

Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL
Instituto de Ciências Sociais Aplicadas - ICSA

MATHEUS SARAIVA ALCINO

Dinâmica da concentração de um poluente em um
fluido com velocidade de propagação fuzzy via
Princípio de Extensão de Zadeh

Varginha

2019

Dinâmica da concentração de um poluente em um fluido com velocidade de propagação fuzzy via Princípio de Extensão de Zadeh

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título da Pós-Graduação em Modelagem em Ciência e Tecnologia pelo Instituto de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal de Alfenas – *campus* Varginha.

Orientador: Silvio Antônio Bueno Salgado

MATHEUS SARAIVA ALCINO

Dinâmica da concentração de um poluente em um
fluido com velocidade de propagação fuzzy via
Princípio de Extensão de Zadeh

Aprovado: _____

Professora Cláudia Adam Ramos

Aprovado: _____

Professor Nilton César da Silva

Aprovado: _____

Professor Silvio Antônio Bueno Salgado

Resumo

O estudo da dinâmica da concentração de uma substância poluente em um fluido é um problema clássico da Mecânica dos Fluidos descrito por uma equação diferencial parcial denominada equação de transporte. Neste trabalho, consideramos uma substância poluente lançada num fluido, cuja concentração é dada por $u = u(x, t)$, em que $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. O fluido se desloca com velocidade incerta e modelada por um conjunto fuzzy, ao longo de um tubo horizontal de seção transversal fixa na direção x positiva. A solução do problema foi obtida com o uso do Princípio de Extensão de Zadeh. Através da solução obtida neste trabalho, foi possível analisar a influência da incerteza na velocidade de propagação do fluido na dinâmica do sistema.

Palavras-chave: Princípio de extensão de Zadeh; Equação do transporte; Equações diferenciais parciais; Número fuzzy.

Sumário

1	Introdução	6
2	Preliminares	7
3	A equação de transporte – modelo clássico	11
4	A equação de transporte homogênea com coeficiente fuzzy	13
5	Conclusões	19
	Referências	19

1 Introdução

Equações diferenciais parciais têm um papel fundamental na resolução de problemas ligados a engenharia, física, biologia, finanças, dentre outras. Em particular, analisar e compreender equações diferenciais parciais que surgem na dinâmica de fluídos é essencial para muitas aplicações industriais como recuperação de óleo de um reservatório subterrâneo, trocadores de calor e reatores químicos. O processo de modelagem de diversos fenômenos por meio de equações diferenciais, quase sempre está incompleta, pois os valores dos coeficientes das equações diferenciais ou das condições iniciais geralmente não são precisamente conhecidos.

Há na literatura matemática diversas abordagens sobre o tratamento da incerteza. Zadeh (1965) introduziu a Teoria dos Conjuntos Fuzzy com o objetivo de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, tais como “aproximadamente”, “em torno de”, etc. O termo equação diferencial fuzzy (EDF) foi utilizado pela primeira vez por Kandel e Byatt (1978). Ao modelarmos um problema via EDFs, podemos ter condições iniciais, coeficientes e/ou parâmetros representados por conjuntos fuzzy. EDFs representam um campo fértil de pesquisa e com inúmeros problemas em aberto. Bertone et al. (2013) consideram soluções de algumas equações diferenciais parciais fuzzy elementares utilizando duas técnicas distintas. Leite et al. (2015) estudam a solução de um problema de difusão utilizando o princípio de extensão de Zadeh. Alteiaie et al. (2019) utilizam um método para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais parciais fuzzy. Bahrami et al. (2018) estudam a equação de transporte homogênea e não homogênea considerando a noção de diferenciabilidade fortemente generalizada.

Neste trabalho, estudaremos a solução do Problema

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}, \quad (1)$$

conhecido como equação de transporte em dimensão 1, considerando que o coeficiente c é dado por um número fuzzy. A função $u = u(x, t)$ denota a concentração de uma substância poluente lançada num determinado fluído e o coeficiente c , um número real que denota a velocidade de propagação do fluído. Neste trabalho, consideramos o coeficiente c dado por um número fuzzy. Dessa forma, a equação diferencial descrita no Problema 1 passa ser uma equação diferencial parcial com coeficiente fuzzy. Dessa forma, pretendemos investigar o efeito da incerteza atribuída no coeficiente c na dinâmica do modelo. Utilizaremos o princípio de extensão de Zadeh para estender a solução determinística e, em seguida, defuzzificaremos a solução encontrada afim de compreendermos o efeito da incerteza no

coeficiente c na dinâmica do sistema.

2 Preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos fundamentais para a construção deste trabalho.

Definição 1 (Barros et al., 2017) *Seja U um espaço topológico. Um subconjunto fuzzy A de U é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$, em que $\mu_A(x)$ denota o grau em que o elemento x pertence ao subconjunto fuzzy A .*

Se A for um subconjunto clássico de U , sua função de pertinência é dada pela função característica $\chi_A(x)$. Neste estudo, a notação $A(x)$ será utilizada para representar a função de pertinência, ao invés de $\mu_A(x)$.

Definição 2 *Os α -níveis de um subconjunto fuzzy A são definidos por*

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in U; A(x) \geq \alpha\}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \overline{\{x \in U; A(x) > 0\}}, & \alpha = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

em que \bar{X} denota o fecho do subconjunto X de U .

Definição 3 (Barros et al., 2017) *Um subconjunto fuzzy A de \mathbb{R} é um número fuzzy quando satisfaz as propriedades:*

- i) todos os α -níveis de A são intervalos fechados e não vazios de \mathbb{R} .*
- ii) o conjunto $\{x; A(x) > 0\}$ é um conjunto limitado de \mathbb{R} .*

Pela Definição (3), os α -níveis de um número fuzzy A são representados por

$$[A]^\alpha = [a_-^\alpha, a_+^\alpha], \quad (3)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

O símbolo $\mathcal{F}(X)$ será utilizado para denotar os subconjuntos fuzzy de X , e $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ para denotar o conjunto de todos os números fuzzy. Um exemplo de número fuzzy é o número triangular fuzzy, cujo α -níveis são dados por $[A]^\alpha = [(m - a_-^0)\alpha + a_-^0, (m - a_+^0)\alpha + a_+^0]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, em que $[A]^\alpha = [a_-^\alpha, a_+^\alpha]$ e $\{m\} = [A]^1$ (um número real). Um número fuzzy triangular é denotado pela tripla $[a_-^0; m; a_+^0]$.

Definição 4 (Esmi et al., 2018) Dizemos que um conjunto fuzzy A de \mathbb{R} é simétrico em relação a $x \in \mathbb{R}$ se $A(x - y) = A(x + y)$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Se não houver qualquer $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça esta propriedade, dizemos que A não é simétrico.

Proposição 1 (Esmi et al., 2018) Um número fuzzy A é simétrico em relação a $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $a_+^\alpha = 2\alpha - a_+^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A ideia de se conhecer como seria a imagem de um subconjunto fuzzy A de X por meio de uma função f pode ser materializada através do Princípio de Extensão de Zadeh.

Definição 5 (Barros et al., 2017) Seja f uma função tal que $f : X \rightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} que, aplicada a A , fornece um subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por

$$\hat{f}(A)(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} A(x), & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}, \quad (4)$$

em que $f^{-1}(z) = \{x : f(x) = z\}$ denomina-se a pré-imagem de z .

Para o caso bivariado, o Princípio de Extensão de Zadeh é dado pela Definição (6).

Definição 6 (Barros et al., 2017) Seja $f : X \rightarrow Z$ uma função e, $(A, B) \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Z)$. A extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} que aplicada a (A, B) , é um subconjunto fuzzy $\hat{f}(A, B)$ de Z , cuja função de pertinência é definida como

$$\hat{f}(A, B)(z) = \begin{cases} \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min\{A(x), B(y)\}, & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}. \quad (5)$$

em que $f^{-1}(z) = \{(x, y) : f(x, y) = z\}$ denomina-se a pré-imagem de z .

As operações aritméticas envolvendo números fuzzy estão intimamente ligadas as operações aritméticas intervalares. A aritmética intervalar foi introduzida por Ramon E. Moore em 1960, embora já houvesse relatos de sua forma em 1924 e 1931. Por intervalo da reta, ou simplesmente intervalo, consideraremos um subconjunto não vazio, fechado e limitado de números reais da forma

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}. \quad (6)$$

Definição 7 (Klir e Yuan, 1995) Dados intervalos $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ e um número real λ , define-se:

i) $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$.

- ii) $A - B = [a_1 + b_2, a_2 + b_1]$.
- iii) $\lambda A = [\lambda a_1, \lambda a_2]$ se $\lambda \geq 0$ e $[\lambda a_2, \lambda a_1]$ se $\lambda \leq 0$.
- iv) $A \cdot B = [\min I, \max I]$ em que $I = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$.
- v) $A/B = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right]$.

Proposição 2 (Klir e Yuan, 1995) *Sejam os intervalos $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$, $\tilde{0} = [0, 0]$ e $\tilde{1} = [1, 1]$. Então*

- i) $A + B = B + A$ e $A \cdot B = B \cdot A$.
- ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ e $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- iii) $A = A + \tilde{0} = \tilde{0} + A$ e $A \cdot \tilde{1} = \tilde{1} \cdot A$.
- iv) $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$.
- v) Dados $b \in B$ e $c \in C$ tais que $bc \geq 0$, então $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
- vi) $0 \in A - A$ e $1 \in A/A$.

Dadas as operações aritméticas intervalares estamos em condições de definir as operações entre números fuzzy. As operações aritméticas para números fuzzy serão definidas a partir do Princípio de Extensão para funções de duas variáveis. As funções a serem estendidas são as operações clássicas para números reais. Por exemplo, para definirmos a soma de dois números fuzzy, estenderemos a função adição de números reais, ou seja

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

Definição 8 (Barros et. al, 2017) *Sejam A e B números fuzzy e λ um número real.*

- i) *A soma dos números fuzzy A e B é o número fuzzy $A \oplus B$, cuja função de pertinência é*

$$(A \oplus B)(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)} \min [A(x), B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \phi(z) = \emptyset \end{cases}, \quad (7)$$

em que $\phi(z) = \{(x, y); x + y = z\}$.

- ii) *A multiplicação de λ por A é o número fuzzy $\lambda \odot A$, cuja função de pertinência é*

$$(\lambda \odot A)(z) = \begin{cases} \sup_{\{x; \lambda x = z\}} A(x) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

iii) A diferença dos números fuzzy A e B é o número fuzzy, $A \ominus B$, cuja função de pertinência é

$$(A \ominus B)(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)} \min [A(x), B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \phi(z) = \emptyset \end{cases}, \quad (9)$$

em que $\phi(z) = \{(x, y); x - y = z\}$.

O Teorema 1 generaliza, através dos α -níveis, as operações aritméticas entre números fuzzy. Além disso, ele garante que o resultado de operações aritméticas entre dois números fuzzy seja também um número fuzzy [3].

Teorema 1 (Barros et al., 2017) *Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Os α -níveis do conjunto fuzzy $A \otimes B$, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$, em que \otimes denota qualquer operação aritmética intervalar clássica para intervalos, são dados por*

$$[A \otimes B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \otimes [B]^{\alpha}. \quad (10)$$

Sejam A e B números fuzzy com α -níveis dados por $[A]^{\alpha} = [a_{-}^{\alpha}, a_{+}^{\alpha}]$ e $[B]^{\alpha} = [b_{-}^{\alpha}, b_{+}^{\alpha}]$. Então, tem-se as seguintes propriedades:

a) A soma entre A e B é um número fuzzy $A \oplus B$ em que os α -níveis são

$$[A \oplus B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \oplus [B]^{\alpha} = [a_{-}^{\alpha} + b_{-}^{\alpha}, a_{+}^{\alpha} + b_{+}^{\alpha}]. \quad (11)$$

b) A diferença entre A e B é um número fuzzy $A \ominus B$ em que os α -níveis são

$$[A \ominus B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \ominus [B]^{\alpha} = [a_{-}^{\alpha} - b_{+}^{\alpha}, a_{+}^{\alpha} - b_{-}^{\alpha}]. \quad (12)$$

c) A multiplicação entre um número real k e um número fuzzy A , denotada por $k \odot A$ são os α -níveis

$$[k \odot A]^{\alpha} = k \odot [A]^{\alpha} = \begin{cases} [ka_{-}^{\alpha}, ka_{+}^{\alpha}], & k \geq 0 \\ [ka_{+}^{\alpha}, ka_{-}^{\alpha}], & k < 0 \end{cases}. \quad (13)$$

Definição 9 (Puri e Ralescu, 1986) *Dados $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, a função $D_{\infty} : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow [0, +\infty)$ definida por*

$$D_{\infty}(A, B) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max \{ |a_{-}^{\alpha} - b_{-}^{\alpha}|, |a_{+}^{\alpha} - b_{+}^{\alpha}| \}, \quad (14)$$

é chamada de distância de Pompeiu-Hausdorff entre os números fuzzy A e B .

Teorema 2 (Puri e Ralescu, 1986) *Dados $A, B, C, D \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $k \in \mathbb{R}$, então*

- (i) *O par $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_{\infty})$ é um espaço métrico;*
- (ii) $D_{\infty}(A \oplus C, B \oplus C) = D_{\infty}(A, B);$
- (iii) $D_{\infty}(k \odot A, k \odot B) = |k| D_{\infty}(A, B);$
- (iv) $D_{\infty}(A \oplus B, C \oplus D) \leq D_{\infty}(A, C) + D_{\infty}(B, D).$

Existem muitos métodos de defuzzificação. Dentre todos eles, os mais utilizados são: Centróide, Centro de máximos, Média dos Máximos e Menor dos Máximos.

Definição 10 (Bede e Gal, 2004) *O centróide do subconjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(U)$ é o número real*

$$COG(A) = \frac{\int_W x \cdot A(x) dx}{\int_W A(x) dx}, \quad (15)$$

em que $W = \text{supp}(A)$.

3 A equação de transporte – modelo clássico

A equação de transporte é uma equação diferencial parcial de primeira ordem, que modela a dinâmica da concentração de um poluente em um fluido num dado espaço físico. Neste estudo, o espaço físico pode ser entendido como um tubo. Além disso, algumas características físicas do problema não serão consideradas, como a viscosidade do fluido e a pressão atmosférica dentro do tubo.

Denotaremos por M a quantidade de poluente no intervalo $[0, b]$ no instante t , ou seja:

$$M(t) = \int_0^b u(x, t) dx. \quad (16)$$

Considerando o instante $t + h$, em que h é suficientemente pequeno, as moléculas do poluente são movidas para uma direção única, de modo que o coeficiente responsável por tal movimento é denotado por c . Assim, assumindo que $c > 0$, temos

$$M(t) = \int_0^b u(x, t) dx = \int_{ch}^{b+ch} u(x, t + h) dx. \quad (17)$$

Derivando (17) com relação a b , tem-se:

$$u(b, t) = u(b + ch, t + h). \quad (18)$$

Derivando (18) com relação a h no ponto $h = 0$, segue que:

$$0 = cu_x(b, t) + u_t(b, t). \quad (19)$$

Portanto:

$$u_t + cu_x = 0. \quad (20)$$

Tomando $u(x, 0) = f(x)$, temos:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}. \quad (21)$$

Teorema 3 (Strauss, 2007) *O Problema*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}, \quad (22)$$

em que $f \in C^1(\mathbb{R})^1$, admite solução da forma

$$u(x, t) = f(x - ct). \quad (23)$$

Da mecânica dos fluídos, Landau et al. (1997) propõem uma função que modela o movimento de dois gases em uma superfície, assumindo algumas hipóteses de simplificação. Entre elas, os autores consideram os fluídos em questão como gases perfeitos e, assim, fatores físicos como viscosidade, temperatura, pressão, etc, são variáveis que não são inseridas no modelo.

Assim, neste estudo tanto o poluente quanto o fluído não serão especificados e, portanto, considerados como gases perfeitos. Landau et al. (1997) sugerem que a difusão

¹O símbolo $f \in C^1(\mathbb{R})$ representa que a função f é de classe C^1 em \mathbb{R}

dos gases seja modelado pela função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4d\pi}} e^{-\frac{1}{4d}(x-1)^2}, \quad (24)$$

em que $x \in \mathbb{R}$ e d é um número positivo que representa a variabilidade da difusão.

Com isso, a função (24) será utilizada como condição inicial do Problema (22). A Figura (1) é a representação gráfica da solução da equação do transporte, utilizando (24) como condição inicial.

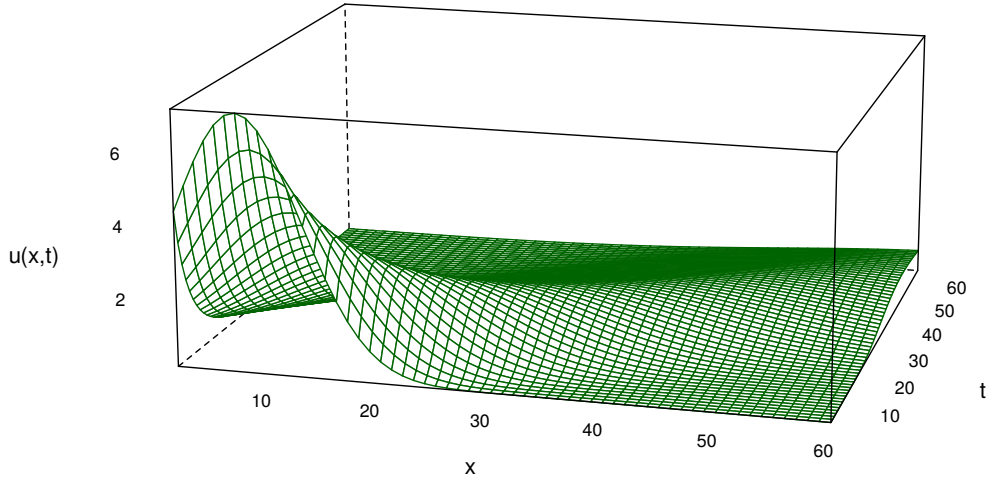


Figura 1: Representação gráfica da solução do Problema (22) em que $f(x)$ é dada por (24) e $d = 1$.

Observamos através da Figura (1) uma concentração máxima do poluente nas posições iniciais, além de uma relação inversa entre a concentração do poluente e a variável tempo. Esse movimento é explicado pelo parâmetro d da condição inicial, que está relacionado a dispersão da concentração em cada posição da superfície. Logo, é esperado uma maior concentração de poluente nos momentos iniciais (t próximo à zero) pois esta condição implica um momento em que o fluido possui velocidade próxima à zero.

4 A equação de transporte homogênea com coeficiente fuzzy

Nesta seção, estudaremos a equação de transporte homogênea com coeficiente fuzzy, ou seja

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}, \quad (25)$$

em que $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e f é uma função de uma variável real a valores reais.

A motivação para tratarmos o coeficiente c como incerto tem suas raízes nas questões físicas do problema. A forma como se é calculada a velocidade inicial de dispersão na maioria dos casos pode não ser precisa ou variar de acordo com as propriedades físicas dos fluídos em estudo. Assim, é razoável considerarmos o coeficiente c como incerto frente a dificuldade de sua mensuração.

Existem outros meios para o tratamento da incerteza, diferentes da teoria dos conjuntos fuzzy. Entretanto, modelar o problema deste estudo com o ferramental da estatística (frequentista ou bayesiana) exigiria que encontrássemos informações de difícil acesso. Por exemplo, ao tratar o coeficiente c como uma variável aleatória em um processo estocástico de indexação contínua, seria necessário encontrar uma distribuição de probabilidade para tal, ou a observação de um grande número de experimentos em um ambiente controlado para descrever o seu comportamento. Sendo assim, neste trabalho propomos o tratamento matemático do coeficiente c através da teoria de conjuntos fuzzy, o qual trata de incertezas que não são derivadas de uma observação de um grande número de eventos (ou seja, da repetição).

Pelo Princípio de Extensão de Zadeh, fuzzificamos a função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para a função $\hat{f} : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Como f é uma função contínua, segue que

$$\left[\hat{f}(A) \right]^{\alpha} = f([A]^{\alpha}), \quad (26)$$

para cada $\alpha \in [0, 1]$. Denotando por $[c]^{\alpha} = [c_{-}^{\alpha}, c_{+}^{\alpha}]$, $\alpha \in [0, 1]$ e tomando $A = x - ct$, temos

$$[u(x, t)]^{\alpha} = \left[\hat{f}(x - ct) \right]^{\alpha} = f([x - ct]^{\alpha}) = [\min f(x), \max f(x)], \quad (27)$$

em que $x \in [x - ct]^{\alpha} = [x - c_{-}^{\alpha}t, x + c_{+}^{\alpha}t]$, $\alpha \in [0, 1]$ e f é dada por (24).

As Figuras 2 e 3 ilustram a representação gráfica da solução $[u(x, t)]^{\alpha}$ do Problema (22), em que $c = (1, 8; 2; 2, 2)$. O coeficiente c é dado por um número fuzzy triangular, denotado pela tripla $(1, 8; 2; 2, 2)$. Neste trabalho não estamos interessados em estudar poluentes e fluídos específicos, e por isso escolhemos tratar a velocidade de propagação do poluente como um número em torno de dois. Se os gases em questão fossem especificados, propriedades físicas como viscosidade, pressão, etc deveriam ser consideradas para que se faça a melhor escolha da tripla.

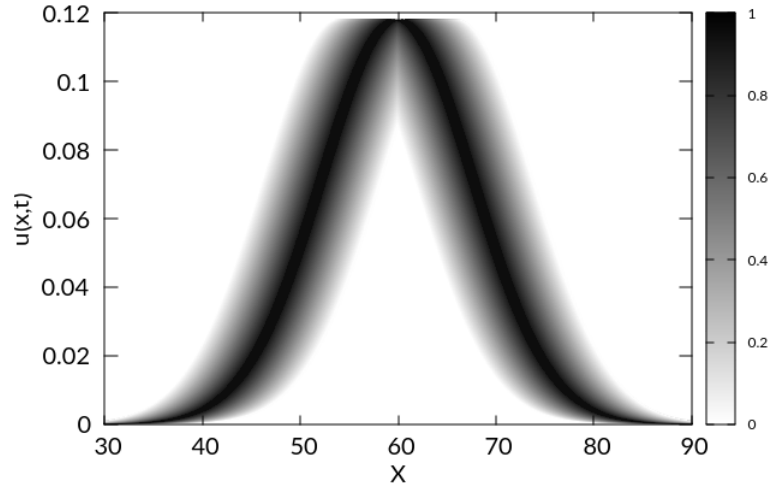


Figura 2: Solução fuzzy do Problema (22) apresentado em (27). Os α -níveis são representados pela escala em cinza, variando de 0 a 1 e são representadas respectivamente por uma variação de cor de branco a preto

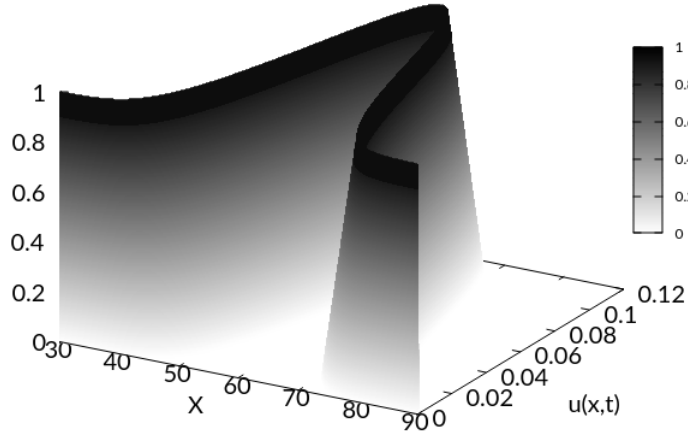


Figura 3: Visualização tridimensional da solução fuzzy do Problema (22) apresentado em (27). Os α -níveis são representados pela escala em cinza, variando de 0 a 1 e são representadas respectivamente por uma variação de cor de branco a preto.

De acordo com a forma geométrica do número fuzzy triangular utilizado para incorporar incerteza no coeficiente c , nota-se que através da escala ao lado do gráfico ilustrado pela Figura 2, que para cada posição x da superfície em um tempo fixo $t > 0$, existe uma concentração $u = u(x, t)$ do poluente com grau de pertinência $\alpha \in (0, 1]$.

A forma geométrica do coeficiente fuzzy c é determinante para a compreensão

do fenômeno de difusão estudado neste trabalho. Formas não simétricas do número fuzzy triangular c podem estabelecer diferentes velocidades de dispersão do poluente em momentos distintos, que por sua vez podem ser explicadas através da observação de características físicas dos fluidos, como viscosidade, atrito com a superfície etc. Na Figura (4) são representadas soluções fuzzy do Problema (22) analisando números fuzzy triangulares não simétricos para c , ou seja, as triplas $(1, 8; 2; 2)$ e $(2; 2; 2, 20)$ respectivamente.

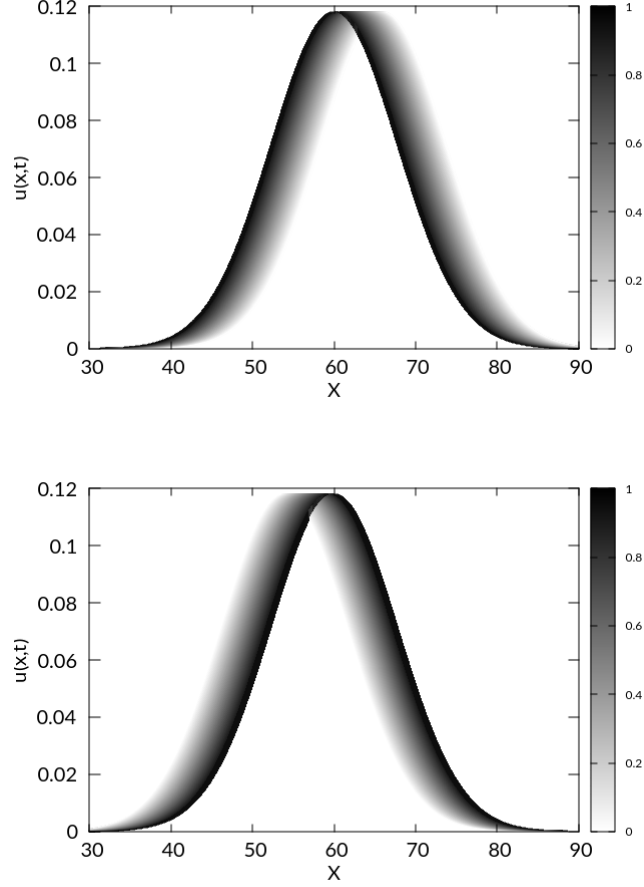


Figura 4: Soluções fuzzy $u(x, t)$ do Problema (3) no plano $x \times u$ em que a condição inicial é dada por (24), nos casos em que $c = (1, 8; 2; 2)$ e $c = (2; 2; 2, 2)$ respectivamente.

Os números fuzzy triangulares escolhidos poderiam ter outras formas, com bases com amplitudes maiores ou menores. As implicações disso seriam curvas de $u(x, t)$ com mais ou menos incerteza, ou seja, uma curva mais (ou menos) próxima de uma curva determinística mostrada na Figura (1) em um tempo e posição qualquer.

Na Figura (5) são mostradas as soluções defuzzificadas do Problema (22), para cada tripla testada. Foi utilizado o centróide como método de defuzzificação.

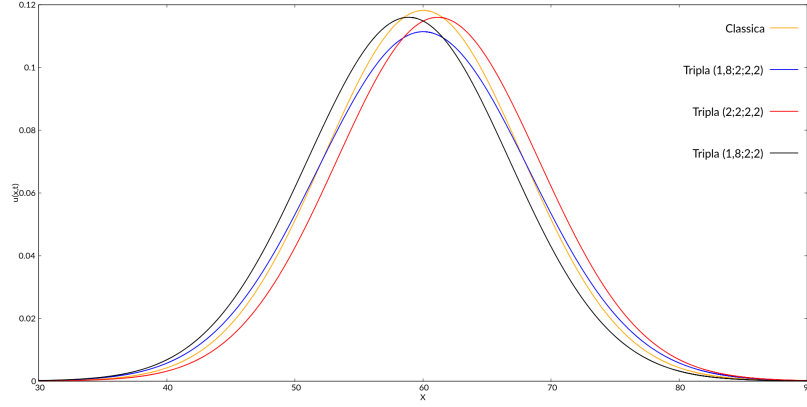


Figura 5: Representação gráfica da comparação entre $u(x, t)$ do modelo clássico e o modelo defuzzificado.

Uma forma de comparação entre a solução clássica e as soluções defuzzificadas é medir a distância entre as curvas. Neste trabalho, utilizamos a variação percentual entre os valores obtidos entre a curva clássica e a curva defuzzificada, ou seja:

$$\Delta A(\%) = 100 \frac{|A_c - A_{df}|}{A_c}, \quad (28)$$

em que A_c e A_{df} são respectivamente os valores da função clássica e o correspondente valor obtido pela defuzzificação da função fuzzy.

O significado dos resultados da equação (28) é a magnitude percentual das incertezas presentes no fenômeno estudado em cada posição $x \in \mathbb{R}$, uma vez que se considera a velocidade do fluido como uma medida incerta. Na Figura (6) são mostrados os resultados de $\Delta A(\%)$ para cada tripla testada.

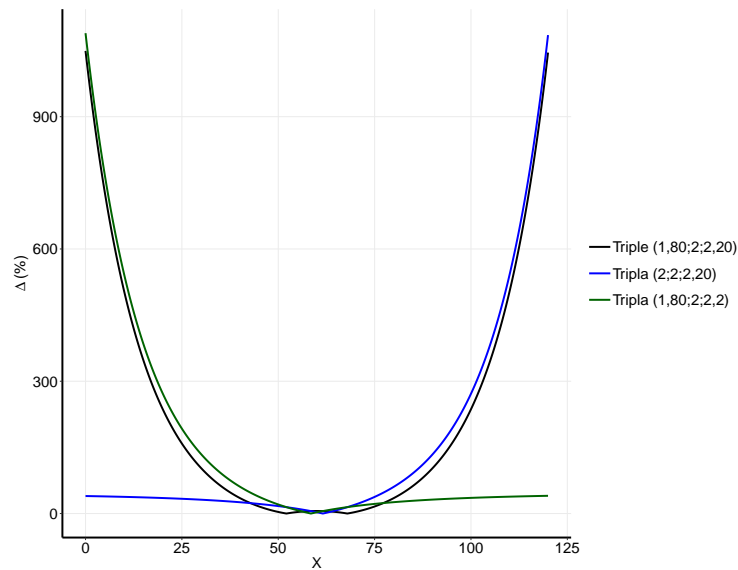


Figura 6: Diferença percentual entre a solução clássica da equação de transporte e as soluções defuzzificadas para cada tripla testada.

No caso do número fuzzy triangular simétrico c , quanto mais nos aproximarmos do ponto de concentração máxima, mais os resultados das curvas defuzzificadas se aproximam dos resultados da curva clássica.

Já nos casos em que se utiliza números fuzzy triangulares não simétricos para o coeficiente c , o que se observa é que os resultados das curvas defuzzificadas tendem a se aproximar (ou não) dos resultados da curva clássica na medida em que se aproxima do ponto de concentração máxima. Entretanto, há uma estabilização antes (ou depois) de tal ponto, fazendo com que $\Delta A(\%)$ tenda a zero.

Notamos através da Figura 6, que existe um comportamento não esperado entre as curvas no ponto em que $\Delta A(\%)$ se aproxima de zero, ou seja, $x = 60$. Dessa forma, na Figura 7 é mostrada uma ampliação dos resultados de $\Delta A(\%)$, mas somente quando x está em torno de 60.

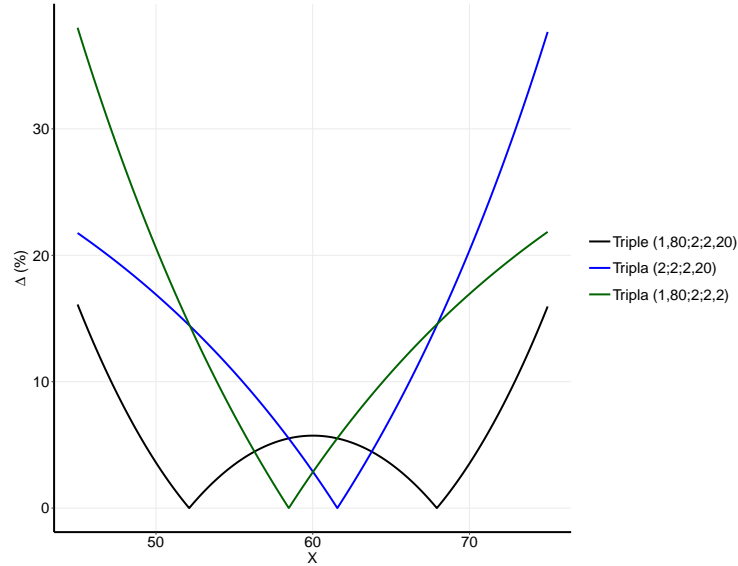


Figura 7: Diferença percentual entre a solução clássica da equação de transporte e as soluções defuzzificadas para cada tripla testada.

Com a ampliação dada pela Figura 7 é possível afirmar que não existe um valor de x correspondente a um $\Delta A(\%)$ mínimo² que seja comum a todas as triplas testadas. No caso da tripla $(1,8;2;2,2)$, que corresponde a diferença entre a curva clássica e a curva defuzzificada da solução fuzzy utilizando um número triangular fuzzy simétrico, existem dois pontos em que $\Delta A(\%)$ é mínimo ($x = 52,12$ e $x = 67,92$). Ou seja, existem dois pontos no espaço físico em questão que aproximam ao máximo as soluções fuzzy e clássica. Já no caso em que se utiliza números triangulares fuzzy não simétricos, existe apenas um valor (para cada tripla) em que $\Delta A(\%)$ é mínimo.

Além disso, foi calculada a média de $\Delta A(\%)$ para cada tripla. Embora as duas

²O menor valor de $\Delta A(\%)$ observado é de 0,0005340873

triplas que representam os números triangulares fuzzy não simétricos terem a mesma quantidade de incerteza, elas obtiveram valores médios de $\Delta A(\%)$ distintos. Para a tripla que representa o número fuzzy triangular simétrico, a média de $\Delta A(\%)$ foi de 224,3730, sendo o valor médio máximo alcançado dentre todas as triplas.

5 Conclusões

Neste trabalho, estudamos o modelo conhecido como equação de transporte introduzindo incerteza no coeficiente que diz respeito a velocidade de propagação do fluido, denotado por c . Para tanto, utilizamos a teoria de conjuntos fuzzy para tratar a incerteza proposta no problema e propomos uma solução através do Princípio de Extensão de Zadeh.

A incerteza do coeficiente c foi introduzida através de números triangulares fuzzy, sendo um deles simétrico e dois não simétricos. Cada uma delas resultou em diferentes configurações de incerteza, confirmadas através das soluções defuzzificadas e da diferença entre cada solução com o caso clássico.

Referências

- ALTAIE, SARMAD A.; JAMEEL, A. F.; SAABAN, A. Homotopy Perturbation Method Approximate Analytical Solution of Fuzzy Partial Differential Equation. **International Journal of Applied Mathematics**, v. 49, n. 1, 2019.
- BAHRAMI, F.; ALIKHANI, R.; KHASTAN, A. Transport equation with fuzzy data. **Iranian Journal of Fuzzy Systems**, v. 15, n. 7, p. 67-78, 2018.
- BARROS, L.C., BASSANELI, R.C., LODWICK, W.A. **A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2017).
- BARROS, L.C., PEDRO, F. S. Fuzzy differential equations with interactive derivative Fuzzy Sets and Systems. 309, 68–80 (2017).
- BEDE, B., GAL, S.G.: Almost periodic fuzzy number value functions. **Fuzzy Sets and Systems**. Elsevier. 147, 385–403 (2004).
- BUCKLEY, J. J.; FEURING, T. Introduction to fuzzy partial differential equations. **Fuzzy sets and systems**, v. 105, n. 2, p. 241-248, 1999.
- BERTONE, A. M., JAFELICE, R. M., BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C. On fuzzy

- solutions for partial differential equations. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 219, 68-80, 2013.
- ESMI, E. SAUTO, P. F., BARROS, L. C., LODWICK, W. Fréchet derivative for linearly correlated fuzzy function. **Information Sciences**, 435, 150-160, 2018.
- KANDEL, A., BYATT, W. J. Fuzzy differential equations. PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CYBERNETICS AND SOCIETY, 1978.
- KLIR, G. J.; YUAN, B. Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications. **Upper Saddle River**, p. 563, 1995.
- LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M. **Fluid Mechanics, volume 6 of. Course of theoretical physics**, v. 6, 1997.
- LEITE, J., CECCONELLO, M., LEITE, J., BASSANEZI, R. C. On fuzzy solutions for diffusion equation. **Journal of Applied Mathematics**, 2015.
- PURI, M. L., RALESCU, D. A. Fuzzy Random Variables. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. 114, 409–422 (1986).
- PURI, M.L., RALESCU, D.A. Differentials of fuzzy functions. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. 91, 2, 552–558 (1983).
- STRAUSS, W. A. **Partial differential equations: An introduction**. Wiley, 2007.
- ZADEH, L. A. et al. Fuzzy sets. *Information and control*, v. 8, n. 3, p. 338-353, 1965.