UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

Marina Andrade Domingues

Aplicação do Ponto Fixo de Banach na Compressão de Imagens

Alfenas/MG

2023

Marina Andrade Domingues

Aplicação do Ponto Fixo de Banach na Compressão de Imagens

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciada em Matemática pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Geometria. Orientador: José Carlos de Souza Júnior.

Alfenas/MG

2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Alfenas

Domingues, Marina Andrade.
Aplicação do Ponto Fixo de Banach na Compressão
de Imagens / Marina Andrade Domingues.
–2023.
76 f. : il.

Orientador: José Carlos de Souza Junior.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) -
Universidade Federal de Alfenas, 2023.
Bibliografia.

1. Espaços métricos. 2. Espaços compactos.
3. Espaços completos. I. Souza Junior, José Carlos de. II. Título.

CDD 514

Marina Andrade Domingues

Aplicação do Ponto Fixo de Banach na Compressão de Imagens

A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Monografia apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciada em Matemática pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Geometria.

Aprovado em: 30 / 01 / 2023

Banca Examinadora:

José Carlos de Souza Júnior

Prof. Dr. José Carlos de Souza Júnior
Instituto de Ciências Exatas
Orientador

Anderson José de Oliveira

Prof. Dr. Anderson José de Oliveira
Instituto de Ciências Exatas
Avaliador 1

Franco Bassi Rocha

Prof. Dr. Franco Bassi Rocha
Instituto de Ciências Exatas
Avaliador 2

Profa. Dra. Andréa Cardoso
Instituto de Ciências Exatas
Suplente

"O homem tem em si uma sede de infinito, uma saudade de eternidade, uma busca de beleza, um desejo de amor, uma necessidade de luz e de verdade, que o impelem rumo ao Absoluto: o homem tem em si o desejo de Deus." (Bento XVI)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, fonte de toda ciência, pelo dom da vida e por todas as oportunidades que foram colocadas no meu caminho, e à Virgem Maria, por se fazer presente ao longo de toda a minha caminhada, mostrando-se uma verdadeira mãe e mestra.

Agradeço a toda minha família, em especial aos meus pais, Ivone e Valdiel, meus primeiros e mais dedicados professores, por todo amor, cuidado, compreensão e incentivo, distribuídos sem reservas. De maneira especial, meus sinceros agradecimentos também à família da minha prima Antoniele, que me acolheu em Alfenas e sempre se mostrou disposta a ajudar em tudo que fosse necessário. Somente a bondade infinita do Sagrado Coração de Jesus é capaz de retribuir tudo o que vocês fizeram e fazem por mim.

Agradeço, ao meu orientador, José Carlos, por todo aprendizado ao longo de mais de três anos de orientação. Obrigada por todos direcionamentos, pela disponibilidade, paciência, disposição em ajudar e, principalmente, por me ter feito perceber, ainda mais, a beleza da Matemática. Estendo este agradecimento a todos os professores que contribuíram para minha formação, especialmente os professores do Departamento de Matemática da UNIFAL-MG, pelos quais nutro uma grande admiração e carinho.

Agradeço a todos os colegas e amigos, que tornaram essa etapa mais leve e bonita, e a todas as pessoas que estenderam suas mãos ao longo deste caminho – não foram poucas.

Agradeço aos membros da banca, pela disponibilidade em avaliar este trabalho e pelas valiosas contribuições.

Por fim, agradeço ao Instituto TIM-OBMEP, pelo auxílio financeiro recebido durante a graduação, à OBMEP, por ter sido decisiva para minha escolha de curso, e a todas as pessoas que foram responsáveis, em algum momento, por me fazer parar de repetir a frase: *eu não gosto de Matemática.*

Resumo

A Topologia é uma área recente da Matemática, que se desenvolveu a partir do século XIX, com foco no estudo da continuidade de aplicações. Em toda a Matemática, especialmente nos ramos da Topologia, da Geometria e da Análise, a teoria dos espaços métricos é uma ferramenta essencial. O objetivo deste estudo é explorar conceitos inerentes aos Espaços Métricos e à Topologia Geral, visando a utilização desses conceitos na construção do Triângulo de Sierpinski como ponto fixo de uma aplicação contínua. Esta ideia foi explorada em um método de compressão de imagens de caráter inovador, desenvolvido pelo matemático Michael Barnsley, na década de 80, a qual utiliza o conceito de sistemas de funções iteradas e proporciona altas taxas de compressão. Assim, este trabalho pretende apresentar uma aplicação de conceitos topológicos, em especial o Teorema do Ponto Fixo de Banach, em um método de compressão de imagens, além de contribuir para a complementação da formação matemática proporcionada pelo curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alfenas.

Palavras-chave: Espaços Métricos. Espaços Compactos. Espaços Completos.

Abstract

Topology is a recent area of Mathematics, developed in the 19th century and focused on the applications continuity study. In Mathematics, the metric spaces theory is an essential tool, especially in Topology, Geometry, and Analysis. The purpose is to explore inherent concepts of Metric Spaces and General Topology, aiming to use these concepts in the Sierpinski's Triangle as a fixed point of a continuous application construction. This idea was explored in an innovative images compression method, developed by the mathematician Michael Barnsley in the 80s, that uses the Iterate Function Systems and provides high compression ratios. Thus, this work intends to present the application of a topological concept, particularly the Banach Fixed Point Theorem, in an images compression method. Besides contributing to the mathematical complementation provided by the Mathematics undergraduate program at Federal University of Alfenas.

Keywords: Metric Spaces. Compact Spaces. Complete Spaces.

Lista de ilustrações

Sumário

1 *INTRODUÇÃO*

Nas últimas décadas, o avanço do uso da internet e a evolução técnica dos processamentos de imagem possibilitou um crescimento expressivo da utilização de imagens digitais nos mais variados contextos e acarretou a demanda de uma quantidade de imagens cada vez maior, em virtude das atuais facilidades de obtenção, geração e transmissão de imagens.

Por outro lado, é fato que as imagens digitais consomem grande espaço de armazenamento nos computadores e podem tornar a navegação lenta. Desta forma, surgiu-se a necessidade do desenvolvimento de métodos eficientes de compressão de imagens, pautados no desafio de codificar menos informação do que há na imagem original, de modo que a olho nu não se perceba que a imagem foi deteriorada.

Existem vários princípios de compressão de imagens, como o conhecido formato JPEG, que se tornou padrão para fotos digitais. No final da década de 80, Michael Barnsley e Alan Sloan desenvolveram uma técnica de compressão de imagens de caráter inovador, a qual utiliza o conceito de sistemas de funções iteradas (S.F.I.) e proporciona taxas de compressão bem mais altas do que as obtidas com as técnicas convencionais [1], produzindo imagens de alta qualidade quando estas possuem caráter fractal.

Este método é fundamentado matematicamente, com destaque para a aplicação de conceitos inerentes à área da Topologia, que possui foco no estudo matemático da continuidade. Este campo de estudo teve início como um ramo da Geometria e, no século XX, passou por generalizações tais e se envolveu com vários outros ramos da Matemática de tal modo que a Topologia possa ser considerada, hoje, como uma das partes fundamentais da Matemática, ao lado da Geometria, da Álgebra e da Análise [2].

O termo topologia foi introduzido por Johann Benedict Listing (1808-1882), um discípulo de Gauss, em 1847, no trabalho intitulado *Vorstudien zur Topologie*, primeiro livro dedicado ao assunto. Entre os primeiros a contribuírem para a Topologia, destaca-se o matemático Henri Poincaré (1854-1912), autor do primeiro artigo significativo dedicado inteiramente à Topologia, publicado em 1895, com o título *Analysis situs*. A partir do trabalho desenvolvido por Poincaré, a Topologia avançou e atraiu matemáticos famosos como Hausdorff (1868-1942), Veblen (1880-1960), Lefschetz (1884-1972), Alexander (1888-1971), Brouwer (1881-1966) e Fréchet (1878-1973) [2].

Em toda a Matemática, especialmente nos ramos da Topologia, da Geometria e da Análise, o conhecimento da teoria dos espaços métricos é uma ferramenta essencial. Fréchet, em sua tese de doutorado publicada em 1906, formulou uma generalização dos conceitos de limite, derivada e continuidade para espaços de funções e, vislumbrando a economia de trabalho e o grau de generalização que poderiam advir de um estudo conjunto dos mais diversos espaços, sugeriu uma definição geral e abstrata do conceito de distância e pesquisou diversas maneiras de conseguir tal objetivo, sendo considerado este o ponto de partida da teoria dos espaços métricos [3].

A partir do processo, iniciado por Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), de atribuição de uma estrutura matemática rigorosa para a Topologia, na qual a intuição mantém-se como fonte inicial, porém, não como validação formal, a relevância da Topologia para a quase totalidade da Matemática vem crescendo progressivamente [4].

O objetivo deste trabalho é apresentar uma aplicação de conceitos topológicos, em especial o Teorema do Ponto Fixo de Banach, no processo de compressão de imagens mencionado anteriormente, chamado *sistema de funções iteradas*, e realizar um estudo mais amplo de conceitos inerentes aos Espaços Métricos e à Topologia, de modo a complementar a formação Matemática proporcionada pelo curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alfenas.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No capítulo 2, são apresentados conceitos relativos aos Espaços Métricos, como a definição de métrica, bolas abertas, conjuntos abertos e fechados, o conceito de espaço métrico completo, entre outros, considerados conhecimentos prévios necessários para a compreensão deste trabalho. Nesse capítulo, também é enunciado o Teorema do Ponto Fixo de Banach e são apresentados alguns conceitos básicos relativos aos espaços topológicos.

No capítulo 3, é apresentada a definição de continuidade para espaços topológicos, a ideia de compacidade e, também, a definição do chamado Espaço de Hausdorff, sendo exploradas algumas propriedades relacionadas a estes conceitos.

No capítulo 4, é apresentada a ideia do método de compressão de imagens, tomando-se como o exemplo o fractal geométrico chamado Triângulo de Sierpinski, além do passo a passo de construção deste fractal utilizando o Geogebra, considerando-se o método explorado neste trabalho.

Por fim, as considerações finais obtidas a partir da realização deste estudo são apresentadas no capítulo 5.

2 *Preliminares*

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos básicos que serão necessários para a compreensão deste trabalho e que fundamentam a aplicação que será abordada posteriormente.

Os conceitos presentes neste capítulo podem ser encontrados em [3] e [5].

2.1 Espaços métricos

Nesta seção, será apresentada uma generalização da noção de distância entre dois pontos, bem como os conjuntos para os quais essa ideia de distância é definida. A partir desses conceitos iniciais, torna-se possível a definição de propriedades topológicas, como conjuntos abertos e fechados, que possibilitam a introdução e o estudo de espaços mais abstratos.

Definição 2.1 *Dado um conjunto $M \neq \emptyset$, seja $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e indiquemos por $d(x,y)$ a imagem de um par genérico $(x,y) \in M \times M$, por meio da função d. Dizemos que d é* métrica *sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:*

(M_1) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ *se,* e somente se*, $x = y$;*
(M_2) $d(x,y) = d(y,x)$*;*
(M_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$*.*

Nessas condições, cada imagem $d(x,y)$ recebe o nome de *distância* de x a y. Um par (M,d), onde d é uma métrica sobre M, é o que chamamos de *espaço métrico*.

Os elementos de um espaço métrico M podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, funções, vetores, conjuntos, entre outros. No entanto, serão chamados simplesmente de *pontos* de M.

Observação 2.1 *Se (M,d) é um espaço métrico, dado $S \subset M$, com $S \neq \emptyset$, se considerarmos a restrição $d_1 = d|S$, obviamente d_1 é uma métrica sobre S e, dessa forma, obtemos, de maneira natural, o espaço métrico (S, d_1). Nessas condições, dizemos que S é um subespaço do espaço métrico M e que a métrica d_1 foi induzida por d sobre M. Em geral, indica-se a métrica do subespaço do mesmo modo que a métrica de M, isto é, faz-se $d_1 = d$.*

Exemplo 2.1 *(Métrica discreta ou métrica zero-um.) De uma maneira muito simples, qualquer conjunto $M \neq \emptyset$ pode se tornar um espaço métrico, basta definir a métrica*

$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *do seguinte modo:*

$$d(x,x) = 0, \text{ para todo } x \in M, \text{ e } d(x,y)=1, \text{ sempre que } x \neq y .$$

As condições (M_1) *e* (M_2) *são facilmente verificadas. Para verificar* (M_3)*, basta considerar os seis casos possíveis:*

1º caso: $x = y = z$.

Neste caso, temos $d(x,y) = d(x,z) = d(z,y) = 0$*, satisfazendo, portanto, a desigualdade* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

2º caso: $x \neq y$ *e* $y = z$.

Novamente, a desigualdade é satisfeita, pois

$$d(x,y) = 1 = 1 + 0 = d(x,z) + d(z,y).$$

3º caso: $x \neq y$ *e* $x = z$.

Análogo ao 2° *caso.*

4º caso: $x = y$ *e* $y \neq z$.

A desigualdade, neste caso, é também satisfeita, pois

$$d(x,y) = 0 < 0 + 1 = d(x,z) + d(z,y).$$

5º caso: $x = z$ *e* $y \neq z$.

Análogo ao 4° *caso.*

6º caso: $x \neq y, y \neq z$ *e* $x \neq z$.

Neste caso, $d(x,y) = d(x,z) = d(z,y) = 1$*, satisfazendo a desigualdade.*

O espaço métrico que se obtém desta maneira é trivial, embora seja bastante útil para contra-exemplos.

Exemplo 2.2 *(A reta usual) Considerando-se o conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais, a função* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$*, dada por* $d(x,y) = |x - y|$*, é uma métrica sobre* $\mathbb{R}$.

De fato, a verificação de (M_1) *e* (M_2) *é imediata.*

Como

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|,$$

temos que (M_3) *é também verificada.*

Esta é a chamada "métrica usual" da reta.

Exemplo 2.3 *(O espaço $\mathbb{R}^n$) Existem três métricas importantes sobre $\mathbb{R}^n$ e que, de uma certa forma, são equivalentes.*

Sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ pontos arbitrários de $\mathbb{R}^n$, são essas métricas definidas do seguinte modo:

- $D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$;
- $D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$;
- $D_2(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.

A verificação de que as funções $D, D_1, D_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ realmente são métricas só apresenta dificuldades no caso da métrica D com relação ao axioma (M_3) e, para fazer essa demonstração, primeiramente vamos estabelecer a chamada Desigualdade de Cauchy-Schwarz, na Proposição 2.1, apresentada a seguir.

Proposição 2.1 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Se $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são números reais arbitrários, então*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Demonstração. Observe que a desigualdade $2rs \leq r^2 + s^2$ é verdadeira para quaisquer $r, s \in \mathbb{R}$, uma vez que $(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2 \geq 0$.

Assim, se fizermos $p = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ e $q = \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}$, tomando $r = \dfrac{|x_i|}{p}$ e $s = \dfrac{|y_i|}{q}$, é verdadeira a relação

$$2 \cdot \frac{|x_i|}{p} \cdot \frac{|y_i|}{q} \leq \frac{x_i^2}{p^2} + \frac{y_i^2}{q^2},$$

para qualquer índice $i \in \{1, ..., n\}$.

Somando em relação ao índice i, teremos

$$\frac{2}{pq} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1 + 1$$

e, portanto, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq p \cdot q = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}.$$

$\blacksquare$

Agora, podemos verificar que a função $D : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$D(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

realmente satisfaz a a propriedade (M_3) da definição de métrica (Definição 2.1).

De fato, sejam $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $z = (z_1, \ldots, z_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$. Então,

$$\begin{aligned}
[D(x,y)]^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2.
\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 &\leq \\
\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right]^{1/2} + \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 &= \\
\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}\right]^2 &= [D(x,z) + D(z,y)]^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y).$$

Assim, verificamos que a propriedade (M_3) é atendida e que D é de fato uma métrica, chamada *euclidiana*, e naturalmente se inspira na fórmula da distância entre dois pontos no espaço usual.

Definição 2.2 *(Espaços Vetoriais Normados) Um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *é um conjunto* E *sobre o qual estão definidas duas leis de composição, uma interna*

$$(u,v) \longmapsto u + v \ \textit{(adição)}$$

e uma externa, de $\mathbb{R} \times E$ *em* E

$$(\alpha, u) \longmapsto \alpha u \ \textit{(multiplicação por escalares)},$$

para as quais se verificam as seguintes condições:

(i) $u + (v + w) = (u + v) + w$, *para todo* $u, v, w \in E$;

(ii) $u + v = v + u$, *para todo* $u, v \in E$;

(iii) Existe $0 \in E$ *de modo que* $0 + u = u + 0 = u$, *para todo* $u \in E$;

(iv) Para todo $u \in E$, *existe* $(-u) \in E$ *de maneira que* $u + (-u) = (-u) + u = 0$,

ou seja, E *é um grupo abeliano em relação à adição e, ainda*

(v) $(\alpha)\beta u = \alpha(\beta u)$, *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e para todo* $u \in E$*;*

(vi) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e para todo* $u \in E$;

(viii) $1u = u$, *para todo* $u \in E$.

Os elementos de um espaço vetorial são genericamente chamados de vetores.

Definição 2.3 *Uma norma sobre um espaço vetorial* E *sobre* $\mathbb{R}$ *é uma função que associa a cada* $u \in \mathbb{R}$ *um número real não negativo, indicado por* $||u||$, *e chamado norma de* u, *de maneira que:*

(n_1) $||u|| = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$;

(n_2) $||\alpha u|| = |\alpha|\ ||u||$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e para todo* $u \in E$*;*

$(n_3)||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$, *para todo* $u, v \in E$.

Um espaço vetorial normado real é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ *dotado de uma norma.*

Observação 2.2 *Se* E *é um espaço vetorial normado, então* $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $d(u, v) = ||u - v||$ *é uma métrica sobre* E, *pois:*

- $d(u, v) = ||u - v|| = 0$ *se, e somente se,* $u - v = 0$, *o que acontece se, e somente se,* $u = v$;
- $d(u, v) = ||u - v|| = ||(-1)(v - u)|| = |-1|||v - u|| = ||v - u|| = d(v, u)$*;*
- $d(u, v) = ||u - v|| = ||u - w + w - v|| \leq ||u - w|| + ||w - v|| = d(u, w) + d(w, v)$.

A métrica d *assim obtida chama-se métrica induzida pela norma dada sobre* E.

Definição 2.4 *Seja* A *um subconjunto não vazio de um espaço métrico* M. *Suponhamos que exista* $k \in \mathbb{R}^+$, *de maneira que* $d(x, y) < k$, *para quaisquer* $x, y \in A$. *Nestas condições, dizemos que* A *é um conjunto limitado e o supremo, isto é, o menor dos limitantes superiores, do conjunto* $\{d(x, y)|x, y \in A\}$ *chama-se diâmetro do conjunto* A *e é denotado por* $d(A)$. *Assim,*

$$d(A) = sup\{d(x, y)|x, y \in A\}.$$

Se o conjunto A não é limitado, por definição temos que $d(A) = \infty$.

2.1.1 Bolas abertas

O conceito de bola aberta, que será introduzido a seguir, desempenha um papel fundamental no estudo dos espaços métricos. Podemos pensar, inicialmente, que esse papel é o mesmo dos intervalos do tipo $]p - \epsilon, p + \epsilon[$ no estudo da reta real. Em suma, as bolas abertas, no contexto dos espaços métricos, possuem uma atuação equivalente a dos "ϵ" e "δ" do Cálculo ou da Análise Real.

Definição 2.5 *Seja p um ponto de um espaço métrico (M, d). Sendo $\epsilon > 0$ um número real, a bola de centro p e raio ϵ, que indicaremos por $B(p, \epsilon)$, é o seguinte subconjunto de M:*

$$B(p, \epsilon) = \{x \in M | d(x, p) < \epsilon\}.$$

Exemplo 2.4 *(Bolas em um espaço cuja métrica é a "zero-um".) Seja (M, d) um espaço discreto e consideremos $p \in M$. Há dois casos a considerar:*

(i) $0 < \epsilon \leq 1$.

Neste caso, $B(p, \epsilon) = \{x \in M | d(x, p) < \epsilon\} = \{p\}$, pois o único ponto cuja distância a p é menor que 1 é o próprio p.

(ii) $1 < \epsilon$.

Neste caso, $B(p, \epsilon) = \{x \in M | d(x, p) < \epsilon\} = M$, pois todos os pontos de M estão a uma distância de p igual a zero ou igual a 1 e, portanto, menor que ϵ.

Exemplo 2.5 *(Bolas na reta usual) Na reta real, a bola de centro $p \in \mathbb{R}$ e raio ϵ é o conjunto:*

$$\begin{aligned} B(p, \epsilon) &= \{x \in \mathbb{R} | \ |x - p| < \epsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | p - \epsilon < x < p + \epsilon\} \\ &=]p - \epsilon, p + \epsilon[. \end{aligned}$$

Exemplo 2.6 *(Bolas no espaço $\mathbb{R}^2$.) Lembremos que no espaço $\mathbb{R}^2$ já foram definidas as métricas D, D_1 e D_2, dadas por:*

- $D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$;
- $D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;
- $D_2(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$,

para $x = (x_1, x_2), \ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Sendo $p = (a, b)$ *um ponto de* $\mathbb{R}^2$*, fixado, uma bola de centro* p *e raio* $\epsilon > 0$*, segundo a métrica* D*, é o conjunto*

$$B(p, \epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ (x - a)^2 + (y - b)^2 < \epsilon^2\},$$

cujo gráfico é um disco aberto, conforme Figura 1 a seguir.

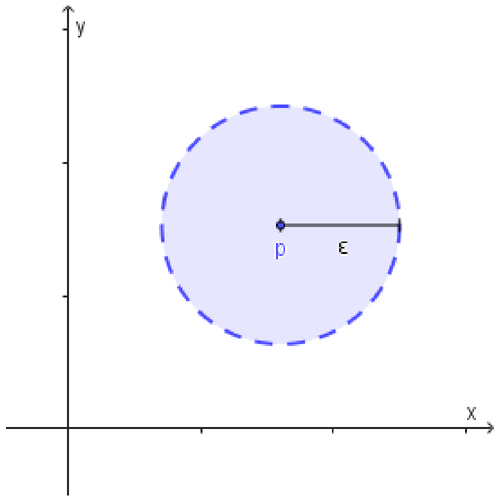

Figura 1 – Bola aberta segundo a métrica D.
Fonte: do autor.

Quando a métrica for D_1*, uma bola de centro* p *e raio* $\epsilon > 0$ *é o conjunto*

$$B(p, \epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ |x - a| + |y - b| < \epsilon\},$$

cujo gráfico é um quadrado aberto (sem os lados) de diagonais paralelas aos eixos coordenados e de medida igual a 2ϵ*, com centro em* $p = (a, b)$*, conforme apresentado na Figura 2.*

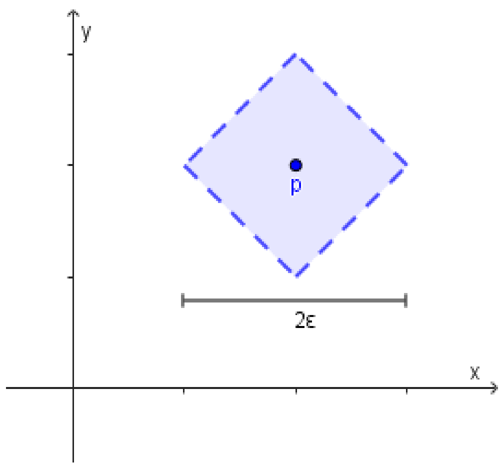

Figura 2 – Bola aberta segundo a métrica D_1.
Fonte: do autor.

Por fim, quando se tratar da métrica D_2, temos:

$$B(p,\epsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ max\{|x-a|, |y-b|\} < \epsilon\},$$

e o gráfico da relação:

$$max\{|x-a|, |y-b|\} < \epsilon\},$$

que representa no plano a bola $B(p,\epsilon)$ é o interior de um quadrado de centro $p = (a,b)$, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados e têm medida igual a 2ϵ, ou seja,

$$B(p,\epsilon) =]a-\epsilon, a+\epsilon[\ \times\ ]b-\epsilon, b+\epsilon[,$$

conforme apresentado na Figura 3 a seguir.

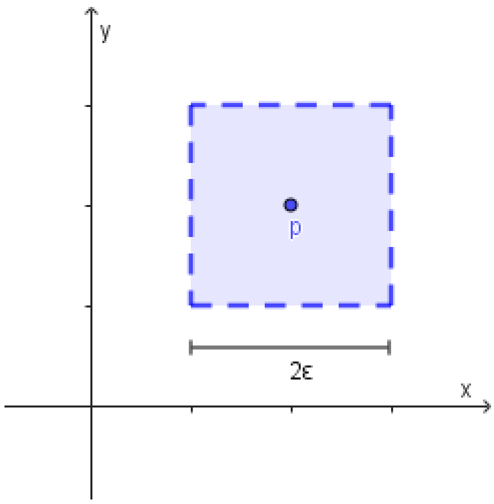

Figura 3 – Bola aberta segundo a métrica D_2.
Fonte: do autor.

2.1.2 Métricas equivalentes

Neste item, considere duas métricas d e d', não necessariamente iguais, sobre um mesmo conjunto M. Nessas condições, a fim de evitar confusões, indicaremos por $B_d(p,\epsilon)$ uma bola de centro p e raio ϵ, segundo a métrica d e, obviamente, por $B_{d'}(p,\epsilon)$ a bola de centro p e raio ϵ, quando se tratar da métrica d'.

A importância da noção de equivalência entre métricas, que será apresentada a seguir, se relaciona com o fato de que em determinados espaços é mais conveniente e simples utilizar uma dessas métricas ao invés da outra.

Definição 2.6 *Sejam d e d' métricas sobre o mesmo conjunto M. Diz-se que d e d' são métricas equivalentes se, para cada $p \in M$, qualquer que seja a bola $B_d(p,\epsilon)$, existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(p,\epsilon) \subset B_d(p,\epsilon)$ e vice-versa, dada uma bola qualquer $B_{d'}(p,\epsilon)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(p,\lambda) \subset B_{d'}(p,\epsilon)$.*

Notação: $d \sim d'$.

Em outras palavras, para que duas métricas sejam equivalentes é necessário e suficiente que qualquer bola aberta em relação a uma dessas métricas contenha uma bola aberta de mesmo centro em relação à outra.

A equivalência entre as três métricas usuais, mencionada no Exemplo 2.3, consiste nesta ideia.

Exemplo 2.7 *É bastante intuitivo que as métricas D, D_1 e D_2, por exemplo, do espaço $\mathbb{R}^2$, definidas por $D(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, D_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ e $D_2(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, para quaisquer $x = (x_1, y_1), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, são equivalentes, visto que todo disco aberto do plano contém um quadrado aberto, de mesmo centro, com os lados paralelos ao eixo e que todo quadrado nestas condições contém um quadrado aberto de diagonais paralelas ao eixo que, por sua vez, contém um disco aberto de mesmo centro, conforme pode ser observado na Figura 4, a seguir.*

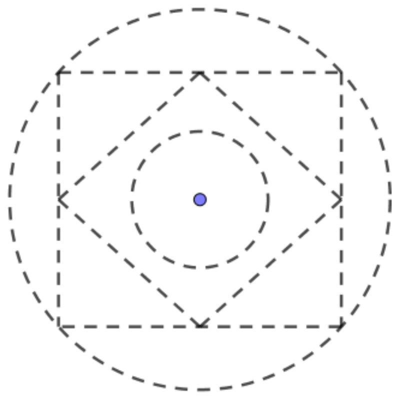

Figura 4 – Exemplo de bolas abertas concêntricas em $\mathbb{R}^2$.
Fonte: do autor.

2.1.3 Topologia dos espaços métricos

Esta subseção possui como principal objetivo destacar uma importante estrutura matemática subjacente aos espaços métricos, que repousa nas propriedades básicas dos chamados "conjuntos abertos" do espaço, cuja definição será apresentada a seguir.

Definição 2.7 *Seja (X, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset X$ se diz aberto se, para todo $p \in A$, existe um número real $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset A$.*

Proposição 2.2 *Seja $\mathcal{T} = \{A \subset M; A$ é aberto em $M\}$ a coleção de abertos de um espaço métrico (M, d). Então, $\mathcal{T}$ satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\emptyset$ *e* M *são abertos;*
(ii) Se $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *são abertos em* M*, então* $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ *é aberto em* M*;*
(iii) Se $A_1, \ldots, A_n$ *são abertos em* M*, então* $A = A_1 \cap \cdots \cap A_n$ *é um conjunto aberto em* M*.*

Demonstração. (i) Como $\emptyset$ não contém pontos, esse conjunto não contraria a definição dada. Portanto, por vacuidade, temos que $\emptyset$ é um aberto.

Agora, M é aberto, pois, para todo $p \in M$, temos que a bola $B(p,\epsilon) = \{x \in M; d(x,p) < \epsilon\}$ está contida em M, pois $B(p,\epsilon)$ é constituída por pontos de M.

(ii) Seja $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Logo, $x \in A_{\lambda_0}$, para algum $\lambda_0 \in \Lambda$.

Como A_{λ_0} é um aberto, então existe uma bola $B(x,\epsilon) \subset A_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Portanto, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é um aberto em M.

(iii) Seja $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Logo, $x \in A_i$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Como cada A_i é um aberto, existe $B(x,\epsilon_i) \subset A_i$, com $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Tomando $\epsilon = min\{\epsilon_i\}$, temos que $B(x,\epsilon) \subset B(x,\epsilon_i)$, para todo i. Logo, $B(x,\epsilon) \subset A_i$, para todo i, e segue que $B(p,\epsilon) \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$.

Portanto, $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ é um aberto em M.

■

Definição 2.8 *Seja* (M,d) *um espaço métrico. Se* $A \subset M$*, um ponto* $p \in A$ *é chamado ponto interior ao conjunto* A *se existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $B(p,\epsilon) \subset A$*. O conjunto dos pontos interiores a* A *é chamado interior de* A *e é indicado por* $\mathring{A}$*.*

Observação 2.3 *É imediato que* $\mathring{A} \subset A$*. Observemos, também, que se todos os pontos de* A *são interiores, isto é, se* $A = \mathring{A}$*, então* A *é aberto. De fato, dado* $p \in A$ *(logo* $p \in \mathring{A}$*), existe* $\epsilon > 0$ *de modo que* $B(p,\epsilon) \subset A$*. Como obviamente vale a recíproca deste fato, temos então que* A *é aberto se, e somente se,* $A = \mathring{A}$*.*

Definição 2.9 *Seja* (X,d) *um espaço métrico. Um subconjunto* $F \subset X$ *se diz fechado se, e somente se,* F^c *é aberto.*

Definição 2.10 *Seja* A *um subconjunto de um espaço métrico* M*. Um ponto* $p \in M$ *se diz ponto aderente ao conjunto* A *se, para todo* $\epsilon > 0$*, vale a relação* $B(p,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$*. O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto* A *chama-se fecho de* A *e é indicado por* $\overline{A}$*.*

Proposição 2.3 *Seja M um espaço métrico e $F \subset M$. Temos que F é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) É imediato que $F \subset \overline{F}$. Falta mostrar que se F é fechado, então $\overline{F} \subset F$.

Supondo que F seja fechado, por definição temos que F^c é aberto. Então, se $p \in F^c$, temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset F^c$. Logo, $B(p, \epsilon) \cap F \neq \emptyset$ e, consequentemente, temos que $p \notin \overline{F}$. Logo, $\overline{F} \subset F$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $F = \overline{F}$. Vamos mostrar que F^c é aberto.

Seja $p \in F^c$. Então, temos que $x \notin \overline{F}$, pois $F = \overline{F}$. Dessa forma, temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \cap F = \emptyset$, pois, caso contrário, teríamos que $p \in \overline{F}$. Como $B(p, \epsilon) \cap F = \emptyset$, temos que $B(p, \epsilon) \subset F^c$. Dessa forma, temos que F^c é aberto e, consequentemente, segue que F é fechado.

$\blacksquare$

2.1.4 Sequências

Além dos conceitos iniciais envolvendo sequências definidas em um espaço métrico, neste tópico será definido um tipo importante de sequências, a saber, as chamadas *sequências de Cauchy*. Diferentemente da definição de limite, na qual se exige que os termos da sequência se tornem cada vez mais próximos de um ponto fixado, os termos de uma sequência de Cauchy vão se tornando cada vez mais próximos uns dos outros, à medida que cresce o índice n.

Definição 2.11 *Toda aplicação $n \longrightarrow x_n$ de $\mathbb{N}^*$ em M, é chamada de* sequência de elementos de M *e a notação para se indicar uma tal sequência é $(x_1, ..., x_n)$ ou, resumidamente, (x_n).*

Definição 2.12 *Uma sequência (x_n) de números reais se diz crescente se $x_r \leq x_{r+1}$, para qualquer índice r. Se $x_r < x_{r+1}$, para todo índice $r \geq 1$, então (x_n) se diz estritamente crescente. Semelhantemente, uma sequência (x_n) de números reais se diz decrescente se $x_{r+1} \leq x_r$, para qualquer índice r. Se $x_{r+1} < x_r$, para todo índice $r \geq 1$, então (x_n) se diz estritamente decrescente.*

Definição 2.13 *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um ponto $p \in M$ é* limite *de uma sequência (x_n) de pontos de M se, para toda bola $B(p, \epsilon)$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que se $n \geq r$, então $x_n \in B(p, \epsilon)$. Dizemos, para exprimir esse fato, que (x_n) é uma* sequência convergente *ou que (x_n)* converge para p.

Proposição 2.4 *Seja (x_n) uma sequência convergente de um espaço métrico M. Então é único o limite dessa sequência.*

Demonstração. Suponhamos $\lim x_n = p$ e $\lim x_n = q$.

Se $p \neq q$, então $\epsilon = \dfrac{d(p,q)}{2}$ é maior que zero e, portanto, existem índices r e s de maneira que $n \geq r$ implica $d(x_n, p) < \epsilon$ e, da mesma forma, $n \geq s$ implica $d(x_n, q) < \epsilon$.

Tomando $t = max\{r, s\}$, então temos que $n \geq t$ implica $d(x_n, p) < \epsilon$ e $d(x_n, q) < \epsilon$. Daí, para todo índice $n \geq t$, temos que

$$d(p,q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = d(p,q),$$

o que é absurdo.

■

Proposição 2.5 *Toda sequência crescente ou estritamente crescente de números reais cujo conjunto dos termos é limitado superiormente converge para o supremo desse conjunto.*

Demonstração. Suponhamos (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_1 < x_2 < \cdots < l$ e seja $p = sup\{x_n | n = 1, 2, ...\}$. Provaremos que $\lim x_n = p$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, não se pode ter $x_n \leq p - \epsilon$ para todo índice n, pois isto significaria a existência de um limite superior do conjunto $\{x_n\}$ menor do que p, contradizendo o fato que $p = sup\{x_n | n = 1, 2, ...\}$. Assim, temos que para um certo índice r tem-se $p - \epsilon < x_r \leq p$ e, daí,

$$p - \epsilon < x_n < p + \epsilon,$$

para todo índice $n \geq r$, ou seja, $n \geq r$ implica $|x_n - p| < \epsilon$. Logo, $\lim x_n = p$.

A demonstração no caso de uma sequência crescente é análoga.

■

Observação 2.4 *Do mesmo modo se prova que toda sequência decrescente ou estritamente decrescente de números reais cujo conjunto dos termos é limitado inferiormente converge para o ínfimo desse conjunto.*

Proposição 2.6 *Uma sequência $((x_n, y_n))$ de pontos de $\mathbb{R}^2$ converge para $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ se, e somente se, x_n converge para p e y_n converge para q.*

Demonstração. Pela equivalência das métricas, é indiferente usar qualquer uma das métricas usuais do espaço $\mathbb{R}^2$ para provar a proposição. Nesta demonstração, será considerada a métrica D_2.

($\Longrightarrow$) Suponha que $((x_n, y_n))$ convirja para $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ tem-se:

$$D_2((x_n, y_n); (p, q)) < \epsilon,$$

ou seja,

$$max\{d(x_n, p), d_2(y_n, q)\} < \epsilon,$$

o que implica $d(x_n, p) < \epsilon$ e $d_2(y_n, q) < \epsilon$. Portanto, temos que (x_n) converge para p e (y_n) converge para q.

($\Longleftarrow$) Seja $\epsilon > 0$. Como (x_n), por hipótese, converge para p, então existem índices $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$, então $d(x_n, p) < \epsilon$ e, da mesma forma, como (y, n) converge para q, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2$ implica $d(y_n, q) < \epsilon$.

Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Assim, $n > n_0$ implica $d(x_n, p) < \epsilon$ e, também, $d(y_n, q) < \epsilon$, ou seja, se $n > n_0$, então

$$D_2((x_n, y_n); (p, q)) = max\{d(x_n, p), d(y_n, q)\} < \epsilon.$$

Portanto, (x_n, y_n) converge para $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. ∎

Proposição 2.7 *Se A é um subconjunto de um espaço métrico M e se p é um ponto de $\overline{A}$, então existe uma sequência $(x_1, x_2, \dots)$ de pontos de A tal que* $\lim x_n = p$.

Demonstração. Como $p \in \overline{A}$, então cada uma das bolas abertas $B\left(p, \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, ...)$, contém pontos de A.

Vamos verificar que a sequência $(x_1, x_2, \dots)$, em que $x_n \in A \cap B\left(p, \frac{1}{n}\right)$, para todo $n \geq 1$, converge para p.

De fato, toda bola $B(p, \epsilon)$ contém $B\left(p, \frac{1}{r}\right)$, desde que $\frac{1}{r} < \epsilon$ e, portanto, nestas condições, contém $x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots$. Como (x_n) é uma sequência de pontos de A, então a proposição está provada.

∎

Definição 2.14 *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de M é chamada sequência de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice r tal que $m, n \geq r$ implica $d(x_m, x_n) < \epsilon$.*

Intuitivamente, a condição da Definição 2.14 indica uma propriedade importante das sequências convergentes e significa que as distâncias entre os termos de uma sequência de Cauchy se tornam arbitrariamente pequenas, para índices convenientemente grandes.

Ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da sequência, pois depende apenas dos seus termos, mas não da existência de outros pontos no espaço, em contraste com a propriedade de ser convergente. No entanto, quando os termos de uma sequência se aproximam de um ponto fixado, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros, como garante a proposição a seguir.

Proposição 2.8 *Toda sequência convergente de um espaço métrico M é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente de um espaço métrico M e $p = \lim x_n$. Assim, temos que para todo $\epsilon > 0$, existe um índice r tal que para todo índice $n \geq r$, $d(x_n, p) < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Da desigualdade triangular, segue que

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, p) + d(p, x_n).$$

Assim, para índices $m, n \geq r$, temos que $d(x_m, x_n) < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Portanto, a sequência (x_n) é de Cauchy.

■

Observação 2.5 *A recíproca da Proposição 2.8 não é válida. Ou seja, uma sequência de Cauchy de um espaço M pode não convergir em M, conforme ilustra o exemplo a seguir.*

Exemplo 2.8 *Seja (x_n) a sequência de pontos de $\mathbb{Q}$, definida por recorrência do seguinte modo:*

$$x_1 = 2 \ e \ x_{n+1} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),$$

para todo $n \geq 1$.

Como $x_n - \dfrac{2}{x_n} \neq 0$, uma vez que cada x_n é racional, e como

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right)^2 + 2,$$

então $x_n^2 > 2$, para todo $n \geq 1$. Daí,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) < \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{x_n^2}{x_n}\right) = x_n,$$

para qualquer índice $n \geq 1$. Então,

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots > 1$$

e, devido à Proposição 2.5, podemos concluir que a sequência (x_n) converge para um ponto real $p > 0$ e que, portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$. Como $(x_2, x_3, \dots)$ também converge para p, a fórmula $(*)$ "passada ao limite" nos dá a igualdade

$$p = \frac{1}{2}\left(p + \frac{p}{2}\right),$$

do que decorre que $p^2 = 2$ e, portanto, $p \notin \mathbb{Q}$, ou seja, (x_n) não converge em $\mathbb{Q}$.

Proposição 2.9 *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço vetorial normado E. Então existe uma bola aberta de centro no vetor nulo que contém todos os termos da sequência.*

Demonstração. Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, tomando $\epsilon = 1$, existe um índice r tal que $m, n \geq r$ implica $d(x_m, x_n) = ||x_m - x_n|| < 1$. Em particular, $||x_m - x_r|| < 1$, para todo $m \geq r$. Daí, como

$$||x_m|| = ||x_m - x_r + x_r|| \leq ||x_m - x_r|| + ||x_r||,$$

temos que, para todo $m \geq r$,

$$||x_m|| < 1 + ||x_r||.$$

Seja $\lambda > max\{||x_1||, \dots, ||x_{r-1}||, 1 + ||x_r||\}$. Então, para todo índice n,

$$d(x_n, 0) = ||x_n|| < \lambda,$$

o que prova que $x_n \in B(0, \lambda)$, para todo índice $n \geq 1$. ■

Proposição 2.10 *Toda sequência sequência de Cauchy (x_n) em $\mathbb{R}$ converge para um ponto $p \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 2.9, temos que existe $k > 0$, tal que $|x_n| < k$, para todo índice $n \geq 1$. Assim, para cada índice $m \geq 1$, podemos garantir a existência de

$$y_m = inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}.$$

Dessa forma, é claro que

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq k$$

e, portanto, temos que (y_n) converge para $p = sup\{y_n | n = 1, 2, \dots\}$, o qual é um ponto de $\mathbb{R}$.

Vamos mostrar que $\lim x_n = p$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, existe um índice r tal que se $n \geq r$, então

$$|y_n - p| < \frac{\epsilon}{3}$$

e, como (x_n) é de Cauchy, existe um índice s de maneira que $m, n \geq s$ implica

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Seja $t > max\{r, s\}$. Considerando que

$$y_t = inf\{x_t, x_{t+1}, \dots\},$$

existe $j \geq t$ para o qual se tem $y_t \leq x_j < y_t + \frac{\epsilon}{3}$ e, portanto,

$$|x_j - y_t| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, para todo $n > t$, temos

$$|x_m - p| \leq |x_n - x_j| + |x_j - y_t| + |y_t - p| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim x_n = p$. ■

2.1.5 Espaços completos

Vimos que existem sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem neste espaço, como é o caso da sequência (x_n) definida no Exemplo 2.8, a qual converge para $\sqrt{2}$ que não é um número racional, embora todos os termos dessa sequência sejam racionais.

Quando a recíproca da Proposição 2.8 for verdadeira, ou seja, quando toda sequência de Cauchy de um espaço métrico M for convergente para um ponto de M, teremos a seguinte definição para M.

Definição 2.15 *Um espaço métrico M é chamado completo se toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de M.*

Observe que o Exemplo 2.8 e a Proposição 2.10 nos permitem dizer que o espaço $\mathbb{Q}$ não é completo, enquanto $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo. É possível mostrar que $M \times N$ é um espaço métrico completo se, e somente se, M e N são espaços métricos completos. No exemplo a seguir, veremos que o fato de $\mathbb{R}$ ser um espaço métrico completo implica que $\mathbb{R}^2$ também é completo.

Exemplo 2.9 $\mathbb{R}^2$ *é um espaço métrico completo.*

De fato, se $((x_n, y_n))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^2$, como $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo, como visto na Proposição 2.10, temos que existem $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$. Assim, pela Proposição 2.6, temos que $\lim(x_n, y_n) = (p, q) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $\mathbb{R}^2$ é completo.

■

Lema 2.1 *Seja M um espaço métrico completo. Se X é um subespaço de M, então X é completo se, e somente se, X é fechado.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $x \in \overline{X}$. Então, existe uma sequência (x_n) em X que converge para x. Como, pela Proposição 2.8, toda sequência convergente é de Cauchy, temos que (x_n) é de Cauchy e, portanto, converge em X para um ponto $\overline{x} \in X$, pois M é um espaço métrico completo. Da unicidade do limite, segue que $x = \overline{x}$. Logo, $x \in X$ e, dessa forma, temos que $\overline{X} = X$, ou seja, X é fechado.

($\Longleftarrow$) Suponha que X seja fechado e seja (x_n) uma sequência de Cauchy em X. Então, (x_n) é de Cauchy em M, pois M é um subespaço de X, e, dessa forma, temos que (x_n) converge para um ponto $x \in M$. Então, como X é fechado, então $X = \overline{X}$, ou seja, $x \in X$. Logo, X é completo.

■

A condição de que um espaço métrico seja completo é uma das hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que será enunciado ao final do presente capítulo. Antes de enunciar o teorema, além dessa condição, também será necessário introduzir um tipo importante de aplicações, a saber, contrações.

A ideia central de uma contração pode ser expressa como uma função de um espaço métrico em si mesmo, tal que a distância das imagens de dois pontos quaisquer desse espaço por meio dessa função é menor que a distância original entre esses dois pontos.

Definição 2.16 *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ recebe o nome de contração, se existe uma constante $0 < s < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$, para todo $x, y \in X$.*

Observação 2.6 *A constante s recebe o nome de fator de contração de f.*

Exemplo 2.10 *As aplicações $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right)$ e $T_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right)$, são contrações.*

De fato, vamos verificar que T_3 é uma contração.

Considerando a métrica D_2, observe que

$$\begin{aligned} d(T_3(x_1,y_1),T_3(x_2,y_2)) &= max\left\{\left|\left(\frac{x_1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{x_2}{2}+\frac{1}{4}\right)\right|,\left|\left(\frac{y_1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{y_2}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|\right\} \\ &= max\left\{\left|\left(\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)\right|,\left|\left(\frac{y_1}{2}-\frac{y_2}{2}\right)\right|\right\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot d((x_1,y_1),(x_2,y_2)), \end{aligned}$$

para todo $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$.

Logo, T_3 é uma contração. Analogamente, mostra-se que T_1 e T_2 são também contrações.

Definição 2.17 *Considere $f : X \longrightarrow X$ e $p \in X$. Então, p é chamado de ponto fixo de f se $f(p) = p$.*

Teorema 2.1 *(Teorema do Ponto Fixo de Banach) Seja M um espaço métrico completo e seja $f : M \longrightarrow M$ uma contração. Então f admite um único ponto fixo, ponto esse que pode ser obtido como limite da sequência $(x_0, f(x_0), f(f(x_0)),\dots)$, para qualquer ponto $x_0 \in M$.*

Demonstração. Seja $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1),\cdots,x_n = (f_{n-1}),\cdots$. Observe que se a sequência $(x_0,x_1,x_2,\dots)$ convergir para um ponto $p\in M$, então teremos que $f(p)=p$, pois

$$p = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(p).$$

Por outro lado, f não pode ter mais do que um ponto fixo, pois, como f é uma contração, existe uma constante real c tal que $0 \le c < 1$ e $d(f(x),f(y)) \le cd(x,y)$ para quaisquer $x,y\in M$. Assim, se tivéssemos também $f(q)=q$, para algum $q\in M$, então

$$d(p,q) = d(f(p),f(q)) \le cd(p,q)$$

e, daí,

$$(1-c)d(p,q) \le 0.$$

Como $1-c>0$, então $d(p,q)=0$ e $p=q$.

Dessa forma, falta provar que (x_n) converge em M ou, equivalentemente, que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M (pois M é completo).

De fato, como

$$d(x_{s+1},x_s) = d(f(x_s),f(x_{s-1})) \le cd(x_s,x_{s-1}),$$

para todo $s \geq 1$, se obtém por indução que

$$d(x_{s+1}, x_s) \leq c^s d(x_1, x_0).$$

Assim, para todo $t > s+1$, temos:

$$\begin{aligned}
d(x_t, x_{s+1}) &\leq d(x_t, x_{t-1}) + d(x_{t-1}, x_{t-2}) + \cdots + d(x_{s+2}, x_{s+1}) \\
&\leq c^{t-1} d(x_1, x_0) + \cdots + c^{s+1} d(x_1, x_0) \\
&= d(x_1, x_0) c^{s+1} (c^{t-s-2} + \cdots + c + 1) \\
&= d(x_1, x_0) c^{s+1} \frac{1 - c^{t-s-1}}{1-c} \\
&\leq \frac{d(x_1, x_0)}{1-c} c^{s+1} \\
&= k c^{s+1},
\end{aligned}$$

em que $k = \dfrac{d(x_1, x_0)}{1-c}$.

Como o limite da sequência (kc^n) é zero, para todo $\epsilon > 0$ existe um índice r tal que $s+1 \geq r$ implica $kc^{s+1} < \epsilon$.

Assim, se fizermos $s+1 = n$, para qualquer $j > 0$ teremos que se $n \geq r$, então $d(x_{n+j}, x_n) < \epsilon$, o que prova que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M. ■

2.2 Espaços topológicos

Nesta seção, será apresentado o conceito de *espaço topológico*, o qual foi desenvolvido a partir do estudo da reta real, do espaço euclidiano e do estudo das funções contínuas definidas nesses espaços, e permite uma generalização de alguns dos conceitos introduzidos anteriormente, como os de conjuntos abertos e fechados. O objetivo principal da introdução deste conceito, neste trabalho, é a definição dos chamados *espaços de Hausdorff*, os quais possuem uma propriedade particular que será importante na demonstração de alguns resultados. Na Proposição 2.11, verificaremos que todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff.

Definição 2.18 *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, tal que:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(ii) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{T}$ é uma coleção de elementos de $\mathcal{T}$, então $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}$;

(iii) Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$, então $A = A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{T}$.

Observação 2.7 *Um elemento $A \in \mathcal{T}$ é chamado conjunto aberto segundo $\mathcal{T}$. Um conjunto X munido de uma topologia $\mathcal{T}$ recebe o nome de espaço topológico, o qual denotaremos por $(X, \mathcal{T})$.*

Exemplo 2.11 *Segue da Proposição 2.2 que os abertos de (M, d) formam uma topologia em M, chamada topologia proveniente da métrica d.*

Definição 2.19 *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $Y \subset X$. A topologia induzida em Y pela topologia de X, denotada por $\mathcal{T}_Y$, é definida por*

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U; U \in \mathcal{T}\}.$$

Dizemos que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é um subespaço topológico de $(X, \mathcal{T})$.

Definição 2.20 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um conjunto $F \subset X$ é fechado em X se F^c é aberto em X, ou seja, se $F^c = X - F \in \mathcal{T}$.*

Teorema 2.2 *Seja X um espaço topológico. Então:*

(i) $\emptyset$ e X são conjuntos fechados;
(ii) Se $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é uma família de conjuntos fechados, então $F = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ $fechado$;
(iii) Se $F_1, \ldots, F_n$ são conjuntos fechados, então $F = F_1, \cup \cdots \cup F_n$ é fechado.

Demonstração. (i) Observe que $\emptyset = X^c$ e $X = \emptyset^c$. Como $\emptyset \in \mathcal{T}$, temos que $\emptyset^c$ é fechado, ou seja, X é fechado. Do mesmo modo, como $X \in \mathcal{T}$, segue que X^c é fechado, o que implica que $\emptyset$ é fechado.

(ii) Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$uma família de conjuntos fechados. Logo, ${F_\lambda}^c$ é aberto, para todo $\lambda \in \Lambda$, e, consequentemente, $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} {F_\lambda}^c$ é aberto.

Como $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} {F_\lambda}^c = (\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda)^c$, temos que $(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda)^c$ é aberto.

Portanto, $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é fechado.

(iii) Se $F_1, \ldots, F_n$ são conjuntos fechados em X, então $F_1^c, \ldots, F_n^c$ são abertos.

Logo, $F_1^c \cap \cdots \cap F_n^c = (F_1 \cup \cdots \cup F_n)^c$ é aberto.

Portanto, $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado.

■

Definição 2.21 *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. O interior de A, denotado por $\mathring{A}$, é definido como sendo a união de todos os conjuntos abertos contidos em A, ou seja, $\mathring{A} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, em que U_λ é aberto e $U_\lambda \subset A$, para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Definição 2.22 *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. O fecho de A, denotado por $\overline{A}$, é definido como sendo a interseção de todos os conjuntos fechados que contém A, ou seja, $\overline{A} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$, em que F_λ é fechado e $A \subset F_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Observação 2.8 *Como consequência das duas últimas definições, temos que:*

(a) $\mathring{A}$ é um conjunto aberto;

(b) $\overline{A}$ é um conjunto fechado;

(c) $\mathring{A}$ é o maior conjunto aberto contido em A;

(d) $\overline{A}$ é o menor conjunto fechado contendo A;

(e) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;

(f) Se A é aberto, então $A = \mathring{A}$;

(g) Se A é fechado, então $A = \overline{A}$.

Observação 2.9 *Um aberto U contendo x também recebe o nome de vizinhança de x.*

Definição 2.23 *Um espaço topológico X é um espaço de Hausdorff se, para cada $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem vizinhanças U e V, de x e y, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$, como representa a Figura 5.*

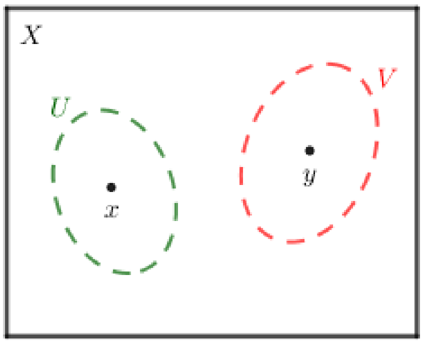

Figura 5 – $x \in U,\ y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.
Fonte: do autor.

Proposição 2.11 *Todo espaço métrico é de Hausdorff.*

Demonstração. Seja (M, d) um espaço métrico. Dados $a, b \in M$, seja $r = d(a, b)$.

Considere $U = B\left(a, \frac{r}{2}\right)$ e $V = B\left(b, \frac{r}{2}\right)$. Vamos mostrar que U e V são vizinhanças de a e b, respectivamente, e $U \cap V = \emptyset$.

De fato, suponhamos que exista $x \in U \cap V$. Então, $d(x, a) < \frac{r}{2}$ e $d(x, b) < \frac{r}{2}$.

Assim, pela desigualdade triangular, temos que:

$$d(a, b) < d(x, a) + d(x, b) = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

ou seja, $d(a, b) < r$, o que contraria a hipótese de $r = d(a, b)$.

Portanto, $U \cap V = \emptyset$.

3 *Funções contínuas, compacidade e o Espaço de Hausdorff*

Em estudos nas áreas de Cálculo e Análise Real, o conceito de funções contínuas na reta real e no espaço é apresentado como um conceito básico e necessário para o desenvolvimento de outros conceitos, como derivadas e integrais. À medida que se avança em Matemática, tipos mais gerais de funções contínuas surgem, como consequência natural da generalização dos espaços estudados. Este conceito é uma ideia central para a Topologia e é apresentado sem nenhuma referência à noção de limite, diferentemente da forma como é apresentado no Cálculo.

Além da ideia de continuidade de funções, neste capítulo também será apresentada uma caracterização dos chamados *conjuntos compactos.*

Desde o início dos estudos na área da Topologia, ficou claro que o intervalo fechado $[a, b]$ da reta real possuía uma certa propriedade crucial para se provar resultados importantes. No entanto, por um longo tempo, não estava claro como essa propriedade deveria ser formulada para um espaço topológico arbitrário. Acreditava-se que a propriedade crucial de $[a, b]$ consistia no fato de que todo subconjunto infinito de $[a, b]$ possui um ponto de acumulação e atribuiu-se, então, o nome de *compacidade* a essa propriedade particular. Posteriormente, foi percebido pelos matemáticos que uma formulação mais forte, em termos de coberturas abertas do espaço, é mais central.

Por fim, também será apresentado o Espaço Métrico de Hausdorff, cujas propriedades favorecem o estudo dos fractais geométricos.

3.1 Funções contínuas

Nesta seção, será apresentada a definição de continuidade para espaços topológicos e verificaremos a equivalência dessa definição mais geral com a definição apresentada usualmente para o caso particular dos espaços métricos. Também serão apresentadas algumas propriedades envolvendo funções contínuas. Os conceitos apresentados nesta seção podem ser encontrados em [5].

Definição 3.1 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua se, para todo aberto $A \subset Y$, o conjunto $f^{-1}(A) = \{x \in X; f(x) \in A\}$ é aberto em X.*

Observação 3.1 *Recordemos que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto p se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de maneira que $|x - p| < \delta$ implica $|f(x) - f(p)| < \epsilon$.*

Intuitivamente, podemos pensar que estão "arbitrariamente" próximos de $f(p)$ os valores de f correspondentes a pontos "suficientemente" próximos de p.

Assim como na reta real, considerando uma função definida em espaços métricos M e N, também temos a definição "$\epsilon - \delta$" de continuidade, ou seja, uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua em $x \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $d_M(x, y) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(y)) < \epsilon$. Dizemos que f é contínua se f for contínua em todo $x \in M$.

Veremos, na proposição a seguir, a equivalência das definições apresentadas de continuidade no caso em que M e N são espaços métricos.

Proposição 3.1 *Sejam M e N espaços métricos e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação. Então, f é contínua se, e somente se, f é "$\epsilon - \delta$" contínua.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $x \in M$. Dado $\epsilon > 0$, considere a bola $B(f(x), \epsilon) \subset N$. Como $B(f(x), \epsilon)$ é um aberto em N e f é contínua, então $f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ é um aberto em M, que contém x. Logo, existe $\delta > 0$, tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$.

Portanto, $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

($\Longleftarrow$) Seja A um conjunto aberto em N. Se $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, então este conjunto é um aberto em M.

Agora, suponhamos que $f^{-1}(A) \neq \emptyset$. Assim, seja $x \in f^{-1}(A)$. Então, $f(x) \in A$ e, como A é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que a bola $B(f(x), \epsilon) \subset A$. Por hipótese, para esse ϵ, existe $\delta > 0$, tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon) \subset A$.

Assim, segue que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) \subset f^{-1}(A)$. Logo, $f^{-1}(A)$ é um conjunto aberto em M.

Portanto, f é contínua. ■

Proposição 3.2 *Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$, existe uma bola $B(p, \delta)$, tal que*

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon).$$

Exemplo 3.1 *Sendo M e N espaços métricos, toda contração $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação contínua.*

De fato, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{s}$, sendo s o fator de contração de f, temos que se $d(x, y) < \delta$, então

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) < s \cdot \delta = s \cdot \frac{\epsilon}{s}.$$

Logo, $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, para todo $x, y \in M$, e segue que f é contínua.

Teorema 3.1 *Sejam X e Y espaços topológicos. Então, são equivalentes:*

(1)$f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua;

(2) Para todo $A \subset X$, temos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(3) Para todo fechado $F \subset Y$, temos que $f^{-1}(F)$ é um fechado em X;

(4) Para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x, tal que $f(U) \subset V$.

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2) Seja $A \subset X$. Vamos mostrar que se $x \in \overline{A}$, então $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Seja V uma vizinhança de $f(x)$. Então, como, por hipótese, f é contínua, segue que $f^{-1}(V)$ é um aberto em X que contém x.

Como $x \in \overline{A}$, segue que existe $y \in f^{-1}(V) \cap A$. Assim, $f(y) \in V \cap f(A)$, de modo que $f(x) \in \overline{f(A)}$, como desejado.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Seja $F \subset Y$ um conjunto fechado e $A = f^{-1}(F)$. Vamos mostrar que A é um conjunto fechado em X.

Temos que $f(A) = f(f^{-1}(F)) \subset F$. Assim, se $x \in \overline{A}$, da hipótese segue que $f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{F} = F$, pois F é fechado. Logo, $x \in f^{-1}(F) = A$ e, consequentemente, $\overline{A} \subset A$, ou seja, $\overline{A} = A$. Portanto, A é fechado.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Seja V um conjunto aberto em Y e $F = Y - V$.

Então, por hipótese, temos que o conjunto $f^{-1}(F) = X - f^{-1}(V)$ é fechado, pois F é fechado em Y, uma vez que é o complementar de V em Y. Logo, $f^{-1}(V)$ é um aberto em X. Portanto, f é contínua.

(1) $\Longrightarrow$ (4) Seja $x \in X$ e V uma vizinhança de $f(x)$. Então, como f é contínua, $U = f^{-1}(V)$ é um aberto em X, contendo x e é tal que $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Seja V um conjunto aberto em Y e seja $x \in f^{-1}(V)$. Assim, $f(x) \in V$. Logo, segue da hipótese que existe uma vizinhança U de x, tal que $f(U) \subset V$. Logo, $x \in U \subset f^{-1}(V)$. Desse modo, $f^{-1}(V)$ é aberto em X. Portanto, f é contínua.

■

Proposição 3.3 *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ são contínuas, então $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é contínua.*

Demonstração. Se U é um aberto em Z, então $g^{-1}(U)$ é um aberto em Y e $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é um aberto em X. Então, como $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$, o resultado segue.

■

3.2 Compacidade

Nesta seção, será apresentada uma caracterização dos chamados *conjuntos compactos*, além de algumas propriedades relacionadas a estes conjuntos.

Os conceitos apresentados nesta seção podem ser encontrados em [5].

Definição 3.2 *Seja $X \subset M$. Uma cobertura aberta de X é uma coleção (ou família) $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos abertos de M, tal que $X \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)$.*

Definição 3.3 *Seja $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de $X \subset M$. Dizemos que $A_{\lambda_1}, \cdots, A_{\lambda_n} \in (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ formam uma subcobertura finita de $X \subset M$, se*

$$X \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}.$$

Definição 3.4 *Um conjunto $K \subset M$ é compacto se toda cobertura $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de K por abertos admite uma subcobertura finita.*

Proposição 3.4 *Sejam $K_1, \ldots, K_n$ subconjuntos compactos de M. Então, $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ é compacto.*

Demonstração. Seja $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de K. Como $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$, temos que $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura aberta de K_i, para todo $i = \{1, ..., n\}$. Como cada K_i é compacto, segue que $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ admite uma subcobertura finita A_j, tal que A_j cobre K_j, para todo índice $j \in \{1, ..., n\}$. Assim, tomando $A = A_1 \cup ... \cup A_n$, temos que A é uma subcobertura finita de K. Portanto, $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ é compacto.

■

Teorema 3.2 *Seja a função $f : K \longrightarrow M$ contínua e K um conjunto compacto. Então, $f(K)$ também é compacto.*

Demonstração. Para mostrar que $f(K)$ é compacto, vamos tomar $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de $f(K)$, isto é, $f(K) \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)$.

Seja $U_\lambda = f^{-1}(A_\lambda)$. Como f é contínua, U_λ é aberto em K. Além disso, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tais que $K \subset U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$. Assim, $f(K) \subset f(U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}) = f(U_{\lambda_1}) \cup \ldots f(U_{\lambda_n})$. Como $f(U_{\lambda_i}) = A_{\lambda_i}$, para todo $1 \leq i \leq n$, pois $U_\lambda = f^{-1}(A_\lambda)$, temos que

$$f(K) \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}.$$

Portanto, $f(K)$ é um conjunto compacto.

■

Teorema 3.3 *Seja F um conjunto fechado e K compacto. Se $F \subset K$, então F é compacto.*

Demonstração. Seja $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de F. Seja $U = M - F = F^c$. Como F é fechado, temos que U é aberto. Assim, $\left\{(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, U\right\}$ é uma cobertura aberta de K.

Como K é compacto, então existem $\lambda_1, .., \lambda_n \in \Lambda$ tais que $K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} \cup U$.

Como $F \subset K$, temos que $F \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} \cup U$. Como $U = F^c$, temos que $F \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$.

Portanto, F é um conjunto compacto.

■

No Teorema 3.4, apresentado a seguir, $\mathbb{R}^n$ é tomado com uma de suas métricas usuais.

Teorema 3.4 *Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.*

Demonstração. $(\Longleftarrow)$ Como $K \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e limitado, então existe um cubo n-dimensional I^n da forma $I^n = [a,b] \times \cdots \times [a,b]$, tal que $K \subset I^n$. Como K é fechado e I^n é compacto, temos que K é compacto.

$(\Longrightarrow)$ Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Tome $\{B(x,1); x \in K\}$ uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, então existem $x_1, \ldots, x_n \in K$, tais que $K \subset B(x_1, 1) \cup \cdots \cup B(x_n, 1)$. Como cada bola possui diâmetro igual a 2, segue que cada bola é um conjunto limitado. Logo, temos que $B(x_1, 1) \cup \cdots \cup B(x_n, 1)$ é um conjunto limitado. Assim, como $K \subset B(x_1, 1) \cup \cdots \cup B(x_n, 1)$, segue que K é limitado. Finalmente, resta mostrar que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto, então K é um conjunto fechado. Para tanto, basta mostrar que K^c é aberto. Seja $p \in K^c$. Vamos mostrar que p é ponto interior de K^c, ou seja, que existe uma bola $B(p,r) \subset K^c$. Assim, dado $q \in K$, considere as bolas A_q e B_q, com centros p e q, respectivamente, tais que $A_q \cap B_q = \emptyset$.

Quando q percorre K, determinamos duas coleções de bolas: $(A_q)_{q\in K}$ (bolas com centro p) e $(B_q)_{q\in K}$ (cobertura aberta de K). Como K é compacto, $(B_q)_{q\in K}$ admite uma subcobertura finita, isto é, existem $q_1,\ldots,q_n \in K$, tais que $K \subset B_{q_1} \cup \cdots \cup B_{q_n}$. Associada a cada bola B_{q_i} temos ainda uma bola A_{q_i}.

Seja $A = A_{q_1} \cap \cdots \cap A_{q_n}$. Temos que A é uma bola aberta de centro em p e, além disso, $A \cap B_{q_i} = \emptyset$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo, $A \cap (B_{q_i} \cup \cdots \cup B_{q_n}) = \emptyset$. Assim, $A \cap K = \emptyset$, o que implica que $A \subset K^c$. Logo, K^c é um conjunto aberto.

Portanto, K é um conjunto fechado.

$\blacksquare$

Definição 3.5 *Dizemos que um espaço métrico M tem a propriedade Bolzano Weierstrass (B.W.) se, todo subconjunto infinito de M tem ponto de acumulação.*

Proposição 3.5 *Seja M um espaço métrico compacto. Então, M é B.W.*

Demonstração. Suponha que o espaço métrico M não satisfaz *B.W.*. Isto é, existe um subconjunto $F \subset M$ infinito e sem ponto de acumulação. Logo $F' = \varnothing$. Como $\overline{F} = F \cup F'$, segue que $\overline{F} = F$. Como F é fechado e $F \subset M$ que é compacto, temos que F é compacto. Agora, para cada $a \in F$, como $F' = \varnothing$, segue que a não é um ponto de acumulação de F, ou seja para cada $a \in F$, existe $\varepsilon_a > 0$, tal que $B(a,\varepsilon_a) \cap F = \{a\}$. Assim, $(B(a,\varepsilon_a))_{a\in F}$ é uma cobertura aberta de F que não admite uma subcobertura finita para F, o que contraria o fato de F ser compacto! Portanto, M é *B.W.*.

$\blacksquare$

Definição 3.6 *Um espaço métrico M é sequencialmente compacto (S.C.) se, toda sequência (x_n) de pontos de M admite uma subsequência convergente.*

Proposição 3.6 *Seja M um espaço métrico. Se M é B.W., então M é S.C.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de pontos de M.

Considere $A = \{x_n \ : \text{N} \in \mathbb{N}\}$, o conjunto dos valores assumidos pelos termos da sequência (x_n). Se A é finito, então existe $x \in M$, tal que $x_n = x$ para uma infinidade de valores de n. Nesse caso, a sequência (x_n) possui uma subsequência constante, e consequentemente, convergente. Se A é infinito, então como A é *B.W.*, A possui ponto de acumulação $x \in M$. Logo, existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge para $x \in M$.

Portanto, M é $S.C.$ ■

Definição 3.7 *Seja M um espaço métrico e $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura aberta de M. Um número real $\delta > 0$ é chamado número de Lebesgue de $\mathcal{A}$ se dado qualquer conjunto $U \subset M$, com $diam(U) \leq \delta$, então existe $\lambda \in \Lambda$, tal que $U \subset A_\lambda$.*

Teorema 3.5 *Se M é um espaço métrico compacto, então toda cobertura aberta de M tem um número de Lebesgue.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ seja uma cobertura aberta de M que não admite número de Lebesgue. Assim, para todo $\delta > 0$, existe um conjunto $U_\delta \subset M$, onde $diam(U_\delta) \leq \delta$, mas $U_\delta \nsubseteq A_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto U_n tal que $diam(U_n) \leq \frac{1}{n}$ e $U_n \nsubseteq A_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. (note que $U_n \neq \varnothing$, pois caso contrário $U_n \subset A_\lambda$ para todo λ).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $(x_n) \in U_n$. Vamos mostrar que (x_n) não admite subsequência convergente. Suponhamos que existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que (x_{n_k}) converge para $x \in M$.

Como $\mathcal{A}$ é uma cobertura aberta de M, então existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, então existe $\varepsilon > 0$, tal que $B(x, \varepsilon) \subset A_\lambda$.

Como (x_{n_k}) converge para x_m, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_k} \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, para todo $n_k > n_0$.

Assim, tomando $n_k > \max\left\{n_0, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Logo, $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Afirmação: $U_{n_k} \subset B(x, \varepsilon)$.

De fato, seja $y \in U_{n_k}$. Como $diam(U_{n_k}) \leq \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$, então o fato de $y, x_{n_k} \in U_{n_k}$, nos leva a conclusão de que $d(y, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Assim, $d(y, x) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Portanto, se $d(y, x) < \varepsilon$, então $y \in B(x, \varepsilon)$. Assim, temos que $U_{n_k} \subset B(x, \varepsilon) \subset A_\lambda$. O que contraria o fato de $U_n \nsubseteq A_\lambda$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, (x_n) não admite uma subsequência convergente, ou seja, M não pode ser sequencialmente compacto.

Portanto, M não é compacto.

■

Lema 3.1 *Seja M um espaço métrico sequencialmente compacto. Se $\mathcal{A} = (B(x,\varepsilon))_{x\in M}$ é uma cobertura aberta de M por bolas abertas de raio fixo ε, então existem $x_1, x_2, ..., x_n \in M$, tais que $M = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.*

Demonstração. Seja $x_1 \in M$, arbitrário, e considere $B(x_1,\varepsilon)$. Se $B(x_1,\varepsilon) = M$, então não há mais nada a ser feito.

Se $B(x_1,\varepsilon) \neq M$, então existe $x_2, \notin B(x_1,\varepsilon)$, tal que $x_2 \in M$. Se $M = B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon)$, então o lema está demonstrado. Se $M \neq B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon)$, então existe $x_3 \in M$, tal que $x_3 \notin B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon)$. Nesse caso, repetimos o raciocínio. Este processo nos conduz a dois casos possíveis:

1º caso: Após um número finito de passos, obtemos $M = B(x_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n,\varepsilon)$ e, neste caso, o lema está demonstrado.

2º caso: Construímos uma sequência (x_n) de pontos de M, tal que $x_{n+1} \notin B(x_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n,\varepsilon)$. No entanto, observe que este caso não pode ocorrer, pois teríamos que $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo, (x_n) não admitiria subsequência convergente, contrariando o fato de M ser *S.C.*.

Portanto, $M = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

■

Proposição 3.7 *Seja M um espaço métrico. Se M é S.C., então M é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de M. Como M é sequencialmente compacto, então $\mathcal{A}$ possui número de Lebesgue δ.

Vamos considerar $\varepsilon > 0$ fixo, tal que $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$.

Para cada $x \in M$, tomando $B(x,\varepsilon)$ teremos $diam(B(x,\varepsilon)) \leq 2\varepsilon < \delta$.

Segue da definição de número de Lebesgue de $\mathcal{A}$, que existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset A_\lambda$. Logo, $(B(x,\varepsilon))_{x\in M}$ é uma cobertura aberta de M, com bolas de raio de ε.

Então, segue do Lema 3.1 que existem $x_1, ..., x_n \in M$ tais que

$$M = B(x_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n,\varepsilon).$$

Como cada $B(x_i,\varepsilon) \subset A_{\lambda_i}$, para algum $\lambda \in \Lambda$, concluímos que $M \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$, ou seja, $A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$ é uma subcobertura finita de M.

Portanto, M é compacto.

■

Podemos reunir os últimos resultados no seguinte teorema:

Teorema 3.6 *Seja M um espaço métrico. Então, são equivalentes:*

(i) *M é compacto;*

(ii) *M é B.W.;*

(iii) *M é S.C.*

Observação: De um modo geral, o fato de um conjunto ser fechado e limitado não implica, necessariamente, que X é compacto.

Nos dois exemplos a seguir, vemos que é possível obter um conjunto fechado e limitado, mas que não é compacto.

Exemplo 2: Considere um conjunto X com a métrica zero-um. Observe que X é fechado, pois todo conjunto é fechado em si mesmo e que X é limitado, pois tem diâmetro 1. Contudo, X será compacto se, e somente se, for finito.

Exemplo 3: No espaço de Hilbert $H = \{(x_n); x_n \in \mathbb{R} \ e \ \sum_{i=1}^{\infty}(x_i^2) < \infty\}$, considere o conjunto $F = \{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$, no qual, para cada $n \in \mathbb{N}$, apenas a $n-$ésima coordenada de e_n é 1 e as demais são nulas. Dados $n \neq m$, quaisquer, temos que $||e_n - e_m|| = \sqrt{2}$. Logo, nenhuma subsequência de elementos distintos de F admite subsequência convergente. Assim, F não possui ponto de acumulação, de modo que F é fechado, limitado e não é compacto em H.

Teorema 3.7 *Se M é compacto, então toda função real contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em M. Mais precisamente, existem $x_0, x_1 \in M$, tais que $f(x_0) < f(x) < f(x_1)$, para todo $x \in M$.*

Demonstração. Sejam M compacto e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então, pelo Teorema 3.2, segue que $f(M)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ e, portanto, do Teorema 3.4, segue que $f(M)$ é fechado e limitado. Daí, temos que existem $a = inf f(M)$ e $b = sup f(M)$, tais que $a \in f(M)$ e $b \in f(M)$, ou seja, existem x_0 e $x_1 \in M$ tais que $f(x_0) = a$ e $f(x_1) = b$.

Portanto, $f(x_0) < f(x) < f(x_1)$, para todo $x \in M$.

■

Teorema 3.8 *Todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

Demonstração. Sejam X um espaço de Hausdorff e Y um subespaço compacto de X. Para mostrar que Y é fechado, vamos mostrar que $Y^c = X - Y$ é aberto.

Seja $x_0 \in Y^c$. Vamos mostrar que existe uma vizinhança de x_0 disjunta de Y.

Como X é um espaço de Hausdorff e Y é subespaço de X, para cada $y \in Y$ podemos escolher vizinhanças U_y e V_y de x_0 e y, respectivamente, tais que $U_y \cap V_y = \emptyset$.

A coleção $\{V_y; y \in Y\}$ é uma cobertura de Y formada por conjuntos abertos em X. Como Y é compacto, existe uma subcoleção finita $\{V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}\}$ que cobre Y. Então, o conjunto aberto $V = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ contém Y e é disjunto do conjunto aberto $U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n}$, em que U_{y_i} é um aberto contendo x_0, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Logo, U é uma vizinhança de x_0 e $U \cap Y = \emptyset$. Assim, $U \subset Y^c$, ou seja, Y^c é aberto. Portanto, Y é fechado.

■

3.3 O Espaço de Hausdorff

Nesta seção, será apresentado um espaço ideal para o estudo de fractais geométricos: o espaço métrico $(\mathcal{H}(X), h)$, chamado Espaço de Hausdorff. A introdução deste espaço se torna natural quando se deseja discutir, por exemplo, imagens, fotos e desenhos, os quais podem ser entendidos como subconjuntos compactos de um espaço métrico.

Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [6].

Definição 3.8 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Então, $\mathcal{H}(X)$ denota o espaço cujos pontos são os subconjuntos compactos de X, diferentes de vazio.*

Proposição 3.8 *Se A e $B \in \mathcal{H}(X)$, então $A \cup B \in \mathcal{H}(X)$.*

Demonstração. Se A e B pertencem a $\mathcal{H}(X)$, então A e B são subconjuntos compactos de X, não vazios. Então, como a união finita de compactos é compacto, segue que $A \cup B$ é também um subconjunto compacto de X. Logo, $A \cup B \in \mathcal{H}(X)$.

■

Observação 3.2 *Dados A e $B \in \mathcal{H}(X)$, $A \cap B$ não necessariamente pertence a $\mathcal{H}(X)$. Observe que se $A \cap B = \emptyset$, então $A \cap B \notin \mathcal{H}(X)$.*

Definição 3.9 *Sejam (X, d) um espaço métrico completo, $x \in X$ e $B \in \mathcal{H}(X)$. Definimos:*

$$d(x, B) = min\{d(x, y); y \in B\}.$$

$d(x, B)$ recebe o nome de *distância do ponto x ao conjunto B.*

Observação 3.3 *A existência de um valor mínimo para o conjunto $\{d(x, y); y \in B\}$ segue da compacidade de $B \in \mathcal{H}(X)$ e do fato de B ser um conjunto não vazio.*

Definição 3.10 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Sejam $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Definimos:*

$$d(A, B) = max\{d(x, B); x \in A\}.$$

$d(A, B)$ recebe o nome de *distância do conjunto $A \in \mathcal{H}(X)$ ao conjunto $B \in \mathcal{H}(X)$.*

Observação 3.4 *Da compacidade dos conjuntos A e B, segue que existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tais que $d(A, B) = d(x_0, y_0)$.*

Lema 3.2 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Se $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$, então*

$$d(A \cup B, C) = max\{d(A, C), d(B, C)\}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d(A \cup B, C) &= max\{d(x, C); x \in A \cup B\} \\ &= max\{max\{d(x, C); x \in A\}, max\{d(x, C); x \in B\}\} \\ &= max\{d(A, C), d(B, C)\}. \end{aligned}$$

■

Proposição 3.9 *Sejam $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Se $B \subset C$, então $d(x, C) \leq d(x, B)$.*

Demonstração. Temos que

$$d(x, C) = min\{d(x, y), y \in C\} = d(x, y_0),$$

para algum $y_0 \in C$, pois C é compacto.

Se $y_0 \in B$, temos

$$\begin{aligned} d(x, B) &= min\{d(x, y); y \in B \subset C\} \\ &= d(x, y_0) \\ &= d(x, C). \end{aligned}$$

Se $y_0 \notin B$, então

$$\begin{aligned} d(x, B) &= min\{d(x, y); y \in B\} \\ &= d(x, y_1), \end{aligned}$$

com $y_1 \in B \subset C$. Como $y_0 \neq y_1$, segue que $d(x, y_1) \geq d(x, y_0)$, pois $d(x, y_0) = min\{d(x, y); y \in C\}$. Portanto, temos que $d(x, C) \leq d(x, B)$.

■

Proposição 3.10 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Sejam $A, B \in \mathcal{H}(X)$, tais que $A \neq B$. Então, $d(A, B) \neq 0$ ou $d(B, A) \neq 0$ e, se $A \subset B$, então $d(A, B) = 0$.*

Demonstração. Como $A \neq B$, podemos ter os casos apresentados na Figura 6.

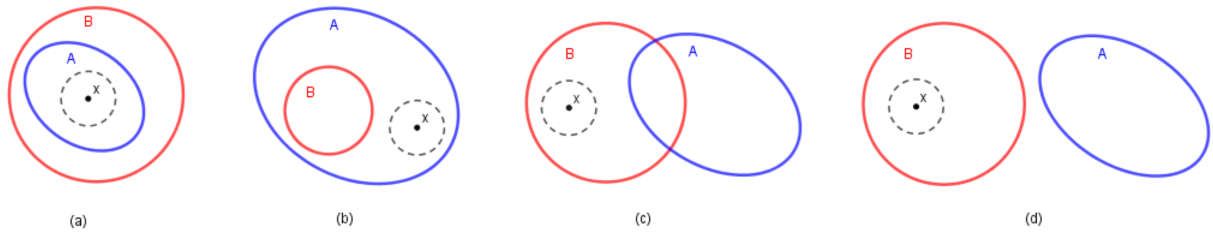

Figura 6 – Possíveis disposições dos conjuntos A e B.
Fonte: do autor.

No caso (a), em que $A \subset B$, de maneira imediata, segue que

$$d(A, B) = max\{d(x, B); x \in A \subset B\} = 0.$$

No caso (b), em que $B \subset A$ e $A \neq B$, existe $x_0 \notin B = \overline{B}$. Então, como $x_0 \notin \overline{B}$, segue que $d(x_0, B) > 0$. Podemos aplicar o mesmo raciocínio para os casos (c) (em que $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ e $A \cap B \neq \emptyset$) e (d) (em que $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ e $A \cap B = \emptyset$) e concluir que

$$d(A, B) = max\{d(x, B); x \in A\} \geq d(x_0, B) > 0.$$

■

Observação 3.5 *O caso (a), em que $A \subset B$, nos diz que pode ocorrer $d(A, B) = 0$ e $A \neq B (A \subset B)$. Logo, não podemos usar simplesmente a função d como métrica para $\mathcal{H}(X)$. Isso motiva a próxima definição.*

Definição 3.11 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Então, a distância de Hausdorff entre os pontos $A, B \in \mathcal{H}(X)$ é definida como sendo*

$$h(A, B) = max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Teorema 3.9 *A distância de Hausdorff h, como definida na Definição 3.11, é uma métrica no espaço $\mathcal{H}(X)$.*

Demonstração. Sejam A, B e $C \in \mathcal{H}(X)$. Mostraremos que h satisfaz as condições de métrica.

(i) Temos que

$$h(A, A) = max\{d(A, A), d(A, A)\} = d(A, A) = max\{d(x, A); x \in A\} = 0.$$

Portanto, $h(A, A) = 0$, para todo $A \in \mathcal{H}(X)$.

Da compacidade de A e B, segue que existem $a \in A$ e $b \in B$, tais que

$$h(A, B) = d(a, b) \geq 0.$$

Portanto, $h(A, B) = d(a, b) \geq 0$, para todo $A, B \in \mathcal{H}(X)$.

(ii) Como

$$h(A, B) = max\{d(A, B), d(B, A)\} = max\{d(B, A), d(A, B)\} = h(B, A),$$

para todo $A, B \in \mathcal{H}(X)$, temos que $h(A, B) = h(B, A)$.

(iii) Para mostrar que $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$, primeiramente provaremos que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Para todo $a \in A$, temos que

$$\begin{aligned} d(a, B) &= min\{d(a, b); b \in B\} \\ &\leq min\{d(a, c) + d(c, b); b \in B\}, \quad \forall c \in C, \\ &= d(a, c) + min\{d(c, b); b \in B\}, \quad \forall c \in C. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$d(a, B) \leq d(a, c) + min\{d(c, b); b \in B\}, \tag{3.1}$$

para todo $c \in C$.

Como $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$, então existe $c_0 \in C$, tal que $d(a, c_0) = min\{d(a, c); c \in C\}$. Como a desigualdade 3.1 é válida para todo $c \in C$, em particular vale para $c_0 \in C$.

Assim,

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq d(a, c_0) + min\{d(c_0, b); b \in B\} \\ &= min\{d(a, c); c \in C\} + min\{d(c_0, b); b \in B\} \\ &= d(a, C) + min\{d(c_0, b); b \in B\} \\ &\leq d(a, C) + max\{min\{d(c, b); b \in B\}; c \in C\} \\ &= d(a, C) + max\{d(c, B); c \in C\} \\ &= d(a, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(a,B) &\leq d(a,C)+d(C,B) \\ &\leq max\{d(x,C); x\in A\}+d(C,B). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(a,B)\leq d(A,C)+d(C,B), \tag{3.2}$$

para todo $a \in A$.

Como $A \in \mathcal{H}(X)$, segue que existe um $a_0 \in A$, tal que

$$d(a_0,B)=max\{d(x,B); x\in A\}.$$

Aplicando a_0 na desigualdade 3.2, obtemos:

$$d(a_0,B)\leq d(A,C)+d(C,B),$$

ou seja,

$$max\{d(x,B); x\in A\}\leq d(A,C)+d(C,B).$$

Portanto, $d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$.

Com um raciocínio análogo, obtemos que

$$d(B,A)\leq d(B,C)+d(C,A).$$

Assim,

$$\begin{aligned} h(A,B) &= max\{d(A,B),d(B,A)\} \\ &\leq max\{d(A,C)+d(B,C),d(B,C)+d(C,A)\} \\ &\leq max\{d(A,C)+d(C,A)\}+max\{d(B,C),d(C,B)\} \\ &= h(A,C)+h(C,B). \end{aligned}$$

Portanto, $h(A)\leq h(A,C)+h(C,B)$, para todo $A,B,C\in\mathcal{H}(X)$.

■

Agora, iremos estabelecer condições para mostrar que $(\mathcal{H}(X),h)$ é um espaço métrico completo, quando (X,d) também o for.

Definição 3.12 *Seja $S\subset X$ e seja $\Gamma\geq 0$. Então,*

$$S+\Gamma=\{x\in X; d(x,s)\leq\Gamma, \textit{para algum } s\in S\}.$$

Iremos nos referir a $S + \Gamma$ como a *dilatação de* S *por uma bola de raio* Γ.

Lema 3.3 *Sejam* $A, B \in \mathcal{H}(X)$, *onde* (X, d) *é um espaço métrico. Dado* $\epsilon > 0$, *então* $h(A, B) \leq \epsilon$ *se, e somente se,* $A \subset B + \epsilon$ *e* $B \subset A + \epsilon$.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que $h(A, B) \leq \epsilon$. Como $h(A, B) = max\{d(A, B), d(B, A)\}$, então

$$d(A, B) \leq \epsilon \tag{3.3}$$

e

$$d(B, A) \leq \epsilon. \tag{3.4}$$

Como $d(A, B) = max\{d(a, B); a \in A\}$, então, segue da desigualdade 3.3 que $d(a, B) \leq \epsilon$, para todo $a \in A$. Assim, para cada $a \in A$, temos que $a \in B + \epsilon$. Logo, $A \subset B + \epsilon$.

Com um raciocínio análogo, segue da desigualdade 3.4 que $B \subset A + \epsilon$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $A \subset B + \epsilon = \{x \in X; d(x, b) \leq \epsilon, \text{para algum } b \in B\}$. Considere

$$d(A, B) = max\{d(a, B); a \in A\}.$$

Como $A \subset B + \epsilon$, então, para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq \epsilon$. Assim,

$$d(a, B) = min\{d(a, \tilde{b}) : \tilde{b} \in B\} \leq \epsilon.$$

Como $d(a, B) \leq \epsilon$, para todo $a \in A$, então

$$max\{d(a, B); a \in A\} \leq \epsilon,$$

ou seja, $d(A, B) \leq \epsilon$. Com um raciocínio análogo, temos que se $B \subset A + \epsilon$, então $d(B, A) \leq \epsilon$.

Logo, se $A \subset B + \epsilon$ e $B \subset A + \epsilon$, então temos que $d(A, B) \leq \epsilon$ e $d(B, A) \leq \epsilon$ e, consequentemente,

$$h(A, B) = max\{d(A, B), d(B, A)\} \leq \epsilon.$$

■

Observação 3.6 *Se* (A_n) *é uma sequência de Cauchy em* $\mathcal{H}(X)$, *então, dado* $\epsilon > 0$, *existe* n_0 *tal que* $h(A_m, A_n) < \epsilon$, *para todo* $m, n \geq n_0$. *No entanto, observe que isso implica que para todo* $m, n \geq n_0$,

$$A_n + \epsilon \supset A_m \text{ e } A_m + \epsilon \supset A_n.$$

Lema 3.4 ***(Lema da Extensão)*** *Seja (X, d) um espaço métrico, $\{A_n\}$ uma sequência de Cauchy de pontos em $(\mathcal{H}(X), h)$ e $\{n_j\}$ uma sequência infinita de inteiros tais que $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Suponha que exista uma sequência de Cauchy $\{x_{n_j}\}$ em $\{X, d\}$, de modo que $x_{n_j} \in A_{n_j}$, $j = 1, 2, \cdots$. Então, existe uma sequência de Cauchy $\{\tilde{x}_n\}$ em (X, d), tal que $\tilde{x}_n \in A_n$ e $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ para $n = 1, 2, \cdots$.*

Demonstração. Daremos a construção da sequência $\{\tilde{x}_n\}$ em (X, d), tal que $\tilde{x}_n \in A_n$, para $n = 1, 2, \cdots$. Para cada inteiro i pertencente ao conjunto $J = \{1, \cdots, n_1\}$, vamos definir o conjunto correspondente

$$\{x \in A_i; d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_i)\} = B_i.$$

Em cada conjunto B_i, construído anteriormente, escolha um elemento $\tilde{x}_i$.

Note que $B_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n_1$, devido à compacidade de cada A_i. (Observe que quando $i = n_1$, $B_{n_1} = \{x \in A_{n_1}; d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_{n_1})\} = \{x_{n_1}\}$, o que implica no fato de $d(x_{n_1}, A_{n_1}) = 0$. Logo, $\tilde{x}_{n_1} = x_{n_1}$.)

Agora, para cada inteiro $i \in J_1 = \{n_1 + 1, \cdots, n_2\}$, considere

$$B_i = \{x \in A_i; d(x, x_{n_2}) = d(x_{n_2}, A_i)\}.$$

Novamente, da compacidade de cada A_i segue que $B_i \neq \emptyset$, para todo $i \in J_1$. Assim, para cada i, podemos escolher um elemento $\tilde{x}_i \in B_i$.

Observe que para cada $i = n_2$, temos que

$$B_{n_2} = \{x \in A_{n_2}; d(x, x_{n_2}) = d(x_{n_2}, A_{n_2}) = 0\}.$$

Portanto, $B_{n_2} = \{x_{n_2}\}$, o que implica $\tilde{x}_{n_2} = x_{n_2}$.

De um modo geral, assumindo $n_0 = 0$, para cada $j \in \{1, 2, 3, \cdots\}$ e cada $i \in J_j = \{n_{j-1} + 1, \cdots, n_j\}$, definimos o conjunto

$$B_i = \{x \in A_i; d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_i)\}.$$

A compacidade de cada A_i faz com que cada B_i seja não vazio. Logo, podemos tomar $\tilde{x}_i \in B_i$, para cada i. Note que se $i = n_j$, então

$$B_{n_j} = \{x \in A_{n_j}; d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_{n_j})\} = \{x_{n_j}\}.$$

Logo, $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$.

Vamos mostrar que a sequência $\tilde{x}_n$ possui as propriedades desejadas.

Por construção, temos que $\tilde{x}_n \in A_n$ e $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$. Para mostrar que $\tilde{x}_n$ é uma sequência de Cauchy, considere $\epsilon > 0$. Como $\tilde{x}_{n_k}$ é sequência de Cauchy, temos que existe N_1, tal que

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall n_k, n_j \geq N_1.$$

Do mesmo modo, como $\tilde{A}_n$ é sequência de Cauchy, existe N_2 tal que

$$h(A_m, A_n) < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall m, n \geq N_2.$$

Seja $N = max\{N_1, N_2\}$. Assim, $\forall n, m \geq N$, temos que

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n),$$

sendo n_j e n_k tais que

$$m \in \{n_{j-i} + 1, \cdots, n_j\} \text{ e } n \in \{n_{k-1} + 1, \cdots, n_k\}.$$

Como $n_j \geq m$ e $m \geq N$, concluímos que $h(A_m, A_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3}$.

Portanto,

$$A_{n_j} \subset A_m + \frac{\epsilon}{3} \text{ e } A_m \subset A_{n_j} + \frac{\epsilon}{3}.$$

Lembrando que

$$A_m + \frac{\epsilon}{3} = \{x \in X; d(x, y) < \frac{\epsilon}{3}, \text{ para algum } y \in A_m\}$$

e que, por hipótese, $x_{n_j} \in A_{n_j} \subset A_m + \frac{\epsilon}{3}$, então

$$d(x_{n_j}, y) < \frac{\epsilon}{3}, \text{ para algum } y \in A_m.$$

Como $d(x_{n_j}, A_m) = min\{d(x_{n_j}, a); a \in A_m\}$, concluímos que $d(x_{n_j}, A_m) < \frac{\epsilon}{3}$.

Finalmente, lembrando que para cada $j \in \{1, 2, 3, \cdots\}$ e cada $i \in \{n_{j-i}+1, \cdots, n_j\}$, temos que

$$B_i = \{x \in A_i; d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_i)\},$$

e fazendo $i = m$, segue que

$$\tilde{x}_m \in B_m = \{x \in A_m; d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_m)\}.$$

Portanto,

$$d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_m) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Analogamente, mostra-se que $d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Assim,

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) &\leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + \frac{\epsilon}{3} + d(x_{n_k}, \tilde{x}) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon, \quad \text{para todo} \quad m, n \geq N. \end{aligned}$$

■

3.3.1 Completude do Espaço de Hausdorff

Nesta subseção, serão apresentados alguns resultados a partir dos quais será possível concluir que $(\mathcal{H}(X), h)$ é um espaço métrico completo, no caso em que (X, d) for um espaço métrico completo.

Lema 3.5 *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\{A_n\}$ uma sequência de Cauchy de pontos de $\mathcal{H}(X)$. Então o conjunto*

$$A = \{x \in X;\ \text{existe uma sequência de Cauchy } \{x_n\} \text{ de pontos de } A_n, \text{ tal que } \{x_n\} \text{ converge para } x\}$$

é diferente de vazio.

Demonstração. Mostraremos a existência de uma sequência de Cauchy $\{a_i\}$, de pontos de A_i, em X.

Como $\{A_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{H}(X), h)$, então existe uma sequência positiva de inteiros $N_1 < N_2 < \cdots < N_n < \cdots$, tal que

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}, \quad \forall m, n > N_i.$$

Assim, escolha $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Neste caso, como $h(A_{N_1}, A_{N_2}) < \dfrac{1}{2}$, então

$$max\{d(A_{N_1}, A_{N_2}), d(A_{N_2}, A_{N_1})\} < \frac{1}{2}.$$

Logo, $d(A_{N_1}, A_{N_2}) < \dfrac{1}{2}$.

Além disso,

$$d(A_{N_1}, A_{N_2}) = max\{d(x, A_{N_2}); x \in A_{N_1}\}$$

e $x_{N_1} \in A_{N_1}$, de modo que $d(x_{N_1}, A_{N_2}) < \dfrac{1}{2}$, ou seja,

$$min\{d(x_{N_1}, y); y \in A_{N_2}\} < \frac{1}{2}.$$

Sendo A_{N_2} um conjunto compacto, então existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$, tal que

$$d(x_{N_1}, x_{N_2}) = min\{d(x_{N_1}, y); y \in A_{N_2}\}.$$

Logo, dado $x_{N_1} \in A_{N_1}$, encontramos $x_{N_2} \in A_{N_2}$, tal que

$$d(x_{N_1}, x_{N_2}) < \frac{1}{2}. \quad \text{(1º passo da indução que faremos!)}$$

Assuma que temos uma sequência finita de elementos $x_{N_i} \in A_{N_i}; i = 1, 2, \cdots, k$, para os quais

$$d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) < \frac{1}{2^{i-1}}. \quad \text{(Hipótese de indução)}$$

Então, como $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) < \dfrac{1}{2^k}$ e $x_{N_k} \in A_{N_k}$, com um raciocínio análogo ao primeiro passo, podemos encontrar $x_{N_{K+1}} \in A_{N_{K+1}}$, tal que

$$d(x_{N_k, N_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}.$$

Assim, pelo princípio da indução finita, podemos encontrar uma sequência infinita

$$\left\{ x_{N_i} \in A_{N_i}, \text{ tal que } d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) < \frac{1}{2^i} \right\}.$$

Agora, resta apenas mostrarmos que $\{x_{N_i}\}$ é uma sequência de Cauchy em X, para, finalmente, usarmos o Lema da Extensão.

Dado $\epsilon > 0$, como a série geométrica $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ é uma série convergente, então existe um índice N_ϵ tal que

$$\sum_{i=N_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon.$$

Assim, para todo $n > m \geq N_\epsilon$, temos que

$$\begin{aligned}
d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \cdots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \\
&< \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&< \sum_{i=N_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\{x_{N_i}\}$ é uma sequência de Cauchy em X, em que cada $x_{N_i} \in A_{N_i}$.

Pelo Lema 3.4 (Lema da Extensão), existe uma sequência de Cauchy $\{a_i\}$ em (X, d) tal que $a_i \in A_i$ e $a_{N_i} = x_{N_i}$. Como (X, d) é um espaço métrico completo, segue que $\lim\limits_{i \to \infty} a_i = x \in X$.

Logo, por definição, $x \in A$ e, consequentemente, $A \neq \emptyset$. $\blacksquare$

Lema 3.6 *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\{A_n\}$ uma sequência de Cauchy de pontos de $\mathcal{H}(X)$. Então o conjunto A, como definido no Lema 3.5, é fechado.*

Demonstração. Suponha que $\{a_i\}$ é uma sequência de pontos tais que $a_i \in A$ e $\lim_{i\to\infty} a_i = a$. Vamos mostrar que $a \in A$ e, consequentemente, que A é fechado, pois, neste caso, $A = \overline{A}$.

Para cada i, como $a_i \in A$, então existe uma sequência $\{x_{i,n}\}$ de pontos de A_n tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_{i,n} \to a_i.$$

Como $\lim_{i\to\infty} a_i = a$, existe uma sequência crescente e inteiros positivos $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que

$$d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}.$$

Além disso, existe uma sequência de inteiros $\{m_i\}$ tal que $d(x_{N_i,m_i}, a_{N_i}) < \dfrac{1}{i}$.

Assim,

$$d(x_{N_i,m_i}, a) \leq d(x_{N_i,m_i}, a_{N_i}) + d(a_{N_i}, a) < \frac{2}{i}. \tag{3.5}$$

Definindo $y_{m_i} := x_{N_i,m_i}$, temos que $y_{m_i} \in A_{m_i}$ e $\lim_{i\to\infty} y_{m_i} = a$, pois segue de 3.5 que y_{m_i} fica tão próximo de a quanto desejamos.

Pelo Lema da Extensão, $\{y_{m_i}\}$ pode ser estendida para uma sequência convergente $\{z_i\}$, em que $z_i \in A_i$ e $z_{m_i} = y_{m_i}$. Como $\lim_{i\to\infty} y_{m_i} = a$, então $\lim_{i\to\infty} z_i = a$.

Portanto, $a \in A$ e, consequentemente, A é fechado. ■

Lema 3.7 *Seja K um conjunto compacto em (X, d). Então, $K + \epsilon$ é fechado em (X, d).*

Demonstração. Seja $p \in \overline{K + \epsilon}$. Logo, existe uma sequência $\{y_i\}$ de pontos de $K + \epsilon$, tal que $\lim_{i\to\infty} y_i = p$. Assim, dado $\delta > 0$ arbitrário, existe N_1 tal que

$$d(y_i, p) < \delta,$$

para todo $i \geq N_1$.

Como cada $y_i \in K + \epsilon$, então existe $x_i \in K$ tal que $d(y_i, x_i) < \epsilon$, para todo $i > N_1$.

Sendo K compacto, então a sequência $\{x_i\}$ admite uma subsequência $\{x_{i_k}\}$ convergente. Como (X, d) é um espaço métrico, então ele é de Hausdorff e, consequentemente, todo conjunto compacto é fechado, ou seja, K é fechado. Logo, $\{x_{i_k}\}$ converge para um ponto $a_0 \in K$. Assim, existe N_2 tal que $d(x_{i_k}, a_0) < \delta$, para todo $i_k \geq N_2$.

Seja $\tilde{N} = max\{N_1, N_2\}$. Então, para todo $i, k \geq \tilde{N}$, temos que

$$\begin{aligned} d(a_0, p) &\leq d(a_0, x_{i_k}) + d(x_{i_k}, y_{i_k}) + d(y_{i_k}, p) \\ &< \delta + \epsilon + \delta. \end{aligned}$$

Portanto, $d(a_0, p) < \epsilon + 2\delta$, para todo $\delta > 0$, de modo que devemos ter $d(a_0, p) \leq \epsilon$, pois, caso contrário, se $d(a_0, p) > \epsilon$, então $0 < d(a_0, p) - \epsilon < 2\delta$, para todo $\delta > 0$, o que é uma contradição.

Então, como $d(a_0, p) \leq \epsilon$, seque que $p \in K + \epsilon$. Portanto, $\overline{K + \epsilon} \subset K + \epsilon$, o que implica em $K + \epsilon = \overline{K + \epsilon}$. Logo, $K + \epsilon$ é fechado. ■

Lema 3.8 *Seja (X, d) um espaço métrico completo, $\{A_n\}$ uma sequência de Cauchy de pontos de $\mathcal{H}(X)$, e A um conjunto como definido no Lema 3.5. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que para todo $n \geq N, A \subset A_n + \epsilon$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, como $\{A_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{H}(X), h)$, temos que existe um N tal que $h(A_m, A_n) < \epsilon$, para todo $m, n \geq N$.

Agora, consideremos $n \geq N$. Então, para todo $m \geq n$, temos que $A_m \subset A_n + \epsilon$, pois $h(A_m, A_n) < \epsilon$.

Precisamos mostrar que $A \subset A_n + \epsilon$. Para tanto, tome um $a \in A$.

Temos que existe uma sequência $\{a_i\}$ tal que $a_i \in A_i$ e $\lim_{i \to \infty} a_i = a$. Desta forma, podemos assumir N suficientemente grande de modo que para todo $m \geq N, d(a_m, a) < \epsilon$. Como $A_m \subset A_n + \epsilon$ e $a_m \in A_m$, segue que $a_m \in A_n + \epsilon$.

Assim, o fato de que $a_m \in A_n + \epsilon$, para todo $m \geq N$, $\lim_{i \to \infty} a_i = a$ e que $A_n + \epsilon$ é fechado, pois A_n é compacto, nos leva a concluir que $a \in A_n + \epsilon$.

Portanto, $A \subset A_n + \epsilon$, para n suficientemente grande. ■

Definição 3.13 *Seja $S \subset X$ um subconjunto de um espaço métrico (X, d). Dizemos que S é totalmente limitado se, dado $\epsilon > 0$, existe um conjunto finito de pontos $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset S$, tal que para todo $x \in S, d(x, y_i) < \epsilon$, para algum $y_i \in \{y_1, \ldots, y_n\}$. Este conjunto de pontos $\{y_1, \ldots, y_n\}$ recebe o nome de ϵ - rede.*

Em outras palavras, S é totalmente limitado se existe uma coleção finita de bolas de raio ϵ, centradas em pontos de S, os quais formam uma cobertura de S.

Teorema 3.10 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Seja $S \subset X$. Então, S é compacto se, e somente se, S é fechado e totalmente limitado.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Suponha que S é fechado e totalmente limitado. Seja $\{x_i\}$ uma sequência infinita de pontos de S. Como S é totalmente limitado, existe uma coleção finita de bolas fechadas de raio 1 tal que S está contido na união dessas bolas. Logo, uma das bolas, digamos B_1, deve conter infinitos termos da sequência $\{x_i\}$.

Escolha um índice N_1 tal que $x_{N_1} \in B_1$.

Afirmação: *$B_1 \cap S$ é totalmente limitado.*

De fato, como S é totalmente limitado, dado $\epsilon > 0$, existe um conjunto finito de pontos $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset S$, tal que para todo $x \in S$, $d(x, y_i) < \epsilon$, para algum $y_i \in \{y_1, \ldots, y_m\}$. Como $B_1 \cap S \subset S$, considere os pontos $y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_k}$ pertencentes ao conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$, tais que para todo $x \in B_1 \cap S$, $d(x, y_{\alpha_i}) < \epsilon$, para algum $y_{\alpha_i} \in \{y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_k}\} \subset \{y_1, \ldots, y_m\}$. Desse modo, obtemos uma ϵ - rede para $B_1 \cap S$ e, portanto, $B_1 \cap S$ é totalmente limitado, mostrando, assim, nossa afirmação.

Sendo $B_1 \cap S$ totalmente limitado, podemos cobrir $B_1 \cap S$ por um conjunto finito de bolas fechadas de raio $\frac{1}{2}$. Novamente, uma dessas bolas, digamos B_2, contém infinitos termos de $\{x_i\}$. Escolha N_2 de modo que $x_{N_2} \in B_2$ e $N_2 > N_1$.

Repetindo indefinidamente este processo, construímos uma sequência encaixante de bolas fechadas tais que

$$B_1 \supset B_1 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots ,$$

em que B_n tem raio $\frac{1}{2^{n-1}}$, e uma sequência de inteiros $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que $x_{N_i} \in B_i$.

Afirmação: *$\{x_{N_i}\}_{i=1}^{\infty}$, que é uma subsequência da sequência original $\{x_n\}$, é uma sequência de Cauchy em S.*

De fato, para cada i , temos que se $a, b \in B_i$, então

$$d(a, b) \leq d(a, c_i) + d(c_i, b),$$

em que c_i é o centro de B_i. Portanto,

$$d(a, b) \leq \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{2}{2^{i-1}}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, considere N_1, tal que $\frac{2}{2^{N_1-1}} < \epsilon$.

Desse modo, para todo $N_n, N_m \geq N_1$, temos que x_{N_n}, $x_{N_m} \in B_{N_1}$ e

$$d(x_{N_n}, x_{N_m}) \leq \frac{2}{2^{N_1-1}} < \epsilon.$$

Portanto, $\{x_{N_i}\}$ é uma sequência de Cauchy em S, mostrando, assim, nossa afirmação.

Como S é fechado e X é completo, então S é completo. Logo, $\{x_{N_i}\}$ converge para um ponto $x \in S$ e, portanto, temos que S é compacto, uma vez que é sequencialmente compacto.

$(\Longrightarrow)$ Suponha que S é compacto e seja $\epsilon > 0$. Suponha, também, que não exista uma ϵ-rede para S, ou seja, que S não pode ser coberto por uma coleção finita de bolas de raio ϵ, centradas em pontos de S.

Escolha x_1, um ponto arbitrário de S. Como $S \not\subset B(x_1, \epsilon)$, escolha $x_2 \in S - B(x_1, \epsilon)$. Da mesma forma, como $S \not\subset B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$, escolha $x_3 \in S - B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$. Repetindo indefinidamente este processo, construímos uma sequência infinita $\{x_n\}$ de pontos de S, tais que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$, para todo $i \neq j$.

Portanto, a sequência $\{x_n\}$ não pode ter uma subsequência convergente, contrariando o fato de S ser compacto. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe uma ϵ-rede para S, ou seja, S é totalmente limitado.

Finalmente, como todo conjunto compacto em um espaço métrico (X, d) é fechado, então S é fechado. ■

Lema 3.9 *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\{A_n\}$ uma sequência de Cauchy de pontos de $\mathcal{H}(X)$. Então, o conjunto A, como definido no Lema 3.5, é um conjunto totalmente limitado.*

Demonstração. Suponha que A não seja totalmente limitado. Então, para algum $\epsilon > 0$ não existe uma ϵ-rede finita. Desse modo, podemos encontrar $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ em A, tal que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$, para $i \neq j$. Mostraremos que isso resulta em uma contradição.

Segue do Lema 3.8 que existe n suficientemente grande tal que $A \subset A_n + \dfrac{\epsilon}{3}$. Então, para cada x_i, existe um correspondente $y_i \in A_n$, tal que $d(x_i, y_i) \leq \dfrac{\epsilon}{3}$.

Como A_n é compacto, alguma subsequência $\{y_{n_i}\}$ de $\{y_i\}$ converge. Logo, podemos encontrar pontos na sequência $\{y_{n_i}\}$ tão próximos quanto desejarmos. Em particular, podemos encontrar dois pontos y_{n_i} e y_{n_j} tais que $d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \dfrac{\epsilon}{3}$. Mas, então,

$$\begin{aligned} d(x_{n_i}, x_{n_j}) &\leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

o que é uma contradição!

Assim, A é totalmente limitado.

■

Corolário 3.1 *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\{A_n\}$ uma sequência de Cauchy de pontos de $\mathcal{H}(X)$. Então, o conjunto A, como definido no Lema 3.5, é compacto e, consequentemente, $A \in \mathcal{H}(X)$.*

Demonstração. Segue do Lema 3.6, Teorema 3.10 e Lema 3.9. ■

Lema 3.10 *Seja (X, d) um espaço métrico completo, $\{A_n\}$ uma sequência de Cauchy de pontos de $\mathcal{H}(X)$ e A, como definido no Lema 3.5. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Demonstração. Como, pelo Corolário 3.1, $A \in \mathcal{H}(X)$, pelo Lema 3.8 e o Lema 3.3, a demonstração que $\lim A_i = A$ estará completa se mostrarmos que para todo $\epsilon > 0$, existe N, tal que

$$A_n \subset A + \epsilon, \quad \forall n \geq N. \tag{3.6}$$

Note que do Lema 3.8, segue que dado $\epsilon > 0$, existe N, tal que $A_n \subset A + \epsilon$, $\forall n \geq N$. Dessa forma, o Lema 3.8 e o Teorema 3.10 garantem que $A_n \subset A + \epsilon$ e $A \subset A_n + \epsilon$, o que implica $h(A_n, A) < \epsilon$, para todo $n \geq N$. Portanto, se 3.6 é satisfeita, temos que $\lim A_n = A$.

Para mostrar 3.6, considere $\epsilon > 0$ e encontre $N > 0$, tal que $h(A_m, A_n) \leq \dfrac{\epsilon}{2}$, para todo $m, n \geq N$. Observe que como $\{A_n\}$ é sequência de Cauchy, tal N existe.

Agora, seja $n \geq N$. Vamos mostrar que $A_n \subset A + \epsilon$.

Seja $y \in A_n$. Existe uma sequência crescente de inteiros $\{N_i\}$ tal que

$$n < N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$$

e, para todo $m, n \geq N_j$, $A_m \subset A_n + \dfrac{\epsilon}{2^{j+1}}$.

Temos que $A_n \subset A + \epsilon$. Como $y \in A_n$, então existe um $x_{N_1} \in A_{N_1}$, tal que

$$d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\epsilon}{2^2}.$$

Analogamente, como $x_{N_1} \in A_{N_1}$, existe um ponto $x_{N_2} \in A_{N_2}$, tal que

$$d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\epsilon}{2^3}.$$

Dessa forma, podemos encontrar uma sequência $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_1}, \cdots$, tal que $x_{N_j} \in A_{n_j}$ e $d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) < \dfrac{\epsilon}{2^{j+i}}$.

Usando a desigualdade triangular repetidas vezes, para todo índice j temos que

$$\begin{aligned} d(y, x_{n_j}) &\leq d(y, x_{n_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_2}) + \cdots + d(X_{N_{j-1}}, x_{N_j}) \\ &< \frac{\epsilon}{2^2} + \frac{\epsilon}{2^3} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^{j+1}} \\ &< \epsilon \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \right) \\ &= \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Além disso, $\{x_{N_j}\}$ é uma sequência de Cauchy, pois

$$\begin{aligned} d(x_{N_n}, x_{N_m}) &\leq d(x_{N_n}, x_{N_{m+1}}) + \cdots + d(x_{N_{m-1}}, x_{N_m}) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^m} \\ &\leq \epsilon \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} \right) \\ &= \frac{\epsilon}{2^n}. \end{aligned}$$

Assim, dado $\lambda > 0$, basta tomar N_k tal que $\frac{\epsilon}{2^k} < \lambda$. Desse modo,

$$d(x_{N_i}, x_{N_j}) \leq \lambda,$$

para todo $N_i, N_j \geq N_k$.

Da maneira como n foi escolhido, cada $A_{n_j} \subset A_n + \frac{\epsilon}{2}$.

Uma vez que $\{x_{N_j}\}$ converge para um ponto x, como $A_n + \frac{\epsilon}{2}$ é fechado, concluímos que $x \in A_n + \frac{\epsilon}{2}$. Mais ainda, como $d(y, x_{n_j}) \leq \frac{\epsilon}{2}$, para todo j, e como $\{x_{N_j}\}$ converge para x, então existe um índice N_i tal que $d(x_{n_j}, x) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Logo,

$$d(y, x) \leq d(y, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Assim, mostramos que $y \in A + \epsilon$, ou seja, $A_n \subset A + \epsilon$, para todo $n \geq N$. Portanto, como observado anteriormente, $\lim A_n = A$.

■

Teorema 3.11 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Então, $(\mathcal{H}(X), h)$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Para mostrar que $(\mathcal{H}(X), h)$ é completo, no caso em que (X, d) é um espaço métrico completo, precisamos mostrar que toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de $(\mathcal{H}(X), h)$. Para tanto, tome $\{A_n\}$ uma sequência de Cauchy de pontos de $\mathcal{H}(X)$. Do Lema 3.10, segue que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A,$$

sendo

$$A = \{x \in X; \text{ existe uma sequência de Cauchy } \{x_n\} \text{ de pontos de } A_n, \text{ tal que } \{x_n\} \text{ converge para } x\}.$$

Do Corolário 3.1, segue ainda que $A \in \mathcal{H}(X)$, o que conclui a demonstração que $(\mathcal{H}(X), h)$ é um espaço métrico completo.

■

3.3.2 Contrações no Espaço de Hausdorff

Neste capítulo, serão explorados alguns resultados importantes envolvendo aplicações de contração e o Espaço de Hausdorff e será apresentado o conceito de *sistema de funções iteradas.*

Os conceitos topológicos que serão abordados neste capítulo permitirão também apresentar uma formalização da ideia de fractal e também são encontrados em [6].

Lema 3.11 *Seja $w : X \to X$ uma contração em um espaço métrico (X, d). Então,*

$$w(\mathcal{H}(X)) \subset \mathcal{H}(X).$$

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{H}(X)$. Logo, A é um subconjunto compacto de X. Como w é uma contração, então w é uma aplicação contínua. Logo, $w(A)$ é um conjunto compacto em X, ou seja, $w(A) \in \mathcal{H}(X)$. Portanto, $w(\mathcal{H}(X)) \subset \mathcal{H}(X)$.

■

Lema 3.12 *Seja $w : X \to X$ uma contração sobre um espaço métrico (X, d) com fator de contração s. Então, $w : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, dada por $w(B) = \{w(x); x \in B\}$, para todo $B \in (X, d)$, é uma contração sobre $(\mathcal{H}(X), h)$, com fator de contração s.*

Demonstração. Sabemos que w é contínua em (X, d) e que $w(\mathcal{H}(X)) \subset \mathcal{H}(X)$.

Agora, sejam $B, C \in H(X)$. Então,

$$\begin{aligned}
d(w(B), w(C)) &= max\{d(w(b), w(C)); b \in B\} \\
&= max\{min\{d(w(b), w(c)); c \in C\}; b \in B\} \\
&\leq max\{min\{s \cdot d(b, c); c \in C\}; b \in B\} \\
&= s \cdot max\{min\{d(b, c); c \in C\}; b \in B\} \\
&= s \cdot d(B, C).
\end{aligned}$$

Portanto, $d(w(B), w(C)) \leq s \cdot d(B, C)$ e, analogamente, $d(w(C), w(B)) \leq s \cdot d(C, B)$. Assim,

$$\begin{aligned} h(w(B), w(C)) &= max\{d(w(B), w(C)), d(w(C), w(B))\} \\ &\leq max\{s \cdot d(B, C), s \cdot d(C, B)\} \\ &= s \cdot max\{d(B, C), \cdot d(C, B)\} \\ &= s \cdot h(B, C). \end{aligned}$$

■

Lema 3.13 *Seja (X, d) um espaço métrico. Se $B, C \in \mathcal{H}(X)$, com $B \subset C$, então $d(x, C) \leq d(x, B)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Temos que $d(x, B) = min\{d(x, b); b \in B\}$. Como $B \in \mathcal{H}(X)$, então existe um $b_0 \in B$, tal que $d(x, b_0) = min\{d(x, b); b \in B\}$.

Agora, $d(x, C) = min\{d(x, c); c \in C\}$ e, assim, $d(x, C) \leq d(x, c)$, para todo $c \in C$. Em particular, como $b_0 \in B \subset C$, segue que

$$d(x, C) \leq d(x, b_0) = min\{d(x, b); b \in B\} = d(x, B).$$

Portanto, $d(x, C) \leq d(x, B)$.

■

Lema 3.14 *Seja (X, d) um espaço métrico. Se $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$, com $B \subset C$, então $d(A, C) \leq d(A, B)$.*

Demonstração. Temos que $d(A, C) = max\{d(a, C); a \in A\}$.

Segue do Lema 3.7 que $d(a, C) \leq d(a, B)$, para todo $a \in A$. Assim,

$$\begin{aligned} d(A, C) &= max\{d(a, C); a \in A\} \\ &\leq max\{d(a, B); a \in A\} \\ &= d(A, B). \end{aligned}$$

■

Lema 3.15 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Para todo $B, C, D, E \in (\mathcal{H}(X), h)$, temos*

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq max\{h(B, D), h(C, E)\}.$$

Demonstração. Por definição, temos que

$$h(B \cup C, D \cup E) = max\{d(B \cup C, D \cup E), d(D \cup E, B \cup C)\}.$$

Do Lema 3.2, segue que

$$max\{d(B \cup C, D \cup E), d(D \cup E, B \cup C)\} = max\{max\{d(B, D \cup E), d(C, D \cup E)\}; max\{d(D, B \cup C), d(E, B \cup C)\}\}.$$

Agora, observe que $D \subset D \cup E$; $B \subset B \cup C$; $E \subset D \cup E$ e $C \subset B \cup C$.

Assim, segue do Lema 3.13 que $d(B, D \cup E) \leq d(B, D)$; $d(D, B \cup C) \leq d(D, B)$; $d(C, D \cup E) \leq d(C, E)$ e $d(E, B \cup C) \leq d(E, C)$.

Logo,

$$\begin{aligned} h(B \cup C, D \cup E) &= max\{max\{d(B, D \cup E), d(C, D \cup E)\}, max\{d(D, B \cup C), d(E, B \cup C)\}\} \\ &\leq max\{max\{d(B, D), d(C, E)\}, max\{d(D, B), d(E, C)\}\} \\ &= max\{max\{d(B, D), d(D, B)\}, max\{d(C, E), d(E, C)\}\} \\ &= max\{h(B, D), h(C, E)\}. \end{aligned}$$

■

Lema 3.16 *Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $\{w_n; n = 1, 2, \ldots, N\}$ contrações sobre $(\mathcal{H}(X), h)$. Vamos denotar por s_n o fator de contração de w_n, para cada $n = 1, \ldots, N$. Defina $W : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ por*

$$\begin{aligned} W(B) &= w_1(B) \cup w_2(B) \cup \cdots \cup w_n(B) \\ &= \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B). \end{aligned}$$

Então, W é uma contração sobre $(\mathcal{H}(X), h)$ com fator de contração dado por $s = max\{s_n; n = 1, \ldots, N\}$.

Demonstração. Faremos por indução finita.

Para $N = 2$, temos que para todo $B, C \in \mathcal{H}(X)$,

$$h(W(B), W(C)) = h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)).$$

Pelo Lema 3.15, temos que

$$\begin{aligned} h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) &\leq max\{h(w_1(B), w_1(C)), h(w_2(B), w_2(C)\} \\ &\leq max\{s_1 h(B, C), s_2 h(B, C)\} \\ &\leq s \cdot h(B, C), \text{ onde } s = max\{s_1, s_2\}. \end{aligned}$$

Portanto, $h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C)$.

Suponhamos que o resultado seja válido para $n = k$ e vamos demonstrá-lo para $n = k + 1$.

Para todo $B, C \in \mathcal{H}(X)$, temos:

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h((w_1(B) \cup \cdots \cup w_k(B)) \cup w_{k+1}(B), (w_1(C) \cup \cdots \cup w_k(C)) \cup w_{k+1}(C) \\ &\leq max\{h(w_1(B) \cup \cdots \cup w_k(B), w_1(C) \cup \cdots \cup w_k(C)), h(w_{k+1}(B), w_{k+1}(C))\}, \end{aligned}$$

como consequência do Lema 3.15.

Sendo $s' = max\{s_1, \ldots, s_k\}$ e $s = max\{s', \ldots, s_{k+1}\}$, então segue da hipótese de indução que:

$$\begin{aligned} max\{h(w_1(B) \cup \cdots \cup w_k(B), w_1(C) \cup \cdots \cup w_k(C)), h(w_{k+1}(B), w_{k+1}(C))\} &\leq max\{s' \cdot h(B, C), s_{k+1} \cdot h(B, C)\} \\ &\leq max\{s \cdot h(B, C)\} \\ &\leq s \cdot h(B, C), \end{aligned}$$

Portanto, $h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C)$.

Logo, $W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} W_n(B)$, para todo $B \in \mathcal{H}(X)$, é uma contração sobre $(\mathcal{H}(X), h)$.

■

Definição 3.14 *Um sistema de funções iteradas (S.F.I.) consiste de um espaço métrico completo* (X, d) *juntamente com um conjunto finito de contrações* $w_n : X \to X$*, sendo* $s_n, n = 1, \cdots, N$*, os respectivos fatores de contração.*

Notação: $\{X; w_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$ e seu fator de contração é $s = max\{s_1, \ldots, s_n\}$.

Teorema 3.12 *Seja* $\{X; w_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$ *um S.F.I. com fator de contração* s*. Então a transformação* $W : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$*, definida por*

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B),$$

para todo $B \in \mathcal{H}(X)$*, é uma contração sobre o espaço métrico completo* $(\mathcal{H}(X), h)$*, com fator de contração* s*, ou seja,*

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C).$$

Mais ainda, seu único ponto fixo, $A \in \mathcal{H}(X)$*, satisfaz a condição*

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A)$$

e é dado por

$$A = \lim_{k \to \infty} W^k(B),$$

para qualquer $B \in H(X)$*, onde* $W^K = W \circ W \circ \cdots \circ W$ *(*k *vezes).*

Demonstração. Consequência do Lema 3.16 e do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

■

Definição 3.15 *O ponto fixo $A \in \mathcal{H}(X)$, descrito no Teorema 3.12, recebe o nome de fractal.*

4 *Aplicação na teoria de compressão de imagens*

Neste capítulo, será apresentada a ideia do método de compressão de imagens chamado *sistema de funções iteradas*, cuja ideia é aproximar uma imagem fazendo uso de figuras geométricas semelhantes, tendo como base o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Para explicar este processo, será tomado como exemplo o chamado *Triângulo de Sierpinski*, um exemplo de fractal geométrico.

Os fractais determinísticos, conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados recursivamente por sistemas de funções iteradas e possuem a característica da autossimilaridade, que significa que uma parte qualquer do fractal se assemelha a uma parte maior (ou ao fractal inteiro).

Deste modo, iremos apresentar, inicialmente, algumas características deste fractal e o processo para reproduzi-lo a partir de um Triângulo de Sierpinski inicial. Depois, veremos como é possível construí-lo a partir de um conjunto compacto qualquer, por meio de um processo que se fundamenta na convergência garantida pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Por fim, será detalhado o procedimento para a construção deste fractal utilizando-se o software Geogebra, tendo como inspiração as ideias apresentadas em [7].

4.1 O Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski, apresentado na Figura 7, é um exemplo de fractal geométrico que foi objeto de estudo do matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969).

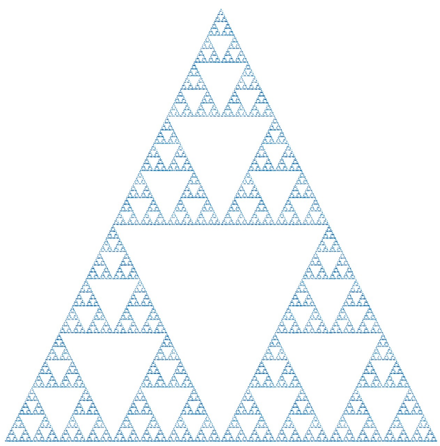

Figura 7 – Triângulo de Sierpinski
Fonte: do autor.

Podemos levantar o seguinte questionamento: como este fractal pode ser armazenado na memória de um computador de uma maneira econômica garantindo-se a qualidade de sua resolução?

Uma maneira é armazená-lo em um programa que permita reconstruí-lo sempre que necessário. Para tanto, precisamos compreender, primeiramente, o que caracteriza este objeto geométrico.

Como indicado na Figura 8, podemos observar que o Triângulo de Sierpinski é formado por uma reunião de três cópias reduzidas de si mesmo, que possuem metade de sua largura e altura.

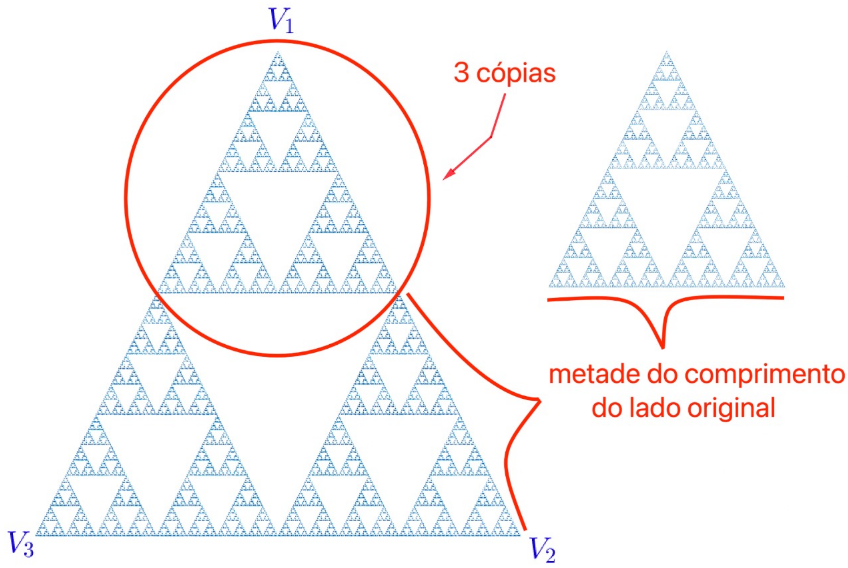

Figura 8 – Autossimilaridade do Triângulo de Sierpinski.
Fonte: do autor.

Considerando o comprimento de sua base igual ao de sua altura, podemos escolher eixos com origem no canto inferior esquerdo do Triângulo de Sierpinski e unidades nos eixos tais que a base e a altura tenham ambos comprimento 1.

Assim, a partir de um Triângulo de Sierpinski, é possível construir outro realizando os seguintes passos:

- 1º passo: reduza o Triângulo de Sierpinski para metade do seu tamanho, a partir do seu vértice inferior esquerdo.

Observe que o lado do triângulo obtido neste primeiro passo é uma contração de $\dfrac{1}{2}$ do lado do triângulo original.

Assim, estamos considerando a seguinte transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$:

$$T_1(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

• $2^{\underline{o}}$ passo: construa uma segunda cópia do Triângulo de Sierpinski obtido no primeiro passo e coloque-a à direita.

Neste segundo passo, o lado do triângulo obtido continua sendo uma contração de $\frac{1}{2}$ do lado do triângulo original e, além disso, o triângulo é transladado por um vetor $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Dessa forma, a aplicação de contração a ser considerada é a seguinte:

$$T_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

• $3^{\underline{o}}$ passo: construa uma terceira cópia do Triângulo de Sierpinski obtido no primeiro passo e coloque-a no topo.

Por fim, temos que o lado do triângulo obtido neste terceiro passo permanece sendo uma contração de $\frac{1}{2}$ do lado do triângulo original e, além disso, é transladado por um vetor $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Assim, podemos considerar a seguinte aplicação:

$$T_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Deste modo, o resultado final do processo é igual ao Triângulo de Sierpinski original, ou seja, o Triângulo de Sierpinski é o ponto fixo do processo.

4.2 Aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Observe que, de fato, as aplicações T_1, T_2 e T_3, apresentadas anteriormente e definidas em $\mathbb{R}^2$, são contrações, conforme visto no Exemplo 2.10. Mais ainda, a partir das observações realizadas, temos que o conjunto de contrações $\{T_1, T_2, T_3\}$ compõe o S.F.I. associado à construção do Triângulo de Sierpinski, pois, sendo S o Triângulo de Sierpinski, temos que

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S).$$

De fato, considere a aplicação

$$\begin{aligned} W : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ B &\longmapsto T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B). \end{aligned}$$

Do Lema 3.16, seque que W é uma contração. Então, como $(\mathcal{H}(X), h)$ é um espaço métrico completo, conforme demonstrado no Teorema 3.11, e W é uma contração, segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 2.1) que W possui um único ponto fixo, o qual, como observado anteriormente, é o Triângulo de Sierpinski.

Os dois exemplos a seguir, apresentados nas Figuras 9 e 10, apresentam algumas iterações do processo a partir de conjuntos compactos distintos.

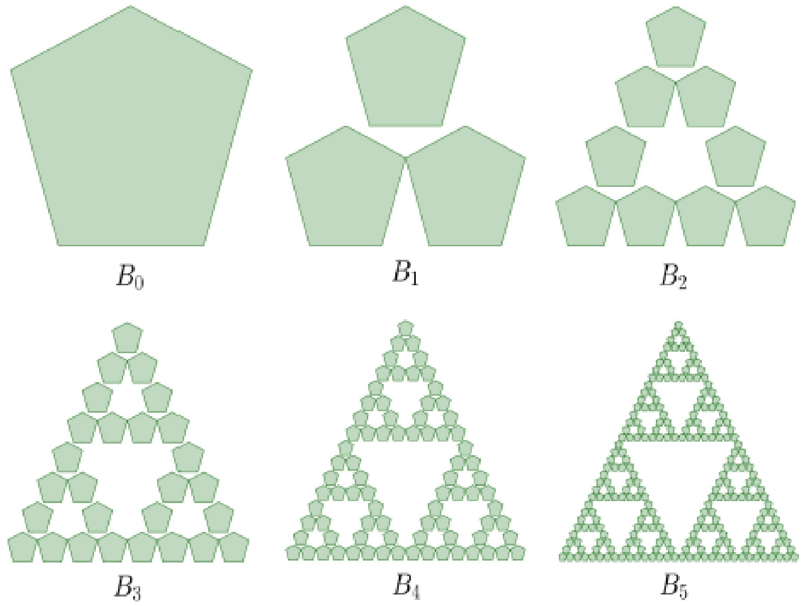

Figura 9 – Pentágono B_0 e suas cinco primeiras iterações.
Fonte: do autor.

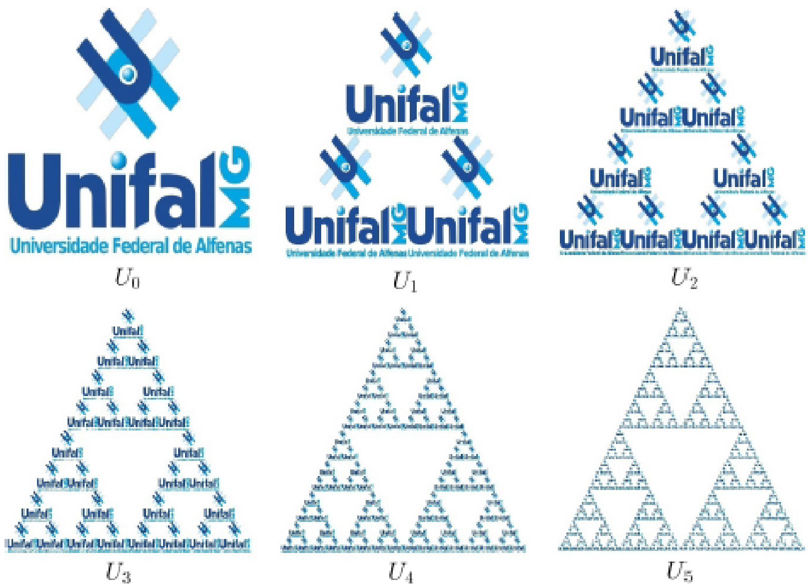

Figura 10 – Logo UNIFAL - MG U_0 e suas cinco primeiras iterações.
Fonte: do autor.

Continuando este processo indefinidamente, obteríamos uma sequência infinita de conjuntos $\{C_n\}$, com $C_{n+1} = W(C_n)$, a qual parece convergir rapidamente para o Triângulo de Sierpinski.

De fato, como apontado em [8], nossos olhos não conseguiriam distinguir C_{10} do Triângulo de Sierpinski. Dessa forma, o programa de reconstrução da nossa imagem pode simplesmente poduzir C_{10} e, se caso uma resolução melhor fosse necessária, o mesmo programa pode ser utilizado para produzir C_{20} ou C_{30}, por exemplo. Assim, o mesmo programa pode reconstruir este fractal com uma precisão arbitrária.

Matematicamente, essa ideia pode ser compreendida a partir da observação de que sendo $d_H(B_1, B_2)$ a distância de Hausdorff entre os subconjuntos B_1 e B_2, a expressão $d_H(B_1, B_2) \leq \epsilon$ nos indica que se nossos olhos tiverem uma precisão de ϵ, eles não conseguirão distinguir B_1 de B_2. Mais precisamente, $d_H(B_1, B_2) \leq \epsilon$ significa que para cada ponto P de B_1 existe um ponto Q de B_2 tal que $d(P, Q) \leq \epsilon$ e, ao mesmo tempo, para cada ponto P' de B_2 existe um ponto Q' de B_1 tal que $d(P', Q') \leq \epsilon$, sendo d a métrica usual em $\mathbb{R}^2$.

4.3 Construção do fractal no Geogebra

Nesta seção, será apresentado o passo a passo da construção do Triângulo de Sierpinski no Geogebra, utilizando o sistema de funções iteradas apresentado anteriormente. Além do Geogebra, também será utilizado o software GIMP, um editor de imagens gratuito.

Para fazer essa construção, primeiramente iremos alterar as dimensões da imagem que será utilizada, deixando-a em um formato quadrado. Para tanto, inicialmente abra a imagem desejada no GIMP, conforme apresentado na Figura 11.

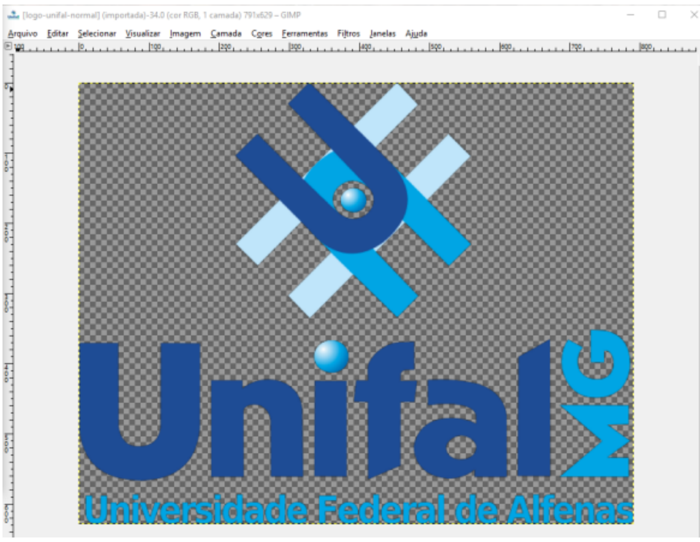

Figura 11 – Imagem no GIMP.
Fonte: do autor.

Para redimensioná-la, no Menu Principal do GIMP, selecione **Imagem** e, em seguida, **Redimensionar imagem** (Figura 12) .

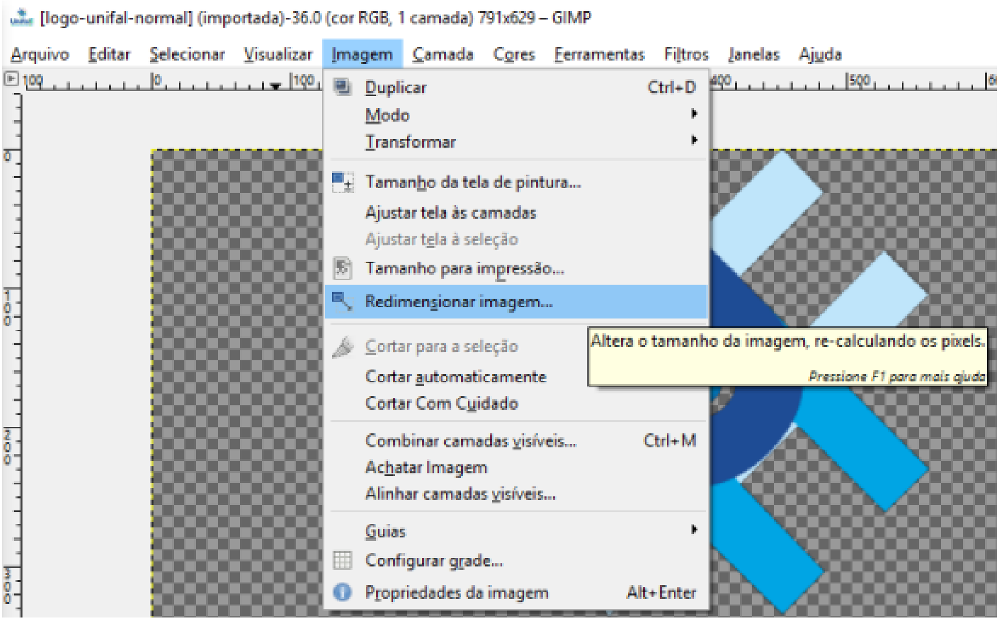

Figura 12 – Ferramenta para redimensionar a imagem no GIMP.
Fonte: do autor.

Altere a largura e a altura, de modo que fiquem com o mesmo tamanho, e clique em **Redimensionar**, conforme Figura 13.

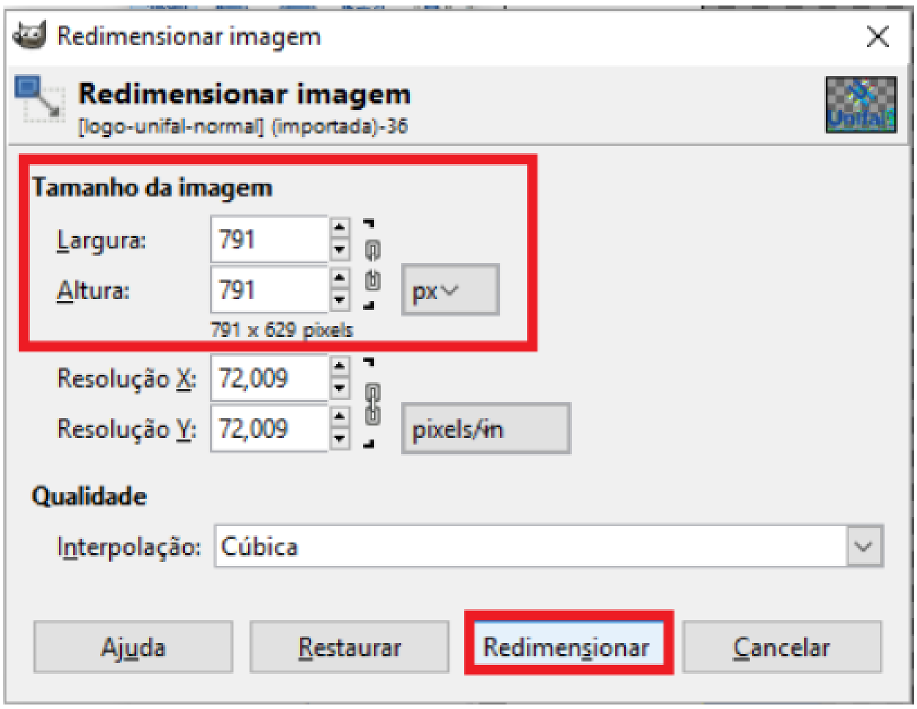

Figura 13 – Alterando as dimensões da imagem no GIMP.
Fonte: do autor.

Agora, defina o nome do arquivo e o local em que ele será salvo (Figura 14). Note que ele foi exportado como arquivo PNG.

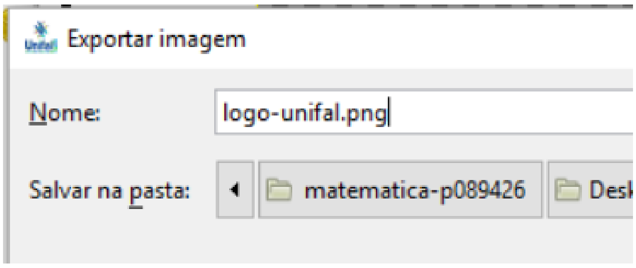

Figura 14 – Exportando a imagem obtida.
Fonte: do autor.

Agora, abra um arquivo novo no GeoGebra e selecione a ferramenta **Inserir imagem**, conforme Figura 15. Depois, clique na **Janela de Visualização** e escolha a imagem no formato quadrado que que foi redimensionada a partir dos passos anteriores.

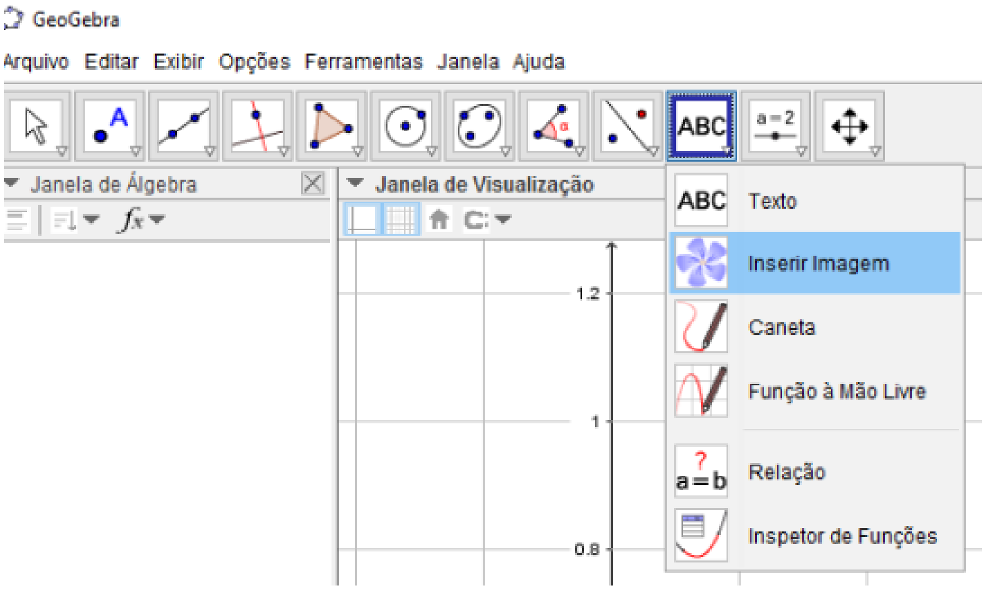

Figura 15 – Inserir imagem no Geogebra.
Fonte: do autor.

Clique com o botão direito do mouse sobre a figura e selecione **Propriedades** (Figura 16).

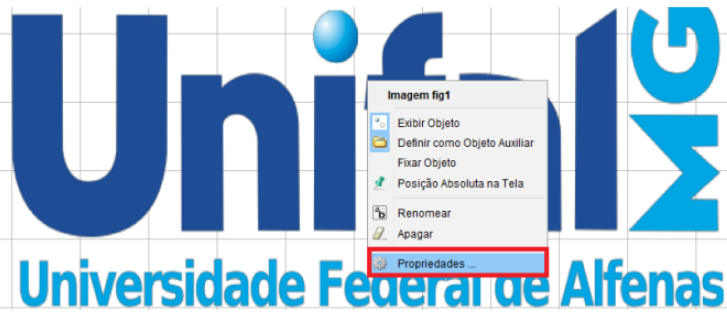

Figura 16 – Seleção das propriedades da imagem.
Fonte: do autor.

Na aba **Posição**, coloque as coordenadas $(0, 0)$ para o canto 1 e $(1, 0)$ para o canto 2, conforme Figura 17.

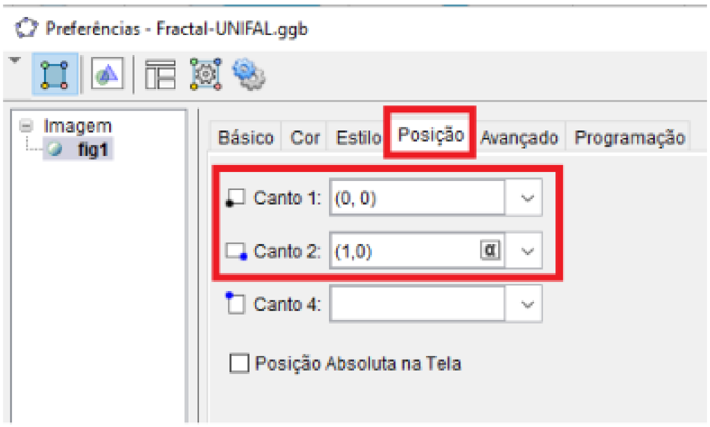

Figura 17 – Configuração da posição da imagem no Geogebra.
Fonte: do autor.

Observe que a figura ficou inserida num quadrado imaginário de lado 1 cujo vértice inferior esquerdo se encontra na origem dos eixos coordenados (Figura 18).

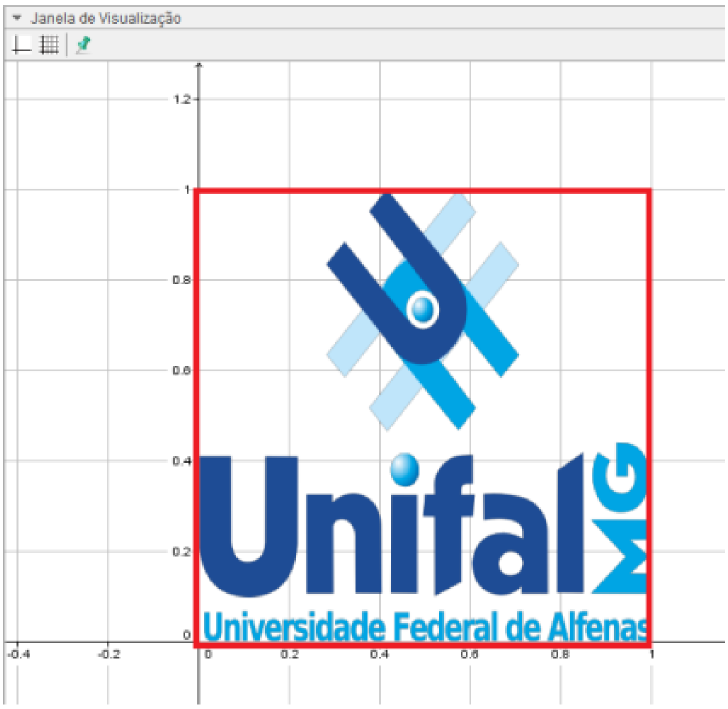

Figura 18 – Imagem no Geogebra.
Fonte: do autor.

Crie um **Controle Deslizante**, chame-o de i, com intervalo variando de 0 até 7 e incremento 1, conforme mostra a Figura 19.

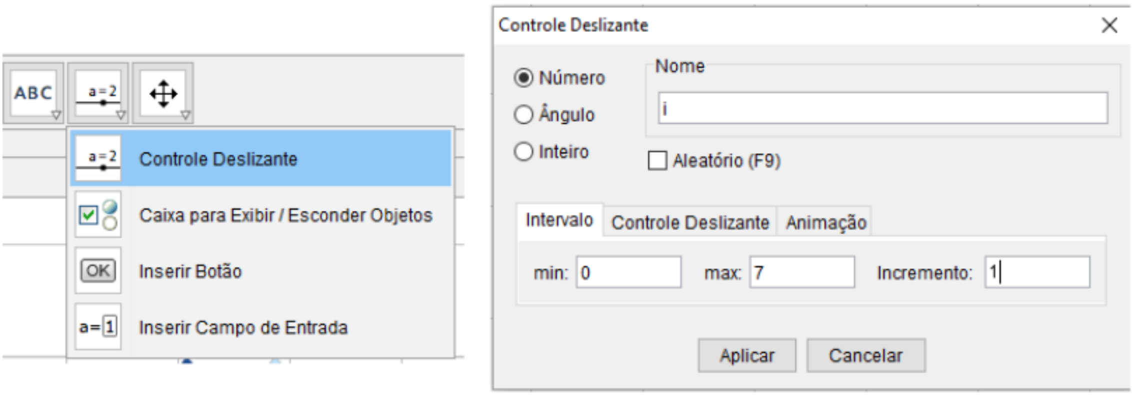

Figura 19 – Criação do controle deslizante.
Fonte: do autor.

Este controle deslizante será responsável por determinar as iterações. Assim, definindo o limite superior do intervalo como 7, será possível visualizar sete iterações do processo.

Agora, vamos criar os vetores responsáveis pelas translações de nossa construção. Para isso, no **Campo de Entrada**, defina os vetores u e v utilizando os seguintes comandos:

```
u = ((1/2) ^ i, 0)
v = ((1/2) ^ (i + 1),(1/2) ^ i).
```

Figura 20 – Inserção dos vetores no campo de entrada do Geogebra.
Fonte: do autor.

Para uma melhor visualização, oculte os eixos, a malha e os vetores u e v.

Agora, no **Campo de Entrada**, defina:

```
L_0= {Homotetia[fig1, (1 / 2) ^ i, (0, 0)]}.
```

Manipulando o controle deslizante é possível observar a ação da homotetia [1] definida, por meio da qual o tamanho da imagem é reduzido, preservando-se a proporção de suas dimensões.

Na Figura 21, podemos visualizar o resultado obtido na primeira aplicação da homotetia, isto é, quando o valor atribuído ao controle deslizante é 1.

[1] Para mais detalhes sobre o conceito de homotetia, sugerimos a leitura de [9].

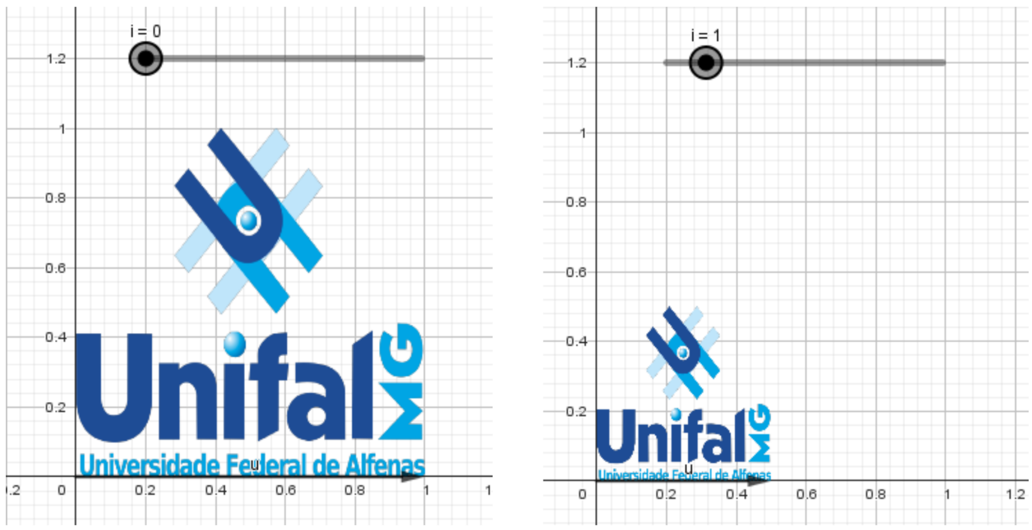

Figura 21 – Ação da homotetia.
Fonte: do autor.

Agora, no **Campo de Entrada**, digite o seguinte comando para criar a Lista L_1:

```
L_1=Concatenar[L_0,Transladar[L_0,u],Transladar[L_0,v]].
```

Este comando servirá como modelo para as próximas listas e sua função é unir as três transformações associadas a cada passo de uma determinada iteração.

Nas propriedades da Lista L_1, acesse a aba **Avançado** e insira a condição $i \geq 1$ (Figura 22).

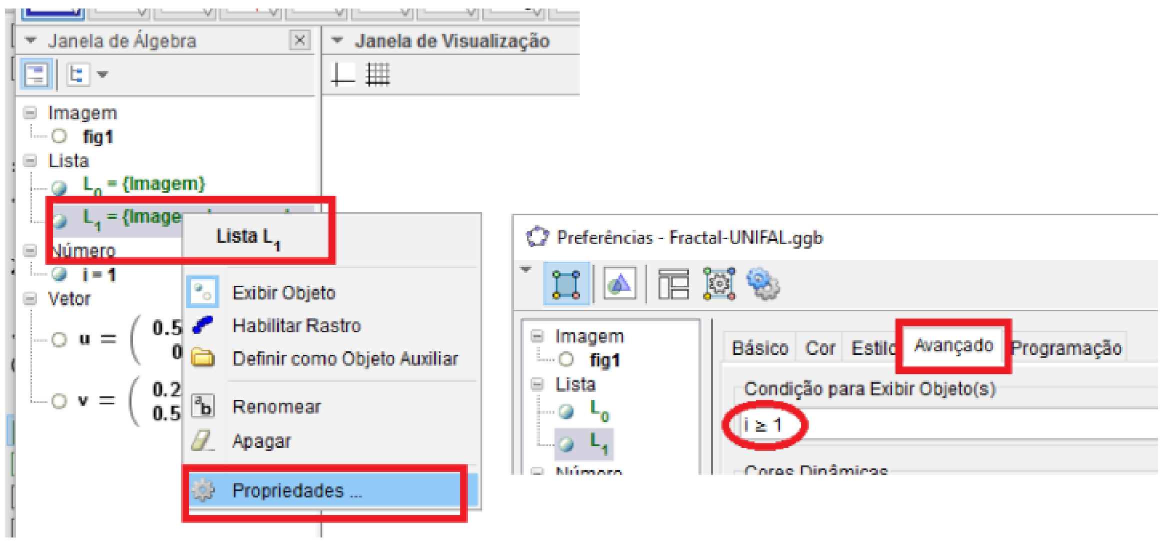

Figura 22 – Configuração da Lista L_1.
Fonte: do autor.

Semelhantemente, podemos criar a Lista L_2, copiando o seguinte comando no **Campo de Entrada**:

```
L_2=Concatenar[L_1,Transladar[L_1, 2 u],Transladar[L_1,2 v]]
```

Em seguida, como realizado anteriormente em relação a L_1, nas propriedades da Lista L_2, acesse a aba **Avançado** e coloque a condição $i \geq 2$.

Com um procedimento análogo ao utilizado para criar a Lista L_2, crie as listas L_3, L_4, L_5, L_6 e L_7, cujos comandos são dados por:

```
L_3=Concatenar[L_2,Transladar[L_2,4 u],Transladar[L_2,4 v]];
L_4=Concatenar[L_3,Transladar[L_3,8 u],Transladar[L_3,8 v]];
L_5=Concatenar[L_4,Transladar[L_4,16 u],Transladar[L_4,16 v]];
L_6=Concatenar[L_5,Transladar[L_5,32 u],Transladar[L_5,32 v]];
L_7=Concatenar[L_6,Transladar[L_6,64 u],Transladar[L_6,64 v]].
```

A condição para aparecer cada lista L_k, será $i \geq k$, em que $3 \leq k \leq 7$.

Feito isso, basta manipular o controle deslizante e admirar o resultado, o qual será semelhante ao que foi apresentado nas Figuras 9 e 10, as quais representam cinco primeiras iterações obtidas a partir do algoritmo descrito.

5 *Considerações finais*

O método abordado neste trabalho produz imagens de alta qualidade, quando estas possuem caráter fractal e pode ser adaptado para a compressão de imagens reais, como mostra [10]. Todavia, o uso de S.F.I. para a compressão de imagens é uma atividade computacionalmente intensiva e o processo de codificação, ou seja, de transformar a imagem em um programa que a reconstrua, desperta pouco interesse prático. No entanto, apesar de se tratar de um método experimental, a simplicidade da ideia e o seu potencial de aplicação fornece uma aplicação interessante de conceitos topológicos, como o conceito de espaço métrico completo, a ideia de compacidade, a distância de Hausdorff, a continuidade de aplicações e, em especial, o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

A realização deste estudo também proporcionou uma maior familiaridade com conteúdos trabalhados nas disciplinas mais relacionadas à área da Matemática Pura e um maior contato com a linguagem matemática, permitindo um melhor aproveitamento dessas disciplinas ao longo do curso e maiores condições de ingresso em um programa de pós graduação em Matemática, além de ter despertado um maior interesse para a realização de pesquisa em Matemática.

Assim, além de permitir explorar a aplicação proposta, o estudo dos conceitos matemáticos que fundamentam o método apresentado proporcionou uma melhor compreensão da importância de diversos conteúdos estudados durante a graduação, bem como a consolidação e a generalização desses conceitos, de forma a contribuir para a complementação da formação matemática proporcionada pelo curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alfenas.

Referências

[1] SILVA, J. M.; FLORES, E. L. Introdução à compressão de imagens utilizando fractais. In: CONFERÊNCIA DE ESTUDOS EM ENGENHARIA ELÉTRICA, 5., Uberlândia, 2005. **Anais**... Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2005. 5p.

[2] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5.ed. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

[3] DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia.** 1. ed. São Paulo: Atual, 1982.

[4] COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática? Uma abordagem de Métodos e Conceitos.** 1ª ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

[5] MUNKRES, J. R. **Topology**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

[6] BARNSLEY, M. **Fractals Everywhere.** 1. ed. San Diego: Academic Press, 1988.

[7] ROSSEAU, C. Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações. **Gazeta de Matemática**. Lisboa, vol. 164, 32-39, 2011.

[8] BARROS, C. D. V. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações**. 46f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

[9] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.** 2.ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008.

[10] KOMINEK, J. Advances in Fractal Compression for Multimedia Applications **Multimedia Systems Journal**. 5:255-270, 1997.