Universidade Federal de Alfenas

**Nicoli Prosperi Pereira**

# *Contribuições da programação linear para o ensino de matemática*

Alfenas/MG

2023

**Nicoli Prosperi Pereira**

# *Contribuições da programação linear para o ensino de matemática*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Pesquisa Operacional e Ensino. Orientação: Anderson José de Oliveira. Co-orientação: Andréa Cardoso.

Alfenas/MG

2023

**Nicoli Prosperi Pereira**

***Contribuições da programação linear para o ensino de matemática***

A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Monografia apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Pesquisa Operacional e Ensino.

Aprovado em: 29 / 11 / 2023

Banca Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
ANDERSON JOSE DE OLIVEIRA
Data: 11/12/2023 15:27:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Anderson José de Oliveira
Instituto de Ciências Exatas
Orientador

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE CLAUDINEI FERREIRA
Data: 11/12/2023 15:34:02-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Claudinei Ferreira
Instituto de Ciências Exatas
Avaliador 1

gov.br Documento assinado digitalmente
CATIA REGINA DE OLIVEIRA QUILLES QUEIROZ
Data: 11/12/2023 16:21:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz
Instituto de Ciências Exatas
Avaliadora 2

Profa. Dra. Angela Leite Moreno
Instituto de Ciências Exatas
Suplente

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por Sua graça e cuidado que estiveram sempre presentes em minha vida e que me fortaleceram ao longo desta jornada acadêmica.

Gostaria de expressar também, minha sincera gratidão a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso. Este projeto não teria sido possível sem o apoio, orientação e encorajamento de muitas pessoas incríveis.

Primeiramente, quero agradecer ao meu orientador, Anderson José de Oliveira e a minha co-orientadora, Andréa Cardoso, pela orientação valiosa e paciência demonstrada ao longo deste processo. Suas orientações foram fundamentais para a construção deste trabalho.

Também quero agradecer à minha família, em especial aos meus pais, por seu amor incondicional, apoio e encorajamento ao longo de toda a minha jornada acadêmica. Agradeço aos meus amigos e colegas de curso, que compartilharam suas ideias e experiências, tornando esta jornada mais rica e significativa. Juntos, enfrentamos desafios e celebramos conquistas, e estou profundamente grata por ter compartilhado esses momentos com vocês.

Por fim, quero também estender meus agradecimentos aos professores e funcionários da Universidade Federal de Alfenas, que proporcionaram um excelente ambiente de aprendizado e os recursos necessários para a realização deste trabalho.

Este TCC representa não apenas a minha dedicação e esforço, mas também a generosidade e apoio daqueles ao meu redor. Estou profundamente grata por todas as contribuições que tornaram este projeto uma realidade.

Obrigada a todos.

# Resumo

A Pesquisa Operacional (PO) é uma área da Matemática Aplicada que utiliza elementos de Álgebra Linear, de programação, entre outros, para solucionar problemas envolvendo a tomada de decisão, com base em argumentações científicas, através da programação linear e da programação não-linear. Por ter aplicabilidade nas mais diversas áreas, como Administração, Economia, Biologia, Logística, entre outras, tem se mostrado uma área promissora e com muitas questões a serem respondidas. Este trabalho tem como objetivos: estudar as contribuições da Álgebra Linear e da programação em problemas de programação linear e, devido à proximidade de alguns casos particulares associados a esses assuntos, com os conteúdos de Geometria Plana, Geometria Analítica e funções, estudados na Educação Básica, apresentar algumas contribuições da Programação Linear no ensino, além de uma proposta de intervenção educativa usando a Programação Linear e a tendência resolução de problemas, com o intuito de colaborar para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. A metodologia utilizada foi de natureza quantitativa e qualitativa, dado que foram realizadas revisões bibliográficas de livros, artigos, entre outros documentos, que tratam dos assuntos de Pesquisa Operacional ou de sua aplicabilidade na Educação Básica, além de um relato de experiência associado à aplicação de uma intervenção relacionada à aplicabilidade da Pesquisa Operacional no ensino. Dentre os resultados deste trabalho estão a elaboração de um material que contribua para os próximos estudos na área de Pesquisa Operacional e sua aplicabilidade no ensino e um planejamento de uma aplicação da Pesquisa Operacional no ensino, usando a tendência resolução de problemas, como proposta de atividade que contribua para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

**Palavras-chave:** Matemática; Pesquisa Operacional; Educação Matemática.

# Abstract

Operational Research (OR) is an area of Applied Mathematics that uses elements of linear algebra, programming, among others, to solve of involved in decision making, based on scientific arguments, through linear programming and non-linear programming . As it has applicability in the most diverse areas, such as Administration, Economics, Biology, Logistics, among others, it has proven to be a promising area with many questions to be answered. This work aims to: study the contributions of linear algebra and programming in linear programming problems and, due to the proximity of some particular cases associated with these subjects, with the contents of plane geometry, analytics geometry and functions, studied in Basic Education, present some contributions of Linear Programming in teaching, in addition to a proposal for an educational intervention using Linear Programming and the Problem Solving trend, with the aim of contributing to the process of teaching and learning Mathematics. The methodology used will be quantitative and qualitative, given that bibliographical reviews of books, articles, among other documents will be carried out, which deal with Operational Research subjects or their applicability in Basic Education, in addition to an experience report associated with the application of an intervention related to the applicability of Operational Research in Teaching. Among the results of this work is the elaboration of a material that will contribute to future studies in the area of Operational Research and its applicability in teaching and planning an application of Operational Research in teaching, using the Problem Solving trend, as an activity proposal which contributes to the process of teaching and learning Mathematics.

**Keywords:** Mathematics; Operational Research; Mathematics Education.

# Lista de ilustrações

# Sumário

# 1 *INTRODUÇÃO*

Antes de explorarmos as propostas deste trabalho, considera-se importante compreender a trajetória da Pesquisa Operacional (PO), desde suas raízes até sua aplicação no contexto do ensino. Nesse sentido, será apresentado um relato histórico embasado na referência [1].

Ao se buscar dados sobre a origem da PO, encontra-se no trabalho do físico e matemático grego Arquimedes, um dos prenúncios da PO, a idealização da defesa de Siracusa baseada em estudos científicos. Essa é uma das influências precursoras da PO, entretanto, muitos séculos depois, durante a Primeira Revolução Industrial, é que surgiram os primeiros problemas que mais tarde seriam seu foco de estudos.

Mesmo que hoje esses ensaios, durante a Primeira Revolução Industrial, sejam considerados estudos de PO, sabe-se que existem ensaios preliminares que nem sempre são incorporados à nova disciplina. Além disso, o nome Pesquisa Operacional, com o significado de emprego da pesquisa científica para auxiliar o dirigente, é relativamente novo, sendo usado pela primeira vez na Grã-Bretanha, durante a Segunda Guerra Mundial.

Entretanto, durante a Primeira Guerra Mundial, Lanchester, na Inglaterra e Thomas Edison, nos Estados Unidos, desenvolveram estudos sobre a guerra por meio de simulações através de modelos matemáticos e apesar desses estudos não terem sido usados durante a Primeira Guerra Mundial, pode-se afirmar que foram os primeiros ensaios da Pesquisa Operacional.

Em 1934, na Inglaterra, com a criação do Comitê para o Estudo Científico da Defesa Aérea, e um ano depois com o surgimento do radar e os estudos envolvendo a detecção de aviões inimigos, foram formadas equipes constituídas por cientistas e militares, para trabalhar com atividades dessa natureza. Então, pouco antes da Segunda Guerra Mundial já haviam equipes como essas, trabalhando com o objetivo de localizar objetos no espaço por meio da nova tecnologia de radar.

Após a Segunda Guerra Mundial, os exércitos dos Estados Unidos e do Reino Unido estabeleceram divisões permanentes de PO, principalmente focadas em tarefas classificadas como Defesa do Estado. Antes do fim da guerra, alguns militares americanos queriam continuar o trabalho científico realizado por pesquisadores e cientistas no contexto militar. Então, os Estados Unidos investiram em um projeto, que ficou conhecido como RAND (Research and Development), que futuramente tornou-se a RAND Corporation.

A partir de então, físicos e matemáticos introduziram técnicas de PO para resolver problemas de comando, controle, comunicação e transmissão de informações, influenciando economistas neoclássicos e tendo um impacto duradouro na teoria econômica do pós-guerra. A PO emergiu como um campo interdisciplinar que se expandiu para além das aplicações militares, sendo utilizada no governo para planejamento social e econômico, bem como no setor privado para otimizar processos de negócios e apoiar a tomada de decisões com base em dados quantitativos e computadores ágeis. A partir daí, era inevitável que a PO gradualmente se estabelecesse nas universidades.

Sendo assim, aos poucos a PO foi sendo incorporada a diversos cursos de formação superior. Essa área de pesquisa foi se desenvolvendo e dentre suas ferramentas, hoje estão a programação linear, a programação inteira, a programação dinâmica, a otimização de redes e a programação não-linear. Particularmente no que diz respeito à programação linear, embora seja um tema de estudo no âmbito da matemática acadêmica, dedicada à produção de resultados e teorias, e seja abordado em instituições de Ensino Superior, ele se vale de ferramentas da matemática escolar que são comumente ensinadas no nível educacional básico [2]. Essas ferramentas incluem funções, sistemas de equações e Geometria Analítica, que fazem parte do estudo da Álgebra Linear em níveis mais elementares.

Portanto, é possível introduzir tópicos relacionados à programação linear, como a resolução de problemas simples de programação linear, utilizando recursos como o *software* GeoGebra ou a ferramenta *Solver*, do *Excel*, no currículo escolar, além de constituir uma opção, considerando a importância de buscar métodos diversos, com o propósito de otimizar o processo de aprendizagem dos estudantes [3]. Isso tem o propósito de familiarizar os estudantes com o campo da PO, que representa uma disciplina relativamente recente no âmbito da Matemática, oferecendo um amplo campo de pesquisa. Além disso, essa abordagem visa estreitar a conexão entre a Matemática ensinada nas escolas e a Matemática Científica, proporcionando uma visão mais abrangente da disciplina.

Sendo assim, é importante o estudo e a análise de problemas envolvendo a programação linear, visando a compreensão das possíveis contribuições da Álgebra Linear para o assunto, além da investigação de possíveis recursos que possam ser utilizados para resolver problemas de programação linear desde os aspectos e conceitos teóricos, até a prática, utilizando o *software* GeoGebra ou a ferramenta *Solver*, do *Excel*, buscando contribuir em uma aprendizagem significativa de alguns conceitos da Álgebra Linear.

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho consiste em investigar as contribuições da programação linear para o desenvolvimento de habilidades no ensino de Matemática. Para tanto, esta pesquisa segue as seguintes etapas: em um primeiro momento, foram realizados estudos dos conceitos teóricos por meio de artigos científicos, capítulos de livros, dissertações e teses. Em um segundo momento, foram analisadas as contribuições de conceitos de programação linear na Educação Básica. O terceiro momento envolveu a elaboração de um caderno de acompanhamento e duas sequências didáticas, uma aplicada em uma turma de Geometria Analítica, na Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG, a fim de apresentar um relato de experiência acerca das potencialidades da Pesquisa Operacional na Educação Básica, e a outra como proposta para o Ensino Básico. Na proposta para o Ensino Básico são contemplados os conteúdos de equações e inequações lineares, sistemas de equações e de inequações lineares, representação gráfica de sistemas de equações e de inequações lineares e Problemas de Programação Linear do tipo simples, envolvendo apenas duas variáveis, buscando desenvolver as habilidades: (EF08MA08), (EM13MAT301) e (EM13MAT302) da Base Nacional Comum Curricular [4].

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo, encontra-se a introdução, seguida pelo segundo capítulo, que aborda os principais tópicos relacionados a uma das ferramentas da PO, a programação linear, o terceiro capítulo dedica-se à revisão de literatura sobre as aplicações da programação linear, abrangendo tanto o Ensino Superior quanto o Ensino Básico. Ele também inclui um relato de experiência e uma proposta para o Ensino Básico, com ênfase na resolução de problemas. No quarto capítulo são apresentadas as considerações finais deste estudo. Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas neste estudo, além dos apêndices, com a sequência didática GA, o caderno de acompanhamento e a sequência didática para o Ensino Médio.

# 2 PROGRAMAÇÃO LINEAR

Neste capítulo serão apresentados os principais elementos da programação linear utilizados neste trabalho. Os resultados, propriedades e exemplos apresentados no decorrer do capítulo foram baseados em [5], [6], [7], [9], [8], [10], [11], [12] e [13], em que informações adicionais podem ser obtidas.

## 2.1 Pesquisa Operacional

A PO é uma área da Matemática, estudada na Matemática Científica, que integra modelos matemáticos, estatísticos e algorítmicos, que possibilitam e dão suporte na tomada de decisões. Portanto, entende-se que PO é a ciência aplicada a problemas de decisão, que permite a busca pela melhor decisão no sentido prescrito pelo objetivo. Dentre as ferramentas da PO estão a programação linear, a programação inteira, a programação dinâmica, a otimização de redes e a programação não-linear, conforme resumo apresentado na Figura 1.


Figura 1 – Ferramentas da Pesquisa Operacional.
Fonte: A autora.

Quando se trata de problemas de tomada de decisão, a Matemática Científica é amplamente utilizada, pois ela fornece os conceitos e ferramentas matemáticas necessários para compreender e resolver esses problemas. Um problema de tomada de decisão ocorre quando é necessário selecionar uma alternativa, de forma a atender o objetivo, além de respeitar o conjunto de restrições impostas pelo problema.

Para obter a solução de um problema envolvendo a tomada de decisão pode ser necessário efetuar a construção do modelo matemático, "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado" , a partir dos dados retirados da interpretação do problema através da modelagem matemática, "processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos". O modelo matemático de um problema de tomada de decisão pode consistir em uma função, chamada função objetivo, e um sistema de equações/inequações que representam as restrições do problema.

Uma decisão é chamada solução viável, quando satisfaz todas as restrições e é chamada solução ótima se além de viável, resultar no melhor valor da função objetivo. A função objetivo, a ser otimizada (minimizada ou maximizada), é utilizada para descrever como as variáveis de decisão afetam o problema, respeitando as restrições, que são expressas em forma de igualdades ou desigualdades envolvendo as variáveis.

Sejam as variáveis do problema representadas por $x_j (j = 1, ..., n)$, $b_i (i = 1, ..., m)$ a quantidade disponível de determinado recurso, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a função objetivo, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, as restrições do problema e o sinal $\sim$, podendo ser substituído pelos sinais $\leq, \geq$ ou $=$. O modelo matemático é representado da seguinte forma:

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{otimizar} & z = f(x_1, x_2, ...x_n) \\
 & \\
\text{sujeito a} = & \left\{\begin{array}{r}
g_1(x_1, x_2, ...x_n) \sim b_1 \\
g_2(x_1, x_2, ...x_n) \sim b_2 \\
\vdots \\
g_m(x_1, x_2, ...x_n) \sim b_m \\
x_1, x_2, ..., x_n \geq 0
\end{array}\right.
\end{array}\right. .
$$

Existem várias formas para tentar resolver estes problemas, portanto, o tipo e a complexidade do modelo é que determinam a natureza do método de solução e se a solução é possível. A técnica mais utilizada de PO é a programação linear, utilizada quando a função objetivo e as restrições são funções lineares, que serão apresentadas na Seção 2.2.

## 2.2 *Problemas de Programação Linear*

A programação linear tem como objetivo obter a melhor solução para problemas que admitem modelos compostos por funções, equações e inequações lineares. Os modelos de programação linear, são aqueles em que tanto a função objetivo quanto as funções presentes nas restrições se encontram na forma linear, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n + \beta$, em que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ e $\beta$ são valores reais conhecidos.

Sendo $x_1, x_2, ..., x_n$ as variáveis de decisão do problema, o modelo de um Problema de Programação Linear (PPL) é representado da seguinte forma:

$$\left|\begin{array}{ll} \text{min ou max} & z = C_1x_1 + C_2x_2, ...C_nx_n \\ \\ \text{sujeito a} = & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \sim b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \sim b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n \sim b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. ,$$

em que os coeficientes $a_{ij}$ e $C_j$ são constantes para $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$ e o sinal $\sim$ pode ser substituído por " $\leq$ "," $\geq$ " ou " $=$ ".

A solução ótima de um PPL pode ser obtida de diversas maneiras, dentre elas está a solução gráfica, quando o problema possui duas ou três variáveis apenas. De modo geral, a solução é obtida por meio da programação computacional, utilizando *softwares* desenvolvidos para a solução de PPL's e também por meio do método simplex, algoritmo que fornece regras de cálculos fixas, que são aplicadas repetidas vezes ao problema, com um número finito de iterações.

## 2.3 *Resolução Gráfica de PPL'S*

Após a construção do modelo matemático, é preciso se preocupar com a resolução do problema de otimização. Problemas de Programação Linear envolvendo duas variáveis permitem a visualização geométrica, tornando possível a obtenção da solução pelo método gráfico, que consiste em primeiramente, determinar o conjunto de possíveis soluções para o problema, determinado pelo sistema de restrições, e dentre essas, identificar aquela em que ocorre o valor ótimo, avaliado pela função objetivo. O conjunto de soluções de um problema de duas variáveis está no espaço $\mathbb{R}^2$ (plano).

Dois pontos distintos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ do plano determinam uma reta, e pelas condições de alinhamento, um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, qualquer, pertence a reta $\overleftrightarrow{AB}$, que passa por $A$ e $B$, se e somente se a inclinação da reta $\overleftrightarrow{AB}$, for a mesma inclinação da reta $\overleftrightarrow{AP}$.

**Teorema 1.** *Toda reta no plano tem equação geral: $ax + by = c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* $\dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \dfrac{y - y_a}{x - x_a} \Rightarrow$
$(y_b - y_a)(x - x_a) = (y - y_a)(x_b - x_a) \Rightarrow$
$(y_b - y_a)(x) - (y_b - y_a)(x_a) = (x_b - x_a)(y) - (x_b - x_a)(y_a) \Rightarrow$
$(y_b - y_a)(x) - (x_b - x_a)(y) = -(x_b - x_a)(y_a) + (y_b - y_a)(x_a)$
Como,

$a = (y_b - y_a) \in \mathbb{R}$,
$b = (x_b - x_a) \in \mathbb{R}$ e
$c = (x_b - x_a)(y_a) + (y_b - y_a)(x_a) \in \mathbb{R}$
segue que $ax + by = c$,
em que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$\square$

Uma reta divide o plano em duas regiões, denominadas semiplanos, e as inequações: $ax + by < c$ e $ax + by > c$, representam semiplanos abertos distintos, enquanto que $ax + by \leq c$ e $ax + by \geq c$ determinam semiplanos fechados cuja interseção é a reta $ax + by = c$.

A representação gráfica de um sistema de inequações lineares em duas variáveis será a interseção dos semiplanos correspondentes a cada inequação. Então, as restrições de um PPL juntamente com as condições de não negatividade representam um conjunto de semiplanos cuja interseção determina um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$, denominado região das soluções viáveis, ou simplesmente região viável ($RV$).

Funções lineares da forma $z = f(x_1, x_2) = C_1x_1 + C_2x_2$, com duas variáveis, são representadas graficamente como planos em $\mathbb{R}^3$. Essas funções só admitem máximos ou mínimos se estiverem sujeitas a restrições, como no caso de PPL's. Suas curvas de nível [1] são retas paralelas que crescem monotonamente na direção do gradiente, dado por:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Sendo assim, cada ponto do conjunto de soluções viáveis está associado a uma única reta, do conjunto de retas paralelas correspondente à função objetivo. Além disso, todos os pontos extremos da função objetivo devem estar necessariamente na fronteira da região viável.

Então, para solucionar graficamente um PPL é preciso determinar quais pontos da região viável retornam o melhor valor para a função objetivo e para encontrar tais pontos é preciso percorrer o conjunto de retas paralelas no sentido do gradiente, como ilustrado na Figura 2.

Em um PPL de maximização, por exemplo, seja $P \in RV$ e a reta $z = c$ passando por $P$. Se $P$ for um ponto no interior do polígono, será possível melhorar o valor da função objetivo, visto que existem mais valores da região viável à direita do semiplano determinado por $z = c$ e pelo gradiente. Entretanto, se $P$ estiver posicionado de maneira

[1] As curvas de nível de uma função $f$ de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, em que $k$ é uma constante [8].

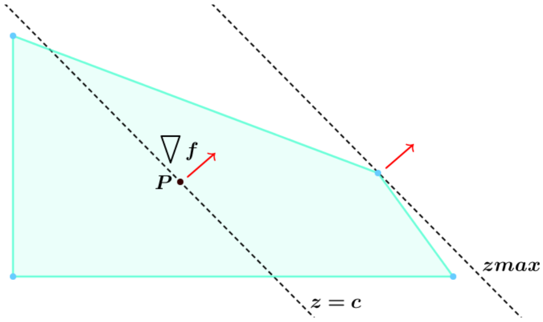



Figura 2 – Solução do PPL.
Fonte: A autora.

que não exista nenhum outro ponto de $RV$ situada no semiplano à direita, então não será possível melhorar o valor da função objetivo, então a solução ótima foi encontrada.

Sendo assim, a solução do problema foi determinada tangenciando à direita de $RV$, implicando que a solução ótima, quando existe, está localizada em ao menos um dos vértices de $RV$.

Portanto, solucionar graficamente um PPL significa procurar o vértice de $RV$ que otimize a função objetivo, e as condições para que exista solução para um PPL é garantida pelo seguinte teorema:

**Teorema 2.** *(Teorema Fundamental da Programação Linear) Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função definida na região poliedral convexa* $V$ *do* $\mathbb{R}^n$ *dada por* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n + b, \alpha_i, b \in \mathbb{R}$ *para* $i = 1, 2, ..., n$*. Suponha que* $f$ *assuma um valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se* $V$ *possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.*

A seguir, será apresentada uma ideia de demonstração, para $n = 2$.

*Demonstração.* Seja $V \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que o valor máximo (mínimo) de $f$ seja assumido em um ponto $P \in V$, considerando todas as regiões poliedrais convexas possíveis de $\mathbb{R}^2$ , pode-se ter:

I) $P$ é um vértice, neste caso, o teorema já está provado;

II) $P$ está numa aresta, neste caso, $f$ assumirá este valor máximo (mínimo) em toda a aresta. Como a região $V$ possui vértice(s), esta aresta conterá um vértice $V$ obrigatoriamente, portanto $f(P) = f(V)$;

III) $P$ está no interior de $V$. Neste caso, $f$ será constante em toda região $V$.

De fato, seja $A$ um outro ponto de interior de $V$. Como $V$ é poliedral convexa, o segmento $\overrightarrow{AP}$ está contido em $V$; além disso, como $P$ é interior pode-se considerar $AA'$ que contém, $P$ deste ainda contido em $V$. Então segue que $f$ é constante em $AA'$ e, portanto, $f(P) = f(A)$.

$\square$

Ao resolver graficamente um PPL em duas variáveis, três situações podem ocorrer:

1. A região viável ser um conjunto vazio, como ilustrado na Figura 3:

   a) nesse caso, as restrições são conflitantes, então o PPL não possui solução.

2. A região viável é não vazia e limitada, sendo assim o PPL tem solução ótima única ou não, conforme ilustrado nas Figuras 3:

   b) em que o PPL possui solução ótima única;

   c) em que o PPL possui infinitas soluções ótimas, ou seja, infinitos pontos do segmento de reta são soluções ótimas.

3. A região viável é não vazia e ilimitada, como ilustrado nas Figuras 3:

   d) em que o PPL não tem solução ótima finita, ou seja, o valor da função objetivo cresce indefinidamente no sentido favorável.

   e) em que o PPL pode ter solução ótima única, ou não ter solução.

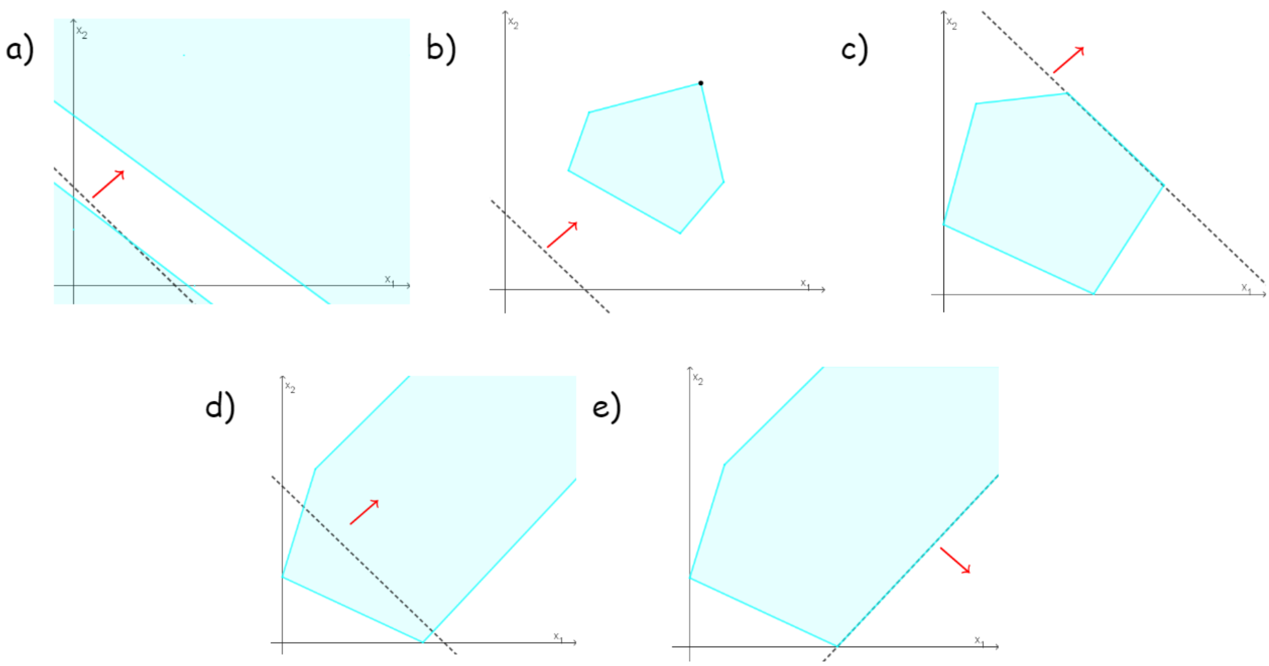



Figura 3 – Representações gráficas de PPL's.
Fonte: A autora.

Para problemas com três ou mais variáveis, é importante considerar as seguintes definições e resultados:

**Definição 1.** *A equação* $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$*, com* $a_1, a_2...a_n$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *define um hiperplano em* $\mathbb{R}^n$*, que divide o espaço* $\mathbb{R}^n$ *em dois semi-espaços disjuntos:* $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n < b$ *e* $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n > b$*.*

Isso significa dizer que, em conformidade ao que foi visto para PPL's de duas variáveis, neste caso a função objetivo representa uma família de hiperplanos paralelos entre si.

**Definição 2.** *A interseção de um número finito de semiplanos fechados é denominado politopo*

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i; i = 1, 2, ..., m \right\},$$

ou seja, o conjunto de soluções viáveis de um PPL é um politopo, visto que é obtido através da interseção finita de restrições.

**Definição 3.** *Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ vetores de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ números reais, $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ é uma combinação linear convexa, se $\alpha_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ e se $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, se $\alpha_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$, dizemos que é uma combinação linear convexa legítima.*

**Definição 4.** *Um conjunto $M$ é convexo se toda combinação linear convexa de qualquer par de pontos do conjunto também for elemento de $M$, ou seja, $M$ é convexo se todo segmento de reta definido por dois pontos quaisquer de $M$ estiver inteiramente contido em $M$.*

**Teorema 3.** *A região viável de um PPL é um politopo convexo.*

*Demonstração.* Sabemos, por definição, que a região viável de um PPL é um politopo. Resta mostrar que este politopo é convexo. Sejam $y, z \in RV$. Para ser uma solução viável $y$ e $z$ devem satisfazer todas as restrições e condições de não negatividade, assim tem-se: $Ay = b, Az = b, y, z \geq 0$, pela condição de não negatividade. Seja $\alpha y + \beta z$ uma combinação linear convexa, isto é, $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$. Então,

a) $\alpha y + \beta z \geq 0$, pois $\alpha, \beta, y, z \geq 0$;

b) $A\ (\alpha y + \beta z) = \alpha Ay + \beta Az = \alpha b + \beta b = (\alpha + \beta)b = 1b = b$,

ou seja, $\alpha y + \beta z \in RV$ e, portanto, $RV$ é um politopo convexo. □

A seguir, será apresentado um exemplo de PPL e sua resolução pelo método gráfico:

**Exemplo 1.** ***Problema de Produção:*** *Uma fábrica produz dois produtos, $A$ e $B$. Cada um deles deve ser processado por duas máquinas, $M1$ e $M2$. Devido à programação de outros produtos, que também utilizam essas máquinas, a máquina $M1$ tem 24 horas de tempo disponível para os produtos $A$ e $B$, enquanto a máquina $M2$ tem 16 horas de tempo disponível. Para produzir uma unidade do produto $A$, gastam-se 4 horas em cada uma* *das máquinas $M1$ e $M2$. Para produzir uma unidade do produto $B$, gastam-se 6 horas na máquina $M1$ e 2 horas na máquina $M2$. Cada unidade vendida do produto $A$ gera um lucro de $R\$80,00$ e cada unidade do produto $B$, um lucro de $R\$60,00$. Existe uma previsão máxima de demanda para o produto $B$ de 3 unidades, não havendo restrições quanto à demanda do produto $A$. Deseja-se saber quantas unidades de $A$ e de $B$ devem ser produzidas, de forma a maximizar o lucro e, ao mesmo tempo, obedecer a todas as restrições desse problema.*

**Solução:**

O modelo matemático associado a esse problema é apresentado da seguinte forma:

$$\left|\begin{array}{ll} \max & z = 80x_1 + 60x_2 \\ & \\ \text{sujeito a } = & \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \ (I) \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 16 \ (II) \\ x_1 \geq 0 \ (III) \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \ (IV) \end{cases} \end{array}\right. ,$$

Sua representação gráfica é apresentada na Figura 4:

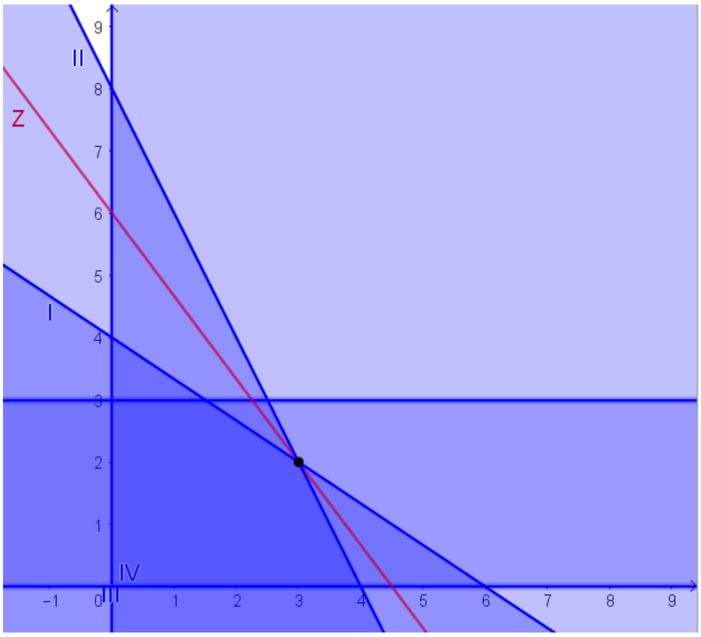



Figura 4 – Gráfico associado ao problema de produção.
Fonte: A autora.

Dessa forma, pode-se observar que a solução para o problema é $x_1 = 3, x_2 = 2$ retornando $z = 360$, ou seja, a produção do produto $A$ deve ser de 3 unidades e do produto $B$ deve ser de 2 unidades, para retornar o lucro máximo de $R\$360,00$.

## 2.4 Resolução Algébrica de PPL'S

Para implementar métodos de solução algébrica, como o método Simplex, é necessário estabelecer uma formulação matemática conhecida como forma padrão, em que as restrições deixam de ser desigualdades, se tornando igualdades. Para isso, é preciso adicionar (ou subtrair) variáveis às restrições.

Sendo assim, quando a restrição é uma desigualdade do tipo menor ou igual, adiciona-se uma variável, conhecida como variável de folga, e quando a restrição é uma desigualdade do tipo maior ou igual, subtrai-se uma variável, conhecida como variável de excesso. Introduz-se ao problema tantas variáveis de excesso quantas forem as restrições envolvendo desigualdades presentes no modelo original.

Desta forma, um novo conjunto de variáveis será formado pelas variáveis de decisão originais, juntamente com as variáveis de excesso ou de folga, sendo o modelo de PPL na forma padrão representado da seguinte forma:

$$\left|\begin{array}{ll} \text{min ou max} & z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \\ & \\ \text{sujeito a} = & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \end{array}\right. .$$

Para dar início ao algoritmo Simplex, ainda é preciso obter a forma tabular do problema, conforme o Quadro 1:

Quadro 1: Forma tabular do problema.

| $x_1$ | $\dots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $\dots$ | $x_{n+m}$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $\dots$ | $a_{1n}$ | 1 | $\dots$ | 0 | $b_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | 0 | $\vdots$ |
| $a_{m1}$ | $\dots$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 1 | $b_m$ |
| $C_1$ | $\dots$ | $C_n$ | 0 | $\dots$ | 0 | $z = f(x)$ |

Desta forma, considerando $x^T = [0\ ,0\ , ...,\ b_1,\ ...,\ b_n]$ como solução básica viável inicial, a forma tabular pode ser reescrita, adicionando a informação das variáveis básicas escolhidas, para obter o quadro simplex inicial conforme o Quadro 2:

Quadro 2: Quadro simplex inicial.

| Base | $x_1$ | $\dots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $\dots$ | $x_{n+m}$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{n+1}$ | $a_{11}$ | $\dots$ | $a_{1n}$ | 1 | $\dots$ | 0 | $b_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | 0 | $\vdots$ |
| $x_{n+1}$ | $a_{m1}$ | $\dots$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 1 | $b_m$ |
| z | $-C_1$ | $\dots$ | $-C_n$ | 0 | $\dots$ | 0 | 0 |

Para compor o quadro simplex, a função objetivo $z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ necessitou da seguinte transformação:

$$z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m} \text{ o que implica em}$$

$$z - C_1x_1 - C_2x_2 - ... - C_nx_n - 0x_{n+1} - ... - 0x_{n+m} = 0.$$

A partir do quadro simplex inicial, considerando inicialmente PPL's de maximização, cujo modelo original apresenta restrições somente do tipo "$\leq$", para solucionar o problema é preciso executar as etapas do Algoritmo Simplex, apresentadas a seguir:

1. Determine uma solução básica inicial viável;
2. Selecione uma variável para entrar na base usando a condição de otimalidade. Selecione a variável que retorna a maior contribuição para a função objetivo. Pare aqui se não houver nenhuma variável para entrar na base; a última solução é a ótima. Se não, passe para a etapa 3;
3. Determine qual das variáveis básicas do quadro inicial deve sair da base, usando a condição de viabilidade;
4. Aplique o método de Gauss-Jordan para resolução de sistemas lineares, cujo detalhamento é apresentado na observação a seguir;
5. Verifique se existe contribuição individual para a função objetivo, expressos na última linha do quadro simplex, negativa.

Em problemas de minimização, as condições de otimalidade exigem a seleção da variável que entra na base como a variável não básica que tenha o coeficiente mais positivo na função objetivo. Isso porque $max(z)$ é equivalente a $min(-z)$. Quanto à condição de viabilidade para selecionar a variável que sai, a regra permanece a mesma.

**Observações:**

Atenção às operações de linha por Gauss-Jordan:

1. Linha do pivô
   (a) substitua a variável que sai da base na coluna Base pela variável que entra na base;
   (b) nova linha do pivô é igual à linha do pivô atual dividida pelo elemento pivô.
2. Todas as outras linhas, incluindo $z$: nova linha = (linha atual)-(coeficiente da coluna do pivô) $\times$ (nova linha do pivô).

Em PPL's que envolvem restrições do tipo " $=$ " ou " $\leq$ ", o procedimento para iniciar a resolução é usar variáveis artificiais, que desempenham o papel de folgas na primeira iteração e então descartá-las legitimamente em iterações posteriores. O método do M-grande e o método das duas fases são métodos usados para esses problemas.

O método do M-grande começa com um PPL na forma de equações. Se a equação $i$ não tiver uma folga (ou variável que possa desempenhar o papel de uma folga), uma variável artificial, $R_i$, é adicionada para formar uma solução inicial semelhante à solução básica na qual todas as variáveis são de folga. Contudo, como as variáveis artificiais não são parte do modelo original, recebem punições muito altas na função objetivo, o que (a certa altura) as força a ter valor igual a zero na solução ótima. Isso sempre ocorrerá se o problema tiver uma solução viável.

Para a penalização das variáveis artificiais, dado M, um valor positivo suficientemente alto (em termos matemáticos, $M \to \infty$), o coeficiente na função objetivo de uma variável artificial representa uma punição adequada, se: coeficiente na função objetivo da variável artificial é igual a -M, em problemas de MAX e M, em problemas de MIN.

No método do M-grande, a utilização da punição do M, que, por definição, deve ser grande em relação aos coeficientes da função objetivo, pode resultar em erros de arredondamento que podem comprometer a precisão dos cálculos simplex. O método das duas fases ameniza essa dificuldade, eliminando totalmente a constante M. Como o nome sugere, o método resolve o problema de PL em duas fases: a Fase I tenta achar uma solução básica viável inicial e, se ela for encontrada, a Fase II é invocada para resolver o problema original.

- Fase I: Expresse o problema na forma de equações e adicione as variáveis artificiais necessárias às restrições (exatamente como no método do M-grande) para garantir uma solução básica inicial. Em seguida, determine uma solução básica com as equações resultantes que, independentemente do problema ser de maximização ou minimização, sempre minimizará a soma das variáveis artificiais. Se o valor mínimo da soma for positivo, o problema de PL não tem nenhuma solução viável, o que encerra o processo. Caso contrário, passe para a Fase II.

- Fase II: Use a solução viável da Fase I como uma solução básica viável inicial para o problema original;

Contudo, é importante ressaltar que não serão apresentados exemplos relativos ao "Método do M-grande"nem ao "Método das Duas Fases", uma vez que tais abordagens não se enquadram nos objetivos específicos deste estudo. A menção a esses métodos visa, sobretudo, fornecer uma perspectiva ampla acerca das diferentes abordagens disponíveis para resolver esses problemas. Sendo assim, apresentaremos um exemplo da resolução de um problema usando o Método Simplex para problemas de maximização.

**Exemplo 2.** *Considere o seguinte PPL:*

$$\left| \begin{array}{ll} max & z = 40x_1 + 60x_2 \\ & \\ sujeito\ a = & \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \leq 70 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 40 \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

A forma padrão é dado da seguinte forma:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{max} & z = 40x_1 + 60x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ & \\ \text{sujeito a} = & \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 70 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_4 = 40 \\ 1x_1 + 3x_2 + 1x_5 = 90 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Para resolvê-lo, é preciso obter sua forma tabular, dada pelo quadro inicial Simplex conforme o Quadro 3.

Quadro 3: Quadro simplex inicial do Exemplo 2.

| Base | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 70 |
| $x_4$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| $x_5$ | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 90 |
| z | -40 | -60 | 0 | 0 | 0 | 0 |

1. Como podemos observar, a solução básica inicial viável, $x_3 = 70, x_4 = 40, x_5 = 90$ não é ótima, uma vez que todas as variáveis da linha z são negativas ou nulas, característica de um problema de maximização;
2. Então $x_2$, a variável de maior contribuição individual na linha $z$ entra na base;
3. Usando a condição de viabilidade, $min \left\{ \frac{70}{1}, \frac{40}{1}, \frac{90}{3} \right\}$, temos que $x_5$ sai da base;
4. Na interseção da linha do elemento que sai, $x_5$, com a coluna do elemento que entra, $x_2$, está o elemento pivô que tem valor igual a 3;
5. É preciso fazer agora as operações de pivoteamento para que a coluna da variável que entra fique igual a coluna da variável que sai.

A linha pivotal, $L_3$, é dividida pelo pivô, gerando a nova linha $L_3'$:

$$L_1 - L_3' = L_1';$$
$$L_2 - L_3' = L_2';$$
$$z + 60L_3' = z'.$$

Sendo assim, obtemos o segundo quadro, conforme o Quadro 4:

Quadro 4: Segundo quadro.

| Base | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 5/3 | 0 | 1 | 0 | $-1/3$ | 40 |
| $x_4$ | 2/3 | 0 | 0 | 1 | $-1/3$ | 10 |
| $x_2$ | 1/3 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 30 |
| $z'$ | -20 | 0 | 0 | | 20 | 1800 |

Pela condição de otimalidade, como ainda há variáveis negativas na linha $z'$, note que a solução ainda não é ótima, sendo assim, é necessário executar mais uma etapa do algorítimo.

1. Então $x_1$, a variável de maior contribuição individual na linha $z$ entra na base;
2. Usando a condição de viabilidade, temos que $x_4$ sai da base;
3. Então, o elemento pivô tem valor igual a $\frac{2}{3}$;
4. É preciso fazer agora as operações de pivoteamento para que a coluna da variável que entra fique igual a coluna da variável que sai.

   A linha pivotal, $L_2'$, é dividida pelo pivô gerando a nova linha $L_2''$:

$$L_1' - \tfrac{5}{3}L_2' = L_1'';$$
$$L_3' - \tfrac{1}{3}L_2' = L_3'';$$
$$z' + 20L_2' = z''.$$

Sendo assim, obtemos o terceiro quadro, conforme o Quadro 5:

Quadro 5: Terceiro quadro.

| Base | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $-5/3$ | 1/2 | 15 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 3/2 | $-1/2$ | 15 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $-1/2$ | 1/2 | 25 |
| $z''$ | 0 | 0 | 0 | 30 | 10 | 2100 |

Como não há contribuição negativa na linha referente à função objetivo, temos que a solução: $x_1 = 15; x_2 = 25; x_3 = 15$, retornando $z = 2100$, obtida no Quadro 5, é ótima.

## 2.5 *Resolução Computacional de PPL'S*

Existem várias aplicativos e *softwares* para a solução de um PPL de forma computacional.

Podemos, por exemplo, resolver um PPL usando a planilha do *Excel*. A Figura 5 apresenta como são inseridos os dados do Problema de Produção, apresentado no Exemplo 1, anteriormente.

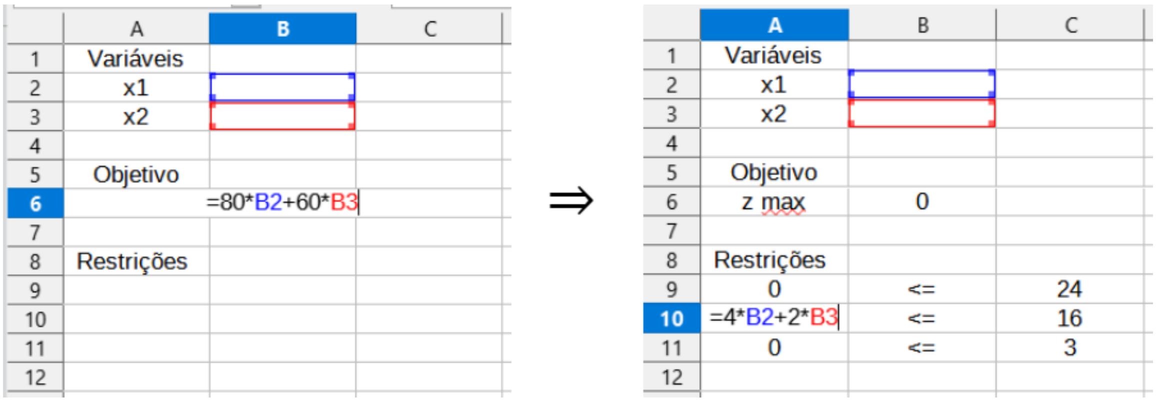



Figura 5 – Resolução de PPL's pelo *Solver*.
Fonte: A autora.

Após inserir os dados, a ferramenta *Solver* que está localizada na aba de Ferramentas precisa ser aberta. Na barra de opções da ferramenta, a condição de não negatividade e o algoritmo *Solver Linear* precisam ser habilitados, conforme a Figura 6.

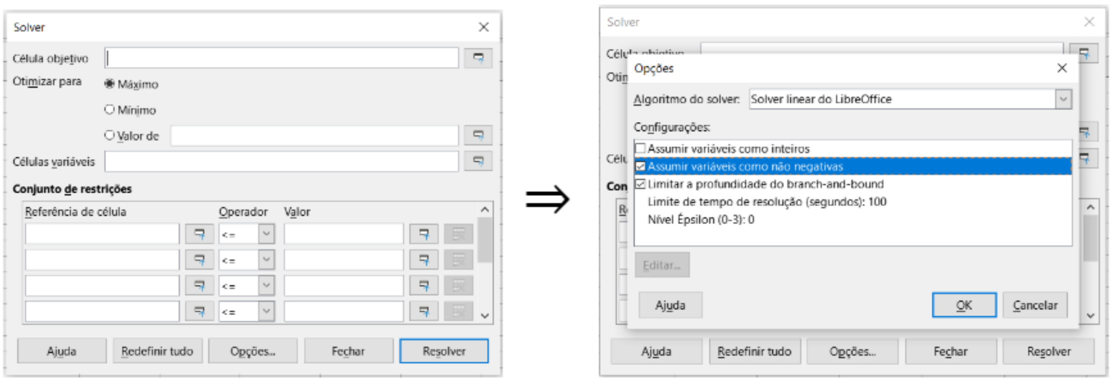



Figura 6 – Ferramenta *Solver*.
Fonte: A autora.

Em seguida, deve-se preencher o *Solver* com os dados da planilha e, por fim, clicar em resolver. A solução do problema será exibida na planilha, conforme ilustrado na Figura 7.

Sendo assim, verifica-se que a solução para o problema é $x_1 = 3, x_2 = 2$, retornando $z = 360$.

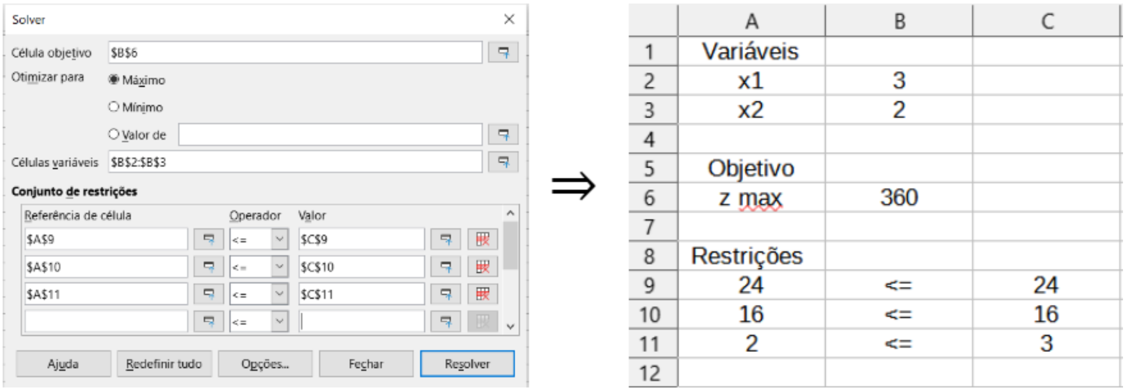



Figura 7 – Solução do PPL na planilha.
Fonte: A autora.

Outra ferramenta, também muito utilizada para para solucionar PPL's, é o *software Linear, Interactive end Discrete Optimizer* - LINDO. Essa ferramenta, é um *software* desenvolvido pela *Lindo Systems Inc.* de Chicago, Illinois - EUA, para resolução de modelos de programação linear, quadrática, ou inteira, que roda no ambiente Windows e está disponível em várias versões, aceitando os formatos de entrada de dados LP e MPS.

A Figura 8 apresenta como fica a solução do Problema de Produção, resolvido no Exemplo 1, por meio do *software* LINDO.

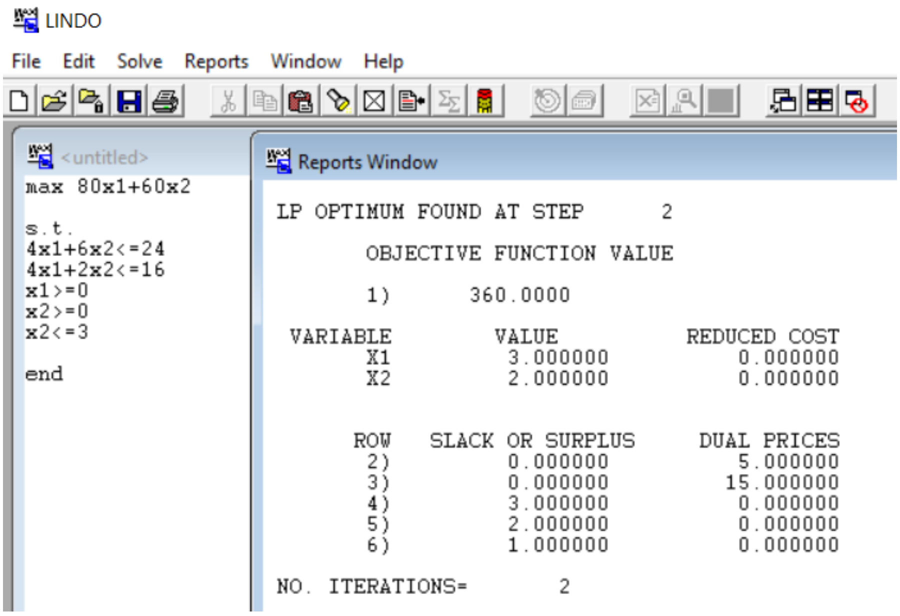



Figura 8 – Solução do PPL pelo *software* LINDO.
Fonte: A autora.

Observa-se que na primeira aba são apresentados os dados do problema e na segunda aba é apresentada a solução do mesmo, em que obteve-se $x_1 = 3, x_2 = 2$, retornando $z = 360$.

Percebe-se que foi obtida a mesma solução ótima de formas distintas.

A obtenção da Resolução Gráfica de um PPL também pode ser realizada de maneira computacional, utilizando programas de software especializados em criar gráficos. Um exemplo desses *softwares* é o GeoGebra.

A Figura 9 apresenta como os dados do problema são inseridos no *software*, digitando cada restrição no campo de entrada.

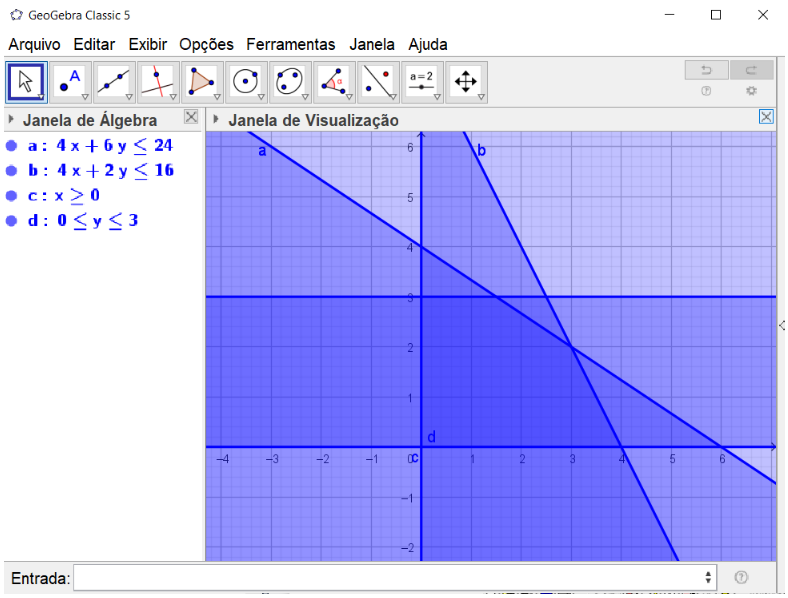



Figura 9 – Representação da RV pelo *software* GeoGebra.
Fonte: A autora.

Depois de obter a RV, usando um controle deslizante, para poder percorrer a RV com a curva de nível da função objetivo na direção do gradiente, a solução ótima é determinada, conforme ilustrado na Figura 10.

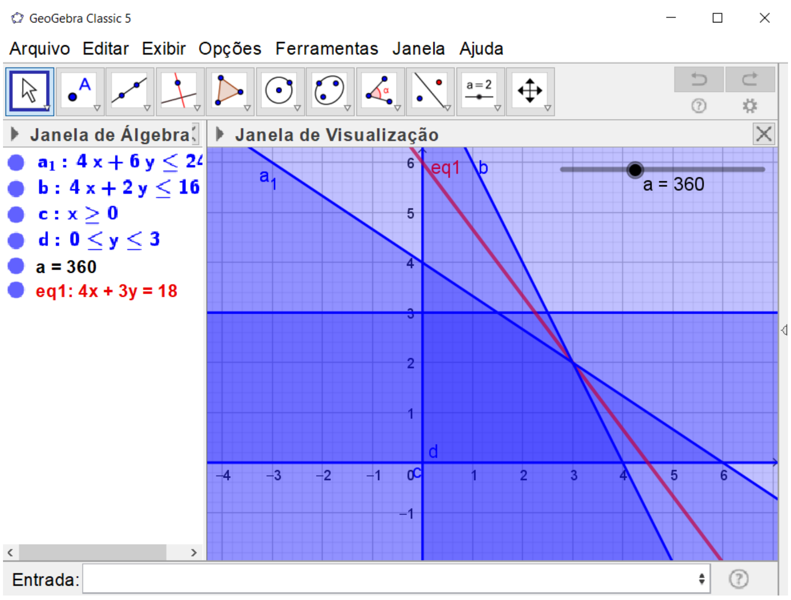



Figura 10 – Solução do PPL pelo *software* GeoGrbra.
Fonte: A autora.

Sendo assim, verifica-se que a solução para o problema é $x_1 = 3, x_2 = 2$, retornando $z = 360$.

# 3 PROGRAMAÇÃO LINEAR E ENSINO

Neste capítulo será apresentada uma revisão de literatura das aplicações de elementos de Pesquisa Operacional no Ensino de Matemática, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, um relato de experiência de uma aplicação da Pesquisa Operacional no Ensino Superior e uma proposta de intervenção no Ensino Básico usando elementos da Pesquisa Operacional.

## 3.1 Experiências de Pesquisa Operacional no Ensino

O termo Matemática pode ser concebido de diferentes formas, dentre estas destacam-se, no âmbito deste estudo, a Matemática Científica e a Matemática Escolar. "[...] entendemos a Matemática Científica e a Matemática Escolar como resultantes, 'em última instância', das práticas respectivas do matemático e do professor de Matemática da escola." [2] Assim, a primeira é dedicada à produção de resultados e teorias com ênfase nas estruturas abstratas, no processo lógico-dedutivo e na precisão de linguagem. Enquanto a segunda produz saberes associados ao processo de escolarização básica, como uma disciplina.

Na Matemática Científica, a Modelagem Matemática e a Pesquisa Operacional estão relacionadas na resolução de problemas. A Modelagem Matemática envolve a representação de situações reais usando equações e fórmulas matemáticas, ou seja, tem como objetivo converter problemas do mundo real em problemas matemáticos e em seguida, resolvê-los, interpretando as soluções em termos compreensíveis no contexto da realidade [14]. Assim, um modelo matemático representa o objeto de estudo por meio de um conjunto de símbolos e relações matemáticas. A relevância dos modelos está na capacidade de oferecer uma linguagem precisa que expressa ideias de forma clara e sem ambiguidades.

A Pesquisa Operacional por sua vez é uma área de estudos que utiliza técnicas matemáticas e algoritmos para dar suporte na tomada de decisões e resolver problemas de alocação de recursos, programação de produção, logística e muitos outros. Sendo assim, a modelagem fornece a base teórica necessária para formular problemas matemáticos da Pesquisa Operacional permitindo encontrar soluções eficientes para os problemas modelados.

No campo da Educação, a aprendizagem baseada na modelagem permite a fusão dos elementos atrativos da Matemática com suas aplicações práticas. Especificamente no campo da Matemática Escolar, é essencial adotar abordagens alternativas para seu ensino e aprendizagem, tornando mais acessível sua compreensão e utilização. A Modelagem Matemática, é um processo que integra a teoria com a prática, inspirando os estudantes a compreenderem o mundo ao seu redor e a desenvolverem métodos para interagir com ele de forma significativa [14].

Muitos desafios matemáticos encontrados na ciência ou na indústria requerem, em algum momento, a resolução de sistemas lineares. A programação linear é um exemplo dessa abordagem, que tem sido usada para lidar com problemas em várias áreas do conhecimento [15]. Atualmente, a programação linear é uma das aplicações que vem se destacando no campo da Matemática. Desta forma, pode-se afirmar que otimizar é fundamental para o progresso de uma sociedade. O conceito de otimização é usado para buscar resultados mais eficientes, como reduzir o uso de recursos, maximizar os lucros, minimizar o tempo, entre outros. Essas ideias simples podem se tornar parte do cotidiano dos estudantes.

Pode-se observar que um problema de programação linear mesmo sendo objeto de estudo da Matemática Científica, utiliza em alguns métodos de solução conteúdos abordados na Matemática Escolar. Sendo eles:

1. O conceito de função real, particularmente a função linear e afim.
2. Resolução de sistemas lineares e matrizes.
3. Elementos de Geometria Analítica, como localização de pontos no plano cartesiano, equações da reta e semiplano.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [4], por meio das habilidades: (EF06MA16), (EF08MA07) (EF08MA08) e (EF09MA06) institui que os estudantes precisam aprender a associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano a partir do 6º ano Ensino Fundamental, associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano e resolver sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas no 8º ano do Ensino Fundamental e sobre funções a partir do 9º ano do Ensino Fundamental. E apesar de a BNCC [4] não abordar inequações em suas habilidades, ao descrever a finalidade da Álgebra como unidade temática da área da Matemática é declarado, entre os requisitos para o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é necessário "interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados".

Na presente discussão é relevante destacar que matrizes atualmente não estão presentes no currículo do Ensino Médio, conforme indicação da BNCC [4]. Contudo, acredita-se que esses temas constituem requisitos significativos para os estudantes que almejam prosseguir seus estudos em cursos de graduação, principalmente na área de

Ciências Exatas. Sendo assim, o professor pode incluir esses assuntos, com o intuito de contribuir para melhor formação dos estudantes.

Sendo assim, uma aplicação de tópicos de Pesquisa Operacional, como a solução de alguns problemas de programação linear simples com ou sem o auxílio de *softwares* como o GeoGebra ou o *Solver*, do *Excel*, pode ser implementada no ensino. O objetivo da programação linear no ensino deve ser apresentar a Pesquisa Operacional aos estudantes como uma área recente da Matemática e campo vasto de pesquisa que possui elementos que podem potencializar o ensino da Matemática, pensando na aproximação da Matemática Escolar com a Matemática Científica.

É interessante utilizar os conteúdos e as abordagens previstas nos currículos. Por exemplo, a modelagem e o estudo de sistemas de equações lineares podem ser utilizados para ensinar otimização no Ensino Médio. Alguns métodos que os estudantes podem usar para resolver sistemas lineares incluem a substituição, a adição, a solução gráfica e, no caso de sistemas com três variáveis e três equações, o método de Gauss-Jordan [15]. Além disso, a abordagem para trabalhar com programação linear, baseada na resolução de sistemas de equações lineares simples e direta, proporciona uma metodologia que não introduz novos conceitos, tornando-a facilmente compreensível para os estudantes, que já estão familiarizados com esses conceitos durante o Ensino Médio [15].

Ao avaliar os tópicos essenciais necessários para resolver problemas usando a programação linear, torna-se evidente que esses tópicos estão alinhados às propostas curriculares ao se trabalhar com a resolução de problemas, uma das tendências propostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais [16]. Sendo assim, o educador pode apresentar desafios de otimização com o objetivo de estimular o interesse do estudante, promovendo uma participação mais ativa durante as aulas de Matemática e permitindo que os estudantes reconheçam como os conceitos matemáticos que estão aprendendo podem ser aplicados na prática.

Para [17], as expressões gráficas, particularmente, são importantes na formação do indivíduo, sendo capazes de estimular as capacidades mentais e promover o desenvolvimento de uma inteligência intuitiva. Sendo assim, em uma aplicação da Pesquisa Operacional, os autores optaram por usar uma abordagem envolvendo a expressão gráfica, que era a forma de se comunicar por meio de desenhos e esboços na Antiguidade. Inicialmente, foi feita a alusão histórica sobre essas formas de comunicação, que se davam por meio de pinturas rupestres. Notou-se na aplicação, que as atividades desenvolvidas em sala de aula despertaram nos estudantes o interesse pelo conteúdo e que se for utilizado o software GeoGebra, a parte algébrica não é necessária, mostrando que se pode resolver situações reais também no Ensino Médio, não somente no Ensino Superior. Sendo assim, acredita-se que ao trabalhar as soluções de problemas de programação linear utilizando o método gráfico os estudantes têm mais possibilidades de desenvolvimento intelectual, seja construindo os gráficos no caderno ou consultando-os com o auxílio do software GeoGebra.

No Ensino Médio, merecem destaque duas experiências realizadas. A experiência realizada em [16] mostra que há uma variedade de conteúdos que podem ser trabalhados de forma interligada em um único problema. Uma alternativa para o entendimento dos estudantes é começar o estudo com problemas simples e, aos poucos, apresentar problemas mais complexos. Com o auxílio de *softwares* gráficos, é possível explorar uma variedade de problemas envolvendo até três variáveis em pouco tempo e a resolução gráfica facilita o entendimento dos princípios básicos do método analítico. No entanto, mesmo com apenas duas variáveis, é possível explorar diversos problemas [16].

Na proposta de [15] busca-se "abordar a modelagem matemática, compreender a situação problema, criar modelos, abordar a resolução de sistemas de equações lineares e obter a solução do modelo" com o intuito de introduzir a programação linear no Ensino Médio para ensinar a resolver problemas envolvendo duas ou três variáveis.

Devido à dificuldade de aprendizado apresentada pelos estudantes dos cursos de Engenharia de Produção e Administração na disciplina de Pesquisa Operacional, numa experiência no Ensino Superior, [3] relata a utilização de um método de resolução de PPL's com o suporte do *software* GeoGebra para potencializar a compreensão, e consequentemente proporcionar uma aprendizagem de forma dinâmica, estimulando os estudantes a interpretar e a desenvolver problemas de programação linear com duas variáveis. Além disso, dada a individualidade no processo de assimilação do conteúdo que cada estudante apresenta, acredita-se que é fundamental buscar métodos diversos no intuito de efetivar o aprendizado dos estudantes. Em um questionário aplicado para que os estudantes dessem um *feedback* sobre o novo método, constatou-se que 95% dos estudantes considerou a intervenção como excelente ou boa, também verificou-se um aumento de 24% no aproveitamento da turma [3].

Na revisão de literatura constatou-se que há escassos trabalhos envolvendo uma aplicação de tópicos da PO no Ensino Básico. Sendo assim, foi realizada uma experiência didática no Ensino Superior sobre problemas de programação linear como aplicação de sistemas lineares na disciplina de Geometria Analítica. Os estudantes estavam no início do curso de graduação, desta forma acredita-se que estejam suficientemente próximos cognitivamente do estudante do Ensino Médio, então os resultados da experiência podem fornecer dados importantes para a formulação de uma proposta de intervenção no Ensino Básico.

## 3.2 *Relato de Experiência*

A experiência didática foi realizada com 25 estudantes de uma turma de Geometria Analítica, composta por discentes de primeiro e segundo períodos de dois cursos de graduação diferentes. O objetivo da Sequência Didática (Apêndice A) foi resolver situações-problema envolvendo a resolução gráfica de sistemas lineares com duas variáveis. Para tanto, foi elaborado um um caderno de acompanhamento (Apêndice B), abordando os seguintes temas: equação linear, representação gráfica de equação linear, sistemas de equações e de inequações lineares, solução gráfica e algébrica por escalonamento de sistemas de equações e de inequações lineares e programação linear.

Como objetivos específicos tem-se: conhecer aplicações da Pesquisa Operacional e resolver problemas de programação linear, então foi imprescindível trabalhar com a representação gráfica da equação da reta, encontrar graficamente a solução de sistemas lineares e comparar com a resolução algébrica, para enfim aplicar tais técnicas na resolução de sistemas em PPL.

A turma divide-se em dois grupos com características particulares. Um dos grupos (Grupo M) é composto por 12 estudantes que já cursaram outras disciplinas de Matemática Básica e estão no segundo período de um curso. O segundo grupo (Grupo Q) é formado por 13 estudantes de primeiro período de outro curso, em suas primeiras semanas de aula no Ensino Superior.

As principais informações relacionadas à avaliação da experiência didática são apresentadas no Quadro 6.

Quadro 6: Observações acerca dos grupos M e Q.

| **Momentos** | **Grupo M** | **Grupo Q** |
|---|---|---|
| 1. Equações da reta | Apresentaram facilidade com o tema. | Apresentaram uma defasagem de aprendizagem. |
| 2. Solução de sistemas lineares | Apresentaram facilidade com a solução gráfica, mas alguns estudantes tinham dúvidas referentes ao escalonamento, às vezes multiplicando uma linha com a outra. | Apresentaram dificuldades com operações básicas na resolução de equações, para encontrar os interceptos, por isso a execução do gráfico ficava prejudicada, e dificuldade em compreender as etapas do escalonamento. |
| 3. Resolução gráfica de sistemas de inequações | Apresentaram dúvidas para identificar o semiplano de cada inequação. | Como as retas eram as mesmas, não precisavam fazer operações para achar os interceptos, mas também apresentavam dúvidas para identificar o semiplano de cada inequação. |
| 4. Programação linear | A partir do modelo e da revisão, conseguiram construir o gráfico das restrições do PPL. | Não conseguiram executar a atividade. |

À medida que o conteúdo avançava, a dificuldade do Grupo Q tornou-se mais evidente. As atividades de revisão de conteúdo e de consolidação, projetadas para serem realizadas com relativa facilidade, tiveram que ser explicadas passo a passo, inclusive a resolução de equações simples, e todas as etapas do escalonamento. As necessidades particulares dos estudantes do Grupo Q forma atendidas, porém afetou consideravelmente a execução das atividades programadas no tempo disponível para a realização do experimento didático.

Sendo assim, o quarto momento da sequência didática destinado ao estudo, análise e interpretação de PPL's ficou com tempo reduzido. Originalmente, o objetivo era apresentar um exemplo, acompanhar a resolução de um problema em sala de aula, a fim de dar suporte aos estudantes, e solicitar que realizassem o segundo problema sozinhos e entregassem na aula seguinte. Contudo, só foi possível apresentar o exemplo e solicitar que os estudantes realizassem um dos dois exercícios como tarefa para entregar ao professor da disciplina na aula seguinte, como atividade avaliativa.

A avaliação mostrou que os estudantes precisavam de orientação para chegar ao modelo do PPL, alguns estudantes mandaram mensagem solicitando ajuda para interpretar e modelar o problema. Disto, conclui-se que há a necessidade de mais exemplos, antes que os estudantes consigam modelar e resolver PPL's de forma independente. Observou-se, porém, que a partir do auxílio na construção do modelo matemático, alguns estudantes conseguiram construir o gráfico de cada inequação das restrições do problema e identificar corretamente a região viável. Contudo, nenhum estudante apresentou a solução ótima do PPL, faltou o gráfico da curva de nível da função objetivo e, consequentemente a identificação do ponto ótimo no polígono. Uma possível explicação para o fato foi o tempo menor disponível na última aula de uma sexta-feira à noite.

Entretanto, a ênfase dada na compreensão de cada processo necessário para identificar a aplicabilidade da programação linear se mostrou benéfica, especialmente para os estudantes do Grupo Q, que chegaram a relatar que só durante essa aplicação começaram a entender os conteúdos de matrizes e resolução de sistemas de equações, assuntos que fazem parte dos conteúdos tratados na disciplina de Geometria Analítica. Com isso, acredita-se que a representação gráfica, por meio da análise dos interceptos e a solução gráfica de sistemas de equações e inequações lineares, foram abordadas de maneira satisfatória. Quanto ao escalonamento, que era um conceito recente para esses estudantes, acredita-se que tenha contribuindo como um reforço útil. No entanto, os problemas de programação linear exigiriam mais tempo para serem adequadamente explorados.

A partir da experiência realizada, acredita-se que uma introdução a PPL's requer mais tempo na modelagem para ser eficaz. O Grupo M, constituído por estudantes que já cursaram Matemática Elementar no primeiro período, poderia alcançar os objetivos com apenas mais uma aula. No entanto, o Grupo Q necessitaria de mais aulas. Portanto, considerando o Grupo Q como um panorama de como essa aplicação funcionaria no Ensino Médio, em que o escalonamento não seria abordado, acredita-se que uma abordagem de problemas de programação linear possa ser satisfatória como aplicação de funções, elementos de Geometria Analítica e resolução de sistemas lineares, desde que disponha de maior número de aulas.

## 3.3 *Proposta de Intervenção Educativa no Ensino Médio*

O conceito de intervenção educativa é apresentado por [18], como uma mediação pedagógico-didática, numa dupla perspectiva: uma empírica, operacional e pragmática, que remete ao agir operacional constitutivo de toda atividade relacional e que visa à modificação de um processo ou sistema; outra conceitual, como construto teórico que visa a uma modelização, até mesmo a uma teorização da prática de ensino. Naquela perspectiva, a intervenção educativa tem a vantagem de estar centrada na ação do professor orientada para uma relação interativa com os sujeitos aprendentes.

Neste trabalho, o objeto de estudo é a resolução de PPL's e o propósito dessa seção é apresentar uma proposta de intervenção utilizando a resolução de problemas.

Resolução de problemas é uma tendência em Educação Matemática. Para [19], resolver um problema significa encontrar um caminho que ainda não é conhecido, pelo estudante, e que supere obstáculos para alcançar o objetivo traçado por meios adequados. Ele ainda sugere quatro fases para resolver um problema de Matemática de forma eficiente, sendo elas:

1. Compreender o problema (CP): Nessa fase, o estudante deve identificar as partes principais do problema, variáveis, dados, objetivo. É importante também que o estudante deseje resolver o problema, por isso ele deve ser selecionado de modo que não seja muito fácil nem muito difícil e o enunciado precisa ser bastante claro.

2. Designar um plano (DP): Nessa fase, o estudante precisa designar um plano e para que isso ocorra o papel do professor é muito importante no sentido de fazer indagações e dar sugestões para provocar ideias e direcionar o estudante.

3. Executar o plano (EP): Nesta fase, é importante que o estudante execute cada passo de seu plano atento a sua execução. Neste momento é interessante que o professor auxilie o estudante a verificar se cada passo está sendo executado de maneira correta e se é possível demonstrar se esse passo está correto.

4. Retrospecto do problema(RP): Nessa fase, o estudante volta-se ou trabalho realizado verificando se o resultado encontrado é satisfatório, o argumento usado está correto e se este método é cabível para outros problemas.

Sendo assim, percebe-se que a proposta de [19] para resolução de um problema de Matemática consiste em um método bem planejado. E se for bem executado pode levar aos resultados esperados.

Nesse contexto, considerando-se as conclusões da experiência didática relatada na seção anterior, é possível propor uma sequência didática (Apêndice C) para o Ensino Médio cujo objetivo seja introduzir elementos da Pesquisa Operacional como aplicação de conceitos matemáticos presentes no currículo.

A experiência mostrou que é muito importante fazer a revisão dos conceitos considerados básicos para a compreensão efetiva de PPL's no Ensino Básico e planejar mais tempo para a modelagem do problema. A seguir serão apresentados detalhes da proposta de intervenção educativa.

Na primeira aula e na segunda aula, é preciso abordar uma revisão dos seguintes conteúdos: equações lineares, representação gráfica de equações lineares, inequações lineares, representação gráfica de inequações lineares, os método gráfico de solução de sistemas de equações e inequações lineares com duas incógnitas.

Após a revisão desses conceitos, na terceira aula os PPL's podem ser apresentados através de uma contextualização histórica da Pesquisa Operacional, evidenciando sua aplicabilidade na vida real e suas ferramentas até iniciar o conceito de Programação Linear e em seguida propor um problema para que os estudantes tentem resolver. Nessa aula é importante auxiliar os estudantes a interpretar os problemas, identificar as variáveis e o objetivo do problema, procurando aplicar a primeira fase do método de [19].

Na quarta aula, após identificar os dados mais importantes do problema, o estudante precisa revisitar os conceitos aprendidos anteriormente buscando ferramentas para traçar um plano para solucionar o problema. Nessa etapa é importante que o professor ofereça suporte e direcionamento através de indagações e sugestões. Após traçar o plano, é hora de executá-lo, verificando cada passo. Nesse aula, é importante utilizar a segunda e a terceira fase do método de [19].

Na quinta aula, pode-se aplicar a quarta fase do método de [19], ou seja, é feita a verificação da solução obtida e a revisão do plano usado, a fim de averiguar se o resultado está correto e se o plano executado é aplicável para outros problemas. Após essa verificação, o professor pode apresentar o modelo com a função objetivo, as restrições e o conceito de solução ótima.

Para a implementação desta proposta, é possível utilizar o caderno de acompanhamento (Apêndice B). Nesse sentido, é necessário que o professor proceda com a devida adaptação do mesmo, excluindo a seção que trata da solução algébrica de sistemas e a resolução do problema das trufas. Estas alterações devem ser feitas para que os estudantes tentem resolver o problema a partir da terceira aula. Contudo, se o professor optar por explorar os conceitos relacionados a matrizes, visando enriquecer ainda mais a formação dos estudantes, não é necessário excluir a seção que aborda a solução algébrica de sistemas.

# 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, o principal objetivo foi investigar as contribuições da programação linear para o Ensino de Matemática. Sendo assim, após os estudos e resultados obtidos, acredita-se o que professor pode se beneficiar de uma abordagem com PPL's no Ensino Médio.

De fato, os trabalhos estudados, mostram a importância de se buscar novos métodos e tecnologias para melhorar o processo de ensino e aprendizagem. Mais especificamente no âmbito da programação linear, a aplicação do *software* GeoGebra se apresenta como uma ferramenta que pode potencializar o ensino, pois possibilita a abordagem do problema de maneira dinâmica, o que pode ajudar a despertar o interesse pelo conteúdo. Além disso, o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo acontece de maneira mais efetiva, visto que há a possibilidade de se interpretar o problema algebricamente e graficamente.

Além disso, uma abordagem com problemas de programação linear no ensino, pode contribuir para que os estudantes percebam as inter-relações existentes entre os diferentes conceitos abordados na disciplina de Matemática contribuindo para o desenvolvimentos de habilidades como a capacidade de resolver problemas e de continuar aprendendo. Nesse sentido, o trabalho com a resolução de problemas, uma das tendências propostas pela BNCC, pode auxiliar na consecução de objetivos educacionais como: permitir que cada indivíduo alcance seu potencial crítico e criativo, estimulando e facilitando sua participação na sociedade de forma efetiva e exercendo sua cidadania.

Sendo assim, como um dos objetivos do trabalho foi o de investigar as contribuições da programação linear para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, acredita-se que a solução de PPL's, principalmente pelo método gráfico, pode ser introduzida de maneira eficaz no Ensino Médio, proporcionando uma oportunidade valiosa para reforçar as bases matemáticas dos estudantes. Além disso, o uso de *software*, como o *software* GeoGebra, proporciona uma experiência prática e dinâmica que pode estimular o pensamento criativo e intuitivo dos estudantes. Ademais, ao abordar a resolução de sistemas de equações lineares e a otimização de problemas do mundo real, os estudantes não apenas adquirem uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos, mas também tem acesso a uma Matemática contextualizada ao ter acesso a sua aplicabilidade na vida real.

Adicionalmente, no que diz respeito à formação acadêmica, este trabalho visou consolidar os conhecimentos adquiridos nas disciplinas de Álgebra Linear, Geometria Analítica e Elementar, proporcionar uma compreensão prática de uma aplicação matemática e aprimorar as habilidades necessárias para a futura atuação como professora de Matemática. Este trabalho foi divulgado durante o XLII CNMAC 2023 - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), por meio de uma apresentação na sessão de pôsteres, na cidade de Bonito-MS.

# Referências


[1] CHAVES, V. H. C. **Perspectivas históricas da pesquisa operacional**, 2011, 117 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências de Rio Claro, 2011.

[2] MOREIRA, P. C.; DAVID, . M. M. S. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **ZETETIKÉ**, v.11, p. 57-80, 2003.

[3] CAMARGO, R. S. S. Programação Linear com a utilização do software Geogebra como ferramenta de ensino e aprendizagem. **VI Congresso Nacional de Educação**. 2019.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

[5] TAHA, H. A.**Pesquisa Operacional**. 8º ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008.

[6] BASSANEZI, R. C. Malthus e a evolução de modelos. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 36 Ed. Especial, 2014, p. 97–100

[7] ARENALES, M. N. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier. 2007.

[8] STEWART, J. **Cálculo**: Volume 2. 7. ed. São Paulo, Cengage Learning, 2013.

[9] BOLDRINI, J. L. **Álgebra linear**. 3. ed. ampl. rev. São Paulo: Harbra, 1986.

[10] LISBOA, E. F. A. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro, 2002.

[11] STEINBRUCH, A. **Álgebra linear**. 2. ed São Paulo: McGraw-Hill, 1987

[12] LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 3. ed. rev. atual. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

[13] PRADO, D.S. **Programação linear**. Belo Horizonte: Editora de desenvolvimento Gerencial, 1999.

[14] BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.** 4 ed. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

[15] LYRA, M. S; QUEIROZ, T. A. Programação Linear: Uma Contextualização a partir de Sistemas Lineares. **Ciência e Natura**, v. 37, p.103– 112, 2015.

[16] SILVA, G. A. Programação Linear: uma possibilidade para o Ensino Médio. **Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología**, v. 1, n. 2, 2014.

[17] GÓES, H. C.; GÓES, A. R. T. Aplicação da pesquisa operacional no ensino médio por meio da expressão gráfica. In: **Congresso Latino-Iberoamericano de Investigacion Operativa e Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. 2012, Rio de Janeiro. Anais... p. 993-1003.

[18] LENOIR, Y. A Intervenção Educativa, um construto teórico para analisar as práticas de ensino. **Educativa**. Goiânia, v. 14, n. 1, p. 9-38. 2011.

[19] POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. 2. ed, Rio de Janeiro: Editora Intercência, 1995.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Sequência Didática de GA

| | |
|---|---|
| **Identificação:** | Disciplina de Geometria Analítica (Graduação);<br>4 aulas de 50 minutos. |
| **Tema:** | Programação Linear. |
| **Metodologia:** | Aulas expositiva-dialogadas. |
| **Objetivo geral:** | Resolver graficamente situação-problema envolvendo sistemas lineares com duas variáveis. |
| **Objetivos específicos:** | 1. Reconhecer a representação gráfica da equação da reta;<br>2. Encontrar a solução de sistemas lineares gráfica e algebricamente;<br>3. Aplicar a resolução de sistemas em PPL;<br>4. Conhecer os objetivos e aplicações da Pesquisa Operacional. |
| **Conteúdos:** | Resolução de equações e inequações lineares;<br>Resolução de sistemas de equações e de inequações lineares;<br>Problemas de Programação Linear com duas variáveis. |
| **Desenvolvimento:** | Primeiro Momento: Equações da reta;<br>Segundo Momento: Solução de sistemas lineares;<br>Terceiro Momento: Resolução gráfica de sistemas de inequações;<br>Quarto Momento: Programação Linear. |
| **Avaliação:** | Observação de desempenho;<br>Resolução de situações-problema. |
| **Recursos didáticos:** | Quadro e projetor;<br>Caderno de acompanhamento. |
| **Bibliografia:** | ARENALES, M. N. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier. 2007. BOLDRINI, J. L. **Álgebra linear**. 3. ed. ampl. rev. São Paulo: Harbra, 1986. :<br>DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo:: Ática, 2010. |

**Desenvolvimento Detalhado:**

1. **Primeiro momento:** Iniciar a abordagem com a revisão de alguns conceitos, começando com equações lineares e representação gráfica de equações lineares, ilustrada na Figura 11, a seguir, com o intuito de que os estudantes percebam que uma equação linear representa uma reta no plano cartesiano. É preciso evidenciar que uma das maneiras mais fáceis de se traçar essa reta é através dos interceptos. Além disso, é importante que o professor dê um tempo para que os estudantes resolvam todos os exercícios propostos no caderno logo após a explicação oferecendo suporte e executando os mesmos na lousa quando achar necessário.

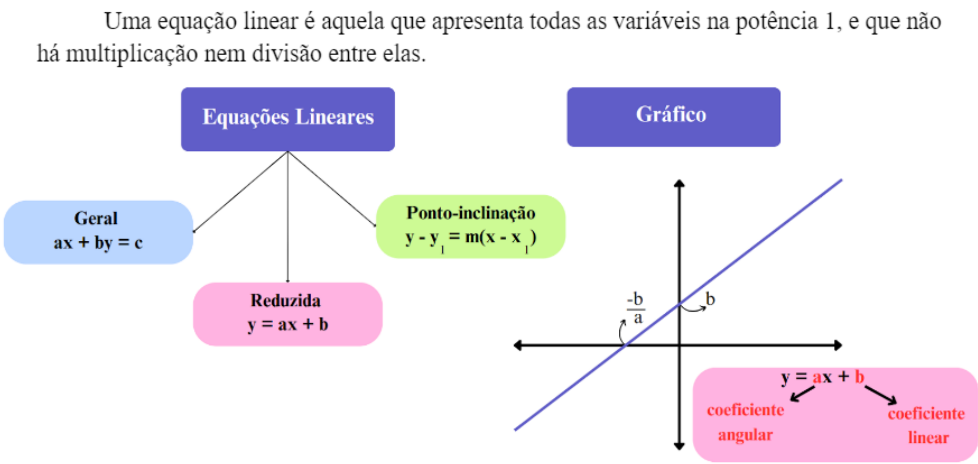



Figura 11 – Equação linear.
Fonte: A autora.

2. **Segundo momento:** Revisar os sistemas de equações, apresentar sua representação matricial e o método gráfico de obter a solução do sistema, apresentando um exemplo, além de apresentar os tipos de sistemas, destacando sobre a existência ou não existência da solução, ilustrada na Figura 12.

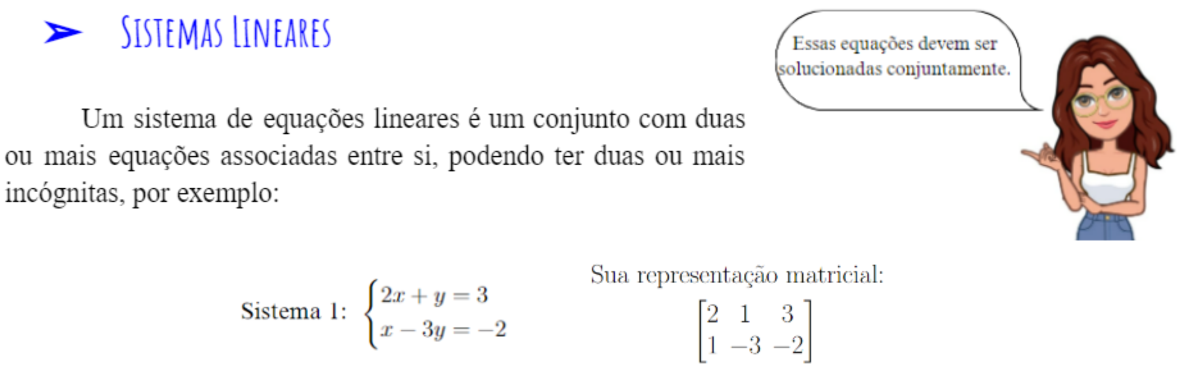



Figura 12 – Sistemas de equações.
Fonte: A autora.

Em seguida deve ser apresentado o método algébrico por escalonamento para obter a solução do sistema de equações lineares, através de exemplos e da generalização, ilustradas nas Figuras 13 e 14.

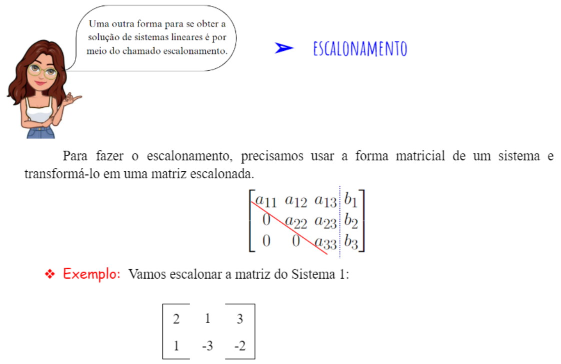



Figura 13 – Escalonamento.
Fonte: A autora.

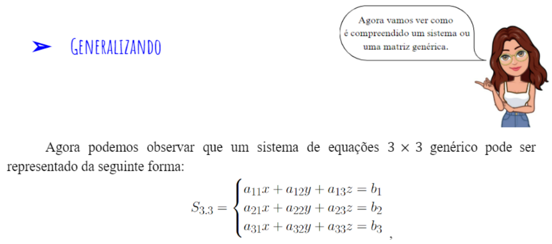



Figura 14 – Generalização.
Fonte: A autora.

3. **Terceiro momento:** Revisar os sistemas de inequações lineares, apresentar a sua representação gráfica e evidenciar que sua solução é a interseção de semiplanos no gráfico, ilustrada na Figura 15.

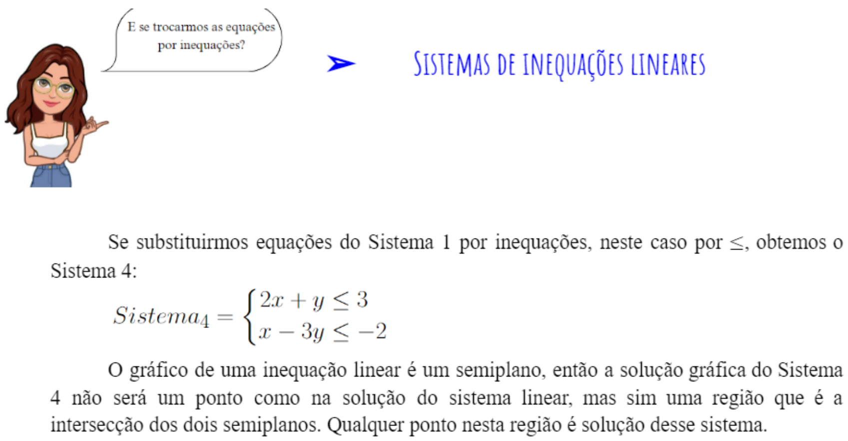



Figura 15 – Sistemas de inequações.
Fonte: A autora.

4. **Quarto momento:** Após a revisão desses conceitos, os PPL's podem ser apresentados através de uma contextualização histórica da Pesquisa Operacional, ilustrada na Figura 16.

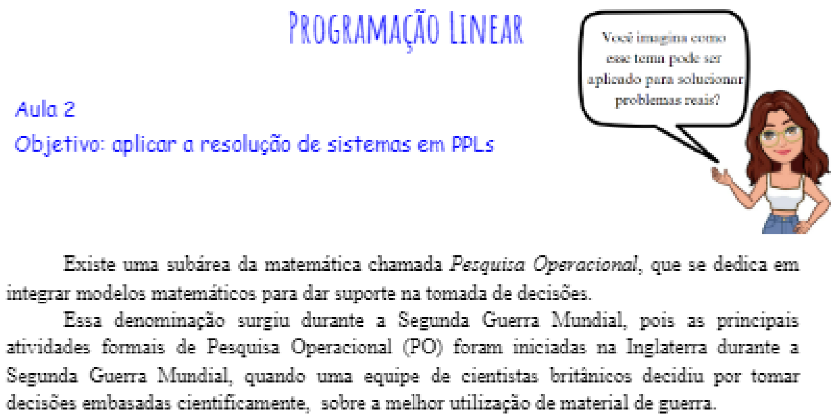



Figura 16 – Programação Linear.
Fonte: A autora.

Evidenciar suas características, aplicabilidade e ferramentas, até chegar ao conceito de programação linear apresentando o modelo e evidenciando que no modelo as restrições são representadas em um sistema de inequações, conforme ilustrada na Figura 17.

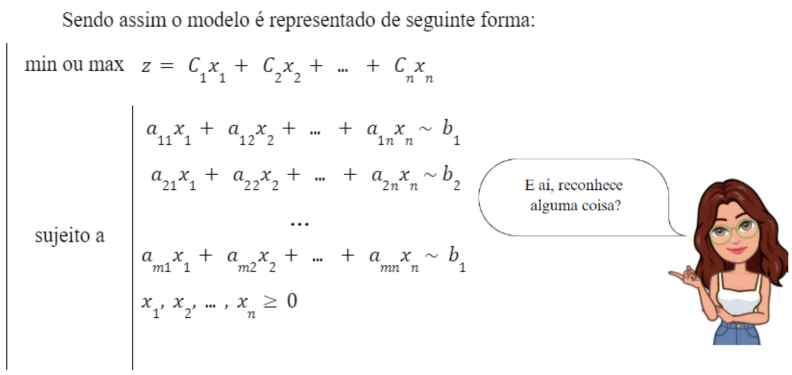



Figura 17 – Modelo de PPL.
Fonte: A autora.

Em seguida, é importante resolver o exemplo do problema das trufas, ilustrado na Figura 18. O professor pode projetar o Caderno de Acompanhamento para auxiliá-lo em sua explicação ou ainda projetar o *Software* GeoGebra, resolvendo o exemplo na aula.

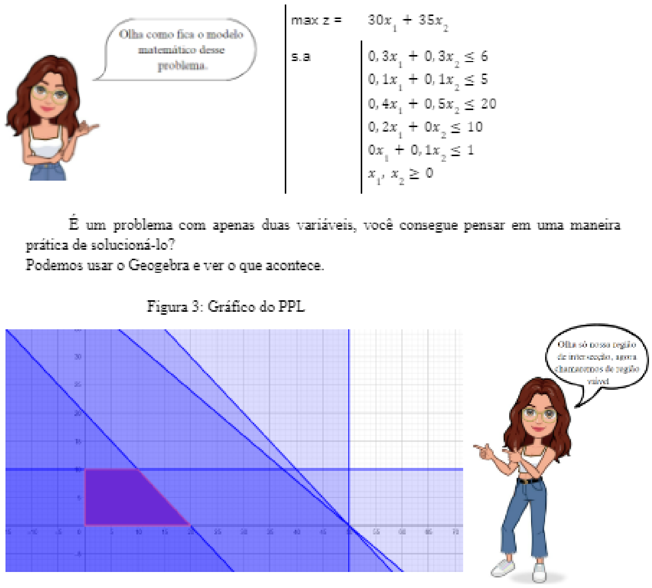



Figura 18 – Modelo e gráfico do exemplo.
Fonte: A autora.

Após a resolução do exemplo, deixe que os estudantes resolvam PPL's. É importante oferecer suporte nesse momento, ajudando-os a interpretar e modelar o problema.

**Detalhamento da Avaliação:**

Avaliação feita de forma contínua, com base na observação da participação dos estudantes nas atividades propostas, identificando as dificuldades, o progresso, e se os objetivos propostos são alcançados.

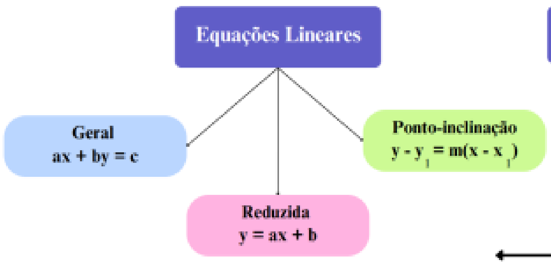
# APÊNDICE B – Caderno de Acompanhamento

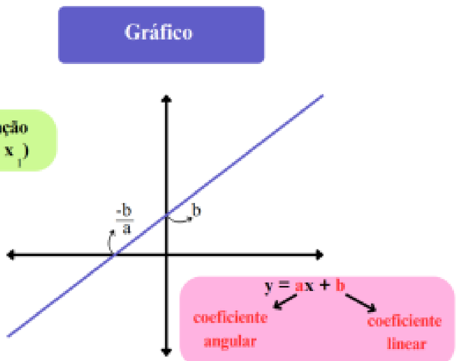
## Caderno de acompanhamento

Nicoli Prosperi Pereira
Aula 1
Objetivo: resolver sistemas lineares


### ➢ Equação Linear

Uma equação linear é aquela que apresenta todas as variáveis na potência 1, e que não há multiplicação nem divisão entre elas.



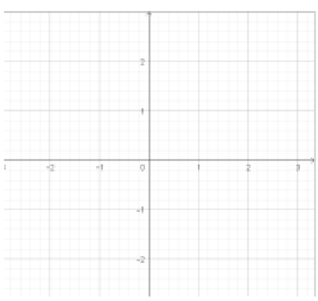



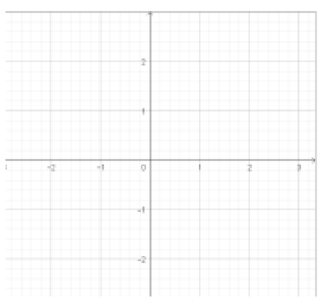

❖ Exemplos:

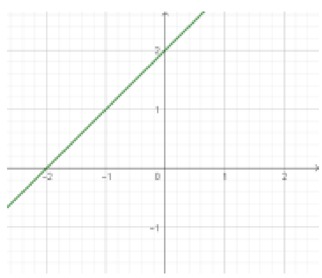
1) $y = 3x + 2$

2) $4x - 8y = 8$

3) Determine a equação da reta:







## ➢ Sistemas Lineares


Um sistema de equações lineares é um conjunto com duas ou mais equações associadas entre si, podendo ter duas ou mais incógnitas, por exemplo:

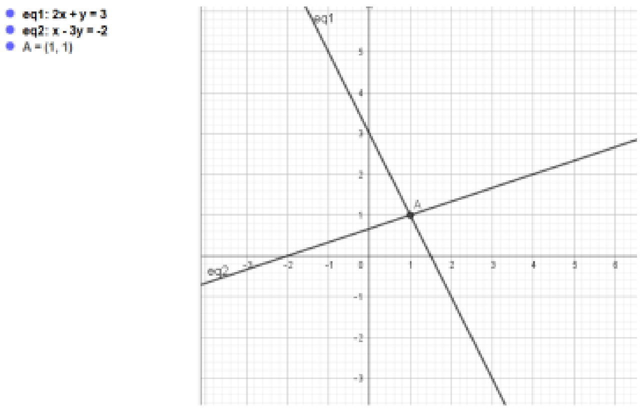
Sistema 1: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

Sua representação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

O sistema apresentado anteriormente tem como solução $x = y = 1$, ou simplesmente, (1,1), e é um sistema dois por dois, pois temos duas incógnitas e duas equações, também denotado por $2 \times 2$.

Vejamos a representação gráfica do Sistema 1:




Outro exemplo de sistema linear:

Sistema 2: $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ -3x + 4y = -18 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

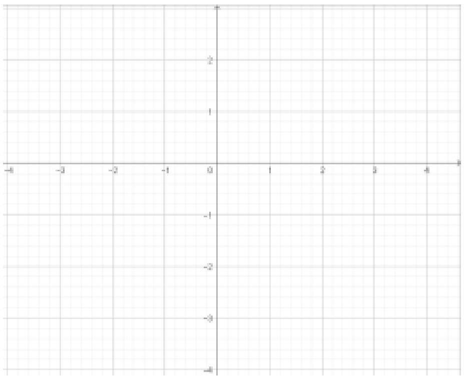
Sua representação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -18 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

que tem como solução $x = 2$ *e* $y = -3$, ou simplesmente, (2,-3), e é um sistema $3 \times 2$.

❖ **Exercício:**

1) Agora é sua vez, construa o gráfico associado ao Sistema 2.

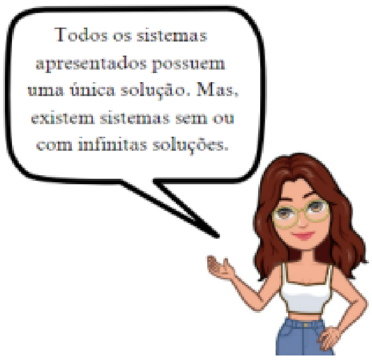


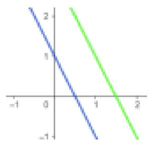
Temos também sistemas lineares com mais incógnitas, como por exemplo o sistema $3 \times 3$, apresentado a seguir:

Sistema 3: $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$

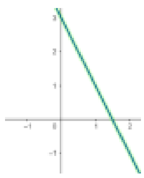
Sua representação matricial: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Esse sistema tem como solução $x = -3$, $y = 5$ e $z = 0$, ou simplesmente, (-3,5,0).

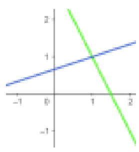


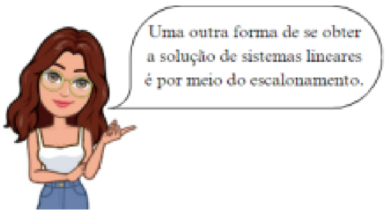
(SI)
Sistema Impossível



(SPI)
Sistema Possível Indeterminado



(SPD)
Sistema Possível Determinado




## ➢ ESCALONAMENTO

Para fazer o escalonamento, precisamos usar a forma matricial de um sistema e transformá-lo em uma matriz escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

❖ **Exemplo:** Vamos escalonar a matriz do Sistema 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Para escalonar uma matriz, operamos usando os elementos de uma linha para anular os elementos de outra linha. Por exemplo, se subtrairmos duas vezes a linha 2 na linha 1 ou seja, $L_1' = L_1 - 2L_2$ obtemos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Agora basta trocar a linha $L_1'$ de lugar com a linha $L_2$ e nossa matriz estará escalonada, veja:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Agora, voltando para a notação de sistema temos:

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 0 + 7y = 7 \end{cases}$$

Daí, obtemos $y = 1$ e substituindo na primeira equação obtemos $x = 1$.

Para o Sistema 2, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -18 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{L2 + 3L1 = L2'} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 10 & -30 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{L3 - 2L1=L3'}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 10 & -30 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \text{L3'} + \tfrac{1}{2}\text{L2=L3''} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 10 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voltando para o sistema, temos:

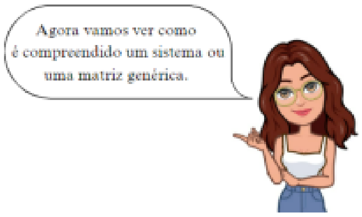
$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 0 + 10y = -30 \end{cases}$$

Daí, obtemos $y = -3$ e substituindo na primeira equação, obtemos $x = 2$.

❖ **Exercício:**

2) Agora é sua vez, resolva por escalonamento o Sistema 3.

## ➢ Generalizando




Agora podemos observar que um sistema de equações 3 × 3 genérico pode ser representado da seguinte forma:

$$S_{3,3} = \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases},$$

onde (x,y,z) são as incógnitas e $a_{ij}$ representa os coeficientes da equação, onde $i$ representa a equação e $j$ é referente a incógnita que o coeficiente acompanha.

**Definição:** Sejam $a_{ij}$, $b_i \in$ R, com i = 1, . . . , m e j = 1, . . . , n. Um sistema de equações lineares, também conhecido simplesmente por sistema linear (S.L.), de m equações e com n incógnitas, denotadas por $x_1, \ldots, x_n$, é a seguinte lista de equações:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Já a representação matricial, é dada por A · X = B, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \text{ e } \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

Então, a um sistema linear está associado a matriz:

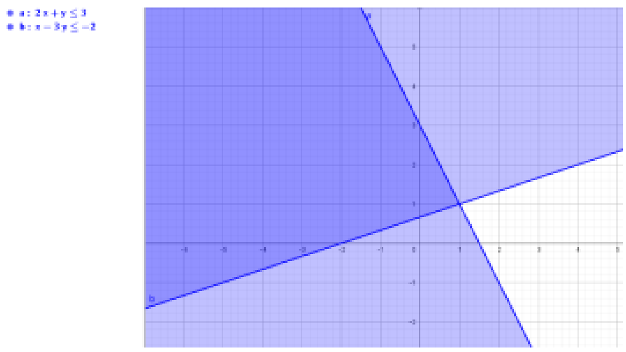
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$


➢ **Sistemas de inequações lineares**

Se substituirmos equações do Sistema 1 por inequações, neste caso por ≤, obtemos o Sistema 4:

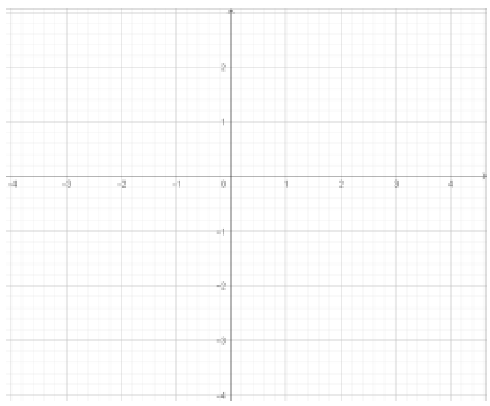
$$Sistema_4 = \begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - 3y \leq -2 \end{cases}$$

O gráfico de uma inequação linear é um semiplano, então a solução gráfica do Sistema 4 não será um ponto como na solução do sistema linear, mas sim uma região que é a intersecção dos dois semiplanos. Qualquer ponto nesta região é solução desse sistema.

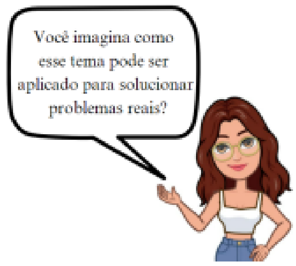



❖ **Exercício:**

3) Faça o gráfico do Sistema 2, substituindo as igualdades por ≤.



# Programação Linear




Aula 2

Objetivo: aplicar a resolução de sistemas em PPLs

Existe uma subárea da matemática chamada *Pesquisa Operacional*, que se dedica em integrar modelos matemáticos para dar suporte na tomada de decisões.

Essa denominação surgiu durante a Segunda Guerra Mundial, pois as principais atividades formais de Pesquisa Operacional (PO) foram iniciadas na Inglaterra durante a Segunda Guerra Mundial, quando uma equipe de cientistas britânicos decidiu por tomar decisões embasadas cientificamente, sobre a melhor utilização de material de guerra.

A Pesquisa Operacional é a ciência aplicada a problemas de decisão, que permite a busca pela melhor decisão no sentido prescrito pelo objetivo.

Uma decisão é chamada **solução viável**, quando satisfaz todas as restrições e é **solução ótima** se além de viável, resultar no melhor valor da função objetivo. A **função objetivo**, a ser otimizada, minimizada ou maximizada, é utilizada para descrever como as **variáveis de decisão** afetam o problema respeitando as **restrições**, que são expressas em forma de igualdades ou desigualdades envolvendo as variáveis.



Um ***Problema de Programação Linear (PPL)*** pode ser representado da seguinte forma: sendo $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n,$$

em que os coeficientes $a_{ij}$ e $C_j$ são constantes para $i = 1, \ldots, i = m,\ j = 1, \ldots, j = n$ e o sinal ~ pode ser substituído pelos sinais $\leq\ ou\ \geq\ ou\ =$.

Sendo assim o modelo é representado de seguinte forma:

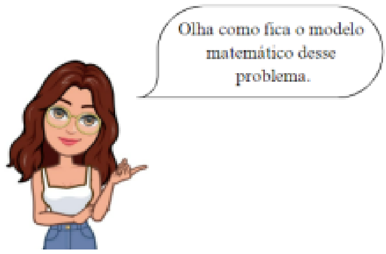
$$\text{min ou max}\quad z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

$$\text{sujeito a}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \sim b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \sim b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \sim b_1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$


❖ **Exemplo:**

Uma aluna do ensino médio deseja abrir um pequeno negócio de produção de trufas, para juntar dinheiro para sua formatura. A princípio ela está considerando produzir dois tipos de trufas: morango e nozes. Na produção são utilizados três ingredientes: leite, chocolate, açúcar, morango e nozes. A doceira tem em estoque 10 kg de morango, 5 kg de açúcar, 20 kg de chocolate, 1kg de nozes e 6l de leite. A composição da trufa de morango é: 30% de leite, 10% de açúcar, 20% de morango e 40% de chocolate, e para as trufas de nozes a composição é de: 30% de leite, 10% de açúcar, 50% de chocolate e 10% de nozes. Cada quilo de trufa de morango pode ser vendido a R$30, 00 enquanto um quilo de trufa de nozes pode ser vendido por R$35,00. Qual deve ser a produção de cada tipo de trufa para obter a maior receita?

| Trufa | Leite | Açúcar | Chocolate | Morango | Nozes | Preço |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Morango | 0,3 | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0 | 30 |
| Nozes | 0,3 | 0,1 | 0,5 | 0 | 0,1 | 35 |
| Estoque | 6 | 5 | 20 | 10 | 1 | |




$$
\begin{array}{l|l}
\text{max z =} & 30x_1 + 35x_2 \\
\text{s.a} & \left| \begin{array}{l} 0,3x_1 + 0,3x_2 \leq 6 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 \leq 5 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 20 \\ 0,2x_1 + 0x_2 \leq 10 \\ 0x_1 + 0,1x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

É um problema com apenas duas variáveis, você consegue pensar em uma maneira prática de solucioná-lo?
Podemos usar o Geogebra e ver o que acontece.

Figura 3: Gráfico do PPL


Lembre-se que queremos obter a maior receita possível, então dentre os pontos que satisfazem o sistema, procuramos o que nos dá o maior resultado, respeitando as restrições.

E aí, qual é a melhor decisão a ser tomada?

❖ Exercício:

4) Resolva os seguintes PPL's:

a) Uma fábrica possui três tipos de máquinas (M1,M2,M3), as quais devem ser usadas na manufatura de seus produtos $p_1$ e $p_2$. Sabendo que o lucro por unidade de $p_1$ e $p_2$ são de 40 u.m. e 60 u.m. respectivamente, decida quanto deve ser fabricado de cada produto por semana a fim de maximizar os lucros de acordo com a tabela a seguir:

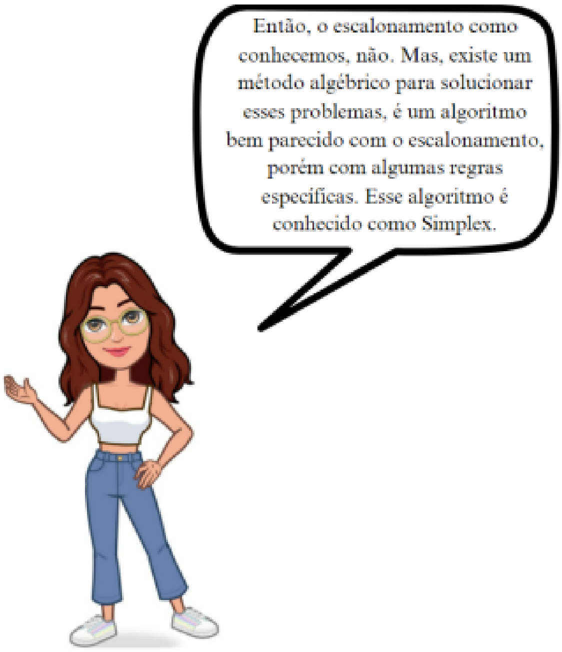
| Maquinas | Horas $p_1$ | Horas $p_2$ | Horas disponíveis |
|---|---|---|---|
| M1 | 2 | 1 | 70 |
| M2 | 1 | 1 | 40 |
| M3 | 1 | 3 | 90 |

b) Um nutricionista receitou banana e abacaxi a um paciente com baixas taxas das vitaminas A e B, visando, assim, suprir uma deficiência diária de 500 UI de vitamina A, e 0,7 mg de vitamina B. Como o paciente possui uma alimentação de 2000 Kcal ao dia, é recomendável que o consumo desses dois itens não aumente o seu consumo calórico em mais de 1000 Kcal. Em cada quilograma, a banana e o abacaxi contém as seguintes quantidades de vitaminas A e B e de calorias:

| | Abacaxi | Banana |
|---|---|---|
| Vitamina A (UI/kg) | 260 | 900 |
| Vitamina B (mg/kg) | 0,9 | 0,5 |
| Calorias (Kcal/kg) | 600 | 1000 |

Sabendo que 1kg de banana custa R$3,00 e que 1kg de abacaxi custa R$4,50, qual seria a quantidade dessas frutas que deve ser consumida para suprir a deficiência de vitaminas, e, ao mesmo tempo, gastar o mínimo possível?


Será que podemos resolver esse problema pelo método do escalonamento?


Então, o escalonamento como conhecemos, não. Mas, existe um método algébrico para solucionar esses problemas, é um algoritmo bem parecido com o escalonamento, porém com algumas regras específicas. Esse algoritmo é conhecido como Simplex.

# APÊNDICE C – Sequência Didática para o Ensino Médio

| | |
|---|---|
| **Identificação:** | Disciplina de Matemática<br>Ensino Médio<br>5 aulas de 50 minutos. |
| **Tema:** | Programação Linear. |
| **Metodologia:** | Resolução de problemas utilizando o método de Polya. |
| **Objetivo geral:** | Resolver Problemas de Programação Linear com duas variáveis. |
| **Objetivos específicos:** | 1. Revisar conceitos de equações lineares e sua representação gráfica e sistemas de equações e de inequações lineares;<br>2. Resolver sistemas lineares gráfica e algebricamente;<br>3. Conhecer a Pesquisa Operacional como uma das aplicações da Matemática;<br>4. Aplicar a resolução gráfica em situações problema envolvendo sistemas lineares. |
| **Conteúdos:** | Equações e inequações lineares;<br>Sistemas de equações e de inequações lineares;<br>Representação gráfica de sistemas de equações e de inequações lineares;<br>Problemas de Programação Linear do tipo simples, envolvendo apenas duas variáveis. |
| **Habilidades:** | Parcialmente contempladas,<br>EF08MA08, EM13MAT301, EM13MAT302. |
| **Desenvolvimento:** | Primeiro Momento: Revisão;<br>Segundo Momento: Primeira fase do método de Polya;<br>Terceiro Momento: Segunda e terceira fase do método de Polya;<br>Quarto Momento: Quarta fase do método de Polya. |

**Avaliação:** Avaliação feita de forma contínua, com base na observação da participação dos estudantes nas atividades propostas, identificando as dificuldades, o progresso, e se os objetivos propostos são alcançados.

**Recursos didáticos:** Quadro;
Caderno de Acompanhamento;
Projetor.

**Bibliografia:**

ARENALES, M. N. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier. 2007.
BOLDRINI, J. L. **Álgebra linear**. 3. ed. ampl. rev. São Paulo: Harbra, 1986.
DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo:: Ática, 2010.

**Descrição das Habilidades da BNCC:**

(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.