Álgebra diferencial: o que é e para que serve?

Severino Collier Coutinho

Universidade Federal do Rio de Janeiro

VIII SeMat 2025

UNIFAL - MG

Alguns problemas da álgebra diferencial

Alguns problemas da álgebra diferencial

Problema 1: $\exp(t^2)$ tem como primitiva uma função elementar?

Alguns problemas da álgebra diferencial

Problema 1: $\exp(t^2)$ tem como primitiva uma função elementar?

Problema 2: a equação diferencial $y' = t - y^2$ tem solução?

Alguns problemas da álgebra diferencial

Problema 1: $\exp(t^2)$ tem como primitiva uma função elementar?

Problema 2: a equação diferencial $y' = t - y^2$ tem solução?

Problema 3: quais são as soluções de $y = ty' + (y')^2$?

Alguns problemas da álgebra diferencial

Problema 1: Algoritmo de Risch.

Problema 2: a equação diferencial $y' = t - y^2$ tem solução?

Problema 3: quais são as soluções de $y = ty' + (y')^2$?

Alguns problemas da álgebra diferencial

Problema 1: Algoritmo de Risch.

Problema 2: Teoria de Galois diferencial.

Problema 3: quais são as soluções de $y = ty' + (y')^2$?

Alguns problemas da álgebra diferencial

Problema 1: Algoritmo de Risch.

Problema 2: Teoria de Galois diferencial.

Problema 3: Algoritmo de Rosenfeld-Gröbner.

Álgebra diferencial

Álgebra diferencial

Objeto de estudo

Objeto de estudo

Um anel diferencial *é um anel comutativo R ao qual está associada uma derivação δ.*

Álgebra diferencial

Objeto de estudo

Um anel diferencial *é um anel comutativo R ao qual está associada uma derivação δ.*

Um operador $\delta : R \longrightarrow R$ é uma *derivação* se

Objeto de estudo
Um anel diferencial *é um anel comutativo R ao qual está associada uma derivação δ.*

Um operador $\delta : R \longrightarrow R$ é uma *derivação* se

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$$

Álgebra diferencial

Objeto de estudo

Um anel diferencial *é um anel comutativo R ao qual está associada uma derivação δ.*

Um operador $\delta : R \longrightarrow R$ é uma *derivação* se

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b) \quad \text{e} \quad \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$$

Objeto de estudo

Um anel diferencial *é um anel comutativo R ao qual está associada uma derivação δ.*

Um operador $\delta : R \longrightarrow R$ é uma *derivação* se

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b) \quad \text{e} \quad \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$$

para todo $a, b \in R$.

Exemplos

Exemplos

Examplo 1: corpo $\mathcal{F}$ das funções elementares com $\delta = d/dt$;

Exemplos

Examplo 1: corpo $\mathcal{F}$ das funções elementares com $\delta = d/dt$;

Examplo 2: $\mathcal{F}[x,y]$ com $\delta = \partial/\partial t + x^2 y\partial/\partial x + (xy+1)\partial/\partial y$.

Exemplos

Examplo 1: corpo $\mathcal{F}$ das funções elementares com $\delta = d/dt$;

Examplo 2: $\mathcal{F}[x, y]$ com $\delta = \partial/\partial t + x^2 y \partial/\partial x + (xy+1)\partial/\partial y$.

Um corpo que é um anel diferencial e chamado de *corpo diferencial*.

Anel de polinômios diferencial

Anel de polinômios diferencial

Seja K um corpo diferencial com derivação δ

Anel de polinômios diferencial

Seja K um corpo diferencial com derivação δ e seja

$$K[y_0, y_1, y_2, \ldots]$$

o anel de polinômios em infinitas variáveis sobre K.

Anel de polinômios diferencial

Seja K um corpo diferencial com derivação δ e seja

$$K\{y\} = K[y_0, y_1, y_2, \ldots]$$

o anel de polinômios em infinitas variáveis sobre K.

Anel de polinômios diferencial

Seja K um corpo diferencial com derivação δ e seja

$$K\{y\} = K[y_0, y_1, y_2, \ldots]$$

o anel de polinômios em infinitas variáveis sobre K. Seja

$$\Delta : K\{y\} \longrightarrow K\{y\}$$

um operador que satisfaz as regras de derivação do produto e da soma,

Anel de polinômios diferencial

Seja K um corpo diferencial com derivação δ e seja

$$K\{y\} = K[y_0, y_1, y_2, \ldots]$$

o anel de polinômios em infinitas variáveis sobre K. Seja

$$\Delta : K\{y\} \longrightarrow K\{y\}$$

um operador que satisfaz as regras de derivação do produto e da soma, além de

Anel de polinômios diferencial

Seja K um corpo diferencial com derivação δ e seja

$$K\{y\} = K[y_0, y_1, y_2, \dots]$$

o anel de polinômios em infinitas variáveis sobre K. Seja

$$\Delta : K\{y\} \longrightarrow K\{y\}$$

um operador que satisfaz as regras de derivação do produto e da soma, além de

$$\Delta(a) = \delta(a), \text{ para todo } a \in K$$

Anel de polinômios diferencial

Seja K um corpo diferencial com derivação δ e seja

$$K\{y\} = K[y_0, y_1, y_2, \ldots]$$

o anel de polinômios em infinitas variáveis sobre K. Seja

$$\Delta : K\{y\} \longrightarrow K\{y\}$$

um operador que satisfaz as regras de derivação do produto e da soma, além de

$$\Delta(a) = \delta(a), \text{ para todo } a \in K$$
$$\Delta(y_i) = y_{i+1} \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Exemplo

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ o corpo das funções elementares com $\delta = d/dt$.

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ o corpo das funções elementares com $\delta = d/dt$.

$$\Delta(y_0 - ty_1 - y_1^2) =$$

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ o corpo das funções elementares com $\delta = d/dt$.

$$\begin{aligned} \Delta(y_0 - ty_1 - y_1^2) &= \\ &= \Delta(y_0) - \Delta(ty_1) - \Delta(y_1^2) \end{aligned}$$

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ o corpo das funções elementares com $\delta = d/dt$.

$$\begin{aligned}
\Delta(y_0 - ty_1 - y_1^2) &= \\
&= \Delta(y_0) - \Delta(ty_1) - \Delta(y_1^2) \\
&= \Delta(y_0) - \Delta(t)y_1 - t\Delta(y_1) - 2y_1\Delta(y_1)
\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ o corpo das funções elementares com $\delta = d/dt$.

$$\begin{aligned}
\Delta(y_0 - ty_1 - y_1^2) = & \\
&= \Delta(y_0) - \Delta(ty_1) - \Delta(y_1^2) \\
&= \Delta(y_0) - \Delta(t)y_1 - t\Delta(y_1) - 2y_1\Delta(y_1) \\
&= \Delta(y_0) - \delta(t)y_1 - t\Delta(y_1) - 2y_1\Delta(y_1)
\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ o corpo das funções elementares com $\delta = d/dt$.

$$
\begin{aligned}
\Delta(y_0 - ty_1 - y_1^2) = & \\
&= \Delta(y_0) - \Delta(ty_1) - \Delta(y_1^2) \\
&= \Delta(y_0) - \Delta(t)y_1 - t\Delta(y_1) - 2y_1\Delta(y_1) \\
&= \Delta(y_0) - \delta(t)y_1 - t\Delta(y_1) - 2y_1\Delta(y_1) \\
&= y_1 - y_1 - ty_2 - 2y_1y_2
\end{aligned}
$$

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ o corpo das funções elementares com $\delta = d/dt$.

$$\begin{aligned}
\Delta(y_0 - ty_1 - y_1^2) = &\\
&= \Delta(y_0) - \Delta(ty_1) - \Delta(y_1^2)\\
&= \Delta(y_0) - \Delta(t)y_1 - t\Delta(y_1) - 2y_1\Delta(y_1)\\
&= \Delta(y_0) - \delta(t)y_1 - t\Delta(y_1) - 2y_1\Delta(y_1)\\
&= y_1 - y_1 - ty_2 - 2y_1y_2\\
&= -ty_2 - 2y_1y_2
\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ o corpo das funções elementares com $\delta = d/dt$.

$$\begin{aligned}
\Delta(y_0 - ty_1 - y_1^2) = & \\
&= \Delta(y_0) - \Delta(ty_1) - \Delta(y_1^2) \\
&= \Delta(y_0) - \Delta(t)y_1 - t\Delta(y_1) - 2y_1\Delta(y_1) \\
&= \Delta(y_0) - \delta(t)y_1 - t\Delta(y_1) - 2y_1\Delta(y_1) \\
&= y_1 - y_1 - ty_2 - 2y_1y_2 \\
&= -ty_2 - 2y_1y_2 \\
&= -(t + 2y_1)y_2
\end{aligned}$$

Solução

Solução

Seja L uma extensão diferencial de K.

Solução

Seja L uma extensão diferencial de K. Se

$$f(y) = f(y_0, \ldots, y_n) \in K\{y\} \quad \text{e} \quad g \in L,$$

Solução

Seja L uma extensão diferencial de K. Se

$$f(y) = f(y_0, \ldots, y_n) \in K\{y\} \quad \text{e} \quad g \in L,$$

definimos

$$f(g) = f\left(g, \frac{dg}{dt}, \frac{d^2 g}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n g}{dt^n}\right).$$

Solução

Seja L uma extensão diferencial de K. Se

$$f(y) = f(y_0, \ldots, y_n) \in K\{y\} \quad \text{e} \quad g \in L,$$

definimos

$$f(g) = f\left(g, \frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ng}{dt^n}\right).$$

Quando $f(g) = 0$, dizemos que g é *solução* de f.

Solução

Seja L uma extensão diferencial de K. Se

$$f(y) = f(y_0, \ldots, y_n) \in K\{y\} \quad \text{e} \quad g \in L,$$

definimos

$$f(g) = f\left(g, \frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ng}{dt^n}\right).$$

Quando $f(g) = 0$, dizemos que g é *solução* de f. Por exemplo, e^{t^2} é solução de$y_1 - 2ty_0$,

Solução

Seja L uma extensão diferencial de K. Se

$$f(y) = f(y_0, \ldots, y_n) \in K\{y\} \quad \text{e} \quad g \in L,$$

definimos

$$f(g) = f\left(g, \frac{dg}{dt}, \frac{d^2 g}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n g}{dt^n}\right).$$

Quando $f(g) = 0$, dizemos que g é *solução* de f. Por exemplo, e^{t^2} é solução de$y_1 - 2ty_0$, já que

$$\frac{d}{dt}(e^{t^2}) - 2te^{t^2}$$

Solução

Seja L uma extensão diferencial de K. Se

$$f(y) = f(y_0, \ldots, y_n) \in K\{y\} \quad \text{e} \quad g \in L,$$

definimos

$$f(g) = f\left(g, \frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ng}{dt^n}\right).$$

Quando $f(g) = 0$, dizemos que g é *solução* de f. Por exemplo, e^{t^2} é solução de$y_1 - 2ty_0$, já que

$$\frac{d}{dt}(e^{t^2}) - 2te^{t^2} = 0.$$

Part II

Para que serve?

Um exemplo

Um exemplo

Considere a equação

$$y_0 - ty_1 - y_1^2 = 0,$$

em $\mathcal{F}\{y\}$.

Um exemplo

Considere a equação

$$y_0 - ty_1 - y_1^2 = 0,$$

em $\mathcal{F}\{y\}$. Como vimos,

$$0 = \Delta\big(y_0 - ty_1 - y_1^2\big) = -y_2(t + 2y_1).$$

Um exemplo

Considere a equação

$$y_0 - ty_1 - y_1^2 = 0,$$

em $\mathcal{F}\{y\}$. Como vimos,

$$0 = \Delta\big(y_0 - ty_1 - y_1^2\big) = -y_2(t + 2y_1).$$

Logo,

$$y_2 = 0 \ \text{ ou } \quad y_1 = -\frac{t}{2}.$$

Um exemplo

Considere a equação

$$y_0 - ty_1 - y_1^2 = 0,$$

em $\mathcal{F}\{y\}$. Como vimos,

$$0 = \Delta\big(y_0 - ty_1 - y_1^2\big) = -y_2\big(t + 2y_1\big).$$

Logo,

$$y_2 = 0 \quad \text{ou} \quad y_1 = -\frac{t}{2}.$$

Integrando,

$$y_0 = ct + b \quad \text{ou} \quad y_0 = -t^2/4 + a,$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Um exemplo

Considere a equação

$$y_0 - ty_1 - y_1^2 = 0,$$

em $\mathcal{F}\{y\}$. Como vimos,

$$0 = \Delta\left(y_0 - ty_1 - y_1^2\right) = -y_2(t + 2y_1).$$

Logo,

$$y_2 = 0 \quad \text{ou} \quad y_1 = -\frac{t}{2}.$$

Integrando,

$$y_0 = ct + c^2 \quad \text{ou} \quad y_0 = -t^2/4,$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

Classificando as soluções

Classificando as soluções

Solução geral: $y_0 = ct + c^2$;

Classificando as soluções

Solução geral: $y_0 = ct + c^2$;

Solução singular: $y_0 = -t^2/4$.

Classificando as soluções

Solução geral: $y_0 = ct + c^2$;

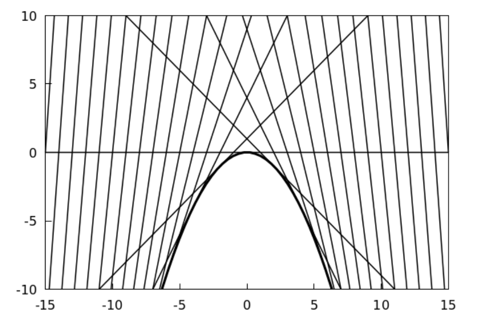
Solução singular: $y_0 = -t^2/4$.

A solução geral é, normalmente, uma família.

Solução geral: $y_0 = ct + c^2$;

Solução singular: $y_0 = -t^2/4$.

A solução geral é, normalmente, uma família.



Alexis Clairaut (1713–1765)

Ideal diferencial

Ideal diferencial

Definição
Um subconjunto J do anel $K\{y\}$ é um **ideal diferencial** *se*

Ideal diferencial

Definição
Um subconjunto J *do anel* $K\{y\}$ *é um* **ideal diferencial** *se*

1. J *é um ideal do anel* $K\{y\}$*;*

Definição
Um subconjunto J do anel $K\{y\}$ é um **ideal diferencial** *se*

1. *J é um ideal do anel $K\{y\}$;*
2. *$\Delta(f) \in J$, para todo $f \in J$.*

Ideal diferencial

Definição
Um subconjunto J do anel $K\{y\}$ é um **ideal diferencial** *se*

1. *J é um ideal do anel $K\{y\}$;*
2. *$\Delta(f) \in J$, para todo $f \in J$.*

Dado $S \subset K\{y\}$, denotamos por $[S]$ o menor ideal diferencial que contém S.

Definição
Um subconjunto J do anel $K\{y\}$ é um **ideal diferencial** *se*

1. *J é um ideal do anel $K\{y\}$;*
2. *$\Delta(f) \in J$, para todo $f \in J$.*

Dado $S \subset K\{y\}$, denotamos por $[S]$ o menor ideal diferencial que contém S. No anel $\mathbb{R}(t)\{y\}$,

$$[y_0] = (y_0, y_1, y_2, \dots).$$

Ideal radical e ideal primo

Ideal radical e ideal primo

Definição
Um ideal diferencial J de $K\{y\}$ é

Definição
Um ideal diferencial J de $K\{y\}$ é

radical *se $f^k \in J$, para algum inteiro $k > 0$, então $f \in J$;*

Ideal radical e ideal primo

Definição
Um ideal diferencial J de $K\{y\}$ é

radical *se $f^k \in J$, para algum inteiro $k > 0$, então $f \in J$;*

primo *se $fg \in J$ implica que $f \in J$ ou $g \in J$.*

Ideal radical e ideal primo

Definição
Um ideal diferencial J de $K\{y\}$ é

radical *se $f^k \in J$, para algum inteiro $k > 0$, então $f \in J$;*

primo *se $fg \in J$ implica que $f \in J$ ou $g \in J$.*

Todo ideal primo é radical.

Ideal radical e ideal primo

Definição
Um ideal diferencial J de $K\{y\}$ é

radical *se $f^k \in J$, para algum inteiro $k > 0$, então $f \in J$;*

primo *se $fg \in J$ implica que $f \in J$ ou $g \in J$.*

Todo ideal primo é radical.

O ideal

$$[y_0] = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$$

é primo.

Teorema de decomposição para ideais

Teorema de decomposição para ideais

Teorema
Todo ideal diferencial radical em $K\{y\}$ pode ser escrito como interseção finita de ideais diferenciais primos.

Teorema de decomposição para ideais

Teorema
Todo ideal diferencial radical em $K\{y\}$ pode ser escrito como interseção finita de ideais diferenciais primos.

⚠ ,

Teorema de decomposição para ideais

Teorema
Todo ideal diferencial radical em $K\{y\}$ pode ser escrito como interseção finita de ideais diferenciais primos.

⚠ Nem todo ideal diferencial de $K\{y\}$ é finitamente gerado,

Teorema de decomposição para ideais

Teorema
Todo ideal diferencial radical em $K\{y\}$ pode ser escrito como interseção finita de ideais diferenciais primos.

⚠ Nem todo ideal diferencial de $K\{y\}$ é finitamente gerado, porém todo ideal diferencial **radical** de $K\{y\}$ é finitamente gerado.

Conjunto solução

Conjunto solução

Seja L uma extensão diferencial de K.

Conjunto solução

Seja L uma extensão diferencial de K. O **conjunto solução** de um ideal diferencial J de $K\{y\}$ é

Conjunto solução

Seja L uma extensão diferencial de K. O **conjunto solução** de um ideal diferencial J de $K\{y\}$ é

$$\mathrm{V}(J) = \{g \in L \,|\, f(g) = 0 \quad \text{para todo} \quad f \in J\}.$$

Conjunto solução

Seja L uma extensão diferencial de K. O **conjunto solução** de um ideal diferencial J de $K\{y\}$ é

$$\mathrm{V}(J) = \{g \in L \mid f(g) = 0 \quad \text{para todo} \quad f \in J\}.$$

em que

$$f(g) = f\left(g, \frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ng}{dt^n}\right).$$

Teorema de decomposição para conjuntos solução

Teorema de decomposição para conjuntos solução

Teorema
Se J é um ideal diferencial radical, então

$$\mathrm{V}(J) = \mathrm{V}(P_1) \cup \cdots \cup \mathrm{V}(P_n),$$

em que $P_1, \ldots, P_n$ são ideais diferenciais primos.

Teorema de decomposição para conjuntos solução

Teorema
Se J é um ideal diferencial radical, então

$$\mathsf{V}(J) = \mathsf{V}(P_1) \cup \cdots \cup \mathsf{V}(P_n),$$

em que $P_1, \ldots, P_n$ são ideais diferenciais primos.

Demonstração.
Aplique, recursivamente, a igualdade

$$\mathsf{V}(I_1 \cap I_2) = \mathsf{V}(I_1) \cup \mathsf{V}(I_2),$$

ao Teorema de Decomposição para ideais,

$$J = P_1 \cap \cdots \cap P_n.$$

□

Notação

Notação

Sejam K um corpo diferencial com derivação δ e

$$\mathcal{Y} = \{u, v, \ldots, z\}$$

um número finito de variáveis diferenciais.

Notação

Sejam K um corpo diferencial com derivação δ e

$$\mathcal{Y} = \{u, v, \ldots, z\}$$

um número finito de variáveis diferenciais. Escrevemos

$$K\{\mathcal{Y}\} = K[u_0, u_1, \ldots, v_0, v_1, \ldots, z_0, z_1, \ldots]$$

para o anel diferencial cuja derivação Δ satisfaz

Notação

Sejam K um corpo diferencial com derivação δ e

$$\mathcal{Y} = \{u, v, \ldots, z\}$$

um número finito de variáveis diferenciais. Escrevemos

$$K\{\mathcal{Y}\} = K[u_0, u_1, \ldots, v_0, v_1, \ldots, z_0, z_1, \ldots]$$

para o anel diferencial cuja derivação Δ satisfaz

$$\Delta(a) = \delta(a) \;\text{ se }\; a \in K;$$

Notação

Sejam K um corpo diferencial com derivação δ e

$$\mathcal{Y} = \{u, v, \ldots, z\}$$

um número finito de variáveis diferenciais. Escrevemos

$$K\{\mathcal{Y}\} = K[u_0, u_1, \ldots, v_0, v_1, \ldots, z_0, z_1, \ldots]$$

para o anel diferencial cuja derivação Δ satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \delta(a) \ \text{ se } \ a \in K; \\ \Delta(y_j) &= y_{j+1} \ \text{ se } \ y \in \mathcal{Y} \ \text{ e } \ j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aplicação

Objetivo
Deduzir a lei de gravitação universal de Newton a partir das leis de Kepler.

Aplicação

Objetivo

Deduzir a lei de gravitação universal de Newton a partir das leis de Kepler.

MM Research Preprints, 53–59
KLMM, AMSS, Academia Sinica
Vol. 1, Feb 1987

Mechanical Derivation of Newton's Gravitational Laws from Kepler's Laws

Wu Wen-tsun
Institute of Systems Science, Academia Sinica

Leis de Kepler

Leis de Kepler

Primeira lei os planetas descrevem órbitas elípticas com o Sol em um dos focos;

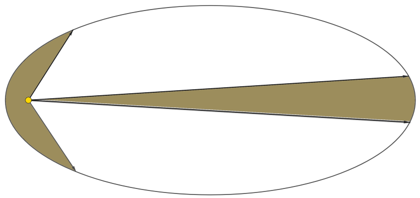
Primeira lei os planetas descrevem órbitas elípticas com o Sol em um dos focos;

Segunda lei o raio vetor que vai do sol a um planeta descreve áreas iguais em tempos iguais.

Leis de Kepler

Primeira lei os planetas descrevem órbitas elípticas com o Sol em um dos focos;

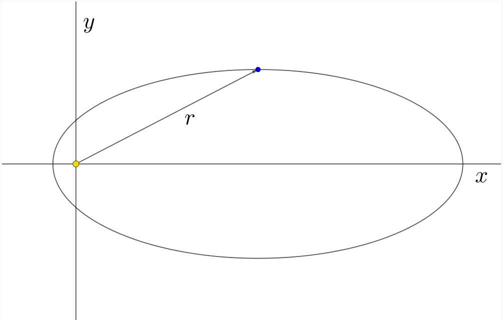
Segunda lei o raio vetor que vai do sol a um planeta descreve áreas iguais em tempos iguais.



Leis de Kepler

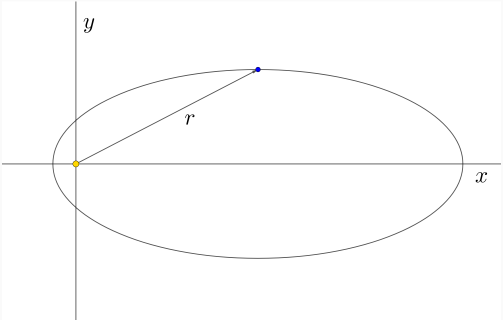
Primeira lei os planetas descrevem órbitas elípticas com o Sol em um dos focos;

Segunda lei o raio vetor que vai do sol a um planeta descreve áreas iguais em tempos iguais.



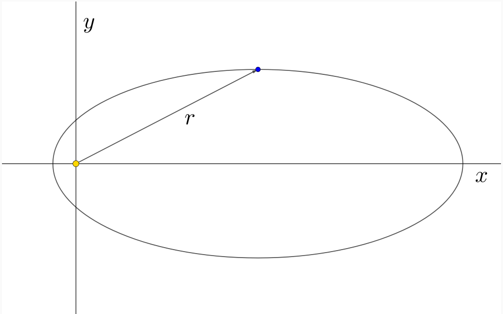
Primeira lei $r = p + ex$;

Segunda lei o raio vetor que vai do sol a um planeta descreve áreas iguais em tempos iguais.



Primeira lei $r = p + ex$;

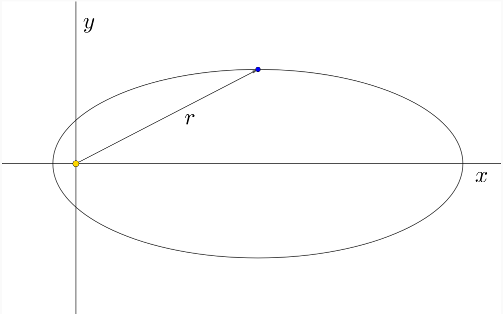
Segunda lei $x_1 y - x y_1 = h \in \mathbb{R}$.



Leis de Kepler

Primeira lei $r = p + ex$;

Segunda lei $x_1 y - x y_1 = h \in \mathbb{R}$. (conservação do momento angular).



Gravitação universal

A lei:

Gravitação universal

A lei:

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

Gravitação universal

A lei:

$$ma = G\frac{mM}{r^2}$$

A lei:

$$a = G\frac{M}{r^2}$$

Gravitação universal

A lei:

$$a \cdot r^2 = GM$$

Gravitação universal

A lei:

$$a_1 \cdot r^2 + arr_1 = 0$$

A lei:

$$a_1 \cdot r + a r_1 = 0$$

Gravitação universal

A lei:

$$a_1 \cdot r + a r_1 = 0$$

A aceleração:

Gravitação universal

A lei:

$$a_1 \cdot r + a r_1 = 0$$

A aceleração:

$$\overrightarrow{r} = (x, y)$$

Gravitação universal

A lei:

$$a_1 \cdot r + a r_1 = 0$$

A aceleração:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r}) = (x_1, y_1)$$

Gravitação universal

A lei:

$$a_1 \cdot r + a r_1 = 0$$

A aceleração:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{r}) = (x_2, y_2)$$

A lei:

$$a_1 \cdot r + ar_1 = 0$$

A aceleração:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{r}) = (x_2, y_2) \Longrightarrow a^2 = x_2^2 + y_2^2$$

Juntando tudo

As hipóteses

As hipóteses

Raio vetor $\texttt{raio} = r^2 - x^2 - y^2$;

As hipóteses

Raio vetor `raio` $= r^2 - x^2 - y^2$;

Aceleração `aceleracao` $= a^2 - x_2^2 - y_2^2$;

As hipóteses

Raio vetor $\texttt{raio} = r^2 - x^2 - y^2;$

Aceleração $\texttt{aceleracao} = a^2 - x_2^2 - y_2^2;$

Primeira lei $\texttt{kepler1} = r - p - ex;$

As hipóteses

Raio vetor $\texttt{raio} = r^2 - x^2 - y^2;$

Aceleração $\texttt{aceleracao} = a^2 - x_2^2 - y_2^2;$

Primeira lei $\texttt{kepler1} = r - p - ex;$

Segunda lei $\texttt{kepler2} = x_1 y - x y_1 - h;$

As hipóteses

Raio vetor $\texttt{raio} = r^2 - x^2 - y^2;$

Aceleração $\texttt{aceleracao} = a^2 - x_2^2 - y_2^2;$

Primeira lei $\texttt{kepler1} = r - p - ex;$

Segunda lei $\texttt{kepler2} = x_1 y - x y_1 - h;$

Constantes $p, e, h \in \mathbb{R}.$

As hipóteses

Raio vetor $\texttt{raio} = r^2 - x^2 - y^2$;

Aceleração $\texttt{aceleracao} = a^2 - x_2^2 - y_2^2$;

Primeira lei $\texttt{kepler1} = r - p - ex$;

Segunda lei $\texttt{kepler2} = x_1 y - x y_1 - h$;

Constantes $p, e, h \in \mathbb{R}$.

A conclusão

As hipóteses

Raio vetor $\texttt{raio} = r^2 - x^2 - y^2$;

Aceleração $\texttt{aceleracao} = a^2 - x_2^2 - y_2^2$;

Primeira lei $\texttt{kepler1} = r - p - ex$;

Segunda lei $\texttt{kepler2} = x_1 y - x y_1 - h$;

Constantes $p, e, h \in \mathbb{R}$.

A conclusão

Lei de gravitação $\texttt{newton} = a_1 r + 2ar_1$.

Estratégia

Estratégia

Mostrar que

$$\texttt{newton} = g_1 \cdot \texttt{raio} + g_2 \cdot \texttt{aceleracao} + g_3 \cdot \texttt{kepler1} + g_4 \cdot \texttt{kepler2}.$$

Mostrar que

$$\texttt{newton} = g_1 \cdot \texttt{raio} + g_2 \cdot \texttt{aceleracao} + g_3 \cdot \texttt{kepler1} + g_4 \cdot \texttt{kepler2}.$$

Logo, para todo $q = (\xi, \eta, \rho, \alpha) \in L$,

Estratégia

Mostrar que

$$\texttt{newton} = g_1 \cdot \texttt{raio} + g_2 \cdot \texttt{aceleracao} + g_3 \cdot \texttt{kepler1} + g_4 \cdot \texttt{kepler2}.$$

Logo, para todo $q = (\xi, \eta, \rho, \alpha) \in L$,

$$\begin{aligned}\texttt{newton}(q) = g_1(q) \cdot \texttt{raio}(q) + g_2(q) \cdot \texttt{aceleracao}(q) \\ + g_3(q) \cdot \texttt{kepler1}(q) + g_4(q) \cdot \texttt{kepler2}(q)\end{aligned}$$

Estratégia

Mostrar que

$$\texttt{newton} = g_1 \cdot \texttt{raio} + g_2 \cdot \texttt{aceleracao} + g_3 \cdot \texttt{kepler1} + g_4 \cdot \texttt{kepler2}.$$

Supondo que $q = (\xi, \eta, \rho, \alpha) \in L$ satisfaz as hipóteses,

$$\begin{aligned}\texttt{newton}(q) = g_1(q) \cdot \texttt{raio}(q) + g_2(q) \cdot \texttt{aceleracao}(q)\\ + g_3(q) \cdot \texttt{kepler1}(q) + g_4(q) \cdot \texttt{kepler2}(q)\end{aligned}$$

Estratégia

Mostrar que

$$\texttt{newton} = g_1 \cdot \texttt{raio} + g_2 \cdot \texttt{aceleracao} + g_3 \cdot \texttt{kepler1} + g_4 \cdot \texttt{kepler2}.$$

Supondo que $q = (\xi, \eta, \rho, \alpha) \in L$ satisfaz as hipóteses,

$$\texttt{newton}(q) \ = \ g_1(q) \cdot 0 + g_2(q) \cdot 0 + g_3(q) \cdot 0 + g_4(q) \cdot 0 \ = \ 0.$$

Estratégia

Mostrar que

$$\texttt{newton} = g_1 \cdot \texttt{raio} + g_2 \cdot \texttt{aceleracao} + g_3 \cdot \texttt{kepler1} + g_4 \cdot \texttt{kepler2}.$$

Supondo que $q = (\xi, \eta, \rho, \alpha) \in L$ satisfaz as hipóteses,

$$\texttt{newton}(q) \;=\; g_1(q) \cdot 0 + g_2(q) \cdot 0 + g_3(q) \cdot 0 + g_4(q) \cdot 0 \;=\; 0.$$

Portanto, Kepler $\Longrightarrow$ Newton.

Sugestões de leitura

1. Hubbard, John H.; Lundell, Benjamin E. *A first look at differential algebra*. Amer. Math. Monthly 118 (2011), no. 3, 245–261
2. Ritt, Joseph Fels. *Differential algebra*. Dover Publications, Inc., New York, 1966.
3. Kolchin, E. R. *Differential algebra and algebraic groups*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973.
4. Boulier, F. *Afternotes on Differential Algebra*, `http://cristal.univ-lille.fr/~boulier/polycopies/AODA/AODA.pdf`