno de uma outra forma do que apenas saciar sua dúvida, mas o horário da aula já havia terminado e precisávamos sair de sala. Assim, não conseguimos finalizar as discussões, mas sentimos que houve um diálogo onde a maioria da turma havia compreendido a diferença entre os termos discutidos. Aqui é importante dizer que mesmo planejando uma aula para abordar Linguagem Probabilística com, aparentemente, pouca coisa a ser feita, o tempo não foi suficiente em termos de prolongar e aprofundar na interação com os alunos.

Para finalizar a aula, entregamos uma folha para eles com a definição de experimentos determinísticos e experimentos aleatórios, e pedimos para que em casa eles tentassem classificar os itens dados na tarefa para discutirmos estes conceitos no início da aula do dia seguinte.

4.2 EXPERIMENTOS DETERMINÍSTICOS E ALEATÓRIOS

A aula sobre experimentos determinísticos e aleatórios apresentava o seguinte roteiro de desenvolvimento:

4.2.1 ROTEIRO DA AULA

A próxima atividade foi planejada para dar continuidade a compreensão dos significados de eventos aleatórios e determinísticos dos alunos, com base em Silva (2002) que sugere a seguinte tarefa com uma lista de dez experimentos:

Tarefa 2

A seguir temos uma lista com dez experimentos (testes, experiências):

1. Lançamento de uma moeda.
2. Lançamento de uma moeda e observação da face voltada para cima.
3. Lançamento de um dado.
4. Lançamento de um dado e observação do número da face de cima.
5. De um baralho comum de 52 cartas, retirar uma carta e observar seu naipe.
6. Sortear uma bolinha no bingo e verificar o número.
7. Lançar um dado e verificar a velocidade com que ele atinge o solo.
8. Verificar a que temperatura um determinado tipo de leite ferve.
9. Encontrar um semáforo em condições normais de funcionamento, e observar qual é a cor que ele está indicando.
10. Abandonar um corpo em queda livre a partir de uma altura conhecida e determinar o tempo gasto para este corpo atingir o solo.

Figura 3: Atividade sobre Experimentos Determinísticos e Aleatórios
Fonte: Silva (2002)

Para o desenvolvimento da aula, entregamos a atividade aos alunos e pedimos para eles analisarem, conjecturarem e classificarem cada exemplo de experimento em determinístico ou aleatório. Com isso, o objetivo é que eles compreendam as diferenças existentes entre esses eventos. Em outro momento, pedimos para os alunos compartilharem as suas ideias com toda a turma e nos colocamos na posição de ouví-los atentamente sobre como eles desenvolveram a atividade para, então, a partir daí, formalizarmos os conceitos de experimento determinístico e experimento aleatório.

4.2.2 RELATOS E ANÁLISE DE TRECHOS DE INTERAÇÃO

Conforme relatei acima, na análise da primeira aula, essa tarefa foi deixada como atividade para ser realizada em casa, mas somente dois alunos fizeram. Assim, tivemos que realizar uma alteração no planejamento e discutir com toda a turma, caso a caso, os exemplos da atividade. Iniciamos a aula questionando os alunos sobre a diferença entre experimentos determinísticos e aleatórios, onde ocorreu o seguinte trecho de interação:

> *Pesquisador: Qual a diferença entre um experimento determinístico para um aleatório?*
> *Aluno 1: O determinístico você vai saber mais ou menos qual vai ser o resultado. Agora, o aleatório os resultados vão ser diferentes.*
> *Aluno 5: No caso, o que eu penso... determinístico é algo determinado. Tipo, eu soltar essa folha vai sair escrito (referindo à folha que está segurando).*
> *Residente: Então seria uma coisa que você sabe o que vai acontecer no final?*
> *Aluno 5: É. E o aleatório, é o que você não sabe.*
> *Residente: Todo mundo concorda... com essa fala do nosso colega?*
> *(Os alunos balançam a cabeça afirmativamente)*
> *Residente: Então tá bom. Tá certo.*
> Pesquisador: É isso mesmo, essa é a ideia.

Nas falas anteriores, podemos perceber outros passos citados pelo MCI. O aluno 1 expressa sua ideia ao *Pensar alto*, desenvolvendo sua concepção sobre a diferença entre os experimentos numa forma de investigação verbalizada. Já o Aluno 5, tende a *Reformular* o que foi dito pelo Aluno 1 com palavras diferentes, confirmando a ideia anterior com um exemplo. A residente então *avalia* o que foi dito pelo aluno 5 através de uma questão hipotética com o objetivo de auxiliá-lo no processo de aprendizagem.

Prosseguindo a atividade, buscamos identificar como os alunos classificaram cada evento da Tarefa 2, conforme pode ser observado nos trechos abaixo:

> *Pesquisador: Primeiro: lançamento de uma moeda. É determinístico ou aleatório?*
> *Aluno 4: Aleatório. (convicto de sua resposta)*
> *Aluno 1: Determinístico.*
> *Residente: Eu só vou lançar a moeda. Na hora que eu lançar a moeda, o que eu sei que vai acontecer com ela?*
> *Aluno 5: Vai sair cara ou coroa.*
> *Residente: Não, mas eu só tô lançando a moeda.*
> *Aluno 4: Só tá jogando ela pra cima.*
> *Residente: Isso. Eu sei o que vai acontecer?*
> *Aluno 4: Ela vai cair no chão. Ah... então é determinístico.*
> *Aluno 5: É verdade. (e conversa com o aluno 4 particularmente)*

Destaca-se neste trecho a *reformulação* da conjectura inicial do Aluno 4, que através dos diálogos seguintes entre a residente e os colegas, percebe que sua afirmação está incorreta e com a explicação dada pela residente, repensa sua resposta e parece demonstrar que chegou a um consenso sobre o porquê desse exemplo ser determinístico. Quando pensamos em diálogo, essa responsabilidade dividida entre professor e aluno sobre o seu processo de aprendizagem é fundamental para que o contato seja mantido, pois há confiança entre as partes. A interação continua, agora sobre o segundo experimento:

> *Pesquisador: O segundo é o lançamento de uma moeda também, só que agora deve-se observar a face voltada para cima. Isso é um evento determinístico ou aleatório?*
> *Aluno 5: É aleatório.*
> *Residente: Eu sei se é cara ou coroa que está para cima?*
> *Aluno 5: Sabe.*
> *Residente: Sei??*
> *Aluno 5: Se eu olhasse...*
> *Residente: Não. Eu peguei a moeda, joguei... eu sei se vai cair cara ou coroa?*
> *Aluno 5: Não. É aleatório.*
> *Residente: Não sei né? Então vai ser determinístico?*
> *Aluno 1: Não.*
> *Residente: Vai ser...*
> *Alguns alunos: aleatório*
> *Residente: porque a gente não sabe qual vai ser o resultado.*
> *Aluno 1: mas você já sabe as opções, então você sabe determinar: q é cara ou coroa.*
> *Residente: mas você não sabe qual é o resultado certo que vai dar. Se você vai observar a face, você quer saber se vai cair cara ou coroa. Mas não sabe o que vai cair.*
> *Pesquisador: olha a definição aí... determinístico: apresentam resultados constantes, é sempre o mesmo. Agora olha o aleatório: apresentam resultados variáveis. Quando você joga a moeda, é sempre a mesma coisa que vai cair?*
> *Aluno 4: Não*
> *Pesquisador: Não, pode ser cara ou coroa. Certo? Essa que é a diferença.*
> *Aluno 7: Se você pegar os números de acidentes ocorridos em um dia na cidade é um experimento aleatório, porque hoje pode ser uma certa quantidade e amanhã outra.*

Residente: Nossa, tá doido! (rindo)

A comunicação presente no trecho acima pode ser caracterizada por um *diálogo como discussão* (MILANI, 2020) pelas perguntas e respostas e pelo prolongar de ideias, pois as perguntas feitas pela residente possibilitaram que os alunos 1 e 5 se *posicionassem* em relação as suas perspectivas. Quando pedi que revessem a definição, a intenção foi prolongar o diálogo, debatendo as ideias ali presentes. O aluno 7 torna o seu pensamento público e parece tentar esclarecer a diferença entre os experimentos ao dar mais um exemplo. Assim, prossegue as seguintes falas:

Pesquisador: Próximo... o lançamento de um dado.
Residente: Vou só lançar o dado.
Aluno 5: Determinístico.
Aluno 1: Não entendi.
Aluno 5: Né possível mano, acabou de explicar o bagulho da moeda.
Pesquisador: É a mesma coisa, só lançar o dado.
Aluno 5: eu taquei o dado em alguém... é isso!
Pesquisador: o lançamento de um dado e a observação da face voltada para cima
Aluno 5: Aleatório
Pesquisador: De um baralho comum, com 52 cartas, retirar uma carta e observar o seu naipe.
Aluno 5: Aleatório.
Pesquisador: E aí, todo mundo concorda?
Residente: Se eu estou observando o naipe eu quero saber qual a carta que eu estou tirando. Tem como eu saber antes qual carta eu vou tirar? Não né. Então, também vai ser um evento aleatório.
Pesquisador: sortear uma bolinha no bingo e verificar o número.
Aluno 5 e 1: Aleatório.
Pesquisador: Isso. Você vai ver o número que saiu, mas você não sabe qual é.

Neste momento, podemos apontar dois aspectos que prejudicaram um diálogo assim como o esperado. O primeiro, está relacionado a falta de respeito por parte do aluno 5 que acaba ignorando a sugestão do colega sem ao menos tentar entender a sua perspectiva. Essa atitude é um tanto arriscada, pois pela falta de apoio mútuo e confiança, o colega poderia acabar "desistindo" da atividade, que em tese, deveria acontecer de forma colaborativa. Esse episódio me fez lembrar das discussões de Milani (2017) sobre as características essenciais para que uma pessoa favoreça a aprendizagem da outra, em que uma delas é a *empatia*. Precisamos, alunos e professores, estar dispostos a entender o ponto de vista dos outros participantes, colocar-se no lugar, aceitá-los e respeitá-los como pessoa. Isso não significa sempre entrar consenso, mas contribuir para que todos "tenham voz". O segundo aspecto que desfavoreceu o diálogo, diz respeito ao padrão de comunicação *sanduichado* que podemos identificar em alguns momentos.

Esse conceito citado por Alrø e Skovsmose (2006) aparece quando faço um questionamento, o aluno responde e avalio a resposta. Isso pode ser observado no trecho acima, pois ao considerar que as respostas dos alunos estavam corretas, eu simplesmente pulava para o exemplo seguinte.

Continuo expondo a interação ocorrida:

> *Pesquisador: Lançar um dado e verificar a velocidade com que ele atinge o solo.*
> *Aluno 8: Aleatório.*
> *Pesquisador e Residente: Será?*
> *Residente: Se eu pegar o mesmo dado e jogar ele aqui. Pegar esse mesmo dado e jogar ele lá em São Paulo. E pegar o mesmo dado e jogar lá no Estados Unidos.*
> *Luiz: Mas tá falando da altura.*
> *Ele vai cair em velocidades diferentes?*
> *Aluno 5: Não.*
> *Aluno8: Vai depender da força.*
> *Residente: Se eu lançar da mesma altura.*
> *Aluno 1: Mas aqui tá falando de alturas diferentes*
> *Aluno 4: Não, o exercício pediu para verificar a velocidade que atinge o solo, independente da altura.*
> *Residente: Ok! Mas a ideia aqui é: se eu repetir o mesmo experimento, nas mesmas condições. Isso me dá o mesmo resultado? Se eu pegar o dado na mesma altura, lançar com a mesma força, independente do lugar que eu esteja, eu vou ter a mesma velocidade?*
> *Alunos em geral: balançam a cabeça afirmativamente.*
> *Aluno 8: Menos na estratosfera.*
> *Residente: Aqui na Terra (rindo). O experimento é pra aqui. kkkk*
> *Aluno 5: Você já está complicando o bagulho.*
> *Residente: É, vocês estão trabalhando com questões físicas. Em resumo, a velocidade não vai se alterar. A não ser que esteja na Lua, marte...*
> *Aluno 1: Então o experimento é determinístico.*
> *Pesquisador: Isso!*
> *Pesquisador: Verificar a que temperatura um determinado tipo de leite ferve.*
> *Aluno 4: Determinado tipo de leite? Então é determinístico.*
> *Pesquisador: Isso aí!*

No trecho acima podemos identificar a discussão com uma problemática apresentada por Skovsmose (2000) quando estamos diante de cenários para investigação com referência a semirrealidade. Em uma aula tradicional de matemática, dificilmente apareceriam discussões referentes a condições físicas que influenciam a velocidade de um corpo atingir o solo como nesta referência, mas elas também podem prejudicar o andamento da aula. Isso se torna possível em uma aula investigativa, pois o professor não está preso necessariamente ao conteúdo da aula. Quando reflito sobre nossas aulas vejo que ainda precisamos avançar nesse sentido porque não conseguimos prolongar o diálogo quando o assunto adentrava outras áreas de ensino. Algumas explicações para isso talvez sejam: a insegurança por estar em uma zona de risco, o tempo limitado para dar conta de todo o planejamento ou ainda, por estarmos acostumados a reproduzir um modelo de aula baseado em perguntas e respostas, que geralmente observamos em sala de aula. Partindo para o fim da aula, as seguintes falas são observadas:

> *Pesquisador: Encontrar um semáforo em condições normais...*
> *Aluno 5: Difícil aqui em Alfenas.*
> *Pesquisador: [...] e observar qual é a cor que ele está indicando.*
> *Aluno 5: Determin....*
> *Aluno 1: É determinístico gente, porque só tem três cores.*
> *Aluno 5: Não, maas...*
> *Residente: Por exemplo, você sabe agora a cor que o semáforo aqui perto da escola está mostrando? Se é verde, vermelho ou amarelo?*
> *Aluno: Você vai ter que ficar contando*
> *Aluno 9: Tá verde.*
> *Residente: Tá verde hahaha ou então ele tá piscando no amarelo né? Como sempre porque não funciona. Mas pensando no nosso problema, não tem como a gente saber a cor que está em certo momento.*
> *Alunos: É aleatório!*
> *Aluno 5: Mas e quando estraga? (Falar baixinho para o colega que está ao lado)*
> *Aluno 4: Quando estraga é determinístico.*
> *Pesquisador: abandonar um corpo em queda livre a partir de uma altura conhecida e determinar o tempo gasto.*
> *Aluno1: Esse é determinístico. O do dado é aleatório, porque lá não falava sobre a altura... essas coisas*
> *Aluno 5: Deixa eu ver.... ah, é verdade! Quando você for verificar a velocidade, é aleatório.*
> *Aluno 1: Não está falando da altura, está falando... um dado.*
> *Pesquisador e Residente: É, vocês estão certos. Vocês nos convenceram hahaha*
> *Aluno 5: Então essa é determinístico.*
> *Residente: Exatamente, porque a altura já está pré-estabelecida. Desculpa.*
> *Pesquisador: Então, vocês conseguiram ver a diferença entre experimentos aleatórios e determinísticos?*
> *Residente: a gente fez isso pra vocês conhecerem que existem essas duas condições, dos eventos que eu consigo predizer o que vai acontecer e os que eu não consigo dizer o que vai acontecer. Porque? Nós vamos trabalhar somente com os eventos aleatórios, os determinísticos não vão nos interessar. Mas é válido vocês saberem que existe essa distinção.*

A frase "*É, vocês estão certos. Vocês nos convenceram hahaha*" resume o trecho acima. Nesse momento, fica claro o nosso constrangimento diante o ocorrido. Acabamos errando a interpretação de um dos problemas e aqui vivenciamos na prática o que Alrø e Skovsmose (2006) chama de *correr riscos*. Um diálogo é algo imprevisível, arriscado, as palavras vão surgindo no decorrer do processo e saímos da nossa zona de conforto. Esse era o nosso sentimento! Pela regência fazer parte do subprojeto Multidisciplinar da RP/UNIFAL-MG, o tema Probabilidade foi escolhido pela professora orientadora e pela professora preceptora. Eu e a residente desde o início nos sentimos um pouco inseguros por acreditar ser um tema difícil de ser trabalhado e que não tínhamos tanto domínio. Até mesmo após a aula, o sentimento era de frustração, tanto em relação a esse desconforto ocorrido quanto a dúvida se realmente conseguimos promover um diálogo conforme discutido nos referenciais teóricos. Parece que faltava algo mais e sempre havia a pergunta: será que o diálogo vai acontecer, em outros termos, o *diálogo como incerteza* (MILANI, 2020).

4.3 CORRIDA DE CAVALOS

4.3.1 ROTEIRO DA AULA

Nesta aula, nós dividimos a turma em dois grupos a fim de jogarem o *Corrida de Cavalos*, que é proposto por Skovsmose (2000). O objetivo do jogo é estudar a noção de espaço amostral e os possíveis resultados bem como as chances de cada cavalo ganhar essa corrida. Utiliza-se dois dados e um tabuleiro que representa a pista de corrida com cavalos numerados de 1 a 13. Pode-se fazer uma adaptação e ao invés de utilizar o tabuleiro, o professor poderá desenhar um esquema na lousa, conforme a figura abaixo:

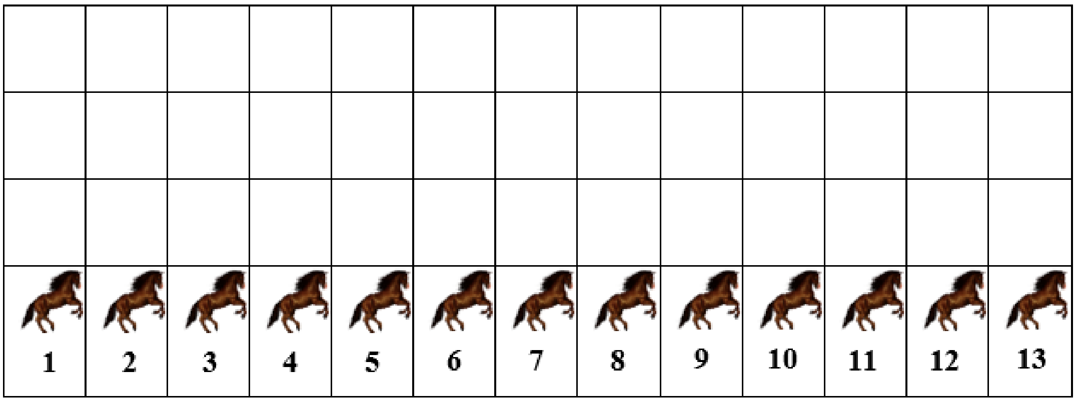

Figura 4: Representação da pista do jogo "*Corrida de Cavalos*"
Fonte: O autor

Cada aluno pode apostar em um cavalo. O cavalo movimenta uma casa quando, ao jogar dois dados, soma-se as faces voltadas para cima que resultará no número do cavalo. Por exemplo, se as faces voltadas para cima forem 2 e 4, o cavalo que se movimenta é o de número 6, porque 2+4 = 6. Os alunos jogam os dados até que um cavalo seja o vencedor, ou seja, até que ele movimente até a última casa (linha) correspondente a sua coluna.

Provavelmente, durante o jogo, os alunos começarão a levantar algumas hipóteses sobre as possibilidades envolvidas, mas após jogar algumas partidas, podemos discutir com os eles: será que todos os cavalos possuem a mesma chance de vencer? Os cavalos 1 e 13 parecem que não andaram, porquê? Qual o total de possibilidades que encontramos no jogo? O espaço amostral sempre será o mesmo? Como calcular essas probabilidades?

No quadro abaixo descrevo as possibilidades de resultados e o cálculo da probabilidade de cada cavalo vencer a corrida. O referido quadro pode ser disponibilizado “em branco” aos alunos para que, junto com as discussões, eles vão completando as lacunas.

Quadro 1: Possibilidades de resultados e a probabilidade de cada cavalo vencer a corrida

Chances para cada cavalo									
Cavalo								**Total**	**Probabilidade**
1								0	0
2	1+1							1	1/36 ≅ 2,78%
3	1+2	2+1						2	2/36 ≅ 5,56%
4	1+3	3+1	2+2					3	3/36 ≅ 8,33%
5	1+4	4+1	2+3	3+2				4	4/36 ≅ 11,11%
6	1+5	5+1	2+4	4+2	3+3			5	5/36 ≅ 13,89%
7	1+6	6+1	2+5	5+2	3+4	4+3		6	6/36 ≅ 16,67%
8	2+6	6+2	3+5	5+3	4+4			5	5/36 ≅ 13,89%
9	3+6	6+3	4+5	5+4				4	4/36 ≅ 11,11%
10	4+6	6+4	5+5					3	3/ 36 ≅ 8,33%
11	5+6	6+5						2	2/36 ≅ 5,56%
12	6+6							1	1/36 ≅ 2,78%
13			0					0	0

Fonte: O autor

4.3.2 RELATOS E ANÁLISE DE TRECHOS DE INTERAÇÃO

Ao disponibilizarmos o jogo, antes mesmo da explicação, os alunos já se mostravam interessados e muito agitados, até mesmo escolhendo os seus cavalos. Por essa agitação, estava difícil até mesmo para falar e explicar a atividade. Acredito que isso ocorreu porque os alunos não estavam acostumados com jogos em sala de aula, pelas observações que realizei de aulas de diferentes disciplinas (Matemática, Biologia e Português), tendo em vista que estava atuando no subprojeto Multidisciplinar da RP/UNIFAL-MG. Após alguns minutos, conseguimos controlar a situação e iniciamos a atividade explicando como aconteceria:

Pesquisador: para dar continuidade a nossa aula, nós vamos fazer um jogo.
Residente: abstraiam aí que essas bolinhas são cavalos (todos riem) [...] eu vou entregar essa folhinha... (alunos estão conversando muito alto) prestem atenção, pois vamos explicar somente uma vez. Nós vamos entregar essa folhinha aqui, vocês vão ver que tem rodada 1, 2, 3, 4, 5... no final de cada rodada, a gente vai anotar quantas vezes cada cavalo saiu. Qual é a ideia? Vocês vão apostar... estamos num jogo de apostas de corrida de cavalos. Vocês vão apostar em algum número que vocês quiserem. Não tem problema apostar no mesmo cavalo. Daí, nós vamos anotar o nome de vocês e qual cavalo vocês apostaram. Vamos fazer isso por 5 rodadas. Ok? Assim, vamos descobrir quem é o ganhador. Vocês podem escolher qualquer cavalo de 1 a 13 tá? Mas aí a gente anota só no final de cada rodada, certo? Cada aluno escolhe o seu cavalo...
Pesquisador: Como que vai funcionar? A gente vai jogar os dois dados, certo? E, a soma das faces para cima é o número do cavalo que anda.
Aluno 1: mas aí o cavalo anda a quantidade que cair no dado?
Residente: Não, ele só anda uma casa.

É nesse primeiro momento da aula que ocorre o convite aos alunos para jogar o "Corrida de Cavalos". Esse passo é fundamental na tentativa de criar cenários para investigação. O diálogo não pode ser algo imposto, é necessário que o contato seja estabelecido. Aparentemente os alunos aceitaram participar da atividade investigativa, escolhendo os cavalos e buscando compreender as regras do jogo, conforme observamos na fala do Aluno 1 acima. Residentes e alunos entraram em acordo. Vale ressaltar que um aluno da turma pediu para não participar do jogo, até tentamos motivá-lo, mas sem sucesso. Após esse momento, dividimos a turma em dois grupos e eu e a residente também nos dividimos, ficando cada um responsável por mediar a atividade em um dos grupos. As interações a seguir referem-se ao grupo 1, o qual fiquei responsável por acompanhar:

Inicia-se a rodada: um dos dados cai seis e o outro quatro...
Pesquisador: cavalo dez anda...
Aluno 5: mas pera aí... tem 13 cavalos e só 12 no dado. (aluno que apostou no cavalo 13)
Aluno 4: Hummm... verdade... escolhi o 1! (entendendo a fala do colega)
Aluno 8: verdade
Pesquisador: Oi?
Aluno 5: não tem como dar 13 no dado, só vai até doze. Eu quero trocar...
Pesquisador: agora não tem como trocar, porque foi o cavalo que você apostou...
Aluno 5: eu vou ficar paradão aqui, sem andar... ah nãoooo... (decepção) O dado só pode dar 12, olha... seis com seis igual a doze (explicando para o colega ao lado). Não quero mais jogar! Fui trolado!

[...] enquanto isso dá para ouvir um aluno do outro grupo dizendo:

Aluno 1: Esse dado só cai 8, 5 e 7... não cai o quatro
Aluno 5 para o outro grupo: alguém aí escolheu o 1 ou o 13.
Residente: Escolheu...

Aluno 5: Ah... tamo junto!

Foi mais rápido do que pensávamos! O jogo nem havia começado e a primeira jogada de dados parece ter levado o aluno 5 a *perceber* que algo estava errado. Esse ato dialógico está relacionado a questionar possibilidades do assunto proposto expondo suas perspectivas para o grupo e, é exatamente o que ele fez. Além disso, ele expressou o seu sentimento para os colegas ao *pensar alto* "*eu vou ficar paradão aqui, sem andar... ah nãoooo...".* Apesar de mostrar-se decepcionado com a sua situação, o aluno 5 continuou participando do jogo. Isso nos mostra como em uma atividade investigativa as observações dos alunos não atrapalham o desenvolvimento da atividade. Os alunos continuaram as jogadas e chegaram ao fim da primeira rodada. Aqui vemos o diálogo como investigação, como nos fala Milani (2020), porque os alunos aceitaram o convite e foi possível constituir um cenário para investigação. Nesse grupo que eu estava acompanhando, o vencedor é o cavalo 7 e o no outro, o cavalo 5. Antes do início da próxima rodada, começamos a ouvir alguns comentários interessantes:

Aluno 4: Eu vi uma coisa, a chance de cair 5, 6, 7 e 8 é maior.
Pesquisador: Então... agora todo mundo vai ter a oportunidade de trocar o cavalo se quiser, pode continuar no mesmo ou trocar.
Aluno 5: Sete! É o Sete que eu quero, eu falei primeiro.
Aluno 7: Eu vou querer o doze.
Aluno 4: O que? Você vai ter só uma chance, se tirar dois seis.
(Aluno 7 muda de aposta)

O aluno 4 parece seguro do seu posicionamento de que os "cavalos centrais" têm mais chance de sair e diz o que pensa ao aluno 7, indignado com a escolha do colega. Ele apresenta os seus argumentos ao declarar que o colega só teria uma chance (6+6) para ter sucesso na aposta. O aluno 7 aceita a sugestão e muda de cavalo. Sinto um desconforto ao analisar esse trecho, pois acredito que eu poderia ter prolongado o diálogo nesse momento. Uma simples troca da palavra *"Então..."* por *"Porquê?"* estimularia o Aluno 4 a explicar a sua hipótese para os colegas. Houve *escuta,* mas ela não foi *ativa.* Acabei absorvendo passivamente as palavras emitidas pelo aluno sem apoiá-lo no processo de aprendizagem.

Inicia-se a segunda rodada, os alunos parecem continuar motivados e dispostos a vencer a corrida. O jogo acontece e após o ganhador dos dois grupos ser o cavalo 7, o aluno 4 conclui a sua hipótese levantada anteriormente:

> *Aluno 4: Não foi sorte! É só vocês pensarem... eu falei que o sete é dos que mais saia. A chance de vir 1 é difícil, de vir 12 é difícil. É só vocês pensar... de vir 11 é difícil, de vir 2 é difícil. E o 7 está no meio!*
> *(Faz a colocação para toda a turma que, aparentemente, concorda com a afirmação)*
> *Pesquisador: É por aí... agora vamos discutir com todos...*
> *Aluno 6: E o que a gente ganha agora?*
> *Aluno 4: Vocês ganham conhecimento! Nunca aposte no número 1 num jogo que tem dois dados.*
> *Aluno 4: Aff! Mó bad, eu fui todo confiante lá no 1.*

A declaração do aluno 4 no trecho acima mostra o seu empenho em *reformular* o que já havia dito com palavras diferentes. Quando pensamos nessa característica de comunicação, os participantes do diálogo confirmam se há um entendimento comum ou discordância nas perspectivas. Aqui não é possível afirmar se houve consenso, pois um silêncio surge na sala de aula e apenas observa-se cabeças balançando afirmativamente.

A partir daí, iniciamos as discussões referentes ao estudo das noções de probabilidade envolvidas no jogo:

> *Residente: Antes de começar o jogo a gente não contou para vocês como era a regrinha né? Teve gente que escolheu o 1 ou o 13 no grupo de vocês?*
> *Alunos: Sim!*
> *Residente: E qual foi a primeira conclusão que vocês chegaram quando a gente contou sobre os dados?*
> *Aluno 5: Que eu ia perder!*
> *Aluno 4: Que eu ia ser eliminado da brincadeira.*
> *Aluno 5: Por que você descobriu isso?*
> *(Aluno 4 repete o que já havia afirmado anteriormente para toda a turma)*
> *Residente: Isso! Como o resultado era a soma das faces, qual era nossa menor soma?*
> *Aluno 6: 2*
> *Residente: E a maior?*
> *Aluno 6: 12*
> *Residente: Retomando a aula sobre a linguagem probabilística: qual palavra a gente caracterizaria a chance de somar 1 ou 13?*
> *Aluno 1: Incerta.*
> *Aluno 4: Impossível*
> *Residente: Impossível né? Se bem que pode ser incerta também, pois é a certeza que uma coisa não vai acontecer.*

Nesse trecho podemos observar a presença do que Alrø e Skovsmose (2006) chama de comunicação baseada em um jogo-de-perguntas, no qual os alunos tentam adivinhar o que a residente tinha em mente. Segundo os autores, isso pode ajudar os alunos a compreenderem algumas questões, ao mesmo tempo que eles podem desistir do processo investigativo. Nesse caso, a interação foi importante para a sistematização da ideia de evento impossível.

Outro ponto a se notar é a interpretação errônea dos termos incerto e impossível. Mais uma vez, a zona de risco se torna evidente diante da complexidade da linguagem probabilística. A residente parece insegura, mas confirma a suposição do aluno 1. Segundo Aulete (2008), a palavra *incerto* está relacionada a algo duvidoso, desconhecido, indeterminado; já *impossível* diz respeito a algo que não pode existir, impraticável. Dessa forma, a palavra correta para caracterizar esse evento seria impossível.

Prosseguindo a aula, nós pedimos que os alunos fossem preenchendo as suas tabelas com as chances de cada cavalo ganhar, colocando quais eram as possíveis combinações de soma quando jogamos o dado:

> *Residente: Quais são as combinações possíveis para que a soma dê 1?*
> *Alunos 4 e 6: zero*
> *Residente: Não tem como somar um. Ok!*
> *Residente: E o dois? Como eu posso somar dois com dois dados?*
> *Aluno 1: um mais um.*
> *Residente: É a única combinação que a gente tem, certo? E somar três?*
> *Alunos: 1 e 2*
> *Residente: (1,2) e (2,1)*
>
> [Anotação pessoal: A residente vai perguntando e os alunos respondendo... quando algo imprevisível, ou nem tanto, acontece.]
>
> *Residente: e para somar 8?*
> *Alunos: (4,4) (1,7) (7,1) (2,6) (6,2) (3,5) (5,3)*
> *Residente: e pra somar 9?*
> *Alunos: (1,8) (8,1) (2,7) (7,2) (3,6) (6,3) (4,5) (5,4)*
> *Aluno 10: mas não tem 7 no dado... (fala baixinho para um colega ao lado)*
> *Aluno 1: Não tem 7 no dado não!*
> *Aluno 4: Nóóóssa (surpreso)*
> *Residente: Eu tô só escrevendo o que vocês estão falando.*
> *Aluno 1: e eu tô só boiando.*
> *Residente: Então não tem essas possibilidades...*
> *Alunos: não....*
> *Aluno 1: todos que tem 1 é só tirar! (convicto)*
> *Residente: Todos que tem um?*
> *Aluno 4: até seis né?*
> *Aluno 1: Ah, eu já confundi tudo.*
> *Residente: Olha, o que a gente tirou era as combinações que tinham números maiores que seis.*
> *Aluno 1: Ah tá, agora entendi.*

Aqui, mais uma vez, aparece um jogo-de-perguntas que é quebrado com o diálogo do Aluno 10, aluno 1 e Aluno 4 e, depois, volta a ocorrer. A experiência me faz refletir sobre o quão difícil é sair do padrão de comunicação que estamos acostumados pois, por mais que tentamos, em diversos momentos acabamos entrando nele e ficando. E, aparentemente, entramos para não mais sair, já que o mesmo acontece na parte final da aula, quando discutimos com toda a turma a definição de espaço amostral:

> *Residente: Vamos preencher o total agora... (os alunos vão falando) Quantas são as possibilidades totais de combinações?*
> *Aluno 1: 3, 6... vai contando... 36!*
> *Residente: Vocês conseguem relacionar essas 36 possibilidades com os dados?*
> *Aluno 4: Nóóóssaa...*
> *Aluno 9: 6 vezes 6, 36.*
> *Residente: Então temos o que: seis números num dado e seis números no outro. Quando eu combino o dois a gente tem 36 possibilidades de combinação. Então eu posso dizer que a minha quantidade de combinações é o número de um dado vezes o outro?*
> *Alunos: Sim*
> *Residente: Se eu quiser quantificar as possibilidades deles pegando cada uma pelo total, como vai ficar a representação?*
> *Aluno 1: A primeira vai ficar 1 sobre 6. (1/6)*
> *Residente: Sobre seis?*
> *Aluno 1: Ou sobre dois.*
> *Residente: Quais são todas as minhas possibilidades de combinação?*
> *Aluno 1: 36.*
> *(a partir daqui os alunos vão completando... 0/36,1/36, 2/36... e assim sucessivamente...)*
> *Residente: Então, se eu quiser representar a possibilidade por um número quais vão ser as chances de cada um, eu pego as combinações de cada e divido pela quantidade total de combinações. A gente tem um nome pra essas 36 combinações. Alguém sabe qual é esse nome?*
> *(os alunos ficam chutando alguns nomes)*
> *Residente: Isso recebe o nome de Espaço Amostral. Como a gente obteve esse espaço amostral? Pegando a quantidade de números que eu tenho em um dado vezes a quantidade de números que eu tenho no outro. Nesse caso, o meu espaço amostral é 36. Nós vamos precisar desse conceito em nossas próximas aulas. Então vamos pensar: se eu tivesse jogando duas moedas, qual seria o meu espaço amostral?*
> *Aluno 1: 4.*
> *Residente: E se eu tiver três moedas?*
> *(novamente eles ficam tentando adivinhar, chutando vários números, parecem confusos)*
> *Residente: A nossa ideia com essa atividade era discutir a questão do espaço amostral com vocês.*
> *Pesquisador: E se fossem esses dados? Qual seria o espaço amostral? (mostrando alguns dados diferentes, com mais faces do que o normal). Os alunos ficam surpresos e entusiasmados com aqueles dados que nunca tinham visto antes. E assim termina a aula.*

Mesmo sabendo que ainda precisaríamos avançar no conceito de espaço amostral, acredito que conseguimos *desafiar* os alunos a pelo menos a refletir, em diferentes contextos, como se daria esse cálculo do total de combinações possíveis. Isso foi possível por meio de questões do tipo “E se...”, na tentativa de questionar os conhecimentos e perspectivas que tinham sido estabelecidos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho descreveu algumas interações presentes em três aulas investigativas de matemática envolvendo Probabilidade, aplicada em uma turma do 2° ano do Ensino Médio. A proposta foi analisar como os diálogos aconteciam, por meio de atividades, colocando o residente como pesquisador e auxiliar deste processo e os alunos como protagonistas.

As experiências vivenciadas durante a pesquisa me ajudaram a refletir sobre a prática, pois alguns desafios encontrados foram: internalizar um espírito investigativo, tanto para o professor quanto aos alunos, visto que ambos não estavam acostumados com esse processo de investigar, questionar, prolongar as ideias; o tempo de preparação e desenvolvimento das atividades, pois aulas investigativas demandam discussões um pouco maiores; os sentimentos de incerteza ao não saber quais os caminhos que as aulas iriam percorrer e de frustração ao não conseguir promover um diálogo ou um cenário para investigação conforme estudado nos referenciais teóricos. Mas, apesar desses obstáculos, acredito que sim: houve diálogo! Na verdade, houve diálogos: diálogo como incerteza, diálogo como investigação, diálogo como discussão. Houve também um movimento de tentar ir até os alunos, passear pelos ambientes de aprendizagem, o que possibilitou uma melhoria no ensino e na aprendizagem dos alunos, pois caminhar rumo a uma aula investigativa percorre essas ações: acertar, errar, mas principalmente, experienciar.

Esta pesquisa pode beneficiar docentes interessados em diálogos em salas de aula de matemática baseada em criação de cenários para investigação, tendo em vista a inserção das investigações matemáticas na BNCC (BRASIL, 2018). Além disso, sugere um roteiro de como se trabalhar com Probabilidade, um tema que se apresenta de difícil execução em sala de aula, conforme aponta Carvalho (2017).

Por fim, deixo aqui sugestões de trabalhos futuros que podem dar continuidade a esta pesquisa sobre a importância das interações em sala de aula, como por exemplo: diálogo entre professor titular, de apoio e alunos na aprendizagem de alunos inclusivos, influência do diálogo entre família/alunos na aprendizagem, diálogo no contexto interdisciplinar, diálogo em um cenário virtual.

REFERÊNCIAS

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Tradução: Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

AULETE, C. Aulete Digital: Dicionário contemporâneo da língua portuguesa. Rio de Janeiro: Lexikon, 2008. Disponível em: <http://www.aulete.com.br/incerto>. Acesso em: 07 fev 2021.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa.** México, v. 8, n. 3, p.247-263, 2005.

BRASIL. **Base nacional comum curricular (BNCC).** Brasília: MEC-SEB, 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: 20 dez 2018.

CARVALHO, J. I. F. de; MACEDO, R. C. Conhecimentos Necessários para o Ensino de Probabilidade: Discussão de uma Sequência Didática Desenvolvida com Estudantes de Matemática. In: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM**. Brasília: SBEM, 2015.

CARVALHO, J. I. F. **Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2017. 344f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: <https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/12168/1/JOS%C3%89%20IVANILDO%20FELISBERTO%20DE%20CARVALHO.pdf>. Acesso em 03 Fev 2021.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; SILVA, R. da. **Metodologia Científica**. 6.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

HENRIQUE, M. D.; NOGUEIRA, V. G. S.; MORENO, A. L. As metodologias de ensino de matemática na perspectiva discente. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 1, 2018. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.emnuvens.com.br/sbmac/article/view/1848>. Acesso em 02 Fev 2021.

MILANI, R. “Sim, eu ouvi o que eles disseram”: o diálogo como movimento de ir até onde o outro está. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 35-52, 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a02>. Acesso em: 18 Out 2018.

MILANI, R. et al. O diálogo nos ambientes de aprendizagem nas aulas de matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** Campo Mourão, v. 6, n. 12, p. 221-245, jul.-dez. 2017. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1592/pdf_240>. Acesso em: 27 Set 2019.

MILANI, R. Diálogo em Educação Matemática e suas Múltiplas Intepretações. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 68, p. 1036-1055, dez. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a10>. Acesso em 10 Dez 2020.

NOGUEIRA, V. G. S.; MORENO, A. L. Trigonometria: uma perspectiva de ensino público. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 5, n. 1, 2017. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/1561>. Acesso em 02 Fev 2021.

OLIVEIRA, A. do C. de; NOGUEIRA, V. G. S.; NOGUEIRA, D. A. Estimação como proposta de conteúdo do Ensino Fundamental. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 1, 2018. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/1818>. Acesso em 02 Fev 2021.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

REIS, C. M. dos; NOGUEIRA, V. G. S.; MORENO, A. L. Uma análise qualitativa de uma intervenção utilizando a abordagem investigativa para o ensino-aprendizagem de áreas. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2, 2018. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2437>. Acesso em 02 Fev 2021.

SANTOS, J. A. F. L. **A produção de significados sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6° ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora**. 2015. 191f. Tese (Doutorado) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

SILVA, I. de A. **Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito.** 2002. 174f. Dissertação (Mestrado em Educacção Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.