Universidade Federal de Alfenas

Jaqueline Jacira do Lago

Uma variante do Jogo de NIM como proposta para o Ensino Fundamental

Alfenas/MG

2023

Jaqueline Jacira do Lago

Uma variante do Jogo de NIM como proposta para o Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciada em Matemática, pelo Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Matemática e Ensino. Orientador: José Carlos de Souza Júnior. Coorientadora: Andréa Cardoso.

Alfenas/MG

2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Alfenas

Lago, Jaqueline Jacira.
Uma variante do Jogo de NIM como proposta para o
Ensino Fundamental / Jaqueline Jacira do Lago.
–2023.
57 f. : il.

Orientador: José Carlos de Souza Junior.
Coorientadora: Andréa Cardoso.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) -
Universidade Federal de Alfenas, 2023.
Bibliografia.

1. Matemática. 2. Educação Matemática.
3. jogos Matemáticos. I. Souza Junior, José Carlos de. II. Uma variante do Jogo de NIM como proposta para o Ensino Fundamental

CDD 514

Jaqueline Jacira do Lago

Uma variante do Jogo de NIM como proposta para o Ensino Fundamental

A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Monografia apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciada em Matemática, pelo Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Matemática e Ensino.

Aprovado em: 21 / 11 / 2023

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSE CARLOS DE SOUZA JUNIOR
Data: 13/12/2023 15:12:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Carlos de Souza Júnior
Instituto de Ciências Exatas
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br ANDERSON JOSE DE OLIVEIRA
Data: 13/12/2023 16:27:48-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Anderson José de Oliveira
Instituto de Ciências Exatas
Avaliador 1

Documento assinado digitalmente
gov.br CATIA REGINA DE OLIVEIRA QUILLES QUEIROZ
Data: 14/12/2023 09:07:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz
Instituto de Ciências Exatas
Avaliador 2

Prof. Dr. Marcelo Moreira da Silva
Instituto de Ciências Exatas
Suplente

Dedico este trabalho à minha família e ao meu querido pai (in memoriam).

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por iluminar o meu caminho e sempre me dar forças para continuar e enfrentar todos os obstáculos, pois sem ele não teria conseguido chegar até aqui.

Agradeço ao meu orientador, José Carlos, e a minha coorientadora, Andréa, por toda paciência, compreensão e conhecimento transmitido ao longo deste trabalho.

As minhas amigas e colegas de faculdade, em especial a Nicoli, Tamires e Débora, por todo apoio e pela união, que nos manteve fortes até aqui, tornando possível a realização deste sonho.

A minha família, por todo apoio e amor que tiveram comigo em toda a minha trajetória, sempre me compreendendo e me dando forças para continuar. Gostaria de agradecer especialmente a minha mãe por sempre me apoiar e cumprir tão bem o seu papel, como pai e mãe, desde que meu pai se foi, pois tenho certeza que lá do céu ele está orgulhoso da gente, sendo ele também uma das minhas grandes motivações para continuar.

Ao meu namorado por me compreender, me incentivar, me tranquilizar nos momentos difíceis e sempre me ajudar no que foi preciso para eu conseguir alcançar este sonho.

A todos os meus irmãos, em especial ao Marcelo e ao padrinho Adriano, por me motivar e sempre me ajudar no que foi preciso.

As minhas cunhadas, primos e sobrinhos por todo apoio e carinho de sempre.

Por fim, gratidão a todos que de alguma forma fizeram parte da minha formação, meus queridos professores por todo apoio e carinho, colegas, entre outras pessoas que tive a oportunidade de conhecer e conviver durante o processo de construção deste meu sonho.

Resumo

Devido à dificuldade apresentada pelos estudantes em compreender conceitos matemáticos, em particular os conceitos de divisibilidade e o algoritmo da Divisão Euclidiana, é desejável a utilização de metodologias diversificadas para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Dentre estas metodologias apresenta-se a resolução de problemas, combinada com os jogos pedagógicos, como os jogos digitais e o Jogo de NIM. Uma linguagem de programação que tem potencialidade para a elaboração de jogos pedagógicos é a linguagem *Scratch*, que foi utilizada como parte da metodologia dessa pesquisa na criação do aplicativo de uma versão do Jogo de NIM, conhecida como Jogo da Subtração. O objetivo desta pesquisa é discutir a utilização dessa versão eletrônica do Jogo de NIM e suas potencialidades pedagógicas no ensino de Matemática. Para a elaboração da estratégia vencedora do Jogo da Subtração, utiliza-se o algoritmo da Divisão Euclidiana. Já na versão clássica do Jogo de NIM, é necessário saber como escrever um número inteiro positivo na base binária. Após a programação do jogo, foi elaborada uma sequência didática como guia aos professores. Com isso, ao fim da pesquisa compreendeu-se o potencial de jogos didáticos para a melhoria da aprendizagem de diversos conceitos matemáticos, em especial as potencialidades do Jogo de NIM no ensino do algoritmo da Divisão Euclidiana, também obteve-se a complementação na formação da discente, em relação ao entendimento de conceitos mais aprofundados em Teoria dos Números, em programação utilizando a linguagem *Scratch* e na elaboração de uma sequência didática, além do contato com a pesquisa e escrita científica. Como produto foi disponibilizado um aplicativo do jogo com o objeto de aprendizagem e uma sequência didática como proposta para sua aplicação.

Palavras-chave: Divisão Euclidiana. Números binários. jogo de estratégia.

Abstract

Due to the difficulty faced by the students in understanding mathematical concepts, in particular those related to divisibility and the Euclidean Division algorithm, it is desirable to employ diversified methodologies for teaching and learning mathematics. Among these methodologies, problem-solving combined with educational games, such as digital games and the game of NIM, is presented. A programming language with the potential for creating educational games is *Scratch*, that was used as part of the methodology in this research to develop an application for a version of the game of NIM, known as the Subtraction Game. The objective of this work is to discuss the use of this electronic version of the NIM game and its pedagogical possibilities in teaaching mathematics. To devise a winning strategy for the Subtraction Game, the Euclidean Division algorithm was employed. In the classic version of the NIM game, it necessary to know how to write a positive integer in binary form. After programming the game, a didactic sequence was created as a guide for teachers. As a result of this research, the potential of educational games for enhancing the learning of various mathematical concepts was understood, especially the potential of the NIM game in teaching the Euclidean Division algorithm. Furthermore, complementation was obtained in the student training, in relation to the deeper understanding of Number Theory, programming using the *Scratch* language, and in the development of a didactic sequence, in addition to contact with research and scientific writing. As a product, an educational game application and a didactic sequence proposal for its implementation were made available.

Keywords: Euclidean Division. Binary numbers. Strategy game.

Lista de ilustrações

Sumário

1 *INTRODUÇÃO*

Tendo em vista que a Matemática cria sistemas abstratos, mas que refletem no mundo físico e no cotidiano do estudante [1], pode-se concluir que o ensino de Matemática não consiste somente de uma imposição de conhecimento, mas de uma necessidade. Neste sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda que os estudantes do Ensino Básico desenvolvam o letramento matemático e sejam capazes de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente. Porém, avaliações recentes mostram resultado insatisfatório no letramento matemático. Dentre os fatores que podem explicam o fenômeno está a falta de metodologias corretamente utilizadas no ensino com o objetivo de atender as diferentes personalidades e carência cognitivo-afetiva dos estudantes [2].

Apresenta-se assim um cenário para utilização de novas metodologias de ensino. Porém, concomitantemente deve-se procurar compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes em determinados conceitos matemáticos para buscar bons resultados. Particularmente, uma dificuldade comum é a compreensão do conceito de divisibilidade e a aplicação do algoritmo da divisão. Uma das maiores dificuldades dos estudantes é compreender o algoritmo da divisão de forma que faça sentido para os mesmos. Eles estão acostumados, desde as séries iniciais, a relacionar o conceito de divisibilidade à distribuição de objetos de quantidades iguais entre os receptores. Portanto, quando os estudantes se deparam com o algoritmo da divisão, que está presente também o resto, acabam encontrando bastante dificuldade para utilizá-lo [3].

A utilização de jogos pode auxiliar na compreensão de diversos conteúdos matemáticos. O jogo pode ser visto como uma forma de entretenimento pelas pessoas, mas também pode ser utilizado com um fim didático [4], uma vez que os jogos têm como princípio a utilização de regras para o seu desenvolvimento, e essas regras podem ser utilizadas com diferentes finalidades. Quando o jogo é utilizado no contexto de ensino e aprendizagem, torna-se um jogo pedagógico.

De forma mais abrangente, a utilização dos elementos tradicionais dos jogos no ensino, conhecida como gamificação, deve ser utilizada com o objetivo de refletir naturalmente na aprendizagem dos estudantes [5]. Através da gamificação pode haver a motivação para a aprendizagem e estimulação da criatividade em virtude do ambiente prazeroso, consequentemente isso trará bons resultados para a aprendizagem Matemática [5]. Ademais, a gamificação não é necessariamente dependente dos meios tecnológicos ou dispositivos digitais, pois os jogos podem ser utilizados sem o uso desses meios [5].

jogos têm sido utilizados como ferramenta de ensino, especificamente para o ensino de Matemática, alguns jogos têm potencial para estimular a aprendizagem de determinado conteúdo. Para a aprendizagem de divisibilidade, é possível utilizar o Jogo de NIM como estratégia didática, pois é um jogo ao mesmo tempo simples e desafiador, podendo ser um excelente exercício de lógica e aplicação de conceitos matemáticos.

NIM é uma família de jogos matemáticos finitos sem empate, no qual dois participantes efetuam jogadas alternadamente, com informação completa e sem interferência do acaso [6]. Os jogadores retiram alternadamente palitos, ou outros objetos, de pilhas. Cada jogador deve retirar um ou mais objetos de uma única pilha por vez. Vence o jogador que retirar o último objeto, ou perde dependendo da versão utilizada. A Figura 1 exemplifica uma situação de jogo.

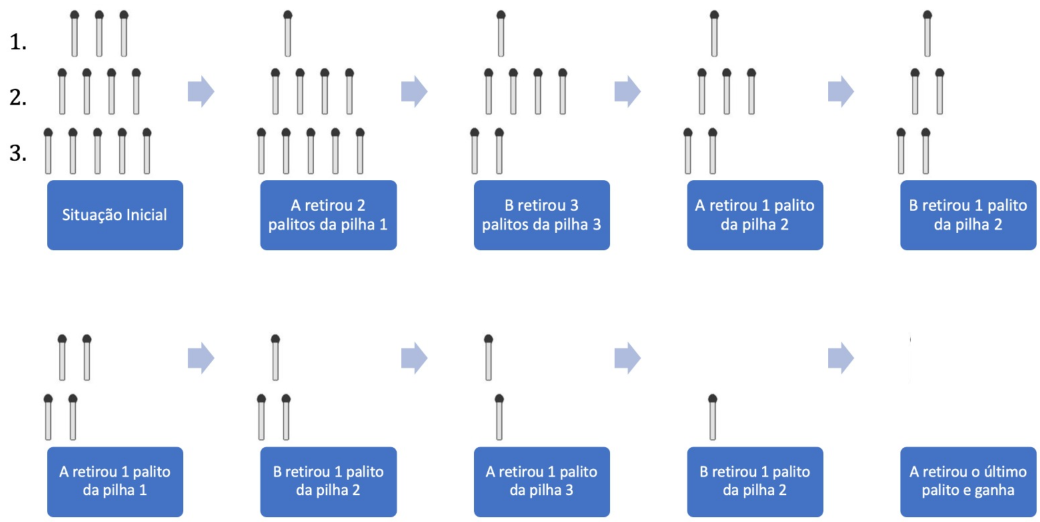

Figura 1 – Uma partida de NIM com palitos distribuídos em 3 pilhas.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

NIM é o exemplo mais clássico de Jogo Combinatório imparcial, em que ambos os jogadores fazem os mesmos movimentos, a única vantagem é iniciar a partida. É possível estabelecer uma estratégia vencedora exata para qualquer configuração de tabuleiro. Qualquer que seja o estado do jogo, existe uma estratégia vencedora para um dos dois jogadores. A vitória pode ser garantida a quem inicia o jogo, a elaboração de estratégias para vencer envolve conceitos de divisibilidade, no sistema numeral decimal ou em outras bases, dependendo da variação utilizada [7].

O Jogo da Subtração, é uma variante do Jogo de NIM, que é equivalente a ele. Essa variante é também conhecida como versão simples do NIM, em que as peças são organizadas em uma única pilha e o número de peças a ser retirado é limitado a algum conjunto de números inteiros positivos [8]. A Figura 2 exemplifica a situação inicial do jogo com 12 peças. Nessa variante, coloca-se sobre uma mesa uma fileira com um número qualquer de palitos. Dois jogadores alternadamente retiram da fileira um número máximo de palitos previamente determinado. Deve-se retirar pelo menos um palito a cada jogada. Perde o jogador que retirar o último palito.

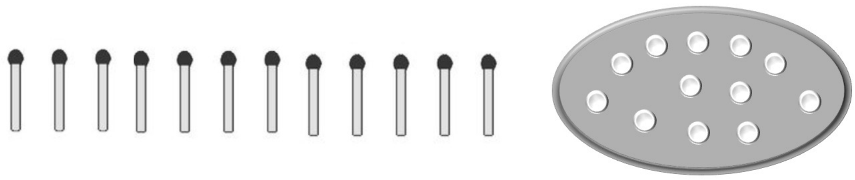

Figura 2 – Jogo da Subtração com 12 palitos e 12 fichas.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

A elaboração da estratégia vencedora para o Jogo da Subtração envolve o conceito de divisão no sistema numeral decimal, assim essa variante é adequada para utilização em situações de aprendizagem no Ensino Fundamental, por envolver conceitos mais simples de divisibilidade.

O objetivo deste trabalho é discutir as possibilidades de aplicação de uma versão digital da variante Jogo da Subtração no ensino e aprendizagem do algoritmo da divisão. A justificativa da realização dessa pesquisa é que apesar de existirem muitas versões do Jogo de NIM disponíveis [8], não foi encontrada uma versão digital da variante do jogo a ser desenvolvida neste trabalho, nem orientações para a sua utilização como estratégia didática, daí a relevância deste trabalho para disponibilizar aos estudantes e professores uma ferramenta que possa contribuir para melhoria da aprendizagem de Matemática.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 será apresentado inicialmente, o Jogo de NIM, destacando sua origem e suas diferentes versões. Na Seção 2.1 será apresentada a classificação dos jogos como Jogos Combinatórios Imparciais. Posteriormente, na Seção 2.2, será abordada a versão clássica do Jogo de NIM, apresentada por Bouton[9], juntamente com a teoria proposta pelo autor para a elaboração da estratégia vencedora do jogo. Na Seção 2.3 será apresentado o Jogo da Subtração, uma variante do Jogo de NIM considerada mais simples, e o processo de elaboração da estratégia vencedora para essa variante. O Capítulo 3 será destinado aos jogos no Ensino de Matemática, destacando a importância da utilização dos mesmos e a potencialidade da linguagem de programação *Scratch* para a criação de jogos pedagógicos, em particular para a do Jogo de NIM. No Capítulo 4 será apresentada a metodologia de pesquisa utilizada. Já no Capítulo 5 serão apresentados os resultados da pesquisa, sendo a Seção 5.1 destinada a programação da versão digital do Jogo de NIM e a apresentação do link de acesso a versão digital do jogo, desenvolvida neste trabalho, a Seção 5.2 destinada ao funcionamento do programa e a Seção 5.3 destinada aos relatos das testagens realizadas para avaliar a receptividade do jogo . Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as consideração finais do trabalho.

2 *Jogo de NIM*

Este capítulo apresenta duas versões do Jogo de NIM com suas respectivas estratégias vencedoras. A primeira, conhecida como versão clássica, foi proposta pelo matemático Charles L. Bouton [9], em 1901, na revista *Annals of Mathematics* e a segunda, é uma variação conhecida como Jogo da Subtração.

Trata-se de um antigo jogo de palitos, jogado por duas pessoas, com suposta origem chinesa. Segundo [10], o nome *NIM* em inglês arcaico, significa apanhar; em alemão (*Nimm*) significa tirar e, rotacionando a palavra em 180^o, obtemos a palavra *WIN* que, em inglês, significa vencer.

Segundo [7], este jogo foi um dos primeiros a ter sua estratégia analisada matematicamente através de uma teoria chamada Teoria de jogos, que consiste no estudo de tomadas de decisões estratégicas, nas mais variadas situações, onde indivíduos ou grupos de indivíduos interagem para alcançar algum objetivo. A Teoria dos jogos é amplamente utilizada em Economia, Finanças, Negócios, Ciências Políticas, Psicologia e de modo bastante importante em Biologia, além de Lógica e Ciência da Computação. Ela tem sido considerada tão importante, que relacionado com ela foram conferidos até o presente, 12 prêmios Nobel.

O Jogo de NIM também marca a história da computação e dos videogames, pois o Nimatron, a primeira versão eletromecânica de um jogo, foi criado em 1940 para a Feira Mundial de Nova York, pelo físico Edward Condon [11], e fez sucesso na década de 1960, conforme mostra a Figura 3. Já em 1951, o Nimrod foi apresentado como o computador "mais rápido do que o pensamento" e um "cérebro eletrônico" que simulava exclusivamente o Jogo de NIM.

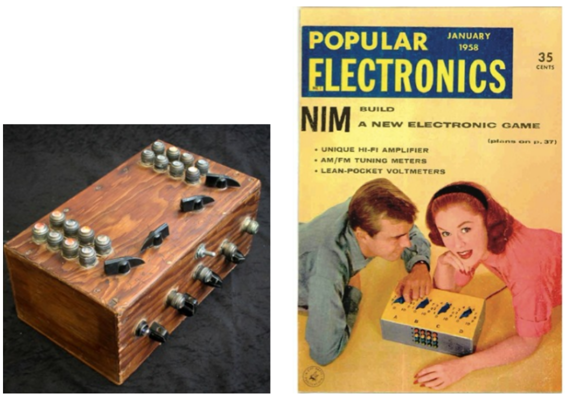

Figura 3 – jogo eletrônico e Revista [12].
Fonte: HISTORIC TECH (2023).

2.1 *Jogos Combinatórios Imparciais*

A fundamentação teórica desta seção está baseada em recortes de [13].

São denominados jogos qualquer atividade lúdica ou esportiva como xadrez, jogos de baralho, futebol entre outros. Algumas características que essas atividades possuem em comum e que as classificam como jogos são possuir jogadores, um número de posições possíveis durante as partidas, regras que definem as jogadas permitidas e as posições terminais do jogo, além da pontuação atribuída ao jogador que se encontra nessa posição. A partir dessas características, pode-se definir um jogo como uma atividade que envolve um conjunto de jogadores, posições e regras.

Os jogos podem ser divididos em diferentes classes. Uma delas é a dos **Jogos Combinatórios**, que possuem como características:

1. Os jogadores jogam alternadamente, ou seja, não há jogadas simultâneas;
2. Tem informação completa, ou seja, cada jogador sabe exatamente todos os dados desse jogo: posições, jogadas, peças;
3. Não são permitidos nenhum tipo de dispositivos aleatórios ou de sorte, como dados e sorteios de cartas;
4. Existe uma regra bem definida e previamente conhecida para determinar o término do jogo, ou seja, uma posição da qual não se pode efetuar mais nenhuma jogada;
5. O jogo termina em um número finito de movimentos;
6. Ao final do jogo há um resultado bem definido: uma vitória para um dos jogadores ou um empate.

Os Jogos Combinatórios admitem outras duas categorias: jogos parciais e imparciais. Um Jogo Combinatório é considerado parcial, se as possibilidades de cada movimento (jogada) são distintas para cada jogador em qualquer etapa do jogo. Por exemplo, jogos nos quais cada competidor possui seu próprio conjunto de peças, sendo o único responsável pelo seus movimentos. Assim, o movimento da peça de um jogador interfere na possibilidade de ocupação do mesmo espaço no tabuleiro pelas peças do adversário na jogada seguinte. jogos como Dama, Xadrez e Gamão são considerados como Jogos Combinatórios parciais. Por outro lado, um Jogo Combinatório é considerado imparcial se as possibilidades de movimentos (jogadas) são iguais para ambos os jogadores. O jogo da Velha é um exemplo desta última categoria. Neste jogo, o movimento significa colocar um X ou um $\circ$ num espaço vazio. Em qualquer etapa, as posições vazias são as mesmas, originando as mesmas possibilidades de jogadas.

O Jogo de NIM é considerado um Jogo Combinatório imparcial. Combinatório porque não envolve elementos de sorte, tais como o lançamento de dados, ou roletas e os jogadores possuem todas as informações do jogo e são capazes de planejar suas jogadas em busca de uma estratégia que os conduza para a vitória. Imparcial pois a partir de uma mesma posição, os dois jogadores possuem os mesmos movimentos disponíveis.

2.2 *Versão Clássica do Jogo de NIM*

Esta seção é baseada em [7], [9] e [14].

Na versão apresentada por Bouton em seu artigo [9], coloca-se em uma mesa um número N de palitos separados em três grupos, de n_1, n_2 e n_3 palitos $(n_1 + n_2 + n_3 = N)$, de modo que $n_i \neq n_j$, se $i \neq j$. O jogo é disputado por duas pessoas. Cada uma, na sua vez, deve retirar um número qualquer $(\neq 0)$ de palitos de um, e de apenas um, dos grupos, podendo retirar inclusive todos os palitos do grupo escolhido. Os jogadores alternam-se e quem retirar o(s) último(s) palito(s) ganha o jogo.

Cada etapa do jogo será representada por uma terna ordenada de números, associada à quantidade de palitos em cada grupo, ordenados previamente como Grupo A, Grupo B e Grupo C. A configuração inicial é (n_1, n_2, n_3), com $n_1 + n_2 + n_3 = N$, o total de palitos no jogo.

Para melhor compreensão do funcionamento do jogo, considere a seguinte simulação de uma partida entre as jogadoras Nicoli (N) e Jaqueline (J), em que a configuração inicial do jogo é $(4, 2, 7)$, conforme a Figura 4.

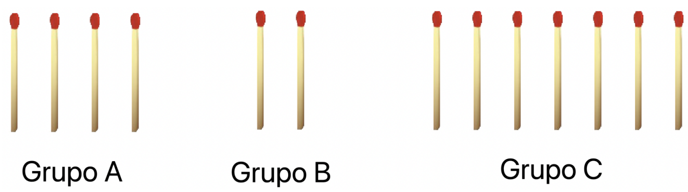

Figura 4 – Representação inicial de uma partida do Jogo de NIM clássico.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Assuma que Jaqueline inicia o jogo e que o esquema a seguir indica o desenrolar da partida após algumas jogadas:

$$(4, 2, 7) \xrightarrow{J} (4, 2, 6) \xrightarrow{N} (4, 2, 0) \xrightarrow{J} (2, 2, 0).$$

Após a última jogada de Jaqueline, Nicoli percebe que perdeu o jogo. Se ela tirar dois palitos de um dos grupos, Jaqueline tira os outros dois palitos restantes na mesa e ganha o jogo. Se Nicoli tirar um palito de um grupo, Jaqueline tira um palito do outro grupo e Nicoli volta a ficar sem saída.

As jogadas de Jaqueline foram todas planejadas. Ela seguiu uma estratégia que a conduziu à vitória. Qual é o padrão existente nas jogadas de Jaqueline? Um olhar mais atento nos revela a busca por um certo "equilíbrio" na distribuição dos palitos entre os grupos. Analisando o momento que antecede a primeira jogada de Jaqueline, temos uma distribuição equivalente à da Figura 5.

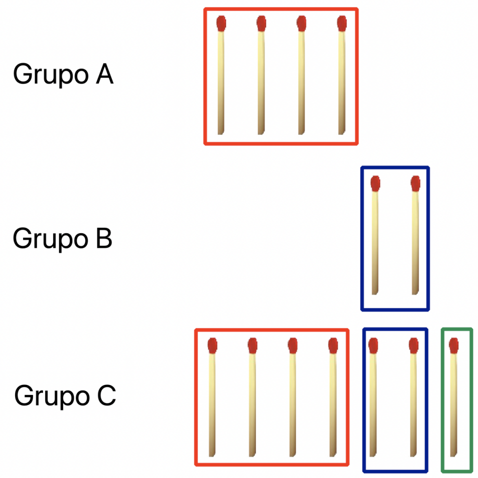

Figura 5 – Representação equivalente ao início de uma partida do Jogo de NIM clássico.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Jaqueline percebe que, entre os grupos, existe uma quantidade par de blocos com 4 palitos e o mesmo ocorre com os blocos compostos por 2 palitos. No entanto, o número de blocos com 1 palito é ímpar, o que a motiva retirar um palito do Grupo C em busca da paridade na formação dos blocos. Assim, deixa a configuração $(4, 2, 6)$ para Nicoli.

Após a jogada de Nicoli, os palitos ficam numa configuração equivalente à representada na Figura 6.

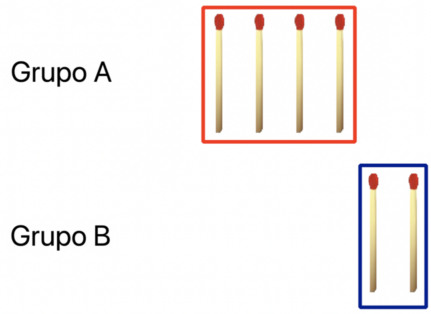

Figura 6 – Representação dos palitos após a jogada de Nicoli.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Novamente, em busca da paridade entre os blocos de cada grupo, Jaqueline decide retirar 2 palitos do Grupo A, obtendo assim, um número par de blocos com 2 palitos. E deixa a configuração $(2, 2, 0)$ e a certeza de derrota para Nicoli, discutida anteriormente.

Quando Jaqueline fez a separação dos palitos de cada grupo em blocos de potência de 2, na verdade ela escreveu a quantidade de palitos de cada grupo na base 2. Novamente, analisando a situação inicial:

$$\begin{array}{llll} \text{Grupo A:} & 4 \text{ palitos} \rightarrow & 4 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 & \rightarrow [100]_2 \\ \text{Grupo B:} & 2 \text{ palitos} \rightarrow & 2 = 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 & \rightarrow [10]_2 \\ \text{Grupo C:} & 7 \text{ palitos} \rightarrow & 7 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 & \rightarrow [111]_2 \end{array}$$

Usando o artifício de incluir alguns zeros à esquerda, quando necessário, para que as representações desses números fiquem com a mesma quantidade de dígitos, obtém-se:

$$\begin{array}{lll} \text{Grupo A:} & 4 \text{ palitos} \rightarrow & [100]_2 \\ \text{Grupo B:} & 2 \text{ palitos} \rightarrow & [{\color{red}0}10]_2 \\ \text{Grupo C:} & 7 \text{ palitos} \rightarrow & [111]_2 \end{array}$$

Cada dígito 1, na representação binária, indica a existência de um bloco em potência de 2, o qual contribui para a formação do número de palitos em cada grupo. Assim, a paridade na distribuição dos blocos ocorre quando o resultado da soma dos dígitos, correspondentes a uma mesma potência de 2, resulta num número par.

Por exemplo, no início da partida tem-se:

$$\begin{array}{lll} \text{Grupo A:} & 4 \text{ palitos} \rightarrow & 100 \\ \text{Grupo B:} & 2 \text{ palitos} \rightarrow & {\color{red}0}10 \\ \text{Grupo C:} & 7 \text{ palitos} \rightarrow & 111 \\ \hline & & {\color{blue}221} \end{array}$$

Somando os três números apresentados anteriormente, como se fosse na base 10, obtemos o número 221, que chamaremos de **chave do jogo**.

A estratégia de Jaqueline é a de, com uma jogada, tornar todos os algarismos da chave pares. Como o interesse reside na paridade dos algarismos da chave e considerando que os algarismos envolvidos na soma descrita anteriormente são sempre zeros e uns, pode-se pensar na soma em $\mathbb{Z}_2$ e na busca de jogadas que produzam uma chave com todos os seus dígitos nulos.

A seguir, na próxima subseção, serão apresentados alguns conceitos e resultados, que permitem formalizar a estratégia vencedora do Jogo de NIM.

2.2.1 *A Teoria de Bouton para a Estratégia Vencedora*

Sejam x e y inteiros positivos. Existe uma maneira única de escrever esses números na base 2, consulte [7] para ver uma demonstração detalhada desse fato. Incluindo alguns zeros à esquerda, se necessário, podemos deixar as representações desses números na base 2 com a mesma quantidade de dígitos.

$$\begin{aligned} x &= [\alpha_r \ \alpha_{r-1} \dots \alpha_0]_2 \,, \\ y &= [\beta_r \ \beta_{r-1} \dots \beta_0]_2 \,. \end{aligned}$$

Uma vez que esses números estão representados com $r+1$ dígitos, sendo eles zeros e uns, podemos identificá-los com vetores em $\mathbb{Z}_2^{r+1}$. Neste caso, escrevemos:

$$\begin{aligned} x &= (\alpha_r, \alpha_{r-1}, \dots, \alpha_0) \,, \\ y &= (\beta_r, \beta_{r-1}, \dots, \beta_0) \,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Assim, entendemos cada coordenada do vetor como sua respectiva classe residual módulo 2[1] , ou seja, temos a identificação $\alpha_i \leftrightarrow [\alpha_i] \in \mathbb{Z}_2$ e o mesmo vale para β_i.

Definição 2.2.1 (Soma-NIM)**.** *A soma-NIM de dois vetores α e β em $\mathbb{Z}_2^{r+1}$ é o vetor resultante da soma, coordenada a coordenada em $\mathbb{Z}_2$. Notação $\alpha \oplus \beta$.*

Exemplo 2.2.1. *Sejam $\alpha = (1,1,0,1)$ e $\beta = (1,0,0,1)$, então $\alpha \oplus \beta = (0,1,0,0)$.*

Definição 2.2.2. *Dado $k \in \mathbb{Z}_2$, definimos a multiplicação por escalar em $\mathbb{Z}_2^{r+1}$, da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} k \cdot \alpha &= k \cdot (\alpha_r, \dots, \alpha_0) \\ &= (k \cdot \alpha_r, \dots, k \cdot \alpha_0). \end{aligned}$$

Teorema 2.2.1. *$(\mathbb{Z}_2^{r+1}, \oplus)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. Para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2^{r+1}$ e $k, t \in \mathbb{Z}_2$, temos:

- Comutativa: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. De fato,

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &= (\alpha_r, \dots, \alpha_0) \oplus (\beta_r, \dots, \beta_0) \\ &= (\alpha_r + \beta_r, \dots, \alpha_0 + \beta_0) \\ &= (\beta_r + \alpha_r, \dots, \beta_0 + \alpha_0) \\ &= \beta \oplus \alpha. \end{aligned}$$

[1] Definição pode ser encontrada em [7].

- Associativa: $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$. De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) &= (\alpha_r, \ldots, \alpha_0) \oplus ((\beta_r, \ldots, \beta_0) \oplus (\gamma_r, \ldots, \gamma_0)) \\
&= (\alpha_r, \ldots, \alpha_0) \oplus (\beta_r + \gamma_r, \ldots, \beta_0 + \gamma_0) \\
&= (\alpha_r + (\beta_r + \gamma_r), \ldots, \alpha_0 + (\beta_0 + \gamma_0)) \\
&= ((\alpha_r + \beta_r) + \gamma_r, \ldots, (\alpha_0 + \beta_0) + \gamma_0) \\
&= (\alpha_r + \beta_r, \ldots, \alpha_0 + \beta_0) \oplus (\gamma_r, \ldots, \gamma_0) \\
&= ((\alpha_r, \ldots, \alpha_0) \oplus (\beta_r, \ldots, \beta_0)) \oplus (\gamma_r, \ldots, \gamma_0) \\
&= (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma.
\end{aligned}$$

- Elemento neutro: $\alpha \oplus 0 = \alpha$. De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha \oplus 0 &= (\alpha_r, \ldots, \alpha_0) \oplus (0, \ldots, 0) \\
&= (\alpha_r + 0, \ldots, \alpha_0 + 0) \\
&= (\alpha_r, \ldots, \alpha_0) = \alpha.
\end{aligned}$$

- Elemento oposto: $\alpha \oplus \alpha = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha \oplus \alpha &= (\alpha_r, \ldots, \alpha_0) \oplus (\alpha_r, \ldots, \alpha_0) \\
&= (\alpha_r + \alpha_r, \ldots, \alpha_0 + \alpha_0) \\
&= (2 \cdot \alpha_r, \ldots, 2 \cdot \alpha_0) = (0, \ldots, 0),
\end{aligned}$$

  uma vez que todas as coordenadas são pares.

- $(kt) \cdot \alpha = k \cdot (t \cdot \alpha)$. De fato,

$$\begin{aligned}
(kt) \cdot \alpha &= (kt) \cdot (\alpha_r, \ldots, \alpha_0) \\
&= ((kt) \cdot \alpha_r, \ldots, (kt) \cdot \alpha_0) \\
&= (k \cdot (t \cdot \alpha_r), \ldots, k \cdot (t \cdot \alpha_0)) \\
&= k \cdot (t \cdot \alpha_r, \ldots, t \cdot \alpha_0) \\
&= k \cdot (t \cdot (\alpha_r, \ldots, \alpha_0)) \\
&= k \cdot (t \cdot \alpha).
\end{aligned}$$

- $(k + t) \cdot \alpha = (k \cdot \alpha) \oplus (t \cdot \alpha)$. De fato,

$$\begin{aligned}
(k + t) \cdot \alpha &= (k + t) \cdot (\alpha_r, \ldots, \alpha_0) \\
&= ((k + t) \cdot \alpha_r, \ldots, (k + t) \cdot \alpha_0) \\
&= (k \cdot \alpha_r + t \cdot \alpha_r, \ldots, k \cdot \alpha_0 + t \cdot \alpha_0) \\
&= (k \cdot \alpha_r, \ldots, k \cdot \alpha_0) \oplus (t \cdot \alpha_r, \ldots, t \cdot \alpha_0) \\
&= (k \cdot (\alpha_r, \ldots, \alpha_0)) \oplus (t \cdot (\alpha_r, \ldots, \alpha_0)) \\
&= (k \cdot \alpha) \oplus (t \cdot \alpha).
\end{aligned}$$

- $k \cdot (\alpha \oplus \beta) = (k \cdot \alpha) \oplus (k \cdot \beta)$. De fato,

$$\begin{aligned}
k \cdot (\alpha \oplus \beta) &= k \cdot ((\alpha_r, \ldots, \alpha_0) \oplus (\beta_r, \ldots, \beta_0)) \\
&= k \cdot (\alpha_r + \beta_r, \ldots, \alpha_0 + \beta_0) \\
&= (k \cdot (\alpha_r + \beta_r), \ldots, k \cdot (\alpha_0 + \beta_0)) \\
&= ((k \cdot \alpha_r) + (k \cdot \beta_r), \ldots, (k \cdot \alpha_0) + (k \cdot \beta_0)) \\
&= (k \cdot \alpha_r, \ldots, k \cdot \alpha_0) \oplus (k \cdot \beta_r, \ldots, \beta_0) \\
&= (k \cdot (\alpha_r, \ldots, \alpha_0)) \oplus (k \cdot (\beta_r, \ldots, \beta_0)) \\
&= (k \cdot \alpha) \oplus (k \cdot \beta).
\end{aligned}$$

- $1 \cdot \alpha = \alpha$. De fato,

$$\begin{aligned}
1 \cdot \alpha &= 1 \cdot (\alpha_r, \ldots, \alpha_0) \\
&= (1 \cdot \alpha_r, \ldots, 1 \cdot \alpha_0) \\
&= (\alpha_r, \ldots, \alpha_0) = \alpha.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.2. *No espaço vetorial* $(\mathbb{Z}_2^{r+1}, \oplus)$ *sobre o corpo* $\mathbb{Z}_2$*, valem:*

(1) Lei do cancelamento aditivo, ou seja, $\alpha \oplus \beta = \alpha \oplus \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$.

(2) O elemento neutro da soma-NIM é único.

(3) O inverso aditivo é único.

(4) A soma-NIM de dois vetores distintos em $\mathbb{Z}_2^{r+1}$ *nunca resulta no vetor nulo.*

Demonstração. As condições $(1), (2)$ e (3) são consequências imediatas do fato de todo espaço vetorial ser um grupo abeliano.

Com relação ao item (4), segue do teorema 2.2.1 que todo elemento é seu próprio inverso. Assim, a unicidade do inverso garantida no item (3) corrobora para o resultado desejado. □

Considere um Jogo de NIM, com n grupos de palitos, $n \in \mathbb{N}$, e seja x_i a quantidade existente em cada grupo i, $1 \leq i \leq n$. Podemos indicar a configuração dos palitos em cada grupo por meio da n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$, assim como ilustrado na situação da Figura 4.

A partir de agora, sempre que aparecer neste texto uma soma-NIM entre dois inteiros positivos, entenderemos como sendo a soma-NIM dos vetores identificados com esses números representados com a mesma quantidade de dígitos na base 2, como ilustrado na situação descrita em (2.1).

Definição 2.2.3 (Combinação Segura)**.** *Dizemos que a configuração do jogo descrita pela n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma combinação segura, se sua soma-NIM resultar em um vetor nulo, ou seja, se $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^{r+1}$. Caso contrário, dizemos que a combinação não é segura, ou simplesmente, insegura.*

Observe que a configuração terminal do jogo é $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$, uma vez que não existem palitos nos n grupos. Essa configuração, indubitavelmente, é uma combinação segura, já que a sua soma-NIM é o vetor nulo em $\mathbb{Z}_2^{r+1}$. Assim, para vencer, o jogador deve alcançar uma combinação segura após sua jogada!

Definição 2.2.4 (Jogada Válida)**.** *Num Jogo de NIM, uma jogada válida é aquela em que o jogador, na sua vez, escolhe um grupo e retira dele no mínimo 1 e no máximo todos os palitos.*

O próximo resultado garante que numa configuração de jogo associada a uma combinação segura, toda jogada válida resulta em uma combinação não segura.

Teorema 2.2.3. *Seja $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ uma configuração com soma-NIM igual a zero (combinação segura), ou seja $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$. Então, qualquer jogada válida feita nessa configuração, irá transformá-la em uma configuração com soma-NIM diferente de zero (combinação insegura).*

Demonstração. Suponhamos que na vez do jogador B, a configuração do jogo seja dada pela n-upla $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$, a qual é uma combinação segura, por hipótese. Para efetuar uma jogada válida, o jogador B deve retirar pelo menos um palito de um dos grupos que configuram o jogo. Suponhamos que a alteração ocorra no grupo j, o qual possui x_j elementos, com $x_j \neq 0$. Assim, após a jogada de B, a configuração do jogo passa a ser $(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, com $y_j < x_j$.

Seguem das propriedades elencadas nos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 que a soma-NIM dessa nova configuração é:

$$\begin{aligned}
x_1 \oplus \ldots \oplus x_{j-1} \oplus y_j \oplus x_{j+1} \oplus \ldots \oplus x_n &= (x_1 \oplus \ldots \oplus x_{j-1} \oplus y_j \oplus x_{j+1} \oplus \ldots \oplus x_n) \oplus 0 \\
&= (x_1 \oplus \ldots \oplus x_{j-1} \oplus y_j \oplus x_{j+1} \oplus \ldots \oplus x_n) \oplus (x_j \oplus x_j) \\
&= (x_1 \oplus \ldots \oplus x_{j-1} \oplus x_j \oplus x_{j+1} \oplus \ldots \oplus x_n) \oplus (y_j \oplus x_j) \\
&= 0 \oplus (y_j \oplus x_j) \\
&= y_j \oplus x_j.
\end{aligned}$$

Como $y_j \neq x_j$, então o elemento oposto de x_j não é o y_j, o que implica no fato de $y_j \oplus x_j \neq 0$. Portanto, o jogador B obtém uma combinação insegura após sua jogada. □

O próximo resultado nos diz que, com uma jogada válida, sempre é possível transformar uma configuração de jogo associada a uma combinação insegura, numa correspondente a uma combinação segura.

Teorema 2.2.4. *Seja* $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ *uma configuração do Jogo de NIM associada a uma combinação insegura. Então, é possível determinar uma jogada válida que resulte numa configuração de combinação segura.*

Demonstração. Vamos indicar os vetores, em $\mathbb{Z}_2^{r+1}$, associados aos inteiros positivos $x_1, \ldots, x_n$ por:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_{(1,r)}, \ldots, \alpha_{(1,0)}), \\ &\vdots \\ x_n &= (\alpha_{(n,r)}, \ldots, \alpha_{(n,0)}). \end{aligned}$$

Seja $c = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = (c_r, \ldots, c_0)$. Note que $c \neq 0$, pois, por hipótese, a atual configuração resulta numa combinação insegura. Então, c possui uma coordenada não nula, que no caso só pode ser igual a 1.

Seja $c_k = 1$ a coordenada não nula de c que encontra-se mais à esquerda, ou seja, estamos admitindo que c é da forma:

$$c = (0, \ldots, 0, 1, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0).$$

Analisando a soma-NIM, vemos que c_k resulta da seguinte soma em $\mathbb{Z}_2$:

$$c_k = \alpha_{(1,k)} + \ldots + \alpha_{(n,k)}.$$

Assim, $\alpha_{(i,k)} = 1$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, uma vez que se todas essas entradas fossem nulas, então a soma que resulta em c_k também seria zero, o que é uma contradição.

Sem perda de generalidade, vamos admitir que $\alpha_{(1,k)} = 1$, neste caso, x_1 é da forma:

$$x_1 = (\alpha_{(1,r)}, \ldots, \alpha_{(1,k+1)}, 1, \alpha_{(1,k-1)}, \ldots \alpha_{(1,0)}).$$

Agora, mostraremos que é possível retirar uma quantidade de palitos, do grupo contendo x_1 palitos, de modo a obter uma configuração do jogo associada a uma combinação segura.

Considerando $x_1' = c \oplus x_1$, temos:

$$\begin{aligned} x_1' &= c \oplus x_1, \\ &= (0, \ldots, 0, 1, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0) \oplus (\alpha_{(1,r)}, \ldots, \alpha_{(1,k+1)}, 1, \alpha_{(1,k-1)}, \ldots, \alpha_{(1,0)}), \\ &= (\alpha_{(1,r)}, \ldots, \alpha_{(1,k+1)}, 0, \widetilde{\alpha}_{(1,k-1)}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{(1,0)}), \end{aligned}$$

sendo $\widetilde{\alpha}_{(1,j)} = c_j + \alpha_{(1,j)}$, em $\mathbb{Z}_2$, com $j \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Um olhar mais atento para a representação dos números x_1 e x_1', na base 2, nos mostra que $x_1' < x_1$, pois:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \left[\alpha_{(1,r)}\ \alpha_{(1,r-1)} \ldots \alpha_{(1,k+1)}\ 1\ \alpha_{(1,k-1)}\ \ \ldots \alpha_{(1,0)}\right]_2, \\ x_1' & = & \left[\alpha_{(1,r)}\ \alpha_{(1,r-1)} \ldots \alpha_{(1,k+1)}\ 0\ \widetilde{\alpha}_{(1,k-1)}\ \ \ldots \widetilde{\alpha}_{(1,0)}\right]_2, \end{array}$$

todos os dígitos das posições entre $k+1$ e r coincidem e o desempate ocorre no dígito da posição k, fazendo de x_1 um número maior do que x_1'.

Além disso, x_1' possui uma propriedade que muito nos interessa:

$$\begin{aligned} x_1' \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n &= (c \oplus x_1) \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n, \\ &= c \oplus (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n), \\ &= c \oplus c, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o grupo contendo x_1 palitos deve passar a ter x_1' palitos, ou seja, o jogador deve retirar $(x_1 - x_1')$ palitos desse grupo para obter uma configuração do jogo correspondente a uma combinação segura. □

Resumindo a nossa discussão: o jogador que conseguir conquistar, após jogadas válidas, configurações com combinações seguras, vence a disputa. Por outro lado, quem tiver o infortúnio de se deparar com uma combinação segura, independentemente de sua jogada, ela resultará numa combinação insegura.

Finalmente, com a estratégia apresentada na demonstração do Teorema 2.2.4, vamos desvendar as jogadas que levaram Jaqueline à vitória contra Nicoli.

No início da partida, tínhamos a seguinte configuração:

$$\begin{array}{lll} \text{Grupo A:} & 4 \text{ palitos} \rightarrow & [100]_2 \\ \text{Grupo B:} & 2 \text{ palitos} \rightarrow & [010]_2 \\ \text{Grupo C:} & 7 \text{ palitos} \rightarrow & [111]_2 \end{array}$$

Assim, $c = 4 \oplus 2 \oplus 7 = (1,0,0) \oplus (0,1,0) \oplus (1,1,1) = (0,0,1)$.

A componente não nula de c aparece apenas na composição do número de palitos do Grupo C. Assim, Jaqueline decide alterar a quantidade de palitos deste grupo, deixando-o com:

$$c \oplus 7 = (0,0,1) \oplus (1,1,1) = (1,1,0) \rightarrow [1\ 1\ 0]_2 = 6 \text{ palitos}.$$

Após a jogada de Nicoli, temos o seguinte desenrolar das configurações do jogo:

$$(4,2,7) \xrightarrow{J} (4,2,6) \xrightarrow{N} (4,2,0).$$

O que nos leva a:

$$\begin{array}{lll} \text{Grupo A:} & 4 \text{ palitos} \rightarrow & [100]_2 \\ \text{Grupo B:} & 2 \text{ palitos} \rightarrow & [010]_2 \end{array}$$

Neste caso, $c = 4 \oplus 2 = (1,0,0) \oplus (0,1,0) = (1,1,0)$. A componente não nula mais à esquerda de c é a mesma encontrada na composição da quantidade de palitos do Grupo A. Logo, Jaqueline irá fazer sua jogada de modo que esse grupo passe a ter:

$$c \oplus 4 = (1,1,0) \oplus (1,0,0) = (0,1,0) \rightarrow [0\ 1\ 0]_2 = 2 \text{ palitos}.$$

Isto nos leva à configuração

$$(4,2,7) \xrightarrow{J} (4,2,6) \xrightarrow{N} (4,2,0) \xrightarrow{J} (2,2,0),$$

na qual Nicoli percebe que perdeu a partida, como comentado no início dessa seção.

2.3 *O Jogo da Subtração*

Esta seção é baseada em [7] e [15], onde será apresentada uma variante do Jogo de NIM que, segundo [13], é conhecida como Jogo da Subtração. Esta versão possui uma estratégia vencedora mais simples do que aquela envolvendo a soma-NIM.

São colocados sobre uma mesa um número N de palitos. Cada jogador pode retirar, na sua vez, no mínimo 1 e, no máximo, um número n de palitos, com $1 < n < N$ e cujo valor deve ser combinado antes de iniciar a partida. Nessa versão, perde o jogador que retirar o último palito.

Vamos discutir uma estratégia que aumenta as chances de vitória de quem a conhece.

Como um jogador deve retirar no mínimo 1 e no máximo uma quantidade n palitos, definida no início do jogo, em sua vez, então $n+1$ é a quantidade mínima de palitos que podem ser retirados, após duas jogadas, no caso em que um dos participantes decide retirar n palitos em sua vez.

Sejam q e r o quociente e o resto da Divisão Euclidiana[2] de N por $n+1$. Se $r \geq 2$, podemos estabelecer uma estratégia vencedora para o primeiro jogador, a qual descrevemos a seguir.

Divida mentalmente os palitos em q grupos de $n+1$ palitos cada, mais um grupo com r palitos, correspondente ao resto da divisão. Desse grupo do resto, o jogador que fizer a primeira jogada retira $r-1$ palitos.

[2] Definição pode ser encontrada em [7].

O segundo jogador irá retirar uma quantidade x de palitos, com $1 \leq x \leq n$. Agora, basta o primeiro jogador formar grupos com $n+1$ palitos a partir da jogada anterior, ou seja, ele deve retirar o complementar de x em relação ao $n+1$, isto é $(n+1)-x$ palitos. Repetindo essa estratégia nas jogadas subsequentes, obrigatoriamente sobrará 1 palito para o adversário na jogada final.

Por exemplo, considere um jogo cuja configuração inicial envolva 18 palitos, na qual os competidores acordaram em retirar de 1 a, no máximo, 4 palitos em cada jogada.

Nesse caso, temos $N = 18$, $n = 4$ e na Divisão Euclidiana de N por $n+1 = 5$, segue que $q = 3$ e $r = 3$. Assim, formamos mentalmente 3 grupos com 5 palitos.

O primeiro jogador inicia retirando $r - 1 = 2$ palitos e o último palito que compõe o resto sobrará no final para o seu adversário.

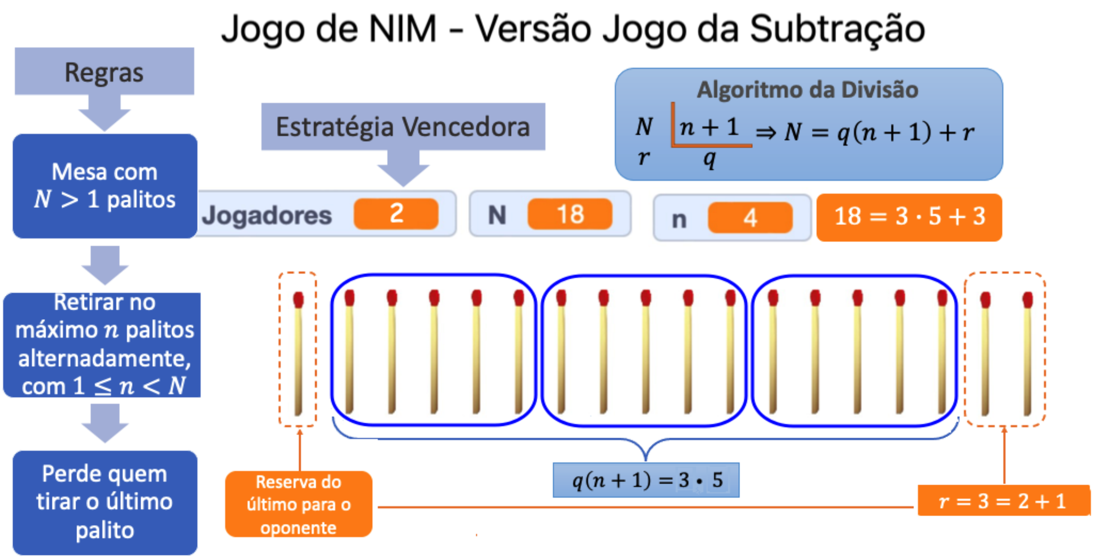

Figura 7 – Representação dos palitos em um Jogo da Subtração.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Nas jogadas subsequentes, quando o segundo jogador retirar palitos, o primeiro retira o que sobra do respectivo grupo original com 5 palitos. Nesse exemplo, na quarta jogada do segundo competidor, sua única opção será a de retirar o último palito e perder o jogo!

Caso o primeiro jogador não esteja com uma configuração na qual $r \geq 2$, ele deve torcer para que o seu adversário não conheça a estratégia discutida anteriormente e cometer o deslize de, após sua jogada, entregar uma configuração favorável ao oponente conhecedor da estratégia.

3 *jogos no Ensino de Matemática*

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como documento normativo para elaboração de currículos e propostas pedagógicas para o Ensino Básico sugere a utilização de jogos como recurso didático. Porém, destaca alguns cuidados para se obter resultados satisfatórios:

> (. . .) Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções Matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.[1]

Jogos também podem ser utilizados como um meio para a resolução de problemas, uma das tendências em educação Matemática, que pode ser utilizada para melhoria do processo de ensino e aprendizagem [16]. A resolução de problemas é citada em diversas partes da BNCC envolvendo vários conceitos matemáticos:

> Em relação aos números, os estudantes do Ensino Fundamental têm a oportunidade de desenvolver habilidades referentes ao pensamento numérico, ampliando a compreensão a respeito dos diferentes campos e significados das operações. Para isso, propõe-se a resolução de problemas envolvendo números naturais, inteiros, racionais e reais, em diferentes contextos (do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento).[1]

A resolução de problemas é uma metodologia do contexto atual:

> O currículo de Matemática na educação básica deve estar sintonizado com as necessidades de nosso mundo tecnológico, exatamente pelo fato que a criança do século XXI está intuitivamente relacionada e adaptada às novas tecnologias. A utilização de resolução de problemas nas séries iniciais da educação básica terá um papel fundamental no processo ensino e aprendizagem de Matemática, pois induzirá a criança a pensar, calcular e tomar decisão. [16]

Como citado também na BNCC:

> (...) a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação. [1]

Portanto, para a resolução de problemas, é necessário um processo de aplicação de métodos. Um método que é referência para a resolução de problemas é o de Polya [17], ilustrado na Figura 8, que quando bem executado pode gerar bons resultados.

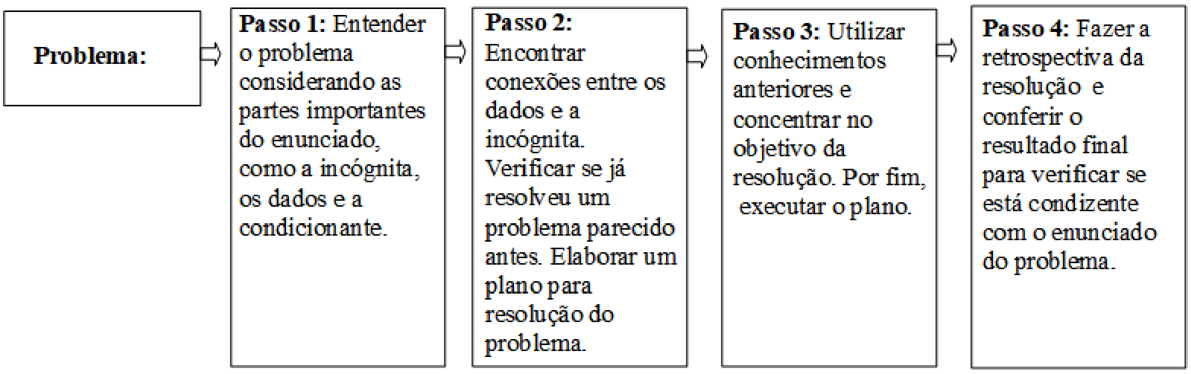

Figura 8 – Passos do Método de Polya para Resolução de Problemas.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

A resolução de problemas mediada por jogos auxilia no aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem, conforme dados apresentados por [18]. Em em seu trabalho [18] faz um relato de uma atividade desenvolvida com 20 estudantes do Ensino Fundamental, utilizando a metodologia de resolução de problemas, baseado no método de Polya, e jogos interativos. Os resultados obtidos apontam melhoria de $8,34\%$ na aprendizagem dos estudantes que participaram da atividade. Entre as principais contribuições da gamificação para a aprendizagem, pode-se destacar:

- maior envolvimento e motivação dos estudantes para a realização da atividade;
- retornos durante a atividade, que faz com que os estudantes verifiquem as partes da resolução do problema que estão errando e busquem soluções para resolver;
- a competitividade despertada, que motiva para realização da atividade e consequentemente gera melhores resultados.

Os jogos têm se apresentado como uma ferramenta que pode auxiliar no ensino de divisibilidade [19]. Em uma atividade realizada com 73 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental utilizando jogos de tabuleiros, elaborados pelos próprios estudantes para estudar o conceito de divisibilidade, foram obtidos resultados positivos. A partir dos dados obtidos, as autoras concluíram que a maioria dos estudantes avaliaram a atividade como excelente e afirmaram ter compreendido melhor o conteúdo com a realização do jogo.

O Jogo de NIM é um jogo que também pode auxiliar no ensino de divisibilidade. O Jogo da Subtração pode ser introduzido no Ensino Básico, pois a elaboração de sua estratégia vencedora envolve os conceitos de divisibilidade e algoritmo da divisão, já a versão clássica, por envolver a aritmética em outros sistemas de numeração, é mais adequada ao Ensino Superior. Uma aplicação do Jogo de NIM foi feita no ensino de divisibilidade [20]. Antes da aplicação, os autores ressaltam a importância da utilização de jogos no ensino com o objetivo de estimular, atrair a atenção dos estudantes e trabalhar os conceitos de Matemática de forma mais lúdica. Para os autores, o Jogo de NIM quando for bem utilizado, pode estimular nos estudantes a realização de cálculos mentais, e desenvolver estratégias para prever futuras jogadas de seu oponente.

O Jogo de NIM é um jogo com regras específicas e peças, para isso é possível utilizar objetos concretos, circuitos eletrônicos ou mesmo digital. A partir de uma análise realizada por [21] em uma aplicação de jogos analógicos, jogos concretos, e jogos digitais, o autor concluiu que esses apresentam características distintas, fortemente vinculadas à tecnologia e ao modo como o jogo se apresenta. Ainda segundo o autor, o jogo digital apresenta outras características como interatividade e o feedback imediato, que acaba envolvendo mais o jogador, tornando-o mais focado na experiência com o jogo, o que contribui para uma menor interação social, porém gera maior diversão.

Além disso, o jogo digital também é considerado um objeto digital de aprendizagem, pois um objeto digital de aprendizagem pode ser qualquer recurso virtual que utiliza multimídia e pode ser usado com o objetivo de favorecer a aprendizagem [22]. Apesar de não existirem muitos objetos digitais de aprendizagem disponíveis para serem utilizados em sala de aula, essa ferramenta demonstra ter uma potencialidade para melhorar o ensino de conteúdos matemáticos.

Em seu trabalho, Meireles [22] retrata a elaboração e construção de um objeto de aprendizagem Matemática usando o programa *Scratch*[1]. A autora deixa evidente a importância do uso da tecnologia no ensino como uma ferramenta auxiliar, ressaltando que por mais que os estudantes tenham acesso às novas tecnologias nos dias atuais, em celulares, tablets, jogos e redes sociais, essa inovação ainda é pouco utilizada no ensino de forma a contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Ela utiliza o programa *Scratch* para construir um objeto digital de aprendizagem e destaca que uma vantagem em utilizar essa plataforma é que os objetos digitais de aprendizagem construídos nela ficam disponíveis na própria plataforma do *Scratch* ou também podem ser baixados para serem utilizados em um outro momento, o que facilita a utilização em sala de aula.

Em [8] é realizada uma revisão de literatura sobre o Jogo de NIM e é descrita a programação de uma variante do Jogo de NIM com uma pilha, semelhante a variante do Jogo da Subtração. O autor destaca que há mais de 1000 versões do Jogo de NIM disponíveis na plataforma *Scratch* (Figura 9), mas que nenhuma é semelhante à versão que se pretendia programar. Também conclui que não foram encontrados trabalhos com

[1] *Scratch* é um programa que possui uma plataforma digital e linguagem de programação própria considerada simples e de cunho educacional [23]. Disponível em : https://scratch.mit.edu/

foco em formação de professores nem em jogos digitais.

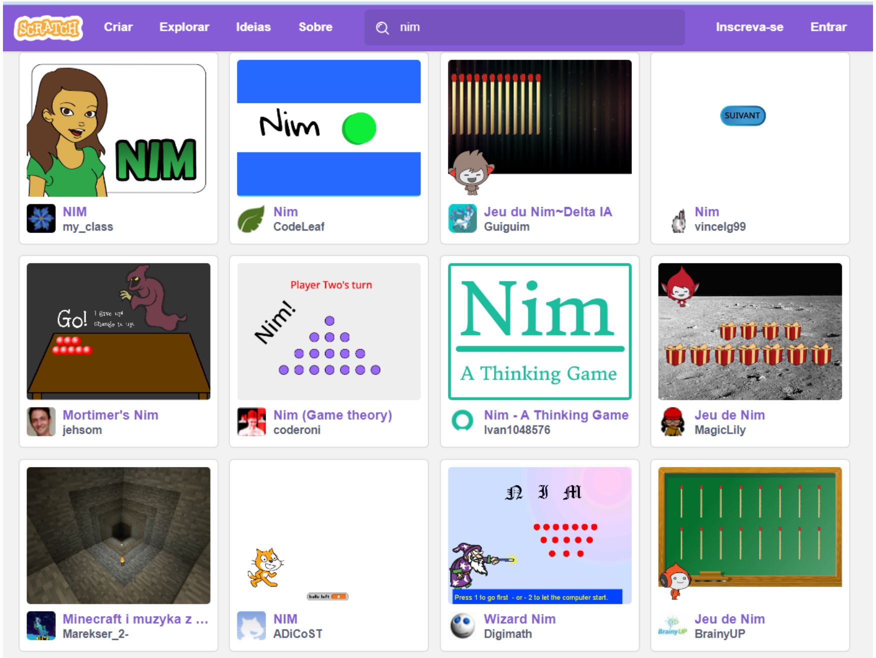

Figura 9 – Alguns Jogos NIM disponíveis na Plataforma *Scratch*.
Fonte: *Scratch*(2023).

A primeira versão dessa variante do Jogo de NIM com uma pilha foi programada para dois jogadores jogarem alternadamente, sendo a quantidade total de peças já previamente definida como 15 e o conjunto S definido como $S = \{1, 2, 3\}$, ou seja, o jogador poderia retirar 1, 2 ou 3 peças por vez, sendo que para retirar as peças os jogadores precisavam clicar sobre as mesmas. A segunda versão (Figura 10), seguindo algumas sugestões após testagens foi programada para um jogador, com a máquina sendo o oponente. Nesta segunda versão as quantidades se mantiveram e o jogador passou a digitar a quantidade de peças a ser retirada, porém como a máquina aplicava a estratégia vencedora do jogo o jogador sempre perdia, o que segundo os apontamentos feitos por outros estudantes e relatados pelo próprio autor, pode ser considerado frustrante. Entretanto, como o autor já tinha cumprido o objetivo da atividade proposta, ele deixou em aberto essa consideração para versões futuras.

Ao comparar a versão analógica com a versão digital do Jogo de NIM, [8] elenca os diferenciais da utilização do jogo digital:

- mais possibilidades de jogadas;
- trocas acessíveis de trios numéricos;
- registro das jogadas para posterior análise;
- utilização de quantidades maiores de peças nas partidas;

Figura 10 – Versão digital do NIM desenvolvida pelo autor [8].
Fonte: *Scratch*(2023).

- possibilidade de jogar sozinho, tendo a máquina como oponente. nas partidas;

É importante o aprimoramento das ideias discutidas por [8] com a programação do Jogo da Subtração na versão digital que possa ser utilizada no Ensino Básico e que seja estimulante para os estudantes, pois à medida que o estudante se sente desafiado para vencer uma partida de NIM, uma provável atitude que ele terá é buscar alguma solução de como vencer, buscando por padrões, mapeando jogadas, formulando conjecturas, dentre outras técnicas, e esses processos, na visão acadêmica, é fazer ciência [24].

4 *Metodologia*

Essa pesquisa utiliza o método observacional comparativo, de acordo com [25], uma vez que analisa as observações realizadas em diferentes situações de jogo com diferentes indivíduos. Quanto aos seus objetivos essa pesquisa é exploratória, segundo a definição apresentada por [26], pois buscou levantar informações da potencialidade da aplicação do Jogo de NIM no ensino de divisibilidade e do algoritmo da divisão, além de descrever as principais dificuldades e desafios encontrados pelos estudantes, a partir de testagens realizadas na Universidade.

Em relação a análise de dados, essa pesquisa se classifica como qualitativa, de acordo com [25], já que não seguiu fórmulas ou receitas predefinidas para orientar a pesquisa. Ainda segundo [25], nesta pesquisa a análise de dados foi realizada em três etapas: redução, em que foram organizadas as informações das testagens da versão digital do Jogo de NIM realizadas, apresentação, na qual esses dados foram apresentados a partir do relato de experiência de cada testagem e foi realizada a análise para verificar as semelhanças e diferenças das dificuldades apresentadas pelos estudantes e, por fim, conclusão, em que foi realizada uma revisão dos dados obtidos a partir das três testagens realizadas.

Para o desenvolvimento da versão digital do Jogo de NIM, sendo o Jogo da Subtração a variante escolhida, foram elaborados algoritmos para a aplicação da estratégia vencedora na programação do jogo. Para essa programação foram elaborados um algoritmo para a versão para dois jogadores e um para a de um jogador, em que a máquina seria o oponente.

A linguagem de programação *Scratch* foi a linguagem selecionada para a programação da versão digital do Jogo de NIM, desenvolvido durante essa pesquisa. A linguagem *Scratch* é uma linguagem de programação considerada simples e de cunho educacional, sua criação foi inspirada na linguagem Logo (desenvolvida por Seymour Papert) [23]. O *Scratch* foi desenvolvido pela equipe do Lifelong Kindergarten, coordenada por Mitchel Resnick, da universidade americana MIT - Massachusetts Institute of Technology, em 2007. Esse programa possui código aberto, gratuito e de fácil instalação. Por essa linguagem ser intuitiva e permitir fácil programação através de seus blocos de encaixe, dispensa qualquer conhecimento prévio de linguagem de programação, tornando-se assim uma linguagem de programação potencialmente útil para ser utilizada com crianças. O *Scratch* possui diversos recursos para criação de jogos, animações entres outros.

Durante a realização deste trabalho três testagens foram realizadas para verificar o funcionamento e a receptividade da versão digital do Jogo de NIM. Participaram das testagens aproximadamente 120 estudantes divididos em três grupos, sendo o primeiro composto pelos participantes do subprojeto Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), o segundo composto pelos estudantes de uma escola pública de Educação Básica de Alfenas, que participaram de uma oficina na universidade, e o terceiro compostos pelos discentes da disciplina de Teoria dos Números.

A primeira testagem foi realizada com os integrantes do PIBID, a convite da coordenação. A finalidade dessa testagem no subprojeto foi uma possível aplicação do jogo em intervenções nas escolas parceiras e em eventos que foram realizados na universidade, recebendo os estudantes de escolas da cidade de Alfenas-MG. A segunda foi realizada com os estudantes da Educação Básica de uma escola pública da cidade. Essa testagem foi ministrada por dois discentes do curso de Matemática-Licenciatura, participantes do PIBID, durante uma oficina composta por diferentes jogos matemáticos. A terceira, e última testagem, foi realizada com discentes do curso de Matemática-Licenciatura que estavam cursando a disciplina de Teoria dos Números, a convite do professor. O objetivo dessa testagem foi relacionar os conceitos de divisibilidade e algoritmo da divisão, estudados na disciplina, ao desenvolvimento da estratégia vencedora, através da utilização da versão digital do jogo.

No processo de desenvolvimento desse trabalho também foi elaborada uma proposta de intervenção para o 7º ano do Ensino Fundamental, utilizando a versão digital do Jogo de NIM. Para elaboração dessa proposta foi utilizada como metodologia a resolução de problemas, de acordo com método proposto por [17], e também foram levados em consideração alguns pontos das análises realizadas a partir dos resultados obtidos nas testagens, como as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes, com o objetivo de elaborar melhor a proposta e, consequentemente, oferecer um melhor auxílio aos professores que utilizarão a versão digital do Jogo de NIM como um recurso didático.

5 *Resultados e Discussões*

Este capítulo tem como objetivo descrever o processo de desenvolvimento da versão digital do Jogo de NIM, apresentar seu funcionamento e analisar os resultados obtidos na testagem realizada com essa versão digital do jogo. Primeiramente será apresentado como foi realizado o processo de programação do jogo, ressaltando algumas versões anteriores obtidas e os principais testes realizados. Posteriormente, será apresentado o funcionamento do jogo, elencando suas etapas de execução. Por fim, será realizada uma análise das três testagens da versão digital do Jogo de NIM, realizadas em contextos diferentes.

5.1 *Programação*

A variante do Jogo de NIM escolhida para ser programada neste trabalho foi o Jogo da Subtração. Essa variante foi escolhida por se tratar de uma versão mais simples do jogo que pode ser aplicada com estudantes do Ensino Básico, já que o desenvolvimento de sua estratégia vencedora envolve os conceitos de divisibilidade e algoritmo da divisão.

A linguagem de programação escolhida para ser utilizada na programação do Jogo da Subtração foi o *Scratch* (Figura 11[1]), pois trata-se de uma linguagem de programação simples e com uma interface bastante interativa, que possui muitos recursos disponíveis para a programação de jogos, contribuindo assim para obtenção possíveis resultados satisfatórios.

Os objetos escolhidos para a representação do jogo foram palitos, pois é um objeto pequeno e representativo, que não carrega a tela de visualização do jogador. A quantidade máxima de palitos escolhida para a programação foi 40, por ser uma quantidade significativa de objetos, contribuindo para o desenvolvimento do jogador ao aplicar a estratégia vencedora. Além disso, ao serem realizados testes iniciais, verificou-se que deveria ser definido um limite para a quantidade total de palitos, para não carregar a tela de visualização do jogo e também não ultrapassar o limite da tela. Na programação, foi escolhido um avatar para que a execução do jogo ocorresse de forma mais interativa com o usuário, cuja imagem escolhida foi de uma menina negra.

Na programação, da versão para um jogador, apesar do oponente do usuário ser a própria máquina o jogador é quem sempre inicia a partida, essa condição foi implementada com objetivo de que o jogador seja capaz de aplicar a estratégia vencedora do jogo, caso seja possível, dando a oportunidade para que o jogador também seja capaz de vencer a

[1] Para melhor visualização da programação do jogo acesse: `https://scratch.mit.edu/projects/876459989/`

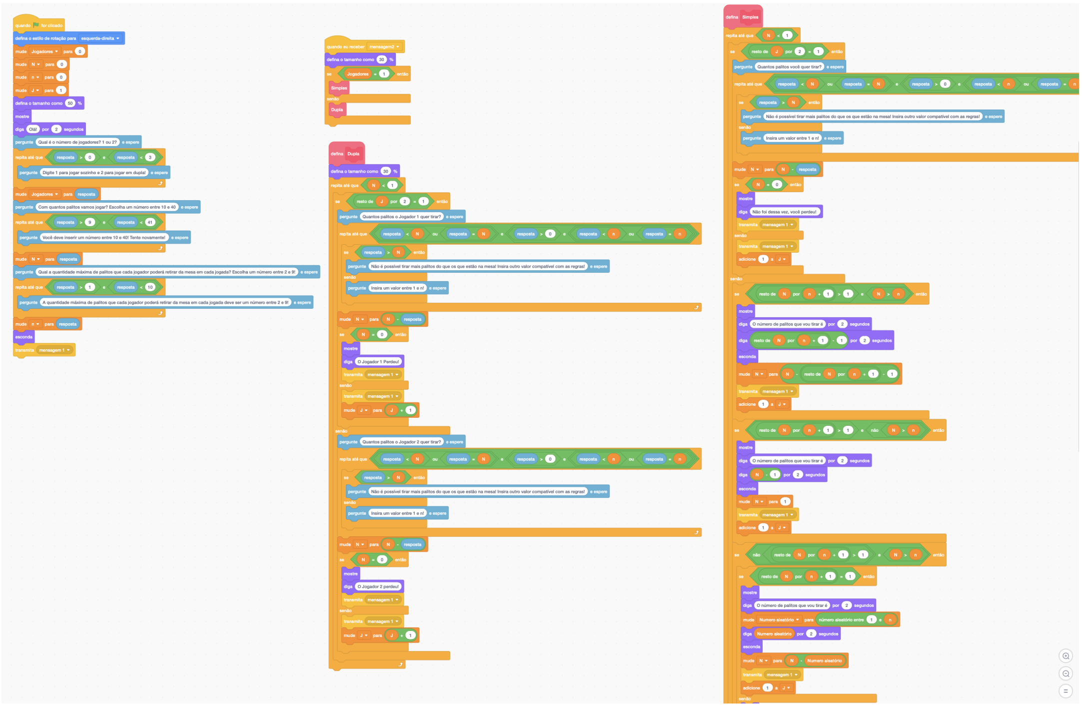

Figura 11 – Programação do Jogo da Subtração no *Scratch* desenvolvida pela autora.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

partida. Esse ponto da programação se difere da programação da segunda versão do jogo elaborado por [8], apresentado anteriormente, pois nela a máquina é quem sempre vencia o jogo, contribuindo assim, para a desmotivação e até frustação do usuário, conforme foi relatado pelo próprio autor.

Durante o processo de programação do Jogo de NIM foram obtidas algumas versões iniciais, onde foram encontrados alguns problemas, até se obter a versão final. Dentre os principais problemas encontrados durante a programação destaca-se: a disposição dos palitos na tela e sorteio de números aleatórios.

Nas versões iniciais, quando a quantidade máxima de palitos era maior que 22, os objetos ultrapassavam a tela de visualização do usuário, conforme ilustrada a Figura 12.

Figura 12 – Problema de disposição de palitos na tela.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Um outro problema encontrado foi no sorteio dos números aleatórios, na versão para um jogador, pois nas versões iniciais, quando a máquina não conseguia aplicar a estratégia vencedora e tinha que sortear um número aleatório para suas jogadas, acabava sorteando quantidades negativas ou maiores que as quantidades dispostas na mesa, como ilustrado na Figura 13.

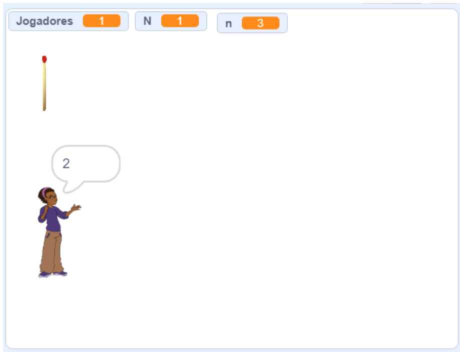

Figura 13 – Problema de sorteio de número aleatório.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Para solucionar o problema da disposição de palitos na tela, foram analisados alguns pontos na programação relacionados as posições dos objetos, denominados de atores no *Scratch*. Na versão para um jogador serão utilizadas duas condições para a máquina realizar sua jogada:

- se a quantidade de palitos na mesa, mesmo após a jogada realizada pelo jogador, for favorável a aplicação da estratégia vencedora, então a estratégia será aplicada, de forma que independente da jogada realizada pelo jogador a máquina vencerá essa rodada.
- já se o jogador aplicar corretamente a estratégia e a máquina não ter mais chances de transformar a combinação da mesa em uma combinação segura, a máquina sorteará um número aleatório para ser retirado, entre um e a quantidade máxima a ser retirada (n) e menor que a quantidade total de palitos que estiver na mesa (N), solucionando assim o segundo problema apresentado, conforme ilustrado na Figura 14.

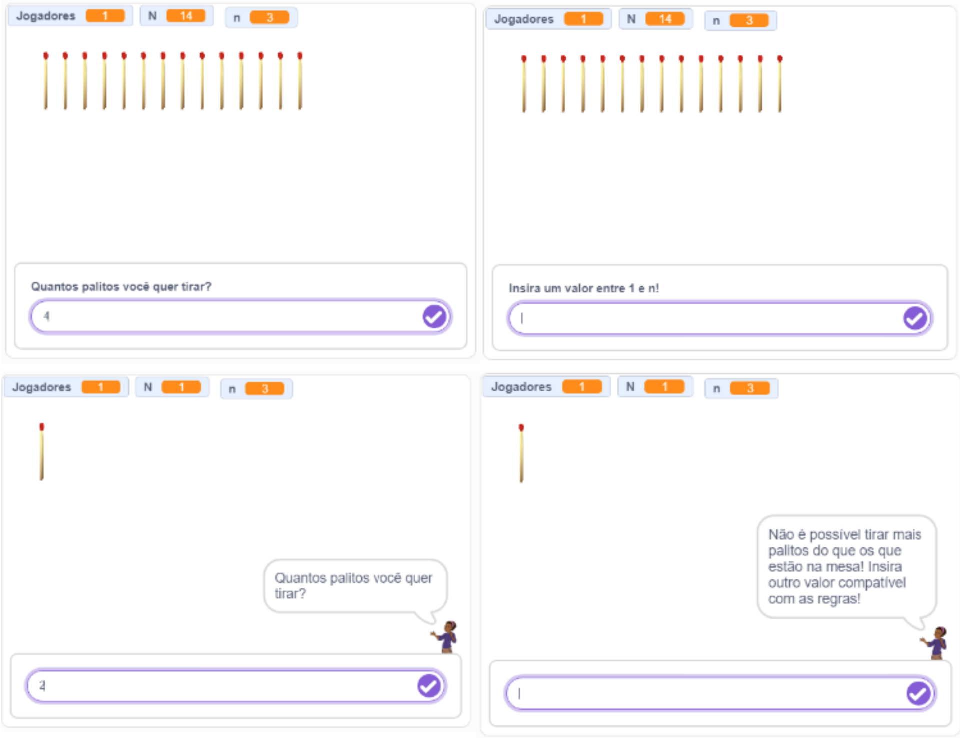

Figura 14 – Simulação de testes realizados para a quantidade a ser retirada.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Nessa opção será realizado o teste da quantidade digitada pelo jogador para verificar se está entre 1 e a quantidade máxima estabelecida (n) e se não ultrapassa a quantidade de palitos disponíveis no momento da jogada. A Figura 15 apresenta um fluxograma do funcionamento do programa.

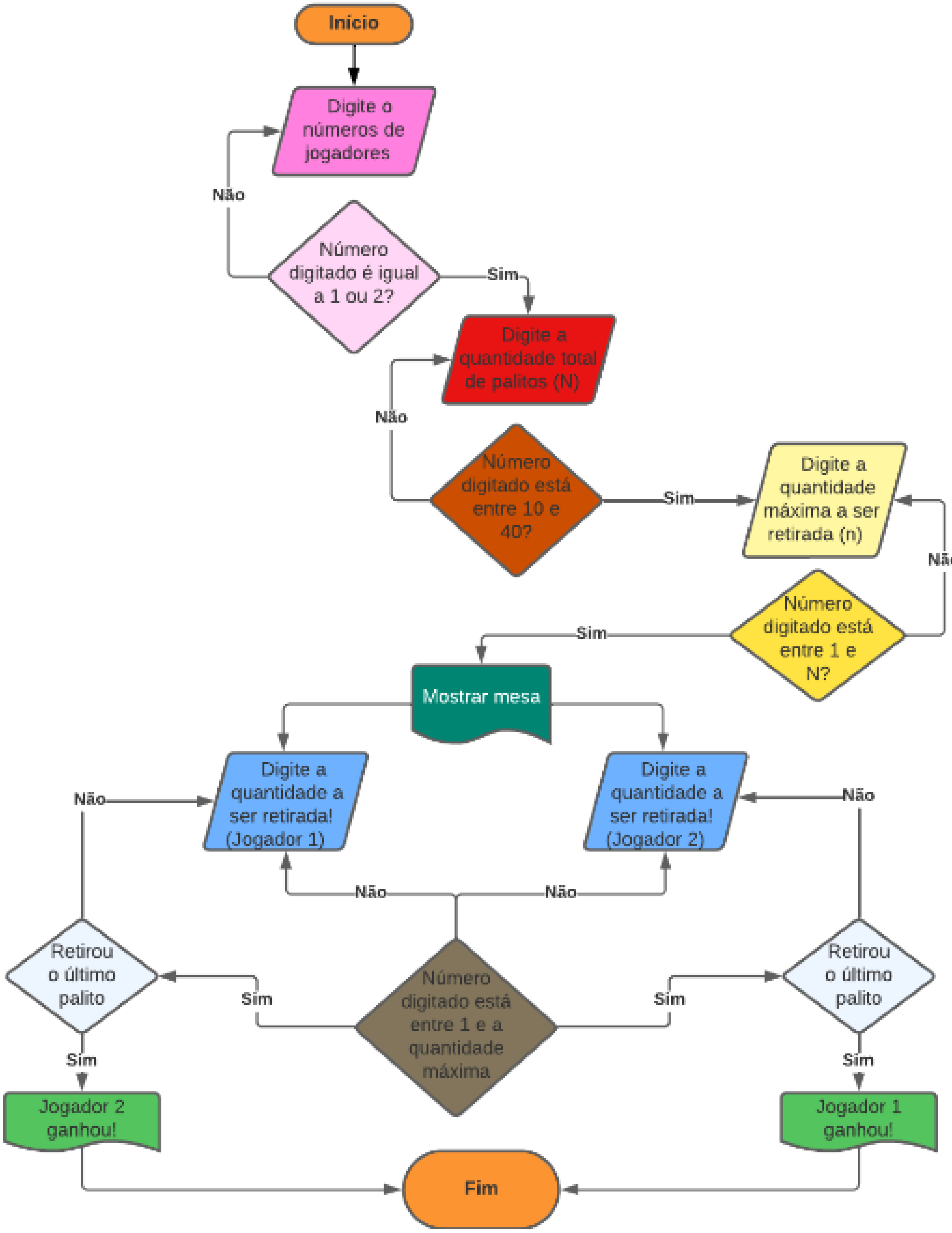

Figura 15 – Fluxograma do funcionamento do programa.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

A versão digital da variante do Jogo de NIM desenvolvida neste trabalho, denominada Jogo da Subtração, está disponível na plataforma *Scratch* (Figura 16), basta realizar a busca por "O Jogo de NIM".

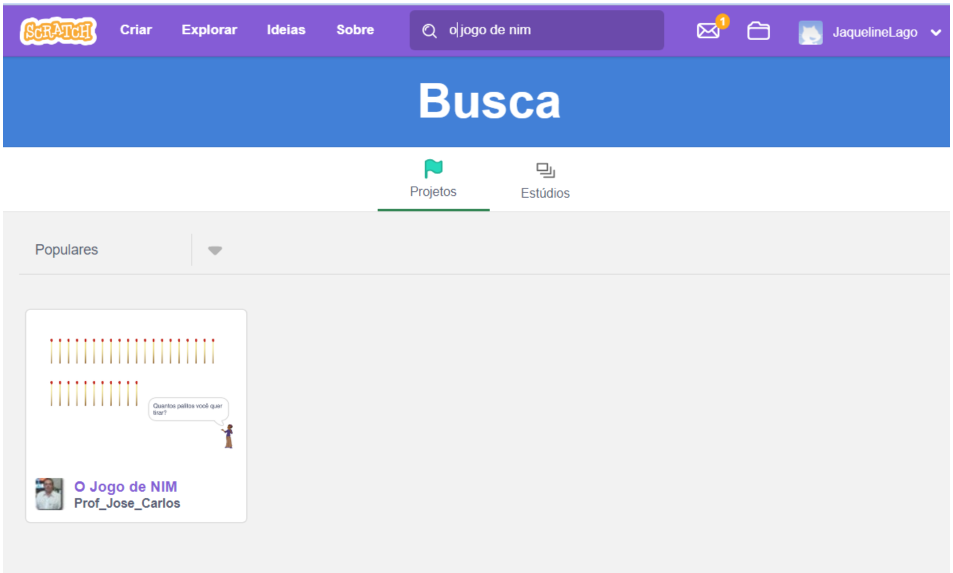

Figura 16 – Acesso a versão digital do Jogo de NIM desenvolvido neste trabalho.
Fonte: *Scratch* (2023)
Disponível em: `https://scratch.mit.edu/projects/876459989/`.

5.2 *Funcionamento do Programa*

Na tela de início da versão digital, há informações sobre as regras e desenvolvimento do jogo, ilustrado na Figura 17.

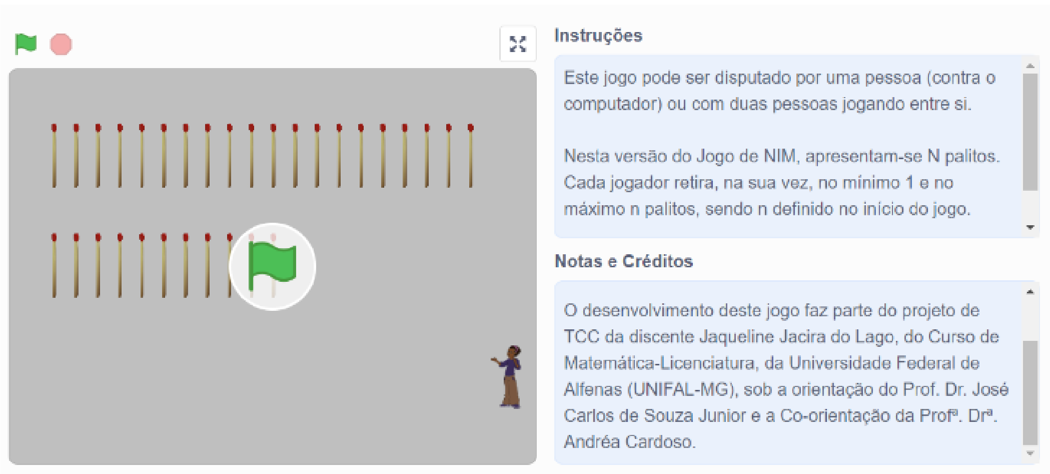

Figura 17 – Instruções do funcionamento da versão digital do Jogo de NIM.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Na sequência, o usuário deve escolher se será um ou dois jogadores, a quantidade de palitos que serão utilizados, sendo a quantidade mínima já atribuída previamente como um, e a quantidade máxima de palitos a serem retirados por vez (n), a Figura 18 retrata o início do jogo. Na programação foram elaborados testes para verificar se a quantidade digitada pelo usuário é válida, por exemplo, se o jogador digitar um número diferente de 1 ou 2, quando for informar a quantidade de jogadores, será mostrada uma mensagem para ele digitar 1, se quiser jogar contra máquina, ou 2 se quiser jogar com dois jogadores, não aceitando nenhum valor diferente desses. Outros testes que foram realizados na execução do programa é para a quantidade total de palitos (N), que irá verificar se a quantidade digitada pelo usuário está entre 10 e 40, e para a quantidade máxima de palitos a serem retirados por vez (n), que testará se a quantidade digitada é maior que um.

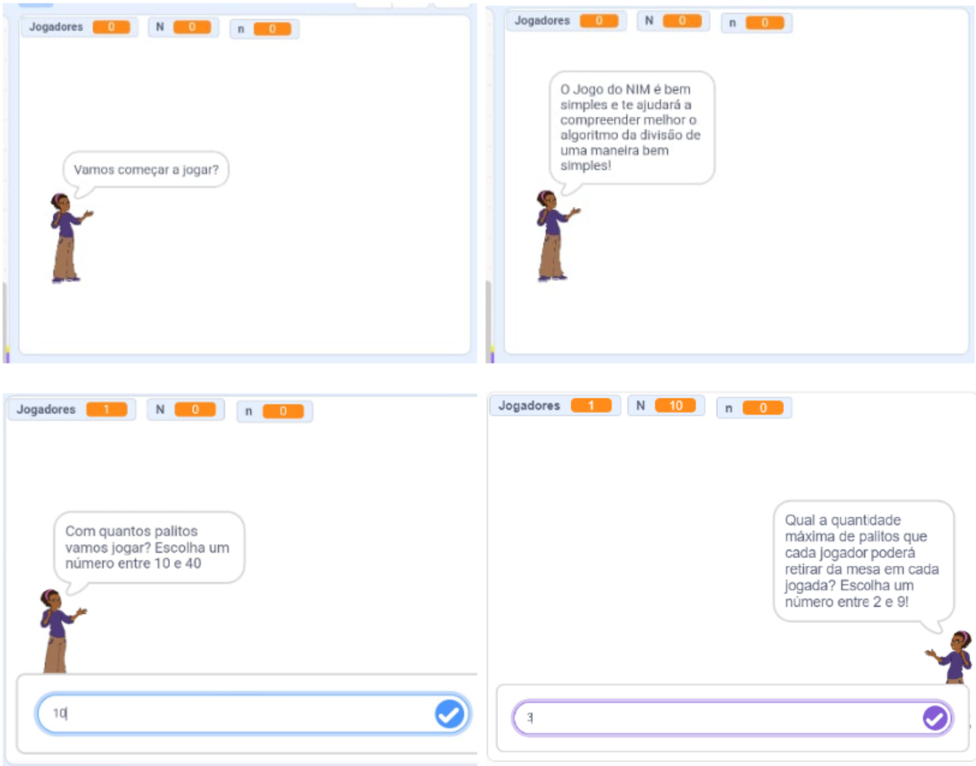

Figura 18 – Apresentação do Jogo de NIM na versão digital.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

No próximo passo da execução do jogo, se a opção escolhida for para dois jogadores, ele perguntará de forma alternada as quantidades que cada jogador deseja retirar em sua vez, de forma que perca o jogador que retirar o(s) último(s) palito(s). Nessa fase de execução também serão realizados alguns testes para verificar se a quantidade digitada pelos jogadores está entre 1 e a quantidade máxima estabelecida (n) e se não ultrapassa a quantidade de palitos disponíveis no momento da jogada.

Se a opção escolhida pelo jogador for para um jogador, o seu oponente será a própria máquina, mas o jogador é quem sempre realizará a primeira jogada.

5.3 *Testagens*

Na primeira testagem, realizada com os integrantes do subprojeto Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), a análise das jogadas foi realizada em dois momentos: no primeiro os pibidianos jogaram algumas partidas sem saber a estratégia vencedora do jogo, apenas para ambientalização, já no segundo momento eles jogaram tendo a informação da utilização do algoritmo da divisão para elaboração da estratégia vencedora.

Na primeira partida percebeu-se que apesar de os jogadores não saberem da estratégia vencedora, o jogador 1 conseguiu utilizar uma estratégia própria e elaborar suas jogadas para vencer o jogo. Para testar se o jogador 1 realmente tinha entendido o funcionamento, foi realizada uma outra partida, porém com o jogador 2 começando. Apesar do jogador 1 não começar jogando, ele conseguiu vencer novamente e, posteriormente, jogando com outro adversário venceu novamente. Quando o jogador 1 foi questionado sobre como ele conseguia ganhar o jogo ele respondeu que apesar de não saber uma estratégia vencedora quando inicia o jogo, já que possui mais palitos expostos, no decorrer da partida, quando os palitos começam a diminuir, ele consegue elaborar suas jogadas de forma a sobrar 1 palito para seu adversário.

Dando continuidade a testagem, nesse primeiro momento, mais duas duplas se candidataram para jogar e um estudante se candidatou para jogar contra a máquina. O estudante que se candidatou para jogar contra a máquina não soube aplicar a estratégia na primeira jogada e, como a máquina foi programada para aproveitar a oportunidade, ele perdeu o jogo. Apesar de alguns desses estudantes participantes já terem acompanhado a realização do jogo antes, em uma outra reunião do PIBID, eles não conseguiram aplicar a estratégia para vencer a partida.

Após essas rodadas iniciais, realizadas para os estudantes conhecerem e se adaptarem, em um segundo momento, o professor coordenador explicou a estratégia vencedora. Posteriormente, um estudante se ofereceu para jogar contra a máquina, agora sabendo da estratégia vencedora. Nessa rodada, o estudante atribuiu 39 como a quantidade total de palitos e 8 como a quantidade máxima a ser retirada, na primeira jogada ele retirou 2 palitos e transformou a mesa em uma combinação segura, conforme ilustrado na Figura 19.

Nas jogadas seguintes, o jogador aplicou corretamente a estratégia em todas as suas jogadas, retirando o complementar de $n+1$, em relação a quantidade x de palitos retirada pela máquina, vencendo assim a partida, conforme ilustrado na Figura 20.

Posteriormente, outra aluna também se candidatou para jogar contra a máquina, após a explicação da estratégia vencedora, porém ela errou na escolha das quantidades, pois escolheu uma quantidade total divisível por $(n+1)$, não conseguiu deixar uma combinação

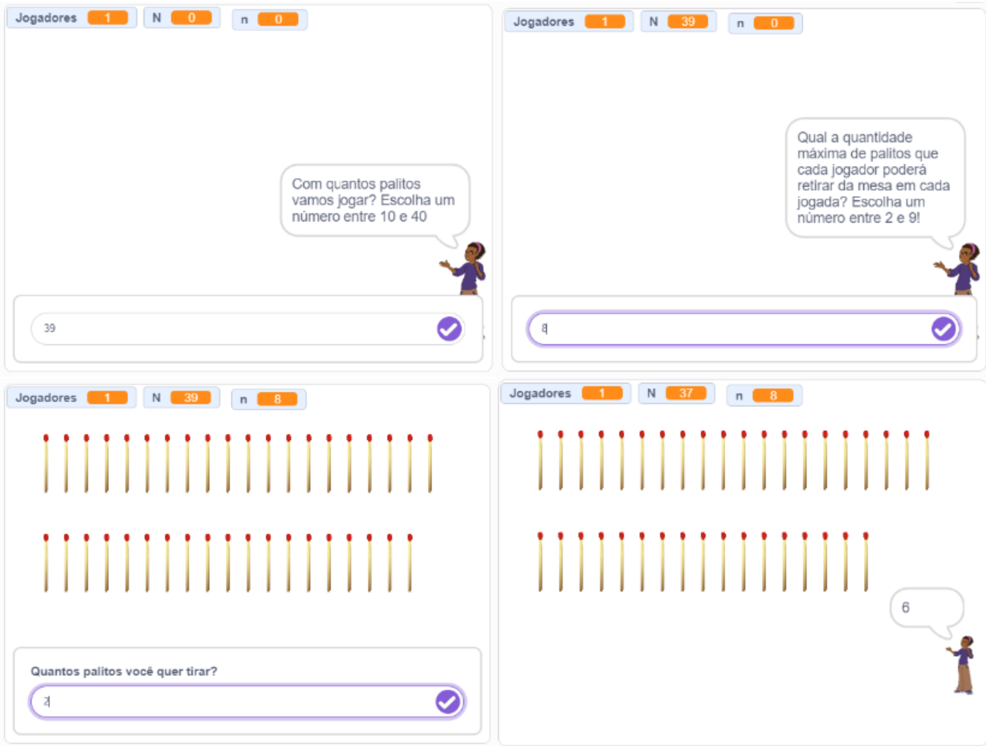

Figura 19 – Simulação da escolha do número de palitos jogadas iniciais na versão digital do Jogo de NIM.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

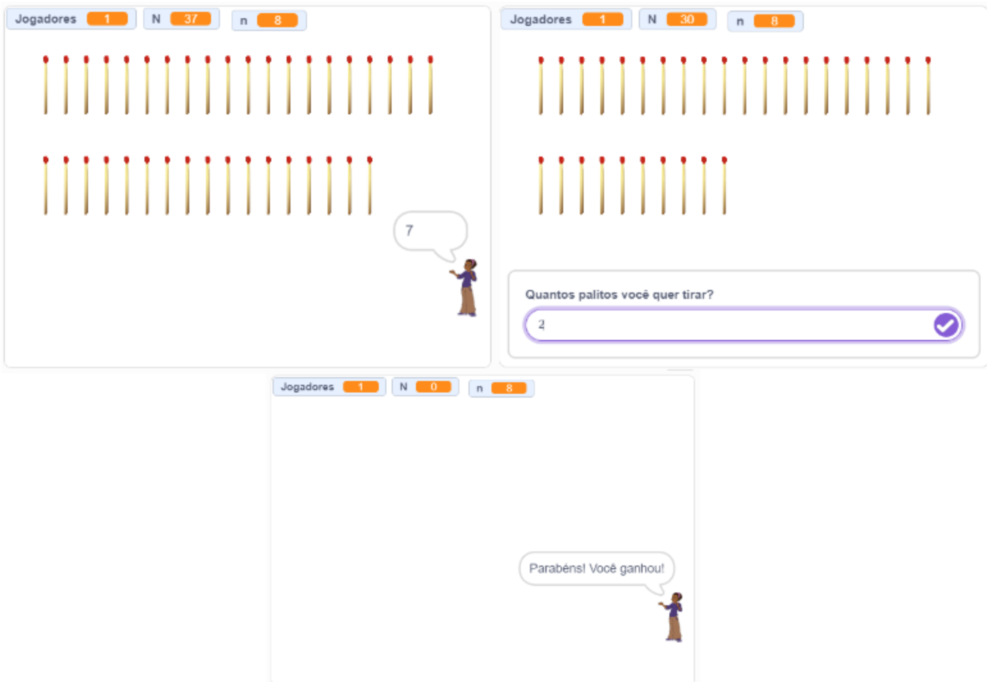

Figura 20 – Simulação de jogadas na versão digital do Jogo de NIM.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

segura e a máquina conseguiu aplicar a estratégia na segunda jogada, consequentemente, a aluna acabou perdendo o jogo, conforme ilustrado na Figura 21.

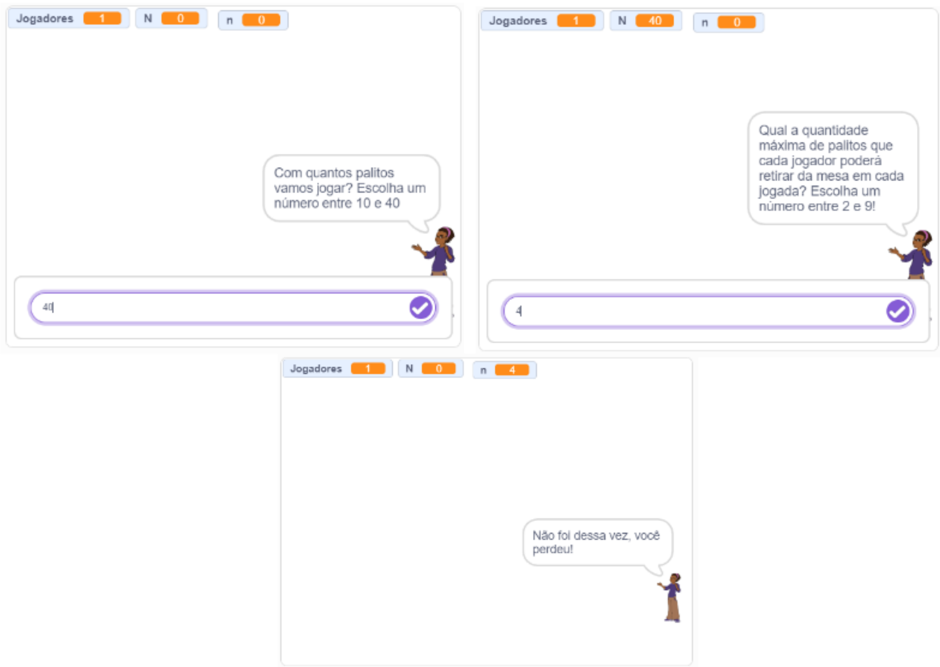

Figura 21 – Simulação da escolha de quantidades iniciais na versão digital do Jogo de NIM.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Dando continuidade, um outro estudante também perdeu para a máquina, porém o seu erro cometido foi não somar 1 a quantidade máxima ao fazer o quociente entre a quantidade total de palitos e a quantidade máxima a ser retirada, pois para aplicar a estratégia corretamente é necessário dividir o número total de palitos em q grupos de $n+1$ palitos, de forma que na primeira jogada o jogador retire o resto menos um palito, com o objetivo de deixar um palito para o adversário.

Para finalizar esse momento de testagem, dois estudantes se candidataram para se enfrentarem na última partida proposta pelo professor coordenador. Os valores escolhidos pelos jogadores foram 36 para a quantidade total de palitos e 6 para a quantidade máxima a ser retirada por vez. Na primeira jogada o jogador 1 não conseguiu aplicar a estratégia vencedora, pois o resto da divisão de 36 por 7 é 1. Porém, o jogador 2 também não conseguiu a aplicar a estratégia e então retirou 1 palito, na segunda rodada o jogador 1 retirou 4 palitos, não aplicando a estratégia, e o jogador 2 retirou 2, aplicando a estratégia e obtendo uma combinação segura, porém o jogador 2 acabou errando em uma das próximas rodadas, pois não retirou o complementar de $n+1$, e, consequentemente, o jogador 1 aproveitou a chance e venceu o jogo.

A partir da testagem realizada verificou-se que, de forma geral, os estudantes participantes do subprojeto receberam bem o jogo e se mostraram interessados e empenhados durante as partidas realizadas. Apesar de alguns não conseguirem vencer o jogo, mesmo após a explicação da estratégia, devido a dificuldade na escolha das quantidades iniciais e na aplicação do algoritmo da divisão, percebeu-se que eles conseguiram compreender melhor a estratégia a partir do erro cometido. Por fim, uma outra percepção que pode ser obtida dessa testagem, é que os estudantes, até mesmo antes de conhecerem a estratégia vencedora, conseguem aplicar estratégias próprias que se mostraram funcionais, já que conseguiam vencer o jogo, porém só conseguiam aplicá-las quando restava uma quantidade menor de palitos no jogo.

A segunda testagem da versão digital do Jogo de NIM, foi realizada com os estudantes da Educação Básica que compareceram a uma oficina, ministrada pelos discentes do curso de Matemática-Licenciatura.

A primeira turma recebida pelos discentes da graduação durante a oficina foi uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental, com cerca de 27 estudantes. Algumas impressões apresentadas pelos discentes sobre essa turma é que os estudantes receberam bem o jogo, se mostraram interessados durante as partidas e conseguiram alcançar o objetivo proposto. Em relação a escolha da quantidade total de palitos e da quantidade total a ser retirada por vez, notou-se que os estudantes escolhiam como quantidade máxima números múltiplos de 10, como 20, 30 e 40, sendo 30 o número mais escolhido, por acreditarem que essa escolha facilitaria os cálculos durante as partidas, já que ainda não conheciam a estratégia vencedora do jogo, e como quantidade máxima a ser retirada por vez a maioria dos estudantes escolheram 9, já que por ser um número maior as partidas não ficariam tão demoradas. Além dessas observações, os estudantes pibidianos destacaram que um estudante dessa turma, que apresenta maior dificuldade na disciplina de Matemática, conseguiu participar e jogou de forma correta, se mostrando bastante interessado durante as partidas.

A segunda turma recebida pelos discentes da graduação foi uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental, com aproximadamente 20 estudantes. Em relação a essa turma, os discentes destacaram que a quantidade máxima de palitos mais escolhida pelos estudantes durante a aplicação foi 40, pois por ser a quantidade máxima permitida, os estudantes se sentiam mais desafiados. Já as quantidades máximas a serem retiradas por vez, mais escolhidas entre os estudantes dessa turma foram: 2, para os estudantes que queriam um maior desafio, e 9, para os estudantes que queriam que as partidas acabassem mais rápido. Em referência a participação dos estudantes dessa turma, os pibidianos destacaram que poucos se mostram realmente interessados durante as partidas, porém esses conseguiram alcançar o objetivo do jogo e se mostraram bastante interessados durante a explicação da estratégia vencedora.

A terceira turma que participou da aplicação, foi uma turma também do sexto ano do Ensino Fundamental, com 31 estudantes. Durante a aplicação do jogo, os discentes da graduação observaram que a quantidade máxima de palitos mais escolhida pelos estudantes foi 40 e a quantidade máxima a ser retirada por vez mais escolhida foi 9. Em relação a participação dos estudantes dessa turma, a maioria se mostrou bastante interessada durante as partidas e conseguiram aplicar a estratégia vencedora, alcançando assim o objetivo do jogo.

A última turma participante da aplicação, foi um sétimo ano do Ensino Fundamental, com 27 estudantes. A quantidade máxima de palitos mais escolhida pelos estudantes foram múltiplos de 10, como 20, 30 e 40, por também acreditarem que esse números facilitariam os cálculos durante as partidas e 7 como a quantidade máxima a ser retirada por vez. Em relação ao interesse dos estudantes no jogo, os pibidianos destacaram que essa turma não se mostrou muito interessada durante as partidas. Ainda segundo os estudantes ministrantes da aplicação, um fator que pode ter contribuído para esse desinteresse dos estudantes foi ter acabado a energia elétrica durante a aplicação, já que não conseguiram mais utilizar os computadores e os pibidianos tiveram que apresentar o jogo no quadro.

Ao fim dessa aplicação realizada pelos graduandos participantes do PIBID, pode-se perceber que, de forma geral, os estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental se mostraram mais interessados durante as partidas do jogo, em comparação aos estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental. Um outro ponto a ser destacado nessa testagem é que os estudantes demonstram mais interesse quando o jogo é realizado no computador, destacando assim a importância da versão digital do jogo. Por fim, pode-se destacar que um fator que também pode ter contribuído para desinteresse de alguns estudantes durante a aplicação foi a presença de outros jogos, também relacionados à Matemática, na sala onde foi realizada a oficina, já que a presença desses outros jogos pode ter dividido a atenção dos estudantes.

A última testagem, realizada com os discentes do curso de Matemática-Licenciatura, na disciplina de Teoria dos Número, foi dividida em três momentos: no primeiro, eles jogaram algumas partidas do jogo, na versão digital para entenderem o seu funcionamento e construírem algumas ideias prévias de como ganhar a partida; em um segundo momento, foi construída a regra Matemática que define a estratégia vencedora do jogo. Nesse momento os estudantes apresentaram suas ideias que foram lapidadas para se chegar a construção final da estratégia, e, posteriormente, realizaram mais algumas partidas para testar se haviam compreendido corretamente a mesma; e por fim, em um terceiro momento, os estudantes relataram suas impressões sobre a elaboração da estratégia vencedora e apresentaram suas principais dificuldades durante a sua aplicação.

Nas primeiras partidas de ambientalização, os discentes se revezaram para jogar em duplas de forma similar a um campeonato. Assim, quem perdesse, passava sua vez para o próximo e quem ganhava continuava no jogo. A primeira dupla escolheu 24 como a quantidade total de palitos e 5 como a quantidade máxima a ser retirada por vez, como mostra a simulação da Figura 22.

Nessa primeira partida, o jogador 2, que não começou, foi quem venceu, já que quando restaram menos palitos, o jogador conseguiu planejar suas jogadas e deixar um palito para seu adversário, como mostra a Figura 23.

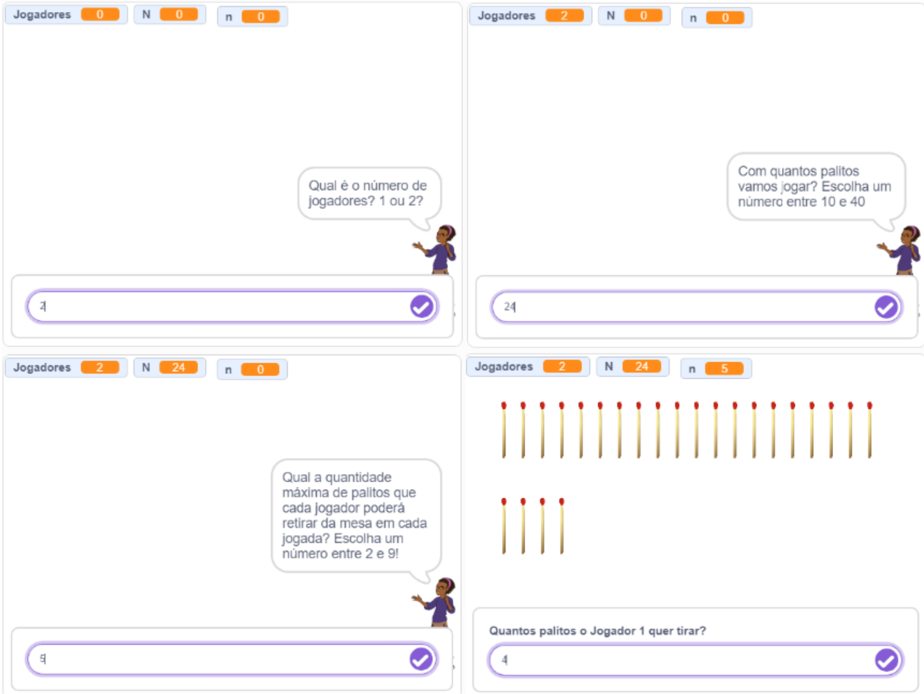

Figura 22 – Simulação da escolha de quantidades e primeira jogada na versão digital do Jogo de NIM. Fonte: elaborada pela autora (2023).

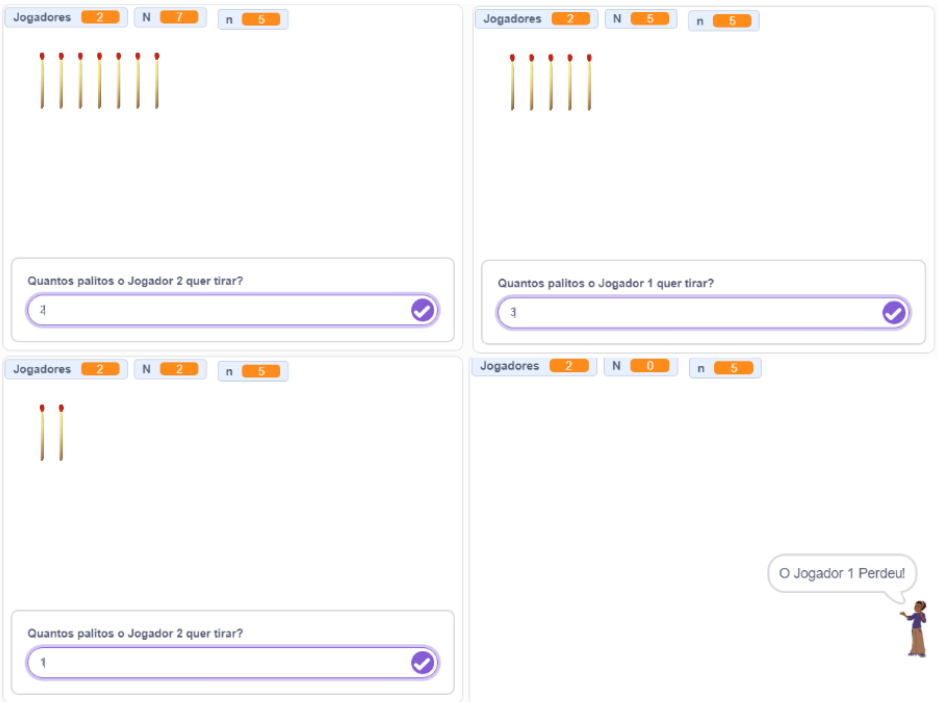

Figura 23 – Simulação de jogadas finais na versão digital do Jogo de NIM. Fonte: elaborada pela autora (2023).

Nas jogadas subsequentes, um discente conseguiu permanecer no jogo durante três jogadas consecutivas, já que quando restava uma quantidade menor de palitos, ele também conseguia planejar suas jogadas e vencer o jogo.

Após essas partidas iniciais, no segundo momento da testagem, foi desenvolvida a estratégia vencedora com os estudantes. Nessa etapa, eles colaboraram bastante e apresentaram suas hipóteses para a elaboração da estratégia, como a de dividir a quantidade total de palitos em grupos iguais. Porém, quando questionados em como organizar os palitos de forma a deixar sempre um palito para seu adversário, eles não conseguiram responder de imediato. Para tentar estimular o raciocínio dos estudantes, foi apresentado um exemplo de simulação de jogo, utilizando a lousa. Nesse exemplo, a quantidade total de palitos era 10 e a quantidade máxima a ser retirada por vez era 3, após a apresentação dessas quantidades iniciais os discentes foram questionados de como poderia ser dividida essa quantidade total com objetivo de deixar sempre um palito para seu adversário e, depois de algumas discussões, definiram que a quantidade total deveria ser dividida em q grupos de $n + 1$ palitos, visualizando assim a importância do resto e conseguindo planejar quais deveriam ser as jogadas subsequentes para aplicar a estratégia vencedora do jogo. Além da construção da estratégia, os discentes conseguiram perceber algumas condições para aplicá-la, como $n + 1$ não poder dividir N e nem $N - 1$.

Após essa formulação da estratégia vencedora, os discentes jogaram mais duas partidas. Na primeira, um discente jogou contra a máquina, escolhendo 31 como a quantidade total, 3 como a quantidade máxima a ser retirada por vez e conseguiu vencer a partida, apesar de em sua primeira jogada quase esquecer de somar um a n. Ao realizar a divisão, ele foi alertado pelos seus colegas e conseguiu aplicar corretamente a estratégia. Na terceira partida, dois outros discentes se enfrentaram, apesar de o jogador 1 não conseguir aplicar a estratégia vencedora em sua primeira jogada, devido as quantidades iniciais escolhidas, ele conseguiu aplicar em sua segunda jogada e vencer o jogo, como ilustrado na Figura 24.

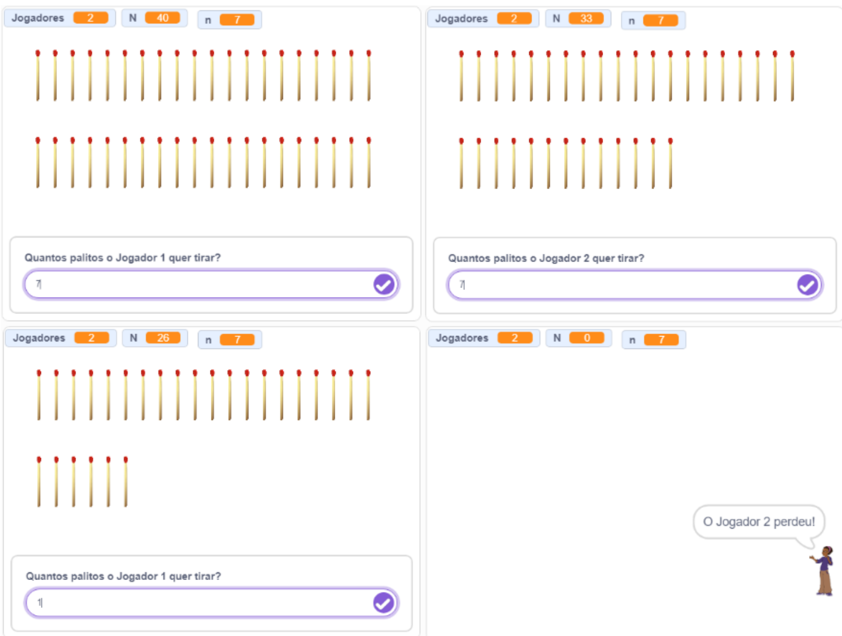

Figura 24 – Simulação da aplicação da estratégia na versão digital do Jogo de NIM.
Fonte: elaborada pela autora (2023).

No terceiro momento, foram feitos os seguintes questionamentos aos discentes: "Como você relaciona os conceitos de divisibilidade e algoritmo da divisão, estudados na disciplina, ao desenvolvimento da estratégia vencedora do jogo? Você conseguiu compreender a estratégia?"e "Quais as principais dificuldades que você encontrou durante a realização do jogo?".

De forma geral, os estudantes conseguiram entender como aplicar a estratégia vencedora e relacioná-la ao algoritmo da divisão, entendendo a importância do resto nessa operação, e também as regras de divisibilidade ao dividir N por $n+1$ e testar se N e $N-1$ não é divisível por $n+1$.

A principal dificuldade relatada pelos estudantes foi a escolha inicial da quantidade total de palitos e da quantidade máxima a ser retirada, de forma que seja possível a aplicação da estratégia, já que fazer essas contas rapidamente no início do jogo requer um pouco de habilidade.

A partir das três testagens realizadas, foi possível fazer um levantamento das possíveis dificuldades que poderão surgir durante a aplicação do jogo, contribuindo assim para a formulação de algumas estratégias a serem utilizadas para tentar diminuí-las ou lidar com elas, como a consolidação do conceito de algoritmo da divisão durante a sistematização da estratégia vencedora, para que os estudantes consigam compreender melhor esse conceito que é crucial para o desenvolvimento da estratégia vencedora do jogo. Assim, na elaboração da sequência didática, apresentada como Apêndice, foram considerados esses pontos para tentar construí-la de forma a realmente auxiliar o professor durante a aplicação do jogo.

6 *Considerações finais*

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de identificar como o Jogo de NIM pode ser utilizado na aprendizagem de Matemática. Verificou-se, a partir das testagens realizadas, que a versão digital do Jogo da Subtração, programada utilizando a linguagem *Scratch*, pode auxiliar os professores no ensino dos conceitos de divisibilidade e algoritmo da divisão, já que os estudantes se mostram interessados no jogo digital, e participativos no processo de elaboração da estratégia vencedora. Durante as testagens realizadas, também verificou-se que uma dificuldade comum apresentada pelos estudantes foi na aplicação do algoritmo da divisão, destacando assim a importância da consolidação do conceito na aplicação no jogo.

Com isso, a sequência didática disponibilizada neste trabalho, que utiliza como metodologia a resolução de problemas baseada nos métodos de Polya [17], também pode auxiliar os professores na aplicação da versão digital do Jogo da Subtração, no Ensino Fundamental, já que ela foi elaborada considerando algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes durante as testagens, visando um melhor resultado da aplicação do jogo.

Em relação a metodologia utilizada neste trabalho, acredita-se que ela foi suficiente para o seu desenvolvimento. A linguagem de programação *Scratch* escolhida para a construção de uma versão digital do Jogo de NIM atendeu bem a demanda e gerou um resultado satisfatório com sua versão digital. Em relação aos materiais disponíveis sobre o Jogo de NIM, muitos podem ser encontrados apresentando diferentes variantes e estratégias vencedoras do jogo, utilizando diferentes conceitos matemáticos para sua elaboração. Porém, muitos materiais ainda podem ser construídos e novas estratégias vencedoras também podem ser elaboradas para que possam aumentar suas opções, visando também uma linguagem mais simples e acessível para novos leitores da área.

Com este trabalho obteve-se como resultado uma versão digital do Jogo de NIM para ser utilizado como uma ferramenta de auxílio no ensino de Matemática, em especial para o ensino dos conceitos de divisibilidade e algoritmo da divisão. Também foi elaborada uma sequência didática, com objetivo de auxiliar o professor na aplicação do jogo em suas aulas.

Além disso, também foi obtido como resultado a complementação na formação da discente, em relação ao entendimento de conceitos mais aprofundados em Teoria dos Números, em programação utilizando a linguagem *Scratch* e na elaboração de uma sequência didática, além do contato com a pesquisa e escrita científica, que contribui para uma formação de qualidade.

A partir dos resultados obtidos nesta pesquisa, foram submetidos e aprovados, resumos para apresentação nos eventos: CNMAC 2023 ($XLII$ Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional), VII SEMAT (VII Semana da Matemática - UNIFAL-MG) e IX Simpósio Integrado UNIFAL-MG.

O estudo desenvolvido neste trabalho também visa contribuir positivamente para o ensino de Matemática através da aplicação do Jogo de NIM a fim de auxiliar no ensino dos conceitos de divisibilidade e algoritmo da divisão, motivando os estudantes para ter uma melhor aprendizagem e através da sequência didática motivar e dar mais segurança para os professores utilizarem o jogo como recurso didático em suas aulas.

Como trabalhos futuros, fica a proposta de desenvolver um jogo digital sobre a versão clássica do Jogo de NIM, apresentada por Bouton [9].

Referências

[1] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC, 2018.

[2] OLIVEIRA, A. J. S. *O ensino e a aprendizagem de função exponencial em um ambiente de modelagem Matemática.* 97f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Matemática, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2013.

[3] LAUTERT, S. L. *As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção.* 326f. Dissertação (Doutorado em Psicologia) – Faculdade de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.

[4] BAUMGARTEL, P. O uso de jogos como metodologia de ensino de matemática. In:Encontro Brasileiro de Pós – Graduação em Educação Matemática, 20, 2016. Curitiba. *Anais...* Curitiba: Licenciatura em Matemática-UTFPR, 2016. p.1-8.

[5] BARBOSA, F. E. *et al.* A utilização da gamificação aliada às tecnologias digitais no ensino da Matemática: um panorama de pesquisas brasileiras.*Revista Prática Docente (RPD)*, v. 5, n. 3, p. 1593-1611, set/dez 2020.

[6] CASTRO, A.; PESSOA, G.; ARAÚJO, T. Jogo de NIM não é brincadeira, haja Matemática!. In: Semana da Matemática da UFRPE, 14, 2019. Recife. *Anais...* Recife: Licenciatura em Matemática – UFRDE, 2019.

[7] HEFEZ, A. *Aritmética.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

[8] LIMA, J. V. R. *Prototipação de uma versão digital do Jogo de NIM com base no modelo de processo de software da engenharia Didático-Informática.* 116f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

[9] BOUTON, C. L. NIM, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, v.3, n.1, p.35-39, 1901.

[10] ALMEIDA, B. I.; CARVALHO, R. B. *A Matemática do Jogo de NIM em uma abordagem investigativa.* 79f. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso) - Faculdade de Licenciatura em Matemática,Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense campus Campos Centro, Fluminense, 2016.

[11] CONDON, E. U. Clubs and Allied Activities – The Nimatron. *The American Mathematical Monthly.* v.49, n.5, p. 330–335, doi:10.1080/00029890.1942.

[12] HISTORIC TECH. *Home built eletronic game of NIM C1958*. Disponível em: <https://historictech.com/product/home-built-electronic-game-of-nim-c1958/> Acesso em: 30 out 2023.

[13] COSTA, J. S. L. *NIM: uma introdução a teoria do Jogos Combinatórios*. 68f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal de Feira de Santana, Feira de Santana, 2016.

[14] FREDERICO, A. C. V.; Costa, C. S. O jogo Nim, sua estratégia de vitória e uma nova forma de jogar com foco na educação.*Revista do Professor de Matemática*, v.10, p.619-634, 2022.

[15] SAMPAIO, J. C.; CAETANO, P. A. S. *Introdução à teoria dos números: um curso breve.* São Carlos: EdUFSCar, 2008.

[16] PONTES, E. A. S. Método de Polya para resolução de problemas matemáticos: uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de Matemática na educação básica.*HOLOS*, Rio Grande do Norte, v. 3, p. 1-9, 2019.

[17] POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[18] FLORES, P. Q. *et al.* O método de Polya e a Gamificação como estratégias na resolução de problemas.*Practicun*, v. 5, n.5(2) , p. 47-64, 2020.

[19] PAULA, C. A.; RAMOS, M. A. B.jogo da divisibilidade: uma experiência no ensino da Matemática. In: Escola de Inverno de Educação Matemática, 3, 2012. Santa Maria. *Anais...* Santa Maria: Licenciatura em Matemática – UFSM, 2012. pp.1-8.

[20] FREITAS, I. O.; OLIVEIRA, L. F.; HARTMANN, A. M. Utilização dos campos conceituais de Verganaud como ferramenta de análise: O Jogo de NIM e o desempenho escolar em matemática. *Brazilian Journal of Development*,v.6, n.8, p.61104-61124, 2020.

[21] RAMOS, D. K.; KNAUL, A. P.; ROCHA, A. jogos analógicos e digitais na escola: uma análise comparativa da atenção, interação social e diversão.*Revista Linhas*, v. 5, n.47 , p. 328-354, 2020.

[22] MEIRELES, T. F. Desenvolvimento de um objeto de aprendizagem de Matemática usando o *Scratch*: da elaboração à construção. In: Encontro Brasileiro de Estudantes Pós – Graduação em Educação Matemática, 20, 2016. Curitiba. *Anais...* Curitiba: Licenciatura em Matemática – UTFPR, 2016. pp. 1-10.

[23] SOBREIRA, E. S. R.; TAKINAMI, O. K. T.; SANTOS, V. G. Programando, Criando e Inovando com o *Scratch*: em busca da formação do cidadão do século XXI. In:

Congresso Brasileiro de Informática na Educação e Jornada de Atualização em Informática na Educação, 2, 2013. Campinas. *Anais...* Campinas: Matemática – Universidade Estadual de Campinas, 2013. pp. 126-152.

[24] COSTA, F. A.; ANDRADE, D. M.; LIMA, J. V. R. Jogo de NIM como facilitador no desenvolvimento do pensamento científico. *Resvista do Professor de Matemática*, n.103, p.50-54, 2021.

[25] GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social.* 5. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

[26] CERVO, A. L.; BREVIAN, P. A.; SILVA, R. *Metodologia Científica.* 6a. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

Apêndices

APÊNDICE A – Sequência Didática

Identificação:	Disciplina Matemática; 7º ano do Ensino Fundamental; 6 aulas de 50 minutos.
Tema:	Divisão com números naturais.
Justificativa do tema:	Revisão de conteúdo proposto para o 6º ano, pois estudantes apresentam dificuldades.
Metodologia:	Resolução de Problemas, utilizando o método de Polya.
Objetivo geral:	Utilizar o algoritmo da divisão no desenvolvimento da estratégia vencedora do Jogo de NIM.
Objetivos específicos:	1. Conhecer o Jogo da Subtração; 2. Reconhecer o algoritmo da divisão na elaboração de estratégias; 3. Aplicar as regras de divisibilidade; 4. Elaborar hipóteses; 5. Aplicar a estratégia vencedora do jogo.
Conteúdos:	Divisão com números naturais; Divisão euclidiana; Regras de divisibilidade.
Habilidades:	Parcialmente contempladas: EF06MA03, EF06MA07, EF06MA05.
Desenvolvimento:	Aula 1. Apresentação do jogo; Aula 2. Elaboração de hipóteses para vencer o jogo; Aula 3. Validação de hipóteses; Aula 4. Apresentação de hipóteses e conclusão; Aula 5. Explicação da estratégia vencedora do jogo; Aula 6. Avaliação da atividade.
Avaliação:	Observação de desempenho Resolução de situações-problema

Recursos didáticos: Quadro;
Versão digital do Jogo de NIM;
Material impresso com as questões para avaliação.

Descrição das Habilidades da BNCC:

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.

Desenvolvimento detalhado:

1. Inicia-se a primeira aula, apresentando a versão digital do Jogo de NIM aos estudantes. Para essa apresentação, os estudantes poderão ser levados para o laboratório de informática da escola e através do link, apresentado no capítulo 5, disponibilizado a eles, poderão acessar o jogo no *Scratch*. Caso não tenha laboratório de informática disponível na escola, para os estudantes utilizarem, o jogo poderá ser apresentado pelo professor na própria sala de aula, com o auxílio de um projetor. Nessa primeira a aula, o jogo deve ser apresentado e suas regras devem ser explicadas aos estudantes para que eles consigam entender seu funcionamento realizando algumas jogadas iniciais.

2. Na segunda aula, os estudantes deverão ser divididos em grupos para tentarem pensar em um plano para vencer o jogo. Durante essa aula o professor deverá fazer alguns questionamentos como: "Como deixar sempre um palito para o seu adversário?", "Vocês acham que a divisão pode ser utilizada nesse plano?", "Vocês conseguiram pensar em uma forma de ganhar o jogo?"entre outros, para que os estudantes sejam estimulados a elaborar suas hipóteses para o desenvolvimento da estratégia vencedora do jogo.

3. Na terceira aula, a versão digital do Jogo de NIM deve ser levada novamente pelo professor e os estudantes devem ser divididos em grupos, de preferência os mesmos da segunda aula, para que eles testem suas hipóteses, elaboradas na aula

anterior, e consigam verificar se estão corretas e, caso não estejam, tentem pensar em reformulações.

4. Na quarta aula, o professor deverá propor que os grupos vão para o quadro, apresentem as hipóteses formuladas para desenvolver a estratégia vencedora do jogo e também apresentem uma conclusão dos resultados obtidos no teste dessas hipóteses, realizado na terceira aula.

5. Na quinta aula, o professor deverá explicar a estratégia vencedora do jogo, explicando detalhadamente o algoritmo da divisão, já que a partir das testagens realizadas nesta pesquisa pode verificar-se que muitos estudantes podem apresentar bastante dificuldade nesse conceito. No final dessa aula, os estudantes deverão jogar novamente para que tentem aplicar a estratégia vencedora do jogo.

6. A sexta, e última aula, deve ser destinada à avaliação.

Detalhamento da Avaliação:

A avaliação deverá ser realizada em duas partes. Na primeira deverá ser avaliada, de forma contínua, a participação dos estudantes na atividade, identificando-se as dificuldades, o progresso dos estudantes e o alcance dos objetivos propostos, compondo a primeira parte da nota. Na segunda parte deverá ser entregue uma atividade impressa aos estudantes, com situações hipotéticas da versão digital do jogo para que eles analisem que jogada deverá ser feita para aplicação correta da estratégia vencedora do jogo, compondo assim a segunda parte da nota.