

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

**Karoline Sanchez Fernandes**

**Modelagem do crescimento populacional da cidade de  
Varginha-MG utilizando processos *fuzzy* autocorrelacionados**

VARGINHA - MG

2020

**Karoline Sanchez Fernandes**

**Modelagem do crescimento populacional da cidade de  
Varginha-MG utilizando processos *fuzzy* autocorrelacionados**

Trabalho apresentado como fase final do Curso de Pós-Graduação *Lato sensu* para a obtenção do grau de Especialista em Modelagem em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal de Alfenas.

Orientador: Leandro Ferreira

Coorientador: Silvio Antonio Bueno Salgado

VARGINHA - MG

2020

**Karoline Sanchez Fernandes**

**Modelagem do crescimento populacional da cidade de Varginha-MG utilizando processos *fuzzy* autocorrelacionados**

A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Monografia apresentada como parte dos requisitos para obtenção do grau de Especialista em Modelagem em Ciência e Tecnologia pelo Instituto de Ciências Sociais Aplicadas da UNIFAL-MG.

Trabalho aprovado em: 18 de novembro de 2020

Prof. Orientador Leandro Ferreira  
Instituição: UNIFAL-MG/Campus Varginha

Prof. Coorientador Silvio Antonio Bueno Salgado  
Instituição: UNIFAL-MG/Campus Varginha

Prof. Membro 1 Danilo Machado Pires  
Instituição: UNIFAL-MG/Campus Varginha

Prof. Membro 2 Felipe Andrade Velozo  
Instituição: UNIFAL-MG/Campus Varginh

VARGINHA - MG

2020

# RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma modelagem do crescimento populacional da cidade de Varginha-MG utilizando processos *fuzzy* autocorrelacionados. Para tanto, foi realizado o estudo do modelo clássico de Malthus, sendo que o valor da população inicial foi considerado incerto, representado por um número *fuzzy*. Pôde-se observar que o processo *fuzzy* autocorrelacionado é uma ferramenta adequada para avaliar a incerteza ao longo do tempo.

**Palavras-chave:** *Modelo clássico de Malthus, Processos fuzzy autocorrelacionados, L-derivada.*

# ABSTRACT

The present work aims to present a modeling of population growth in the city of Varginha-MG using autocorrelated fuzzy processes. For this purpose, the study of the Malthus model was carried out, with the initial population value being considered uncertain, represented by a fuzzy number. It was observed that the autocorrelated fuzzy process is an adequate tool to assess the uncertainty over time.

**Keywords:** *Malthus model, autocorrelated fuzzy processes, L-derivative.*

# Lista de tabelas

|  |    |
|--|----|
| Tabela 1 – Números de habitantes dos anos de 2013 a 2017 para o município de Varginha-MG. . . . .  | 13 |
| Tabela 2 – Resultados da população pelo modelo clássico de Malthus e os valores aproximados das soluções defuzzificadas do processo <i>fuzzy</i> . . . . . | 16 |

# Lista de ilustrações

- Figura 1 – Representação gráfica da solução do processo *fuzzy* referente ao cenário 1. . 15
- Figura 2 – Representação gráfica da solução do processo *fuzzy* referente ao cenário 2. . 16

# Sumário

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .                 | <b>8</b>  |
| <b>2</b>   | <b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> . . . . .        | <b>9</b>  |
| <b>2.1</b> | <b>Modelo Clássico de Malthus</b> . . . . . | <b>9</b>  |
| <b>2.2</b> | <b>Conjuntos <i>Fuzzy</i></b> . . . . .     | <b>9</b>  |
| <b>3</b>   | <b>METODOLOGIA</b> . . . . .                | <b>13</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Dados</b> . . . . .                      | <b>13</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Processo <i>fuzzy</i></b> . . . . .      | <b>13</b> |
| <b>4</b>   | <b>RESULTADOS</b> . . . . .                 | <b>15</b> |
| <b>5</b>   | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .       | <b>17</b> |
| <b>6</b>   | <b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .                | <b>18</b> |

# 1 Introdução

A modelagem matemática surgiu como um mecanismo de descrição ou previsão futura de um certo evento natural da sociedade através de estudos de certos padrões. Cada vez mais, busca-se um aprimoramento dos modelos determinísticos, procurando retratar, de uma forma mais coerente, incertezas que podem ser encontradas em alguns parâmetros.

Um exemplo de aplicação de modelos matemáticos é na dinâmica do crescimento populacional, sendo que é de grande importância entender o crescimento populacional de uma localidade, podendo prever como será a população futura, permitindo, por exemplo, desenvolver políticas econômicas e sociais adequadas.

Um modelo matemático referente ao crescimento populacional foi desenvolvido por Thomas Robert Malthus, no século XVIII. Posteriormente, no século XX, os neomalthusianistas surgiram trazendo novas premissas para a modelagem do crescimento populacional. Em contrapartida, os Marxistas ou Reformistas, surgiram com o contraponto as teorias de Malthus e dos neomalthusianos (DAMIANI, 1991).

No modelo matemático desenvolvido por Malthus, considera-se que a população cresce a uma taxa constante no decorrer dos anos e também que a população no tempo  $t$  anos depende da população inicial ( $t = 0$ ). Porém, pode ser que exista uma certa incerteza na população inicial. Uma das alternativas utilizadas para modelar incertezas é a lógica *fuzzy*.

A lógica *fuzzy* foi baseada na teoria de conjuntos *fuzzy*, apresentada por Lofti A. Zadeh (ZADEH, 1965), sendo uma generalização da lógica clássica que busca quantificar as expressões linguísticas imprecisas e/ou ambíguas, como “em torno de”. Dessa maneira, pode-se considerar a lógica *fuzzy* como uma ferramenta que lida com a incerteza. Portanto, percebe-se uma potencial aplicação da lógica *fuzzy* nos modelos de crescimento populacional, uma vez que pode existir, por exemplo, imprecisão na taxa de crescimento e na população inicial.

O presente trabalho tem como objetivo, apresentar uma modelagem do crescimento populacional da cidade de Varginha-MG utilizando processos *fuzzy* autocorrelacionados. Para tanto, foi realizado o estudo do modelo clássico de Malthus, sendo que o valor da população inicial foi considerado incerto, representado por um número *fuzzy*.

## 2 Referencial Teórico

### 2.1 Modelo Clássico de Malthus

O crescimento populacional é uma preocupação de cientistas de diversas áreas, que há tempos, buscam ferramentas matemáticas para entender sua dinâmica, e com isso, planejar o uso correto de recursos públicos. O pioneiro na tentativa de estimar o crescimento populacional mundial foi o economista e demógrafo Thomas Robert Malthus (MALTHUS, 1798). Em seu modelo, foi considerado que a população crescia de acordo com uma progressão geométrica, se não fosse controlada. Malthus observou que, na ausência de restrições ambientais, a população aumentaria numa proporção fixa. Em termos matemáticos, se  $P(t)$  denota o número de indivíduos em uma certa área geográfica, no instante  $t > 0$ , então:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

em que  $P_0$  denota a população inicial e  $k \in \mathbb{R}$  é a taxa de crescimento.

A solução de (2.1) é dada por:

$$P(t) = P_0 e^{kt}, \quad (2.2)$$

o que mostra que o crescimento populacional é dado de forma exponencial, dependendo da população inicial ( $P_0$ ) e da taxa de crescimento ( $k$ ). Porém, em uma retrospectiva, o modelo não se mostra eficiente em países de primeiro mundo. Sua estimativa se torna eficiente para países em desenvolvimento e em um curto espaço de tempo.

A dinâmica de crescimento de Malthus falha pelo fato de estimar crescimentos populacionais cada vez maiores, o que não representa a realidade, uma vez que existem fatores que limitam o crescimento de uma população.

### 2.2 Conjuntos *Fuzzy*

Lógica *fuzzy*, também conhecida como difusa ou nebulosa, foi desenvolvida por Lofti A. Zadeh, da Universidade da Califórnia em Berkeley, na década de 60. O objetivo da lógica *fuzzy* é tentar refletir o pensamento humano subjetivo, tentando modelar o nosso senso de palavras, tomada de decisão, na qual um elemento pode pertencer a um conjunto com grau de pertinência no intervalo  $[0, 1]$ . A seguir, serão apresentados conceitos preliminares sobre lógica *fuzzy*.

**Definição 2.2.1** (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017) Seja  $U$  um espaço topológico. Um subconjunto fuzzy  $A$  de  $U$  é caracterizado por uma função de pertinência  $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ . Denota-se  $\mu_A(x) = A(x)$ , em que  $A(x)$  representa o grau que o elemento  $x$  pertence ao subconjunto fuzzy  $A$ .

**Definição 2.2.2** (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017) Os  $\alpha$ -níveis de um subconjunto fuzzy  $A$  são definidos por

$$[A]^\alpha = \{x \in U : A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.3)$$

sendo que  $[A]^0$  representa o fecho do suporte de  $A$ .

**Definição 2.2.3** (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017) Um subconjunto fuzzy  $A$  de  $\mathbb{R}$  é um número fuzzy quando satisfaz as propriedades:

- Todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são não vazios;
- Todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos fechados de  $\mathbb{R}$ ;
- $\text{supp } A = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$  é limitado.

Os  $\alpha$ -níveis de um número fuzzy  $A$  serão denotados por  $[A]^\alpha = [a_-^\alpha, a_+^\alpha]$ .

Os números fuzzy mais comuns são os triangulares, trapezoidais e em forma de sino (gaussianos). Um número fuzzy será dito triangular se sua função de pertinência é dada por:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x \leq b; \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{se } b < x \leq c; \\ 0 & \text{se } x \geq c. \end{cases} \quad (2.4)$$

Os  $\alpha$ -níveis de um número fuzzy triangular são dados por:

$$[A]^\alpha = [\alpha(b-a) + a, \alpha(c-b) + c], \quad (2.5)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Com a intenção de conhecer a imagem de um subconjunto fuzzy  $A$  de  $X$ , Zadeh (1965) desenvolveu o princípio de extensão, que estende um número fuzzy através de uma função, conforme definição a seguir.

**Definição 2.2.4** (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017) *Sejam  $f$  uma função tal que  $f : X \rightarrow Z$  e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ . A extensão de Zadeh de  $f$  e a função  $\hat{f}$  que, aplicada a  $A$ , fornece um subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é dada como:*

$$\hat{f}(A)(z) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(z)} A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset; \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset. \end{cases} \quad (2.6)$$

em que  $f^{-1}(z) = \{x : f(x) = z\}$  denomina-se a pré-imagem de  $Z$ .

As operações da lógica intervalar também podem ser estendidas para o caso fuzzy, considerando como casos particulares do princípio de extensão de Zadeh.

**Definição 2.2.5** (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017) *Sejam  $A$  e  $B$  dois números fuzzy. Se  $\otimes$  denota um operador binário em  $\mathbb{R}$ , então*

$$(A \otimes B)(z) = \begin{cases} \sup_{(x,y) \in \theta(z)} \min\{A(x), B(y)\} & \text{se } \theta(z) \neq \phi; \\ 0 & \text{se } \theta(z) = \phi. \end{cases} \quad (2.7)$$

em que  $\theta(z) = \{(x, y) : x \otimes y = z\}$ .

**Definição 2.2.6** (BARROS; PEDRO, 2017) *Dois números fuzzy  $A$  e  $B$  são ditos linearmente correlacionados quando existem  $q, r \in \mathbb{R}$  tais que, em níveis, obtem-se  $[B]^\alpha = q[A]^\alpha + r$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .*

No caso, os processos fuzzy são funções fuzzy do tipo  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ , isto é, funções que a cada número real associa um número fuzzy. Os  $\alpha$ -níveis da função  $F$  serão denotados por  $[F(t)]^\alpha = [f_-^\alpha(t), f_+^\alpha(t)]$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Além disso, esses processos são autocorrelacionados, ou seja, para todo  $h$  com valor absoluto suficientemente pequeno,  $[F(t+h)]^\alpha = q(h)[F(t)]^\alpha + r(h)$ . Em outras palavras, considera-se que o presente está linearmente correlacionado com o futuro.

**Definição 2.2.7** (BARROS; PEDRO, 2017) *Seja  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  um processo fuzzy e para cada  $h$  com valor absoluto suficientemente pequeno, sejam  $F(t_0+h)$  e  $F(t_0)$  com  $t_0 \in [a, b]$  números fuzzy linearmente correlacionados. A função  $F$  é dita ser  $L$ -diferenciável no ponto  $t_0$  se existir um número fuzzy  $F'_L(t_0)$  tal que o limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t_0+h) -_L F(t_0)}{h}$$

existe e é igual a  $F'_L(t_0)$ . Adicionalmente,  $F'_L(t_0)$  é chamado de derivada fuzzy linearmente correlacionada de  $F$  no ponto  $t_0$ .

**Definição 2.2.8** (BARROS; PEDRO, 2017) *Seja  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  L-diferenciável em  $t_0$  e  $[F(t_0)]^\alpha = [f_-^\alpha(t_0), f_+^\alpha(t_0)]$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Então  $f_-^\alpha$  e  $f_+^\alpha$  são diferenciáveis em  $t_0$  e para todo  $h$  com valor absoluto suficientemente pequeno, tem-se que*

$$[F'_L(t_0)]^\alpha = \begin{cases} [(f_-^\alpha)'(t_0), (f_+^\alpha)'(t_0)] & \text{se } q(h) \geq 1; \\ [(f_+^\alpha)'(t_0), (f_-^\alpha)'(t_0)] & \text{se } 0 < q(h) < 1; \\ [(f_-^\alpha)', (f_+^\alpha)'] & \text{se } q(h) \leq 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

sendo  $F'_L(t_0)$  a L-derivada de  $F$  em  $t_0$ .

Em processos *fuzzy*, têm-se os métodos de defuzzificação, que permitem representar um conjunto *fuzzy* por um valor clássico (número real). Existem vários métodos de defuzzificação na literatura, sendo que os mais utilizados são: Centróide, Centro de Máximos, Média dos Máximos e Menor dos Máximos. A seguir, é apresentado a definição do método do Centróide para o caso contínuo.

**Definição 2.2.9** (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017) *O Centróide do subconjunto fuzzy  $B$  é o número real*

$$G(B) = \frac{\int_R x \cdot B(x) dx}{\int_R B(x) dx}, \quad (2.9)$$

em que  $R$  é a região de integração.

## 3 Metodologia

### 3.1 Dados

Para a modelagem do crescimento populacional da cidade de Varginha-MG, foi consultada a base de dados do Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil (Atlas Brasil), que inclui o Atlas de Desenvolvimento Humano nos Municípios e o Atlas do Desenvolvimento Humano nas Regiões Metropolitanas.

No Atlas Brasil, pode-se encontrar de uma forma fácil e dinâmica, diversos indicadores, como o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) e mais de 200 indicadores socioeconômicos. Através desses indicadores, pode-se verificar a evolução dos municípios brasileiros nos últimos 20 anos em educação, saúde, trabalho, renda população, demografia, habitação e vulnerabilidade social, tendo assim, um quadro de desenvolvimento humano e da desigualdade dentro dos municípios, estados e regiões metropolitanas.

O Atlas Brasil foi utilizado para extrair informações demográficas da cidade de Varginha, em Minas Gerais, como os números de habitantes dos anos de 2013 a 2017, como apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 – Números de habitantes dos anos de 2013 a 2017 para o município de Varginha-MG.

| Ano  | População |
|------|-----------|
| 2013 | 130.139   |
| 2014 | 131.269   |
| 2015 | 132.353   |
| 2016 | 133.384   |
| 2017 | 134.364   |

### 3.2 Processo *fuzzy*

Com base no modelo clássico de Malthus, apresentado na seção 2.1, tem-se que a população cresce de forma exponencialmente a uma taxa crescente ( $k$ ), sendo que sua população no tempo  $t$  depende da população inicial ( $P_0$ ), conforme equação a seguir:

$$P(t) = P_0 e^{kt}. \quad (3.1)$$

Nesse modelo, a população inicial  $P_0$  será considerada incerta, sendo representada por um número *fuzzy* triangular ( $a; b; c$ ), com pertinência máxima no ponto  $b$  e base no intervalo

$[a, b]$ . Dessa maneira, o modelo de Malthus com condição inicial *fuzzy* é dado por

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \\ P(0) = P_0, P_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (3.2)$$

Admitindo que a solução do modelo de Malthus com condição inicial *fuzzy* é um processo *fuzzy* linearmente correlacionado e optando por  $q \geq 1$  na L-derivada, pois espera-se que a incerteza aumente com o passar do tempo, tem-se o modelo

$$\begin{cases} [(P_-^\alpha)'(t), (P_+^\alpha)'(t)] = [kP_-^\alpha(t), kP_+^\alpha(t)] \\ [P_0]^\alpha = [P(0)]^\alpha = [P_-^\alpha(0), P_+^\alpha(0)] \end{cases}, \quad (3.3)$$

sendo que a solução é dada por  $[P(t)]^\alpha = [P_-^\alpha(0)e^{kt}, P_+^\alpha(0)e^{kt}]$ .

Foi utilizado o método de defuzzificação do Centróide para transformar os conjuntos *fuzzy* num valor clássico (número real).

O processo *fuzzy* foi implementado na linguagem de programação C++, sendo que as análises gráficas foram realizadas por meio do *software* GNUPLOT.

## 4 Resultados

Para obter a taxa de crescimento  $k$  do modelo clássico de Malthus para a cidade de Varginha-MG, foi utilizado o ano de 2013 com população igual a 130.139 habitantes, e o ano de 2017, com população igual a 134.364 habitantes. Dessa forma, obteve-se a taxa de crescimento  $k$  igual a 0,00799. Pelo modelo clássico, pode-se constatar que a população da cidade de Varginha-MG cresce de forma exponencial a uma taxa constante de 0,799% ao ano, considerando a linha temporal utilizada.

No processo *fuzzy*, foram considerados dois cenários, conforme a incerteza atribuída a população inicial  $P(0)$ . No cenário 1, foi considerado um número *fuzzy* triangular, representado por  $(P(0) - 0,1P(0); P(0); P(0) + 0,2P(0))$  e no cenário 2, foi considerado o número *fuzzy* triangular  $(P(0) - 0,2P(0); P(0); P(0) + 0,1P(0))$ , sendo que  $P(0) = 130.139$ .

As Figuras 1 e 2 apresentam as soluções do processo *fuzzy* para os cenários 1 e 2, respectivamente. A escala representativa mostra que quanto mais claro for, menor o grau de pertinência. Em contrapartida, quanto mais escuro, maior o grau de pertinência, sendo que, grau de pertinência igual a 1 equivale a solução clássica. Pode-se observar que o processo *fuzzy* autocorrelacionado é uma ferramenta adequada para avaliar a incerteza ao longo do tempo.

A Tabela 2 apresenta os resultados da população pelo modelo clássico de Malthus e os valores aproximados das soluções defuzzificadas pelo método do Centróide para os cenários 1 e 2.

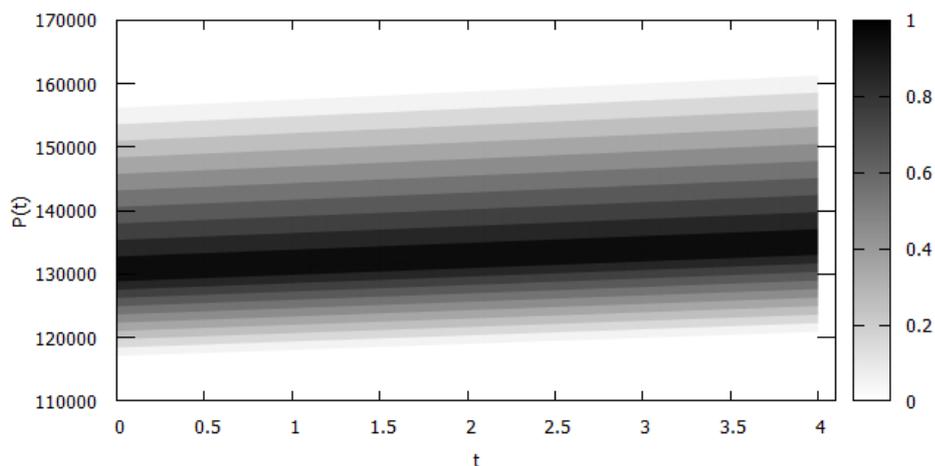


Figura 1 – Representação gráfica da solução do processo *fuzzy* referente ao cenário 1.

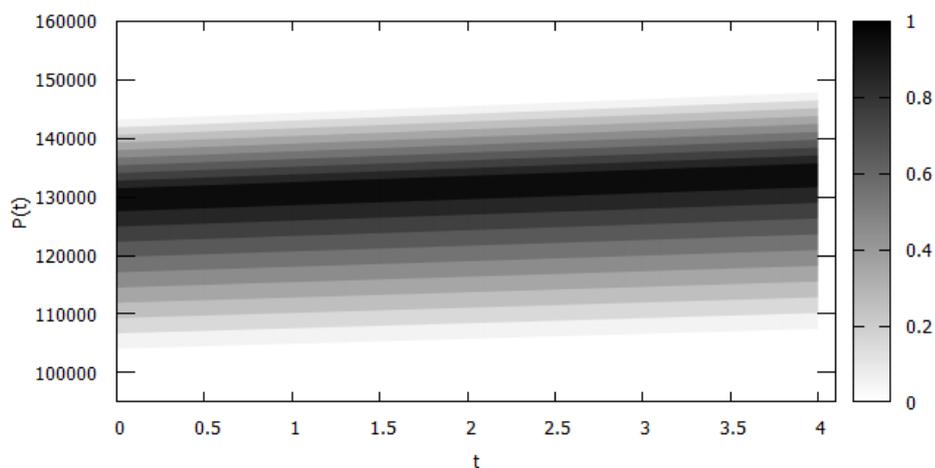


Figura 2 – Representação gráfica da solução do processo *fuzzy* referente ao cenário 2.

Tabela 2 – Resultados da população pelo modelo clássico de Malthus e os valores aproximados das soluções defuzzificadas do processo *fuzzy*.

| Ano  | Dados originais | Modelo clássico | Processo <i>fuzzy</i><br>Cenário 1 | Processo <i>fuzzy</i><br>Cenário 2 |
|------|-----------------|-----------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 2013 | 130.139         | 130.139         | 132.286                            | 127.992                            |
| 2014 | 131.269         | 131.187         | 133.347                            | 129.018                            |
| 2015 | 132.353         | 132.235         | 134.417                            | 130.053                            |
| 2016 | 133.384         | 133.295         | 135.496                            | 131.097                            |
| 2017 | 134.364         | 134.364         | 136.582                            | 132.148                            |

## 5 Considerações Finais

O presente trabalho apresentou a modelagem do crescimento populacional da cidade de Varginha-MG utilizando processos *fuzzy* autocorrelacionados, considerando o valor da população inicial incerto, representado por um número *fuzzy*. Pôde-se observar que o processo *fuzzy* autocorrelacionado é uma ferramenta adequada para avaliar a incerteza ao longo do tempo. Como trabalho futuro, propõe-se a utilização de outros modelos para avaliar o crescimento populacional, como por exemplo, o modelo de Verhulst, que é uma modificação do modelo proposto por Malthus, levando em conta fatores inibidores.

## 6 Referências

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; LODWICK, A. *A first course in fuzzy logic, fuzzy dynamical systems and biomathematics*. Springer Berlin Heidelberg, v. 1, 2017.

BARROS, L. C.; PEDRO, F. S. Fuzzy differential equations with interactive derivative. *Fuzzy sets and systems*. v. 309, p, 64-80, 2017.

DAMIANI, A. L. *População e geografia*. Editora Contexto, 1991.

MALTHUS, T. *An essay on the principle of population*. London: St. Paul's Church Yard, 1798.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Journal Information and Control*. n. 8, p. 338-353, 1965.