

Universidade Federal de Alfenas

**Jéssica Amanda Moreira**

***Uma aplicação da equação da onda à Música***

Alfenas/MG

2023

**Jéssica Amanda Moreira**

## ***Uma aplicação da equação da onda à Música***

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas.

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais.

Orientadora: Angela Leite Moreno.

Alfenas/MG

2023

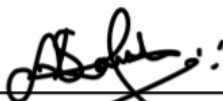
Jéssica Amanda Morenira

*Uma Aplicação da Equação da Onda à Música*

A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Monografia apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais.

Aprovado em: 08 / 12 / 2023

Banca Examinadora:

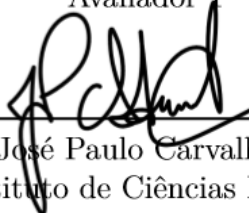


---

Profa. Dra. Angela Leite Moreno  
Instituto de Ciências Exatas  
Orientadora

---

Prof. Dr. Evandro Monteiro  
Instituto de Ciências Exatas  
Avaliador 1



---

Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos  
Instituto de Ciências Exatas  
Avaliador 2

---

Profa. Dr. José Carlos de Souza Júnior  
Ferreira  
Instituto de Ciências Exatas  
Suplente

# *Agradecimentos*

Agradeço primeiro a Deus por ter me mantido na trilha certa durante esta monografia com saúde e forças para chegar até o final.

Aos meus pais, Valdirene e Luiz pelo incentivo e apoio que serviram de alicerce para as minhas realizações.

À minha orientadora Ângela Leite Moreno que apesar da intensa rotina de sua vida acadêmica aceitou me orientar nesta monografia. As suas valiosas indicações fizeram toda a diferença. Obrigado do fundo do coração pela sua dedicação e paciência durante toda essa minha jornada.

À minha irmã, Pâmela, minha vó Maria Arlete, minhas madrinhas Vânia e Márcia, meu padrinho Wanderley e meus primos Kaio e Gabrielle, que tanto amo, pela amizade e atenção dedicadas quando sempre precisei.

Os meus amigos Gabriel, Rhiton e Tamires pelas palavras de incentivo e por acreditar em meu potencial.

Aos meus fisioterapeuta Gustavo e Patrícia pelo o incentivo e apoio de sempre.

A filha da minha orientadora Carolina pela colaboração e participação do desenvolvimento no meu TCC.

Também agradeço a todos os meus colegas de curso, pela oportunidade do convívio e pela cooperação mútua durante estes anos. Juntos conseguimos avançar e ultrapassar todos os obstáculos.

A todos os meus professores do curso de Matemática da Universidade Federal de Alfenas pela excelência da qualidade de ensino, dedicação e principalmente por terem a capacidade de visualizar as necessidades e dificuldades que cada um dos alunos passávamos e com isso vocês contribuíram da melhor forma possível tanto para nossa formação profissional, quanto para meu crescimento pessoal.

Enfim agradeço aos funcionários da Universidade Federal de Alfenas que contribuíram direta e indiretamente para a conclusão desta jornada.

Gratidão!!

# Resumo

A série de Fourier, é bastante aplicada em diversos campos do conhecimento, como Engenharias, Física e Matemática, também sendo utilizada, em particular, para a modelagem do som. Nesse trabalho, o estudo das ondas sonoras com a utilização da modelagem matemática, como aplicação da série de Fourier. Para isso foi necessário compreender como funcionam as séries de Fourier que modelam funções periódicas utilizando uma série de senos e cossenos. E discutir alguns resultados que envolvem a expansão em séries de Fourier, como a diferenciabilidade e a integrabilidade termo a termo, sem se aprofundar na teoria de Séries de Fourier, como o estudo da convergência. Deste modo, o objetivo é apresentar a resolução da equação da onda, uma equação diferencial parcial de segunda ordem, utilizando os métodos de separação de variáveis e da superposição de soluções, em séries de Fourier. Ao aplicar condições iniciais, que são dadas pelas cordas do instrumento musical com extremidades fixas de comprimento fixo, com posição inicial e velocidade inicial dadas, obtemos a solução que modela o som. Apresentando ao final a estrutura do som, numa escala harmônica.

**Palavras-chave:** Série de Fourier; Modelagem Matemática; Instrumentos musicais; Ondas sonoras.

# Abstract

The Fourier series is widely applied in various fields of knowledge, such as engineering, physics and mathematics, and is also used in particular for modelling sound. In this work, sound waves are studied using mathematical modelling as an application of the Fourier series. To do this, it was necessary to understand how Fourier series, which model periodic functions using a series of sines and cosines, work. And to discuss some results involving expansion in Fourier series, such as differentiability and term-by-term integrability, without delving into the theory of Fourier series, such as the study of convergence. The aim is therefore to present the solution of the wave equation, a second-order partial differential equation, using the methods of separation of variables and superposition of solutions, in Fourier series. By applying initial conditions, which are given by the strings of the musical instrument with fixed ends of fixed length, with given initial position and initial velocity, we obtain the solution that models the sound. In the end, we present the structure of the sound on a harmonic scale.

**Keywords:** Fourier series; Mathematical Modeling; Musical instruments; Sound waves.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico da Nota Si Natural: Frequência. . . . .	9
Figura 2 – Gráfico da Nota Si Natural: Período. . . . .	10
Figura 3 – Gráfico da Nota Si Natural: Comprimento. . . . .	10
Figura 4 – Gráfico da Nota Si Natural: Amplitude. . . . .	10
Figura 5 – Gráfico da função $f(t) = 5 - 2 \cos t + \sin 5t - 4 \cos 2t + 3 \sin 3t$ . . . . .	15
Figura 6 – Aproximação da função $f(x)$ por série de Fourier com $n = 1, 5, 15$ . . . . .	25
Figura 7 – Gráfico da função $y(x, t)$ para alguns valores de $t$ . . . . .	40
Figura 8 – Primeiro Harmônico. . . . .	42
Figura 9 – Segundo Harmônico. . . . .	43
Figura 10 – Terceiro Harmônico. . . . .	43

# Sumário

	<b>Lista de ilustrações . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>SÉRIES DE FOURIER . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Séries de Fourier de Funções de Periódicas . . . . .</b>	<b>16</b>
2.1.1	Séries de Fourier em Senos e em Cossenos . . . . .	25
<b>2.2</b>	<b>Aplicações de Série de Fourier . . . . .</b>	<b>27</b>
2.2.1	Oscilações Forçadas Amortecidas . . . . .	28
<b>2.3</b>	<b>Diferenciação e Integração Termo a Termo de Séries de Fourier . .</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>CORDAS VIBRANTES E A EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL</b>	<b>32</b>
<b>3.1</b>	<b>Superposição de Soluções . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3.2</b>	<b>Separação de Variáveis . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>4</b>	<b>SÉRIES DE FOURIER EM MÚSICA . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>46</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>47</b>



# 1 *Introdução*

A história da música com a Matemática se inicia na Escola Pitagórica por Pitágoras, século VI a.C. no observando o som produzido por uma corda solta que produzia um som mais agudo em comparação quando posicionava a haste na metade da corda. Assim, se deu o início ao estudo das cordas vibrantes, formulando a lei das cordas vibrantes, também conhecida por Música das Esferas, na Grécia Antiga (KANDUS *et al*, 2006). Segundo Rodrigues (1999), o som produzido era representado por uma fração cujo o seu denominador era doze que reproduzia um som harmônico. Ainda, de acordo com Abdounur (2006), no desenvolvimento do estudo matemático da música nos primórdios no período clássico grego, Arquitas de Tarento (430–360 a.C) possivelmente tenha mudado o termo de média subcontrária para media harmônica.

Rocha (2015) apresenta que levando em consideração a união da Física com a teoria musical que explica os fenômenos da natureza do som e de como tal é emitido em diferentes instrumentos. Para Pitágoras em seus estudos por meio de um monocórdio o fez vibrar em várias frações do comprimento de corda. Notou-se que quando a corda se dividia em duas partes, o som produzido no primeiro acorde era bem parecido com a do segundo só que mais agudo. E assim Pitágoras formulou a lei das cordas vibrantes, pois associava a cada órbita planetária um respectivo som.

Na Idade Média a 800 d.C. até o Renascimento segundo Abdounur (2006) apresenta que a música ocidental passa por diversas mudanças e dentre elas destaca-se exclusivamente melódico para uma percepção harmônica. Também foi nessa que criou as notas musicais e a teoria musical que conhecemos até os dias de hoje.

Covo (2016), destaca as amostragens padrão precisa seguir os sinais coletados, onde deve-se seguir a frequência de  $44,1kHz$ , visto que a frequência máxima que o ouvido humano capta é de  $20kHz$ , dessa forma o dobro disso, que seria  $40kHz$  já é suficiente, para emitir sons que não agredam os ouvidos. Uma explicação também que é bastante notória é o padrão que se segue dessa forma, onde os quatro primeiros números primos são elevados ao quadrado, ou seja,  $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2$ , facilitando assim o “fracionamento dos conjuntos de dados mostrado” e com isso remover frequências que ultrapassem os  $20kHz$ .

Ao captar um som que é reproduzido por um instrumento musical, o som que é coletado possui algumas características que fazem parte do seu desenvolvimento. Quando tocamos uma corda de violão, por exemplo, o som acaba fazendo um som mais intenso, ou seja, um volume maior que no início é mais alto e depois ele diminui de forma gradativa o som. Covo (2016), define esse processo como um envelopamento dinâmico, que se define “como uma forma de retratar o desenvolvimento dinâmico, do nascimento até a sua morte”.

Esses envelopamentos dinâmicos, podem ser definidos em quatro (COVO, 2016), em que

- (I) determina o ataque inicial do som, em que a amplitude chega ao ponto máximo;
- (II) o som passa por um decaimento que se caracteriza pela perda de energia que ocorre no ataque inicial;
- (III) o som possui um equilíbrio que o acompanha durante um tempo, e isso é chamado de sustentação;
- (IV) é caracterizado pela diminuição de intensidade, chegando até sua última etapa, a extinção.

Ramalho *et al.*, 2014, destaca que as ondas sonoras são ondas mecânicas que possuem características mecânicas longitudinais, que são associadas a aquelas que possuem uma variação de pressão, ou seja, compressões e rarefações. Elas se originam a partir de vibrações que são captadas pelo tímpano, com frequência e amplitudes definidas.

As ondas são conhecidas como perturbações que se caracterizam através de vários meios, como: materiais, no caso da onda sonora; as ondas eletromagnéticas, que não precisam de um material para se propagar, como por exemplo a luz e o Raio-X. Wisnik (2014), enfatiza que o fato de ser uma onda significa que ela possui um período, ou seja, há uma frequência que se repete por determinado intervalo de tempo. As ondas mecânicas são definidas seguindo a sua direção, vibração, em transversais e longitudinais.

As ondas transversais são definidas como aquelas que possuem o meio de propagação do movimento perpendicular a propagação do movimento na mesma direção. As ondas possuem algumas características próprias, dentre as quais Pereira (2013) cita:

- Frequência ( $f$ ): representada pelo grau de oscilação dos pontos, onde estas ondas se propagam, definidas, como o número de oscilações que elas completam por segundos (Figura 1);

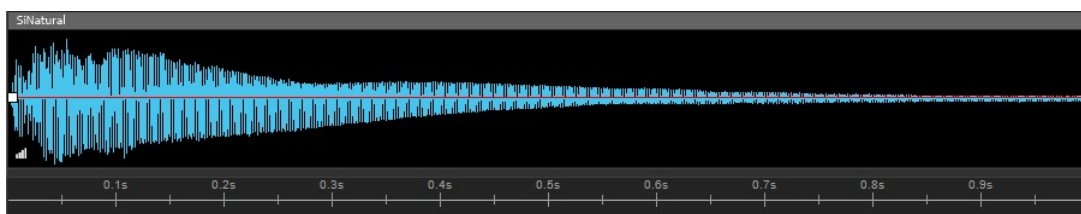


Figura 1 – Gráfico da Nota Si Natural: Frequência.

Fonte: Autor.

- Período ( $T$ ): o tempo mínimo que a fonte precisa para gerar uma onda completa (Figura 2);

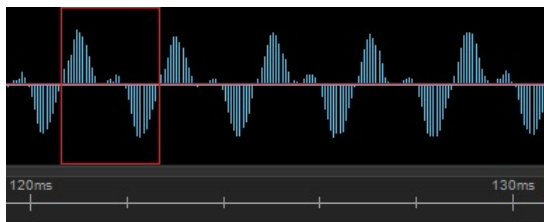


Figura 2 – Gráfico da Nota Si Natural: Período.

Fonte: Autor.

- Velocidade ( $v$ ): é a distância que a onda percorre por unidade de tempo, ou seja, o comprimento da onda por seu período, também é chamada de velocidade de fase;
- Comprimento da onda: definida como o tamanho que essa onda possui e seu comprimento que pode ser medido de “crista a crista”, conhecida como a parte mais alta da onda, ou de “vale a vale”, conhecida como a parte mais baixa da onda (Figura 3;

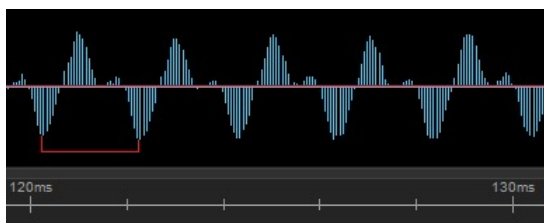


Figura 3 – Gráfico da Nota Si Natural: Comprimento.

Fonte: Autor.

- Amplitude: metade da distância entre a parte mais baixa (vale) e a parte mais alta (crista), conhecida popularmente como a “altura da onda” (Figura 4.

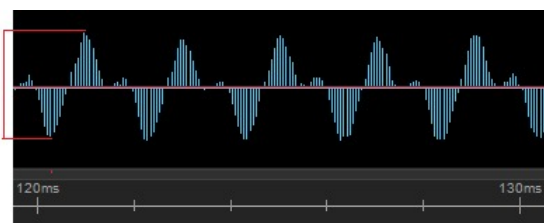


Figura 4 – Gráfico da Nota Si Natural: Amplitude.

Fonte: Autor.

As ondas ainda podem ser definidas, segundo a sua relação, direção, propagação em unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. Para se obter o timbre é preciso conhecer a soma de ondas senoidais, que estas representam, os sons puros, que são conhecidos por sons harmônicos. A soma dessas ondas, são obtidas através das séries de Fourier (DEPIZOLI, 2015).

Nascimento *et al.* (2015), enfatiza que o som é dado por uma determinada nota, onde ele é composta por uma série de harmônicos, que possui diferentes intensidades,

representando-se pela forma de funções senoidais através das séries de Fourier. É possível apurar que estas aproximações, relacionadas com os três primeiros harmônicos, obtêm-se boas aproximações, já que alguns harmônicos possuem poucas influências.

A onda é o resultado da soma de uma nota musical que possui por si só um timbre característico, que depende da soma dos harmônicos escolhidos. Os harmônicos e suas amplitudes, podem ser escolhidas de formas diversificadas, obtendo-se assim resultados de vários timbres. Cada um desses timbres obtidos faz relação com uma determinada tecla de sintetizador, que ao ser acionada, toca o timbre musical. Uma forma de modelar nas ondas é se utilizar a Série de Fourier. Mas o que é uma Série de Fourier e como ela surgiu?

A ideia de séries de Fourier é decompor uma função qualquer em uma série de senos e cossenos. Essa ideia se iniciou com Euler em 1750, tendo obtido a forma dos coeficientes de tal série por volta de 1777 (GANDUFO, 1990). Entretanto, foi apenas em 1822, que ao estudar sistematicamente tais séries infinitas na tentativa de resolver a equação do calor e observou durante o estudo da propagação de calor em corpos sólidos, Fourier admitiu que essa propagação deveria ser por ondas de calor, levando em consideração que a forma mais simples de uma onda é uma função senoidal (PIFER, 2015).

Fourier demonstrou que qualquer função periódica pode ser decomposta em uma combinação infinita de senoides, dividida como uma soma de senos e cossenos. Portanto, no trabalho *Théorie Mathématique de la Chaleur* (Teoria Matemática de Condução do Calor) Fourier (1822) explicitou os coeficientes de tais séries. No entanto, seu foco de pesquisa não era compreender o calor enquanto entidade da física, mas sim em dar uma explicação matemática de como a condução do calor se daria como radiação. Desta forma, para ele o importante era descrever matematicamente o comportamento do calor (GANDUFO, 1990).

Os estudos de Fourier, inspiram P. G. Dirichlet (1805-1859) que, ao estudar tais séries, observou que nem toda função poderia ser representada por uma série de Fourier obtendo uma condição suficiente para a validade da representação a partir da série estudada. Vale ressaltar que Fourier já conjecturava que isso acontecia. Assim, em 1829, Dirichlet demonstrou rigorosamente que a Série de Fourier de uma função  $f$  converge nos pontos  $x$  em que a função é contínua e, nos pontos  $x$  em que se tem descontinuidade, ele converge para a média aritmética dos limites laterais (GANDUFO, 1990).

De acordo com Riskedal (2002) confirma que nessas ideias e dos resultados fundamentais das Transformadas de Fourier de Equação da Onda visando aplicações à instrumentos musicais. As propriedades pode ser expresso como a amplitude (ou volume) das suas notas constituintes. Essa abordagem pode ser possível por a Transformada de Fourier de uma função temporal cujo o valor absoluto representada por soma das frequências presentes na fase de deslocamentos com base de ondas senoidais em tal frequência. Simas (2014) afirma que em particular são encontradas em instrumentos musicais pode-se fazer a aplicação de

modelos simples para corda e membranas vibrantes da frequência.

Nussenzveig (2018) destaca a pesquisa desenvolvida por um som produzido por uma corda vibrante de violão ou guitarra utilizando Equação da Onda para promover as vibrações da corda elástica. Usando a Equação da Onda, uma aplicação de Séries de Fourier, o autor descreveu os sinais advindos da vibração de instrumentos.

Kandus *et al.* (2006) afirma que em uma análise de modelagem teórica do mecanismo produzido pelo som por instrumentos de corda pode ser muito complexa. Já Donoso *et al.* (2008) apresenta o instrumentista quando começa uma perturbação usando uma palheta ou o próprio dedo que se propaga pela dilatação da corda. Que por sua vez, é descrita como a energia transmitida para o corpo do instrumento como um todo, e em particular os fenômenos ondulatório em um instrumentos de corda podem ser escritos em uma equação diferencial. Viola e Piovesan (2022) destacam que essas áreas estabelecem uma conexão eficaz entre a onda gerada no instrumento musical e o ar, resultando na criação do som que percebemos. Uma análise espectral é expressar, a fim de estabelecer uma soma de elementos de uma série.

Ao discutir a análise do som do violão e da guitarra, são resultados semelhantes, ao observar a vibração, frequências agudas ou graves ou também de forma equivalente quanto menor a corda menor a sustentação do som produzido. Isto implica que a dissipação de energia da corda é maior quanto mais alta a frequência. Para a identificação das frequências harmônicas por meio da série de Fourier os resultados experimentais demonstraram concordam com um modelo linear para o violão e a guitarra. As propriedades usada no tal experimento foi a densidade linear, velocidade, tensão e comprimento na onda da corda são menores no violão em comparação ao da guitarra (SANTOS, MOLINA & TUFAILE, 2013).

Esse trabalho está organizado da seguinte maneira:

apresentamos as séries trigonométricas, pois como já dissemos anteriormente, segundo Fourier toda função  $f(t)$  com período  $2\pi$  pode ser representada por uma série trigonométrica infinita. Em seguida definimos formalmente a série de Fourier, apresentando como são determinados seus coeficientes. Após apresentarmos o Teorema de Convergência de séries de Fourier, utilizamos resultados do Cálculo Diferencial e Integral para estabelecer a diferenciação e integração termo a termo dessas séries.

**Capítulo 2:** apresenta sucintamente as séries trigonométricas e, a partir delas, discutimos que toda função periódica de período  $2\pi$  pode ser representada por uma série infinita, ou seja, definimos formalmente uma Série de Fourier, explicitando como calcular seus coeficientes. Em seguida, estendemos esse resultados para qualquer função periódica. Finalmente apresentamos o Teorema de Convergência de Séries de Fourier, para em seguida, utilizarmos resultados do Cálculo Diferencial para estabelecer

a diferenciação e integração termo a termo dessas séries. Finalizamos o capítulo apresentando um algoritmo para resolver problemas de contorno utilizando séries de Fourier.

**Capítulo 3:** é dedicado ao estudo dos problemas das cordas vibrantes, neste capítulo estudamos a equação da onda considerando uma corda tangida, apresentando um exemplo.

**Capítulo 4:** apresenta uma aplicação da Equação da Onda para modular as ondas gerada por um instrumento de corda, com as extremidades fixas, apresentando o significado físico de cada uma das funções com  $y(x, t)$ , na modelagem do som com tempos fixos e discutindo a solução geral.

**Capítulo 5:** o último capítulo desta monografia é dedicado às considerações finais deste trabalho.

## 2 Séries de Fourier

Neste capítulo discutiremos sobre Séries de Fourier, sua definição, expansão em séries de Fourier de funções periódicas, diferenciação e integração termo a termo de séries de Fourier, finalizamos o capítulo com o procedimento de como utilizá-las para resolver problemas de contorno. As notas deste capítulo são baseadas em Boyce e DiPrima (2006) e Edwards e Penney (1995).

Como problema inicial para discutirmos o que são séries de Fourier, iniciemos considerando a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f(t). \quad (2.1)$$

que modela o comportamento de um sistema massa-mola com frequência natural circular  $\omega_0$ , movendo-se sob a influência de uma força externa de magnitude  $f(t)$  por unidade de tempo. Se esta força for, por exemplo, uma função cosseno, ou seja,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t). \quad (2.2)$$

com  $\omega^2 \neq \omega_0^2$  tem solução particular

$$x_p(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \quad (2.3)$$

Agora, suponhamos que a função  $f(t)$  na Equação Diferencial (2.1) seja uma combinação linear de funções harmônicas simples. Assim, com base na solução particular dada pela Equação (2.3), podemos aplicar o Princípio da Superposição de Soluções para construir uma solução particular da Equação (2.1). Considerando, por exemplo, a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t), \quad (2.4)$$

na qual  $\omega_0^2$  não é igual a nenhum  $\omega_n^2$ . Desse modo, a equação (2.4) tem solução particular

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \cos(\omega_n t), \quad (2.5)$$

obtida adicionando-se as soluções dadas em pela Equação (2.3), correspondentes aos  $n$  termos no lado direito da Equação (2.4).

Em geral, sistemas mecânicos e elétricos possuem funções periódicas que não são simplesmente combinações lineares finitas de senos e cossenos. Assim, nosso objetivo aqui é mostrar que qualquer função periódica contínua por partes  $f(t)$  pode ser representada por uma série infinita de termos trigonométricos. Sendo assim, a Equação (2.1) pode ser

resolvida pela superposição de soluções particulares dadas por funções trigonométricas, também conhecidas como “blocos construtores” trigonométricos, com a soma finita dada na Equação (2.5) substituída por uma série infinita.

Lembremos apenas que a função  $f(t)$  definida para todo  $t$  é periódica se existir um número positivo  $p$  tal que

$$f(t + p) = f(t),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Neste caso, o número  $p$  é chamado um período da função  $f$ . O período de uma função periódica não é único, por exemplo, se  $p$  é um período de  $f(t)$ , então os números  $2p$ ,  $3p$  e daí por diante, também são.

Com isso, ao considerarmos as funções  $g(t) = \cos(nt)$  e  $h(t) = \sin(nt)$ , com  $n$  sendo um inteiro positivo, teremos que o período destas funções é  $\frac{2\pi}{n}$ . Para verificarmos isto basta observarmos que

$$\cos\left[n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right)\right] = \cos(nt + 2\pi) = \cos(nt)$$

e

$$\sin\left[n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right)\right] = \sin(nt + 2\pi) = \sin(nt).$$

Como  $g$  e  $h$  tem período  $2\pi$  qualquer combinação linear de senos e cossenos de múltiplos inteiros de  $t$ , como por exemplo

$$f(t) = 5 - 2\cos t + \sin 5t - 4\cos 2t + 3\sin 3t,$$

também tem período  $2\pi$ . Podemos ver a representação gráfica na Figura 5

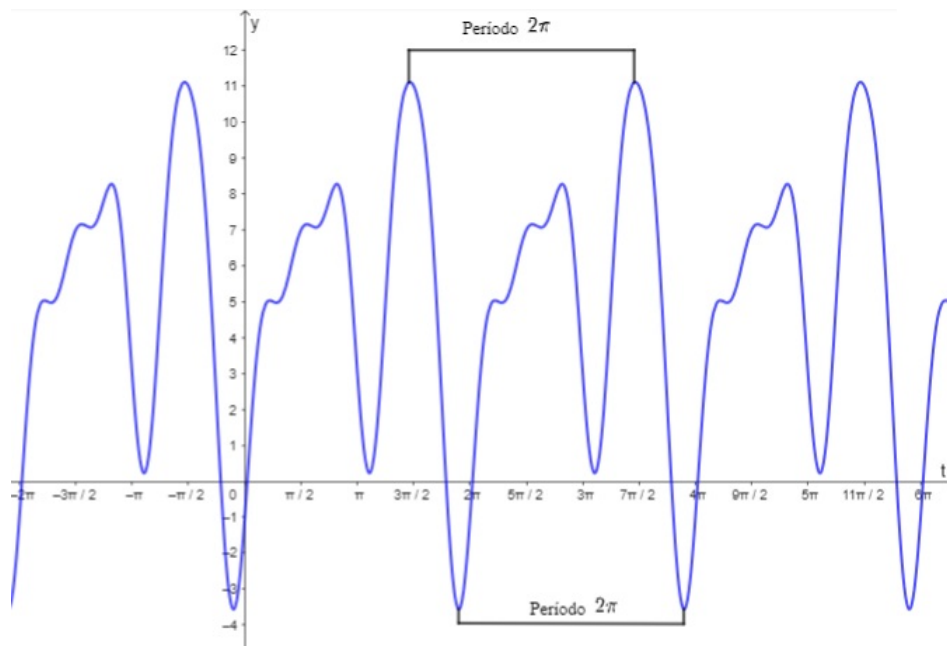


Figura 5 – Gráfico da função  $f(t) = 5 - 2\cos t + \sin 5t - 4\cos 2t + 3\sin 3t$ .

Fonte: Autor.



Em 1822, Fourier afirmou que toda função  $f(t)$  com período  $2\pi$  pode ser representada por uma série trigonométrica infinita da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

ou seja,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)). \quad (2.6)$$

A série dada na Equação (2.6) é chamada de série de Fourier e a representação de funções através de séries de Fourier é uma das técnicas da Matemática mais aplicada na solução de Equações Diferenciais Parciais.

## 2.1 Séries de Fourier de Funções de Periódicas

Nosso objetivo nesta seção será compreender como podemos expressar uma função periódica qualquer em séries de Fourier. Para isso iniciaremos seu estudo com funções cujo período é  $2\pi$  e determinaremos como calcular os coeficientes na série de Fourier dada na Equação (2.6) para que ela convirja para esta função, para depois estenderemos o resultado para funções periódicas quaisquer.

Para que atinjamos nosso objetivo inicialmente calcularemos o valor das integrais

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \cos(nt) dt.$$

Para calcular as duas primeiras integrais precisaremos separar cada um em dois casos:

**Caso 1**  $m \neq n$ . Neste caso temos que

$$\cos(mt) \cos(nt) = \frac{1}{2} (\cos(mt + nt) + \cos(mt - nt)),$$

daí

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(mt + nt) + \cos(mt - nt)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt + nt) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt - nt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k_1 t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k_2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(k_1 t)}{k_1} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin(k_2 t)}{k_2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(k_1 \pi)}{k_1} - \frac{\sin(-k_1 \pi)}{k_1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(k_2 \pi)}{k_2} - \frac{\sin(-k_2 \pi)}{k_2} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

em que  $k_1 = m + n$  e  $k_2 = m - n$ .

**Caso 2**  $m = n$ . Aqui temos que

$$\cos(mt) \cos(mt) = \frac{1}{2} (\cos(mt + mt) + \cos(mt - mt))$$

daí

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(mt) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(mt + mt) + \cos(mt - mt)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2mt) + \cos(0)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2mt) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(2mt)}{2m} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} t \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(2m\pi)}{2m} - \frac{\sin(-2m\pi)}{2m} \right) + \frac{1}{2} (\pi + \pi) \\ &= 0 + \frac{2\pi}{2} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases} \quad (2.7)$$

Agora, para determinarmos o valor da segunda integral, temos que

**Caso 1**  $m \neq n$ . Neste caso temos que

$$\sin(mt) \sin(nt) = \frac{1}{2} (\cos(mt - nt) - \cos(mt + nt)),$$

daí

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt - nt) - \cos(mt + nt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k_1 t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k_2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(k_1 t)}{k_1} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(k_2 t)}{k_2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(k_1 \pi)}{k_1} - \frac{\sin(-k_1 \pi)}{k_1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(k_2 \pi)}{k_2} - \frac{\sin(-k_2 \pi)}{k_2} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde  $k_1 = m - n$  e  $k_2 = m + n$ .

**Caso 2**  $m = n$ . Aqui temos que

$$\operatorname{sen}(mt)\operatorname{sen}(mt) = \frac{1}{2}(\cos(mt - mt) - \cos(mt + mt)),$$

daí

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mt)\operatorname{sen}(mt)dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt - mt) - \cos(2mt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0)dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2mt)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2mt)dt \\ &= \frac{1}{2} t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(2mt)}{2m} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} (\pi + \pi) - 0 \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mt)\operatorname{sen}(nt)dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases} \quad (2.8)$$

Agora, para calcularmos a terceira integral, temos apenas um caso, pois

$$\operatorname{sen}(mt)\cos(nt) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(mt - nt) + \operatorname{sen}(mt + nt)),$$

daí

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mt)\cos(nt)dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mt - nt) + \operatorname{sen}(mt + nt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(k_1 t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(k_2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{\cos(k_1 t)}{k_1} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{\cos(k_2 t)}{k_2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\left( \frac{\cos(k_1 \pi)}{k_1} - \frac{\cos(-k_1 \pi)}{k_1} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( -\left( \frac{\cos(k_2 \pi)}{k_2} - \frac{\cos(k_2 \pi)}{k_2} \right) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde  $k_1 = m - n$  e  $k_2 = m + n$ . Portanto, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$  temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mt)\cos(nt)dt = 0. \quad (2.9)$$

Agora, suponhamos que a função  $f(t)$  seja contínua por partes e que tenha período  $2\pi$ , a afirmação representação em série de Fourier seja dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mt) + b_m \operatorname{sen}(mt)). \quad (2.10)$$

então, ao integrarmos termo a termo obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mt)) + (b_m \sin(mt)) \right) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mt) \right) dt + \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mt) \right) dt \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) dt + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) dt\end{aligned}$$

e, como,

$$\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = \frac{a_0}{2} \left( t \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{a_0}{2} (\pi + \pi) = a_0 \pi,$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) dt = \left( \frac{\sin(mt)}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 0$$

nos leva a

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) dt = 0.$$

Além disso, o fato de

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) dt = - \left( \frac{\cos(mt)}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 0$$

nos dá

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) dt = 0.$$

Logo,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = a_0 \pi + 0 + 0 = a_0 \pi.$$

Portanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = a_0 \pi$$

deste modo obtemos a primeira constante que é dada por

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Agora, nosso objetivo é determinar os coeficientes  $a_n$  da Equação (2.10), para isto, multiplicamos cada lado da Equação (2.10) por  $\cos(nt)$ , ou seja,

$$\begin{aligned}\cos(nt) f(t) &= \cos(nt) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mt)) + (b_m \sin(mt)) \right) \\ &= \frac{a_0 \cos(nt)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(nt) \cos(mt) + b_m \sin(mt) \cos(nt)).\end{aligned}$$

e integrando termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \cos(nt) dt\end{aligned}$$

Observemos, pela Equação (2.9), que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \cos(nt) dt = 0$$

e, com isso,

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \cos(nt) dt = 0.$$

Além disso,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt = 0$$

e, assim,

$$\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt = 0.$$

Com isso

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt. \quad (2.11)$$

e, pela Equação (2.7), temos que  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt$  é não nula apenas se  $m = n$ , logo,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) dt = \pi a_n.$$

Portanto,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

Agora, nosso objetivo é determinar os coeficientes  $b_n$ . Para isto, multiplicamos cada lado da Equação (2.10) por  $\sin(nt)$ , assim

$$\begin{aligned}f(t) \sin(nt) &= \sin(nt) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)) \right) \\ &= \frac{a_0 \sin(nt)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mt) \sin(nt) + b_m \sin(mt) \sin(nt))\end{aligned}$$

que, integrando termo a termo nos dá

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt.\end{aligned}$$

Aqui, podemos ver, pela Equação (2.9), que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt = 0,$$

daí

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \operatorname{sen}(nt) dt = 0$$

e, do fato de

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nt) dt = 0,$$

o que nos leva a

$$\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nt) \operatorname{sen}(nt) dt = 0.$$

Logo,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mt) \operatorname{sen}(nt) dt$$

Pela Equação (2.8), temos que  $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mt) \operatorname{sen}(nt) dt$  é não nula apenas se  $m = n$ , assim

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nt) dt = \pi b_n$$

Portanto,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt$$

Com isso temos o seguinte resultado

**Teorema 2.1** *Suponhamos que  $f(t)$  seja uma função contínua por partes de período  $2\pi$  que esteja definida para todo  $t$ . Então, a série de Fourier de  $f(t)$  é a série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mt) + b_m \operatorname{sen}(mt)) \quad (2.12)$$

onde os coeficientes de Fourier  $a_n$  e  $b_n$  são definidos por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad (2.13)$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt \quad (2.14)$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Nosso objetivo agora é estender o resultado do Teorema 2.1 para uma função periódica qualquer. Desta forma, consideraremos uma  $f(t)$  uma função contínua por partes para todo  $t$  e que tem período arbitrário  $p > 0$ , ou seja, tomando  $p = 2L$ , temos que  $L$  é o meio-período da função periódica  $f$ . Assim, definamos

$$g(u) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right),$$

então,

$$g(u + 2\pi) = f\left(\frac{Lu}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) = g(u),$$

ou seja,  $g(u)$  também é periódica cujo período é  $2\pi$  e, com isso, possui representação por série de Fourier dada por

$$g(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nu) + b_n \sin(nu)),$$

em que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) \cos(nu) du$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) \sin(nu) du.$$

Com isso, se fizermos a seguinte mudança de variável

$$t = \frac{Lu}{\pi},$$

teremos que

$$u = \frac{\pi t}{L} \quad \text{e} \quad du = \frac{\pi}{L} dt,$$

e, como  $f(t) = g(u)$ , segue que

$$f(t) = g\left(\frac{\pi t}{L}\right) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right), \quad (2.15)$$

com

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) \cos(nu) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L g\left(\frac{\pi t}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \frac{\pi}{L} dt \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L g\left(\frac{\pi t}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) dt.$$

De maneira análoga, temos que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt.$$

**Definição 2.1** Diremos que uma função  $f$  é seccionalmente contínua em um intervalo  $a \leq t \leq b$  se o intervalo puder ser particionado em um número finito de pontos  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  de modo que

(i)  $f$  seja contínua em cada subintervalo aberto  $t_{i-1} < t < t_i$ .

(ii)  $f$  tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo, quando se aproxima pelo interior do intervalo.

A notação  $f(c^+)$  é usada para denotar o limite de  $f(t)$  quando  $t \rightarrow c$  pela direita e  $f(c^-)$  denota o limite de  $f(t)$  quando  $t \rightarrow c$  pela esquerda.

Com isso, temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.2** *Suponhamos que  $f$  e  $f'$  sejam funções seccionalmente contínuas no intervalo  $-L \leq t < L$ . Suponhamos, também, que  $f$  esteja definida fora do intervalo  $-L \leq t < L$  de modo a ser periódica com período  $2L$ . Então  $f$  terá uma série de Fourier*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right), \quad (2.16)$$

cujos coeficientes estão relacionados a  $f(t)$  pelas fórmulas de Euler-Fourier

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad (2.17)$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, \quad (2.18)$$

para  $n = 1, 2, \dots$ . Além disso, a série de Fourier convergirá para  $f$  em todos os pontos onde  $f$  for contínua e convergirá para  $\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$  em todos os pontos onde  $f$  for descontínua.

Para compreendermos melhor como isso acontece, vejamos o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.1** *Considere a função da onda quadrada*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < t < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < t < \pi \\ 0.5 & \text{se } t = -\pi, 0, \pi. \end{cases}$$

Primeiramente calculemos  $a_0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot t \Big|_0^{\pi} \\ &= 1. \end{aligned}$$



Utilizando a Equação (2.13) para calcular  $a_n$ , temos que

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n} \Big|_0^{\pi} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Agora, utilizamos a Equação (2.14) para calcular  $b_n$ , e obtemos

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \operatorname{sen}(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen}(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-\cos(nt)}{n} \Big|_0^{\pi} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n} \cos(n\pi) - \frac{1}{n} \cos(0) \right) \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n} \cos(n\pi) - \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n).
 \end{aligned}$$

daí,

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{para } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)) \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}(nt) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}
 \end{aligned}$$

Portanto

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5t) + \cdots \right).$$

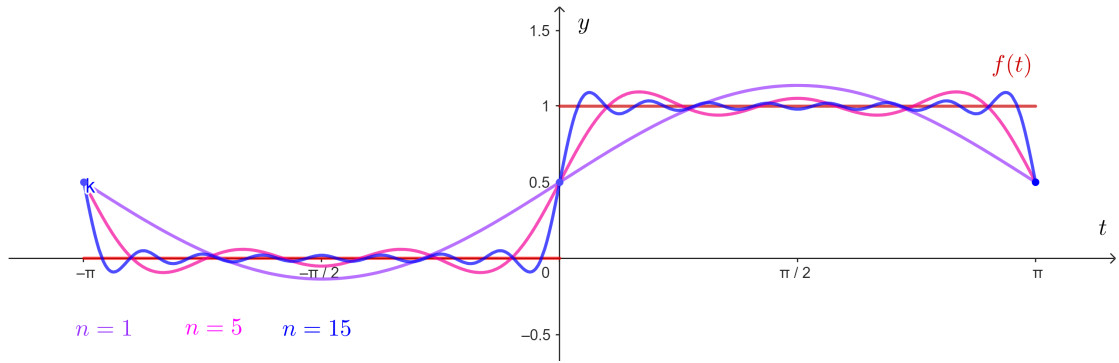


Figura 6 – Aproximação da função  $f(x)$  por série de Fourier com  $n = 1, 5, 15$ .

Fonte: Autor.

### 2.1.1 Séries de Fourier em Senos e em Cossenos

Entre os casos interessantes ao se estudar a representação em séries de Fourier ocorrem quando a função a ser representada é uma função par ou uma função ímpar, pois o primeiro caso reduz a série de Fourier a uma série de cossenos, enquanto que o segundo uma série de senos. Veremos como isso acontece detalhadamente nesta subseção.

Notemos que, se  $f$  é par, então  $f(-t) = f(t)$  e, assim

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

Enquanto que, se  $f$  é ímpar, então  $f(-t) = -f(t)$ , e, daí

$$\int_{-a}^a f(t) dt = - \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 0.$$

Além disso, o produto de duas funções pares é par e o produto de funções ímpares também é par. Enquanto o produto de uma função par e uma função ímpar é ímpar. Com tudo isso, ao analisarmos a série de Fourier, temos que se  $f(t)$  for uma função periódica par de período  $2L$ , então  $f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}$  será uma função par enquanto que  $f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}$  será uma função ímpar. Logo, quando calculamos os coeficiente de Fourier, obtemos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) dt$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0.$$

Portanto, a série de Fourier de uma função par de período  $2L$  tem apenas termos em cosseno

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} \right).$$

Assim temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.3 (Série de Fourier em Cossenos)** *Suponhamos que  $f$  e  $f'$  sejam seccionalmente contínuas em  $-L \leq t < L$  e que  $f$  seja uma função periódica par com período  $2L$ . Então os coeficientes de Fourier de  $f$  são dados por*

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt,$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e

$$b_n = 0,$$

para  $n = 1, 2, \dots$ . Portanto, a representação de  $f(t)$  em série de Fourier é

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Deste modo, esta série é chamada de **Série de Fourier em Cossenos**.

Agora, se  $f(t)$  é ímpar, então  $f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$  é ímpar e  $f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$  é par, ou seja,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

e, com isso, a série de Fourier de uma função ímpar de período  $2L$  tem apenas termos em seno

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right).$$

Assim temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.4 (Série de Fourier em Senos)** *Suponhamos que  $f$  e  $f'$  sejam seccionalmente contínuas em  $-L \leq t < L$  e que  $f$  seja uma função periódica ímpar com período  $2L$ . Então os coeficientes de Fourier de  $f$  são dados por*

$$a_n = 0,$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt,$$

para  $n = 1, 2, \dots$ . Portanto, a representação de  $f(t)$  em série de Fourier é

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Deste modo, esta série é chamada de **Série de Fourier em Senos**.

## 2.2 Aplicações de Série de Fourier

Nesta seção veremos dois exemplos de aplicações das Séries de Fourier. Para visualizarmos melhor como essa teoria pode ser aplicada.

Apresentaremos primeiramente a aplicação de um sistema massa mola, mais precisamente o movimento de uma massa  $m$  numa mola com constante de Hooke  $k$ , sob a influência de uma força externa periódica  $f(t)$ . Seu deslocamento  $x(t)$  a partir do ponto de equilíbrio satisfaz a equação

$$mx'' + kx = F(t) \quad (2.19)$$

cujas solução geral é da forma

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + x_p(t), \quad (2.20)$$

em que  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  é a frequência natural do sistema e  $x_p(t)$  é uma solução particular da equação (2.19). Os valores  $c_1$  e  $c_2$  seriam determinados pelas condições iniciais.

Nossa intenção aqui é utilizarmos séries de Fourier para encontrarmos uma solução particular periódica do problema apresentado na Equação (2.19), que nós denotaremos por  $x_{sp}(t)$  e a chamaremos de solução periódica estacionária.

Assumiremos que  $F(t)$  seja sempre uma função ímpar com período  $2L$  de modo que sua série de Fourier é da forma

$$F(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad (2.21)$$

No caso em que  $\frac{n\pi}{L}$  não seja igual a  $\omega_0$  para nenhum inteiro positivo  $n$ , podemos determinar uma solução periódica estacionária da forma

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad (2.22)$$

simplesmente substituindo as Séries (2.21) e (2.22) na Equação (2.19) e, desta forma, encontrar os coeficientes em (2.22).

Agora, quando existir um termo não-nulo  $B_N \sin\left(\frac{N\pi t}{L}\right)$  na série de Fourier de  $F(t)$  para o qual  $\frac{N\pi}{L} = \omega_0$ , este termo causa uma ressonância pura. A razão disto é que a equação

$$mx'' + kx = B_N \sin(\omega_0 t)$$

tem a solução de ressonância

$$x(t) = -\frac{B_N}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t).$$

A solução correspondente a solução estacionária apresentada na Equação (2.22). Neste caso, a solução é dada por

$$x(t) = -\frac{B_N}{2m\omega_0}t \cos(\omega_0 t) + \sum_{n \neq N} \frac{B_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{m\left(\omega_0^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)}. \quad (2.23)$$

Existe ainda o caso em que ocorre uma ressonância próxima, que é quando um único termo na série-solução é amplificado porque sua frequência é próxima a uma frequência natural  $\omega_0$ .

### 2.2.1 Oscilações Forçadas Amortecidas

Consideremos o movimento de uma massa  $m$  presa tanto a uma mola com constante de Hooke  $k$  quanto a um amortecedor com constante  $c$ , sob a influência de uma força externa *periódica*  $F(t)$ . O deslocamento  $x(t)$  da massa de sua posição de equilíbrio satisfaz a equação

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \quad (2.24)$$

Observe que a solução periódico estacionária da equação (2.24) com  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$  é

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t - \alpha), \quad (2.25)$$

onde

$$\alpha = \arctan\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (2.26)$$

Se  $F(t)$  for uma função ímpar de período  $2L$  com série de Fourier

$$F(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \quad (2.27)$$

então as fórmulas acima fornecem, por superposição, a solução periódica estacionária

$$x_{sp}(t) = \frac{B_n \sin(\omega_n t - \alpha_n)}{\sqrt{(k - m\omega_n^2)^2 + (c\omega_n)^2}}, \quad (2.28)$$

em que  $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$  e  $\alpha_n$  é o ângulo determinado pela Equação (2.26) com este valor de  $\omega$ .

## 2.3 Diferenciação e Integração Termo a Termo de Séries de Fourier

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que diferenciar uma função  $f(t)$  é o mesmo que diferenciar cada um dos termos da série de Fourier correspondente. Do mesmo modo que integrar a função  $f(t)$  é o mesmo que integrar cada um dos termos da série de Fourier correspondente. Ao fim desta seção apresentamos como resolver um Problema de Valor Inicial utilizando as ideias de Fourier.

**Teorema 2.5 (Diferenciação Termo a Termo de Séries de Fourier)** *Suponhamos que a função  $f$  seja contínua para todo  $t$ , periódica com período  $2L$  e que na derivada  $f'$  seja suave por partes para todo  $t$ . Então a série de Fourier de  $f'$  será a série*

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{n\pi}{L} a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi t}{L} \right) + \frac{n\pi}{L} b_n \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \right) \quad (2.29)$$

*obtida por diferenciação termo a termo da série de Fourier*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \right) \quad (2.30)$$

**Demonstração:** Sabemos pelo Teorema de Convergência que a Série de Fourier de  $f'$  converge para  $f'(t)$ , ou seja, que

$$f'(t) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) + \beta_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \right). \quad (2.31)$$

Nosso objetivo é mostrar que as séries nas Equações 2.29 e 2.31 são idênticas. Para isso, suponhamos que  $f'$  seja contínua em toda parte, então

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(t) dt \\ &= \frac{1}{L} \cdot f(t) \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{1}{L} [f(L) - f(-L)] \\ &= \frac{1}{L} [f(L) - f(L)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois, por periodicidade,  $f(L) = f(-L)$ . Agora, para calcularmos

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(t) \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) dt.$$

utilizaremos o Método de Integração por Partes, para isto, tomemos

$$u = \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \quad \text{e} \quad dv = f'(t) dt$$

e, obtemos

$$du = -\frac{n\pi}{L} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi t}{L} \right) dt \quad \text{e} \quad v = f(t),$$

daí

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt &= \frac{1}{L} \left[ f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right]_{-L}^L - \left(-\frac{n\pi}{L}\right) \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{L} \left( f(L) \cos\left(\frac{n\pi L}{L}\right) - f(-L) \cos\left(\frac{-n\pi L}{L}\right) \right) + \\
&\quad + \left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{L} [f(L) \cos(n\pi) - f(-L) \cos(n\pi)] + \frac{n\pi}{L} b_n \\
&= 0 + \frac{n\pi}{L} b_n \\
&= \frac{n\pi}{L} b_n.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\beta_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt.$$

novamente utilizando o Método de Integração por Partes, com

$$u = \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad \text{e} \quad dv = f'(t) dt$$

obtemos

$$du = \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad \text{e} \quad v = f(t)$$

e, assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt &= \frac{1}{L} \left[ f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right]_{-L}^L - \left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{L} \left( f(L) \sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right) + f(-L) \sin\left(\frac{-n\pi L}{L}\right) \right) - \\
&\quad - \left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{L} (f(L) \sin(n\pi) + f(-L) \sin(n\pi)) - \frac{n\pi}{L} a_n \\
&= 0 - \frac{n\pi}{L} a_n \\
&= -\frac{n\pi}{L} a_n.
\end{aligned}$$

Portanto, as séries 2.29 e 2.31 são iguais. ■

**Teorema 2.6 (Integração Termo a Termo de Séries de Fourier)** *Suponhamos que a função  $f$  seja uma função periódica contínua por partes com período  $2L$  e série de Fourier*

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right), \quad (2.32)$$

que pode não convergir. Então

$$\int_0^t f(u) du = \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} \left[ a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) - b_n \left( \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) - 1 \right) \right], \quad (2.33)$$

com a série do lado direito convergente para todo  $t$ . Note que a série em (2.33) é o resultado da integração termo a termo da série em (2.32).

Como consequência dos resultados desta seção podemos resolver problemas de contorno de forma geral

$$ax'' + bx' + cx = f(t), \quad 0 < t < L; \quad (2.34)$$

$$x(0) = x(L) = 0, \quad (2.35)$$

onde a função  $f(t)$  é dada, utilizando soluções em Séries de Fourier.

Precisamos relembrar como resolver este tipo de problema, assim

1. Primeiro estender a definição da função  $f(t)$  ao intervalo  $-L < t < 0$ , de um modo adequado. Então, a função  $f$  se é suave por partes, tem uma série de Fourier

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) + B_n \sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) \right); \quad (2.36)$$

2. Calcular os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$ ;
3. Assumir que a equação diferencial em (2.34) tem a solução  $x(t)$  com uma série de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \quad (2.37)$$

que pode ser diferenciada termo a termo duas vezes;

4. Tentar determinar os coeficientes na Equação (2.37), primeiro substituindo as séries das Equações (2.36) e (2.37) na Equação Diferencial (2.34) e daí igualando os coeficientes de termos semelhantes;
5. E, por último, se a série da Equação (2.37) satisfizer as condições de contorno dadas pela Equação (2.35), temos uma “solução de série de Fourier formal” do problema de contorno original.



### 3 Cordas Vibrantes e a Equação da Onda Bidimensional

Esta seção é dedicada a resolver o problema da corda vibrante. As notas deste capítulo são baseadas em Boyce e Diprima (2006) e Edwards e Penney (1995).

Para deduzir a EDP que modela as vibrações de uma corda, começamos com uma corda uniforme flexível com densidade linear  $\rho$  (em gramas por centímetro ou slugs por pé) esticada sob uma tensão  $T$  (dinas ou onças, ou grama vezes centímetro por segundo ao quadrado) entre os pontos fixos  $x = 0$  e  $x = L$ . Suponhamos que quando a corda vibra no plano  $xy$  em torno de sua posição de equilíbrio, cada ponto se move paralelo ao eixo  $y$ , de modo que podemos denotar por  $y(x, t)$  o deslocamento no instante  $t$  do ponto  $x$  da corda. Então, para qualquer valor fixo de  $t$ , a forma da corda no instante  $t$  é a curva  $y = y(x, t)$ . Assumimos também que a deflexão da corda permanece tão pequena que a aproximação  $\sin \theta = \tan \theta = y_t(x, t)$  seja bastante precisa. Finalmente, assumimos que, em acréscimo às forças de tensão internas que agem tangencialmente à corda, ela receba a ação de uma força vertical externa com densidade linear  $F(x)$  em unidades como dinas por centímetro ou onças por pé ou grama por segundo ao quadrado.

Queremos aplicar a Segunda Lei de Newton do Movimento,  $F = ma$ , ao pequeno segmento da corda de massa  $\rho \Delta x$  correspondente ao intervalo  $[x, x + \Delta x]$ , com  $a$  sendo a aceleração vertical  $y_{tt}(\bar{x}, t)$  de seu ponto médio. Observe que

$$T(x + \Delta x, t) \cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \cos \theta = 0,$$

pois não existe aceleração horizontal.

Além disso, temos que  $H = T \cos \theta$  é a componente horizontal de  $T$  e  $V = T \sin \theta$  é a componente vertical de  $T$ . As componentes verticais satisfazem

$$T(x + \Delta x, t) \sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \sin \theta = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\bar{x}, t),$$

que nada mais é do que  $F = ma$ .

Deste modo, obtemos que

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\bar{x}, t)$$

Fazendo limite com  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\bar{x} \rightarrow x$

$$V(x, t) = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)$$

$$V(x, t) = H(t) \operatorname{tg} \theta = H(t) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$$

assim,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

porque  $H$  é independente de  $x$ . Daí,

$$H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Para movimentos pequenos,  $H = T \cos \theta$  pode ser  $H = T$ , então

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Logo, obtemos a equação de onda unidimensional

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

que modela as vibrações livres de uma corda flexível, onde  $a^2 = \frac{T}{P}$ , ou ainda,

$$y_{tt} = a^2 y_{xx}$$

As extremidades fixas da corda nos pontos  $x = 0$  e  $x = L$ , sobre o eixo  $x$  correspondem às condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = 0. \quad (3.2)$$

O que diz nossa intuição? Fisicamente sugere que o movimento da corda será determinado se especificarmos tanto sua função posição inicial

$$y(x, 0) = f(x), \quad (3.3)$$

para todo  $x \in (0, L)$ , quanto sua função velocidade inicial

$$y_t(x, 0) = g(x), \quad (3.4)$$

para todo  $x \in (0, L)$ . Combinando-se as Equações (3.1) - (3.4), obtemos o Problema de Contorno

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad (3.6)$$

$$y(x, 0) = f(x) \quad (3.7)$$

$$y_t(x, 0) = g(x) \quad (3.8)$$

para todo  $x \in (0, L)$  e todo  $t \geq 0$ , para a função deslocamento  $y(x, t)$  de uma corda livremente vibrante com extremidades fixas, posição inicial  $f(x)$  e velocidade inicial  $g(x)$ .

### 3.1 Superposição de Soluções

Notemos que a Equação da Onda (3.5) é linear, ou seja, qualquer combinação linear  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  de duas soluções da Equação (3.5) também é solução da Equação (3.5) isto segue diretamente da linearidade da diferenciação parcial. Além disso, se  $y_1$  e  $y_2$  satisfizerem separadamente as condições da Equação (3.6), então qualquer combinação linear  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  também a satisfará. As Condições de Contorno (3.6) são chamadas de Condições de Contorno Homogêneas, embora um termo mais descritivo fosse Condições de Contorno Lineares. Em contraste, as Condições de Contorno (3.7) e (3.8) que não são homogêneas, ou seja, são Condições de Contorno Não-Homogêneas.

Nossa estratégia global para resolver o problema de contorno apresentado pelas Equações (3.5)-(3.8) será encontrar funções  $y_1, y_2, y_3, \dots$  que satisfaçam tanto a EDP (3.5) quanto as Condições de Contorno Homogêneas (3.6) e, então, combinar estas soluções por superposição como se elas fossem blocos de construção, na esperança de encontrar uma solução  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots$  que também satisfaça as Condições de Contorno Não-Homogêneas (3.7) e (3.8).

**Exemplo 3.1** *Por substituição direta, podemos verificar rapidamente que cada uma das funções*

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= \cos(2t) \operatorname{sen}(x), \\ y_2(x, t) &= \cos(6t) \operatorname{sen}(3x), \end{aligned}$$

*satisfaz a equação  $u_t = u_{xx}$ . Utilizaremos estas funções para construir uma solução do problema de contorno, com  $0 < x < \pi$  e  $t \geq 0$ , dado por*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \\ y(0, t) &= y(\pi, t) = 0, \\ y(x, 0) &= 2 \operatorname{sen}^3 x = \frac{3}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{20} \operatorname{sen} 3x \\ y_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

*Notemos que, qualquer combinação linear da forma*

$$\begin{aligned} y(x, t) &= c_1 y_1(x, t) + c_2 y_2(x, t) + c_3 y_3(x, t) \\ &= c_1 \cos(2t) \operatorname{sen}(x) + c_2 \cos(6t) \operatorname{sen}(3x) \end{aligned}$$

*é solução da Equação da Onda, pois*

- $\frac{\partial}{\partial t} (y(x, t)) = -2c_1 \operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen}(x) - 6c_2 \operatorname{sen}(6t) \operatorname{sen}(3x)$
- $\frac{\partial^2}{\partial t^2} (y(x, t)) = -4c_1 \cos(2t) \operatorname{sen}(x) - 36c_2 \cos(6t) \operatorname{sen}(3x)$
- $\frac{\partial}{\partial x} (y(x, t)) = c_1 \cos(2t) \cos(x) + 3c_2 \cos(6t) \cos(3x)$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (y(x, t)) = -c_1 \cos(2t) \operatorname{sen}(x) - 9c_2 \cos(6t) \operatorname{sen}(3x)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -4c_1 \cos(2t) \operatorname{sen}(x) + 36c_2 \cos(6t) \operatorname{sen}(3x) \\ &= 4 \cdot (-c_1 \cos(2t) \operatorname{sen}(x) - 9c_2 \cos(6t) \operatorname{sen}(3x)) \\ &= 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Agora,

$$y(x, 0) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \operatorname{sen} 3x,$$

donde,

$$c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \operatorname{sen} 2x + c_3 \operatorname{sen} 3x = \frac{3}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{20} \operatorname{sen} 3x,$$

logo,  $c_1 = \frac{3}{2}$  e  $c_2 = -\frac{1}{20}$ . Mais ainda,

$$y(-\pi, t) = c_1 \cos(2t) \operatorname{sen}(-\pi) + c_2 \cos(6t) \operatorname{sen}(3 \cdot (-\pi)) = 0$$

e

$$y(\pi, t) = c_1 \cos(2t) \operatorname{sen}(\pi) + c_2 \cos(6t) \operatorname{sen}(3 \cdot (\pi)) = 0.$$

Portanto, uma solução do problema de contorno dado é

$$u(x, t) = \frac{3}{2} \cos(2t) \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{20} \cos(6t) \operatorname{sen}(3x).$$

O problema de contorno no exemplo acima é excepcionalmente simples no sentido de que apenas um número finito de soluções homogêneas é necessário para satisfazer por superposição a condição de contorno não-homogênea. É mais comum que seja necessária uma sequência infinita  $y_1, y_2, y_3, \dots$  de funções satisfazendo a Equação (3.5) e as Condições de Contorno Homogêneas (3.6). Neste caso, escrevemos a série infinita

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n y_n(x, t), \quad (3.9)$$

E então tentamos determinar os coeficientes  $c_1, c_2, c_3, \dots$  de modo a satisfazer as Condições de Contorno Não-Homogêneas (3.7) e (3.8). O seguinte princípio resume as propriedades desta série infinita que devem ser verificadas para garantir que tenhamos uma solução do problema de contorno (3.5)-(3.8).

**Teorema 3.1 (Princípio da Superposição de Soluções)** *Suponhamos que cada uma das funções  $y_1, y_2, y_3, \dots$  satisfazem tanto a EDP (3.5), como as condições de contorno homogêneas em (3.6). Suponha também que os coeficientes da Equação (3.9) sejam escolhidos de modo a satisfazerem os três critérios a seguir:*

1. Para  $-L < x < L$  e  $t > 0$ , a série converge e a função que ela determina é contínua e diferenciável termo a termo (uma vez em relação a  $t$  e duas vezes em relação a  $x$ );
2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n y_n(x, 0) = f(x)$ ;
3. A função  $y(x, t)$  determinada pela equação (3.9) no interior da faixa  $0 \leq x \leq L$  e  $t \geq 0$ , e pelas condições de contorno em (3.6), (3.7) e (3.8) na sua fronteira, é contínua.

Então  $y(x, t)$  é uma solução do problema de contorno em (3.5) - (3.8).

No método de separação de variáveis descrito a seguir, concentramos nossa atenção em encontrar as soluções  $y_1, y_2, y_3, \dots$  satisfazendo as condições homogêneas e em determinar os coeficientes de modo que a série em (3.9) satisfaça as condições não-homogêneas. Neste ponto, temos apenas uma solução em série formal do problema de contorno - que está sujeita a verificação das condições de continuidade e diferenciabilidade discutidas na Seção 2.3 juntamente com o Princípio de Superposição de Soluções. Se as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  na Condições de Contorno Não-Homogêneas (3.7) e (3.8), respectivamente, forem suaves por partes, teremos uma solução em série formal que sempre satisfaz estas restrições e, além disso, é a única solução do problema de contorno.

## 3.2 Separação de Variáveis

A equação da onda em (3.5) é linear, qualquer combinação linear de duas soluções é novamente solução., para observarmos isso, basta considerarmos  $y_1(x, t)$  e  $y_2(x, t)$  soluções da Equação (3.5), então

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2},$$

daí, ao considerarmos a  $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ , teremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 (\alpha y_1 + \beta y_2)}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2 (\alpha y_1)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (\beta y_2)}{\partial t^2} \\ &= \alpha \left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \right) + \beta \left( \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \right) \\ &= \alpha \left( a^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \right) + \beta \left( a^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right) \\ &= a^2 \left( \alpha \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \right) + a^2 \left( \beta \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

e, com isso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= a^2 \left( \frac{\partial^2 (\alpha y_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\beta y_2)}{\partial x^2} \right) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 (\alpha y_1 + \beta y_2)}{\partial x^2} \\ &= a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Infelizmente, as condições de contorno em (3.7) e (3.8) são não homogêneas, ou seja, devemos lidar com duas condições de contorno não-homogêneas.

O método de separação de variáveis envolve superposição de soluções, satisfazendo as condições homogêneas para obter uma solução que também satisfaz uma única condição de contorno não-homogênea. Para adaptar a técnica à situação presente, adotamos a estratégia “dividir para vencer”, ou seja, dividimos o problema de contorno (3.5)-(3.8) nos dois problemas de contorno separados:

Problema A

$$\begin{aligned}y_{tt} &= a^2 y_{xx} \\ y(0, t) &= y(L, t) = 0, \\ y(x, 0) &= f(x), \\ y_t(x, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Problema B

$$\begin{aligned}y_{tt} &= a^2 y_{xx} \\ y(0, t) &= y(L, t) = 0, \\ y(x, 0) &= 0, \\ y_t(x, 0) &= g(x).\end{aligned}$$

Se pudermos encontrar separadamente uma solução  $y_A(x, t)$  do Problema A e uma solução  $y_B(x, t)$  do Problema B, sua soma  $y(x, t) = y_A(x, t) + y_B(x, t)$  será uma solução do problema original em (3.5) - (3.8) pois

$$\begin{aligned}y(x, 0) &= y_A(x, 0) + y_B(x, 0) = f(x) + 0 = f(x) \\ y_t(x, 0) &= (y_A)_t(x, 0) + (y_B)_t(x, 0) = 0 + g(x) = g(x).\end{aligned}$$

Portanto, ataquemos o Problema A utilizando o método de separação de variáveis. A substituição

$$y(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.10)$$

em  $y_{tt} = a^2 y_{xx}$  nos leva a

$$XT'' = a^2 X''T;$$

novamente dividimos ambos os lados por  $a^2 XT$  o que implica em

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}. \quad (3.11)$$

Aqui, temos do lado direito uma função que depende de  $x$  e do lado esquerdo uma função que depende de  $t$ , elas só podem ser iguais para todo  $x$  e todo  $t$  se cada uma for igual a uma constante. Consequentemente, podemos concluir que

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda \quad (3.12)$$

para alguma constante  $\lambda$ ; como podemos observar, o sinal de menos aqui foi inserido apenas para facilitar o reconhecimento do problema de autovalor na Equação (3.15), dado abaixo. Assim, nossa EDP separa-se em duas equações diferenciais ordinárias

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.13)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \quad (3.14)$$

As condições de contorno

$$y(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad y(L, t) = X(L)T(t) = 0.$$

exigem que  $X(0) = X(L) = 0$ , se  $T(t)$  for uma função não-trivial. Então  $X(x)$  deve satisfazer o problema de autovalor agora familiar

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ X(0) &= 0, \quad X(L) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assim chegamos a um Problema de Autovalor e, este tipo de problema admite solução não trivial se, e somente se,  $\lambda$  for um dos autovalores

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.16)$$

e a autofunção associada a  $\lambda_n$  é

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.17)$$

Agora voltamos nossa atenção para a equação (3.14). A condição inicial homogênea

$$y_t(x, 0) = X(x)T'(0) = 0$$

implica que  $T'(0) = 0$ . Portanto, a solução  $T_n(t)$  associada ao autovalor  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$  deve satisfazer as condições

$$T_n'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} T_n = 0, \quad T_n'(0) = 0, \quad (3.18)$$

cuja solução geral é dada por

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{L} + B_n \sin \frac{n\pi at}{L}, \quad (3.19)$$

que possui derivada

$$T_n'(t) = \frac{n\pi at}{L} \left( -A_n \sin \frac{n\pi at}{L} + B_n \cos \frac{n\pi at}{L} \right)$$

que satisfaz a condição  $T_n'(0) = 0$  se  $B_n = 0$ . Assim, uma solução não-trivial de (3.18) é

$$T_n(t) = \cos \frac{n\pi at}{L}. \quad (3.20)$$

Combinando os resultados em (3.17) e (3.20) para obter a sequência infinita de funções-produto

$$y_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \cos \frac{n\pi at}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.21)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ . Cada uma destas funções blocos de construção satisfaz tanto a equação de onda  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ , como as condições homogêneas no Problema A. Por superposição, obtemos a série infinita

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos \frac{n\pi at}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.22)$$

Agora falta apenas escolher os coeficientes  $\{A_n\}$  para que seja satisfeita as condição de contorno não-homogênea

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x), \quad (3.23)$$

para todo  $0 \leq x \leq L$ . Mas isto será a série de Fourier de senos de  $f(x)$  em  $[0, L]$ , desde que escolhamos

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (3.24)$$

para cada  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Assim, vemos finalmente que uma solução do Problema A é

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos \frac{n\pi at}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.25)$$

com os coeficientes  $\{A_n\}_0^\infty$  calculados utilizando a Equação (3.24). Note que a série em (3.25) é obtida da série de senos de Fourier de  $f(x)$  simplesmente se inserindo o fator  $\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$  no  $n$ -ésimo termo. Note também que este termo tem frequência (circular)  $\omega_n = \frac{n\pi a}{L}$ .

**Exemplo 3.2** Consideremos o problema de contorno, com  $-\pi \leq x \leq \pi$  e  $t \geq 0$ , dado por

$$\begin{cases} y_{tt} = 4y_{xx}, \\ y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \\ y(x, 0) = 2\sin^3 x = \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 3x, \\ y_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Observemos que aqui temos  $L = \pi$  e  $a = 2$ . Além disso, pelo fato de já termos as séries de Fourier de senos dada explicitamente no próprio problema com coeficientes  $A_1 = \frac{3}{2}$ ,  $A_3 = -\frac{1}{2}$  e  $A_n = 0$  nos demais casos. Assim, obtemos a solução do problema de contorno, que é dada por

$$y(x, t) = \frac{3}{2} \cos 2t \sin x - \frac{1}{2} \cos 6t \sin 3x.$$



Na Figura 7 verificamos o que acontece para alguns valores de  $t$ .

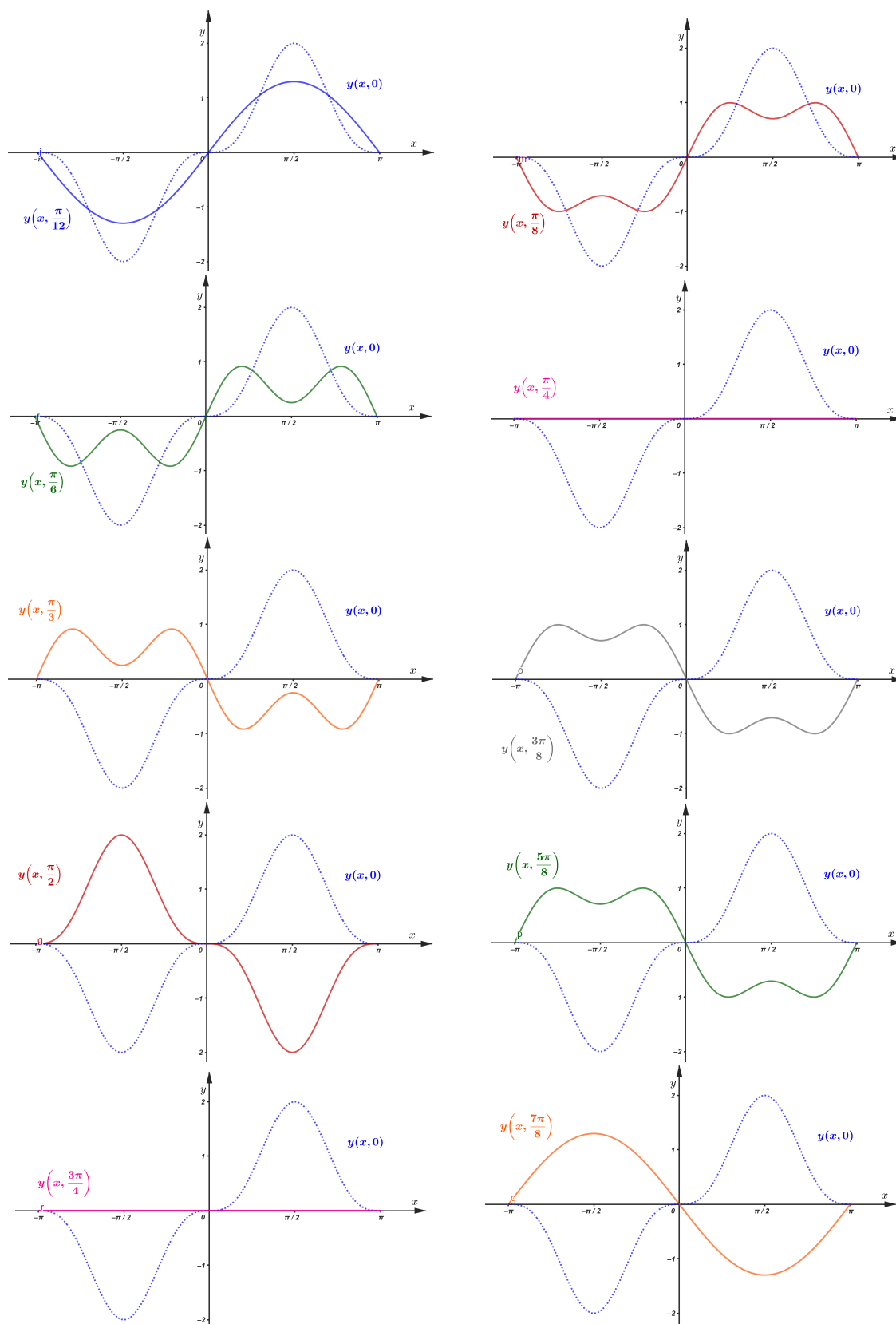


Figura 7 – Gráfico da função  $y(x, t)$  para alguns valores de  $t$ .

Fonte: Autor.

## 4 Séries de Fourier em Música

Nesse capítulo apresentaremos uma aplicação da Equação da Onda para modelar as ondas geradas por um instrumento cujas extremidades estão fixas. As notas deste capítulo são baseadas em Errede (2012).

Ao modelarmos o som produzido por um instrumento de corda como arpa, bandolim, viola, violão, violino, entre outros, nos deparamos com uma aplicação da equação da onda, que é modelada a partir das condições de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, \\ y(x, 0) = f(x) \\ y_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

para todo  $x \in (0, L)$ , em que  $L$  é o comprimento da corda, e  $t \geq 0$  é o tempo decorrido a partir do momento em que o som é produzido. Para a função deslocamento  $y(x, t)$  de uma corda livremente vibrante com extremidades fixas, posição inicial  $f(x)$  e velocidade inicial  $g(x)$ . Considerando  $a = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$  representa a velocidade de propagação da onda considerando uma onda com densidade linear uniforme  $\mu$  (massa por unidade de comprimento) e sujeita a uma tensão  $\mu$ .

Ao fazermos  $y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , como vimos anteriormente, recaímos em dois problemas de contorno, um dependente do espaço

$$\begin{cases} X'' = -\lambda X \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

e outro do tempo

$$\begin{cases} T'' = -\lambda a^2 T \\ T(0) = f(x) \\ T'(0) = g(x) \end{cases}$$

O primeiro problema já foi discutido anteriormente e possui soluções da forma

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Discutiremos aqui o significado dessa solução para compreendermos melhor o problema geral.

Para isso, precisamos conhecer uma propriedade importante ao se modelar o som, que são as frequências normais  $f_n$  denominadas frequências normais produzidas pelo som,

que formam o espectro de vibração das cordas. Elas são dadas por

$$f_n = \frac{a}{\lambda_n},$$

em que  $\lambda_n$  são os autovalores,  $n = 1, 2, \dots$ , e, com isso

$$f_n = \frac{na}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}.$$

Também é importante observar as energias próprias que são dadas por

$$E_n = \frac{1}{4} M \omega_n^2 A_n^2$$

No caso da corda, todas as frequências são múltiplos inteiros de uma frequência básica ( $n = 1$ ), o modo fundamental ou primeiro modo harmônico.

O modo de vibração mais baixo, também conhecido como fundamental, ocorre quando  $n = 1$  e, com isso, o modo próprio desta onda é chamado de primeiro harmônico com  $f_1 = \frac{1a}{2L}$  e, como  $\lambda_1 = 2L$ , ou seja,  $L = \frac{\lambda}{2}$ , a solução correspondente é  $X_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ , como mostramos na Figura 8:

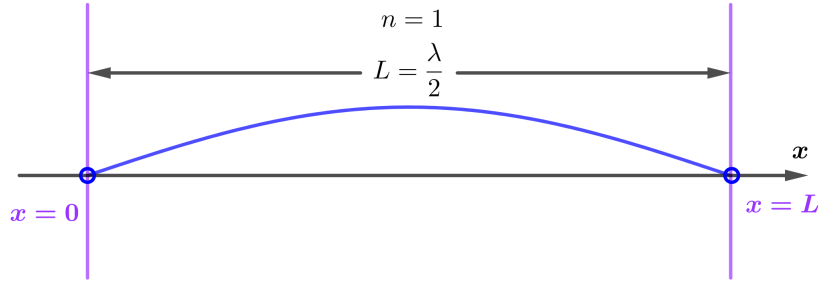


Figura 8 – Primeiro Harmônico.  
Fonte: Autor Adaptado de Errede (2012) .

Como podemos observar ao analisar o gráfico, o primeiro harmônico não tem nós na sua função de onda  $X(x)$ .

O próximo modo próprio mais elevado,  $n = 2$ , é conhecido como segundo harmônico, também conhecido como primeiro sobretom, com  $f_2 = \frac{2a}{2L} = \frac{a}{L}$  e, assim,  $\lambda_1 = L$ , ou seja,  $L = \lambda$ , a solução correspondente é  $X_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ , como mostramos na Figura 9:

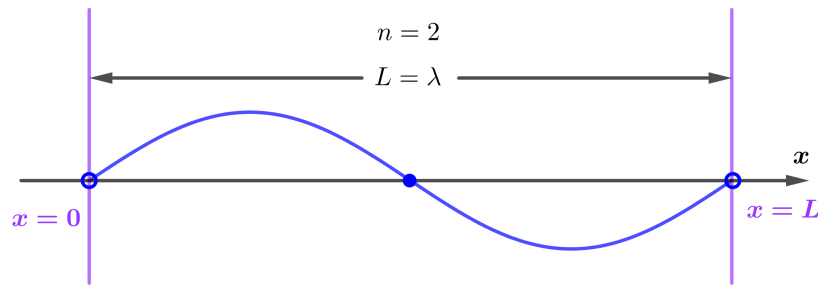


Figura 9 – Segundo Harmônico.  
Fonte: Autor Adaptado de Errede (2012) .

Como podemos observar na Figura 9, o segundo harmônico tem um nó em sua função de onda  $X_2(x)$  em  $x = \frac{L}{2}$

Já o próximo harmônico mais elevado, quando  $n = 3$ , é conhecido como terceiro harmônico, também conhecido segundo sobretom, com frequência  $f_3 = \frac{3a}{2L} = e$ , assim,  $\lambda_3 = \frac{3L}{2}$ , ou seja,  $L = \frac{2\lambda}{3}$ , a solução correspondente é  $X_3(x) = A_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ , como mostramos na Figura 10:

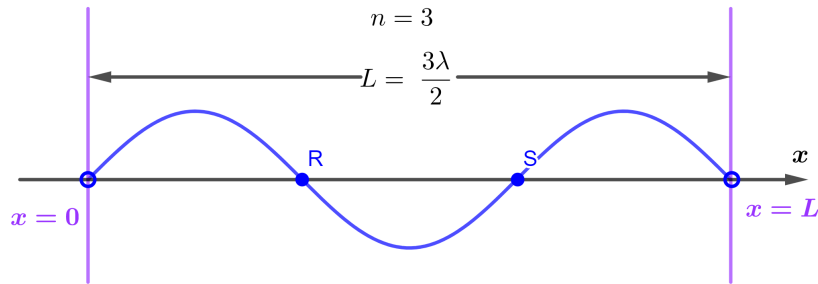


Figura 10 – Terceiro Harmônico.  
Fonte: Autor Adaptado de Errede (2012) .

Como podemos observar na Figura 10, o terceiro harmônico tem dois nós em sua função de onda  $X_2(x)$  em  $x = \frac{L}{2}$ .

Com raciocínio análogo temos  $n - 1$  nós na função de onda espacial  $X_n(x)$ .

Agora, ao analisarmos as soluções da Equação temporal. Como as extremidades da corda nos impõem restrições diretas às soluções permitidas  $T(t)$  da equação temporal, assim, soluções em ambas as formas  $\sin(\omega t)$  ou  $\cos(\omega t)$ . Além disso, uma vez que os comprimentos de onda espaciais e as frequências temporais são intimamente relacionados entre si através de  $f = \frac{a}{\lambda}$  e, deste modo, as frequências próprias

$$f_n = \frac{a}{\lambda_n} = \frac{n \cdot a}{2L}$$

e, com isso

$$\omega = ak_n = \frac{n\pi a}{L}$$

temos que as soluções permitidas para a equação temporal  $T(t)$  e, conseqüentemente,  $T_n(t)$ , com ambas as soluções  $\sin(\omega t)$  ou  $\cos(\omega t)$ .

Observemos também que

$$f_n = \frac{n \cdot a}{2L} = n \frac{a}{2L} = a f_1,$$

para  $n = 1, 2, \dots$ . Portanto,  $\lambda_n = \frac{\lambda_1}{n}$ , com  $\lambda_1 = 2L$ .

Assim, ao observarmos a forma explícita da corda vibrante num determinado instante de tempo conseguimos inferir a quantidade relativa de senos e cossenos permitida, isso porque especifica para cada modo próprio qual é a sua fase e quão longo está do seu ciclo de oscilação nesse tempo. Por conveniência tomaremos  $t = 0$  aqui, pois são nossas condições iniciais.

Como  $T$  deve satisfazer a equação  $T'' = -\lambda a^2 T$ , para cada valor  $\lambda_n$ , as soluções a informação da fase temporal nas soluções próprias permitidas,  $T_n(t)$ , da equação temporal é dada por

$$T_n(t) = b_n \sin(\omega_n t) + c_n \cos(\omega_n t),$$

em que  $b_n^2 + c_n^2 = 1$ . Deste modo, as soluções das equações temporais tem a forma:

$$T_n(t) = \sin(\omega_n t + \delta_n) \quad \text{ou} \quad T_n(t) = \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

em que

$$\delta_n = \arctan\left(\frac{c_n}{b_n}\right), \quad \varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{c_n}\right), \quad \delta_n = \varphi_n + \frac{\pi}{2}.$$

Com tudo isso, a solução é dada por

$$\begin{aligned} y_n(x, t) &= X_n(x) T_n(t) \\ &= A_n \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) [b_n \sin(\omega_n t) + c_n \cos(\omega_n t)] \\ &= A_n \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left[ b_n \sin\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) + c_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) \right] \\ &= A_n \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin(\omega_n t + \delta_n) \\ &= A_n \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin(\omega_n t + \delta_n) \end{aligned}$$

ou, se preferirmos,

$$\begin{aligned} y_n(x, t) &= X_n(x) T_n(t) \\ &= A_n \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) [b_n \sin(\omega_n t) + c_n \cos(\omega_n t)] \\ &= A_n \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin(\omega_n t + \delta_n) \\ &= A_n \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi a t}{L} + \delta_n\right) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 y_n(x, t) &= X_n(x)_n T(t) \\
 &= A_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) [b_n \operatorname{sen}(\omega_n t) + c_n \cos(\omega_n t)] \\
 &= A_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \\
 &= A_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi at}{L} + \varphi_n \right)
 \end{aligned}$$

mas também podemos representar da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 y_n(x, t) &= X_n(x)_n T(t) \\
 &= A_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) [b_n \operatorname{sen}(\omega_n t) + c_n \cos(\omega_n t)] \\
 &= A_n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi at}{L} + \delta_n \right)
 \end{aligned}$$

Os coeficientes de amplitude do deslocamento,  $A_n$ , são também formalmente determinados pelas condições iniciais, ou seja, pelo conteúdo harmônico da corda vibrante no tempo  $t = 0$ . Fisicamente, Isto significa que, fisicamente, a configuração detalhada da corda vibrante no tempo  $t = 0$ , por exemplo, um triângulo, dente de serra ou onda quadrada, utilizando Séries de Fourier, especifica completamente o conteúdo harmônico exato, ou seja, os valores  $f_n$  permitidos, as amplitudes harmônicas, valores de  $A_n$ , e as fases,  $\delta_n$  ou  $\varphi_n$ . Por exemplo, para uma onda estacionária simétrica de tipo triangular, cuja simetria de reflexão ocorre em torno do seu ponto médio, apenas os coeficientes ímpares,  $A_{2n-1}$ , são diferentes de zero, enquanto que uma onda estacionária assimétrica do tipo triangular, sem simetria de reflexão em torno do seu ponto médio, tanto os coeficientes pares como os coeficientes ímpares,  $A_n$ , são diferentes de zero, já para uma onda quadrada que também tem simetria de reflexão em torno do seu ponto médio, mais uma vez só os coeficientes ímpares,  $A_{2n-1}$ , são diferentes de zero.

Assim, para conseguirmos modelar adequadamente a solução precisamos conhecer as condições iniciais dadas no problema.

Por exemplo, se tivermos as condições iniciais posicionais forem as cordas estarem presas em ambas as extremidades e se as condições iniciais temporais forem o  $y(x, 0) = 2\operatorname{sen}^3(x)$ , com  $y_t(x, 0) = 0$ , recaímos no caso apresentado no Exemplo 3.2.

## 5 *Considerações finais*

Neste estudo, uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra linear e Geometria Analítica foi desenvolvida inicialmente com o objetivo de estudar Séries de Fourier com ênfase em equações de onda utilizando métodos de separação de variáveis. Normalmente esse tópico não é abordado nos cursos de licenciatura em Matemática, no entanto a Equação da Onda fornece o aprofundamento de algumas disciplinas, tais como Matemática Elementar I e II, Geometria Analítica, Álgebra Linear, além de Cálculos Diferenciais e Integrais, além disso, também são discutidas as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), vistas na disciplina de Cálculo IV, e as Equações Diferenciais Parciais (EDP's) não abordada no curso.

É também digno de nota que neste estudo de Equações Diferenciais e suas aplicações, a importância das Equações de Onda foi prontamente reconhecida não apenas para a Matemática, mas também para a Física e a Engenharia, em particular no estudo de dinâmica de fluídos. Este trabalho proporciona, portanto, a oportunidade de adquirir conhecimentos que serão úteis durante estudos de pós-graduação em diversas áreas, incluindo: Matemática Pura e Aplicada.

Como licencianda em Matemática, este curso foi a base da minha formação profissional. Ao concluir alguns estudos durante a graduação, poderei retomar e ampliar meus conhecimentos matemáticos, e relembrando alguns dos assuntos menores que foram aprofundados durante este estudo. Também realizar um estudo mais aprofundado da modelagem de instrumentos de corda como discutido aqui e também de outros que não são modelados da mesma forma, como o piano, que devido à própria estrutura de dispersão do som envolvem uma derivada de quarta ordem. Isso será um estudo muito interessante.

## Referências

- ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados**. 4. ed. São Paulo: Escrituras, 2006.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, Tradução de Valéria de Magalhães Iório 2006.
- CERVO, A. L; BERVIAN, P. A.; SILVA, R. **Metodologia Científica**. 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.
- DE CARVALHO COVO, Carlos Cesar. **Modelagem Matemática Computacional de Efeitos em Ondas Sonoras**. 2016. 78 f. Trabalho de Conclusão de Curso (PROFMAT) – Universidade Federal do Paraná – Departamento de Matemática, Paraná, 2016.
- DEPIZOLI, Carlos Antonio. **Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas**. 2015. 87f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Curitiba, 2015.
- DONOSO J. P. *et al.* A física do violino, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 2, 2305-1-2305-21, 2008.
- EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. **Equações diferenciais elementares com problemas de contorno**. 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995.
- ERREDE, S. Mathematical Musical Physics of the Wave Equation. **PHYS 406 Acoustical Physics and Physics of Musical Instruments Lecture Notes**. 2012. Disponível em: <[https://courses.physics.illinois.edu/phys406/sp2017/Lecture\\_Notes/P406POM\\_Lecture\\_Notes/Mathematical\\_Musical\\_Physics\\_of\\_The\\_Wave\\_Equation.pdf](https://courses.physics.illinois.edu/phys406/sp2017/Lecture_Notes/P406POM_Lecture_Notes/Mathematical_Musical_Physics_of_The_Wave_Equation.pdf)> acesso em 12 ago 2023.
- FOURIER, Jean Baptiste Joseph. **Théorie Analytique de la Chaleur**. Paris: Firmin Didot, 1822. Disponível em <<http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-19706>> Acesso em 20 nov 2022.
- GANDULFO, Roberto Oscar. Séries de Fourier e convergência. **Matemática Universitária**, v. 11, p. 27-52, 1990.
- GEOGEBRA. **GeoGebra: Aplicativos Matemáticos**. Disponível em <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>. Acesso em: 7 dez 2022.



- KANDUS, Alejandra; GUTMANN, Friedrich Wolfgang; CASTILHO, Caio Mário Castro de. A física das oscilações mecânicas em instrumentos musicais: exemplo do berimbau. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 4, 427-433, 2006.
- NASCIMENTO, S. A. Espectro Sonoro da Flauta Transversal. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 2. p. 2305-1-2305-5, 2015.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor**. v. 2. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2018.
- PEREIRA, Marcos do Carmo. **Matemática e Música: De Pitágoras aos dias de hoje**. 2013. 91f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Programa de Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional - PROFMAT, Rio de Janeiro, 2013.
- PIFER, Anderson; AURANI, Katya Margareth. A teoria analítica do calor de Joseph Fourier: uma análise das bases conceituais e epistemológicas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, p. 1603-1-1603-9, 2015.
- RAMALHO JR., F.; FERRARO, N.G.; SOARES, P.T. **Os fundamentos da física**. v. 2. 6. ed. São Paulo: Moderna, 1996.
- RISKEDAL, Espen. **Drum Analysis**. 2002. 97f. Thesis (PHD). Departament of Informatics, University of Bergen, 2002.
- ROCHA, José Fernando (Ed.). **Origens e evolução das ideias da física**. 2. ed. Salvador: EDUFBA, 2015.
- RODRIGUES J. F. A Matemática e a Música. **Revista Colóquio/Ciências**, n. 23, 1999, p. 17-32.
- SANTOS, Eduardo de Melo dos; MOLINA, C.; TUFAILE, Adriana Pedrosa Biscaia. Violão e guitarra como ferramentas para o ensino de física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, n. 2, p. 2507-1-2507-7, 2013.
- SIMAS, C. M. C. **Consonance in Music and Mathematics: Application to Temperaments and Orchestration**, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2014. Disponível em: <<https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1689244997255368/Extended20Abstract.pdf>> acesso em 10 mai 2023.
- VIOLA, Olavo; PIOVESAN, Erick. Música: um estudo físico matemático sobre o som através da série de Fourier e do núcleo de Fejér com o uso de ferramentas espectrais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 44, n. e20220175-1-e20220175-9, 2022.
- WISNIK, J. M. **O som e o sentido**. 2. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2014.