UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR DA GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO MÉDIO

AN INTERDISCIPLINARY APPROACH TO SPHERICAL GEOMETRY IN HIGH SCHOOL.

Wiliam Aires de Cerqueira-UNIFAL-MG
Escola Estadual Presidente Tancredo Neves

Silvio Antônio Bueno Salgado-UNIFAL-MG
Universidade Federal de Alfenas

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido e sustentado por pesquisa bibliográfica de livros, artigos, dissertação de mestrado e na Base Nacional Comum Curricular-BNCC. Nele apresentou-se uma possibilidade de prática interdisciplinar da disciplina de Matemática com as áreas de Geografia e História utilizando conceitos elementares da Geometria Euclidiana e da Geometria na Esfera para alunos do terceiro ano regular do ensino médio, da EEPTN-Escola Estadual Presidente Tancredo Neves em BH. Foi desenvolvido um trabalho de prática seguindo um roteiro para os cálculos das distancias entre dois pontos em superfícies planas e curvas. Nestas práticas os estudantes fizeram registros de leitura e escrita sobre os algoritmos matemáticos envolvidos nas resoluções dos problemas. As áreas de Geografia e História desenvolveram as propriedades da terra com os estudantes em sala de aula, em consonância com a área de Matemática. Esta prática foi válida pois os estudantes puderam se motivar para o aprendizado e se tornaram protagonistas no processo ensino aprendizagem.

Palavras-Chave*:* Geometria Esférica, triângulo Esférico, Trigonometria Esférica, Distância entre dois pontos.

ABSTRACT

This work was developed and supported by bibliographic research from books, articles, master's dissertations, and the National Common Curricular Base (BNCC). It presented a possibility of interdisciplinary practice of Mathematics with the areas of Geography and History using elementary concepts of Euclidean Geometry and Spherical Geometry for third-year regular high school students, at EEPTN - Presidente Tancredo Neves State School in BH. A practical work was developed following a script for calculating distances between two points on flat and curved surfaces. In these practices, students made reading and writing records about the mathematical algorithms involved in problem-solving. The areas of Geography and History developed the properties of the earth with students in the classroom, in line with the Mathematics area. This practice was valid because students could be motivated for learning and became protagonists in the teaching-learning process.

Keywords: Spherical Geometry, Spherical Triangle, Spherical Trigonometry, Distance between two points.

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido e sustentado por pesquisa bibliográfica feita em livros, artigos, dissertação de mestrado e na Base Nacional Comum Curricular-BNCC selecionados criteriosamente para se obter informações e dados para o trabalho afim de abordar as Geometrias objetos de estudos do Ensino Básico e principalmente do Novo Ensino Médio, pois em todo o universo há aplicação das geometrias tornando-se necessário entender não apenas os princípios da Geometria Euclidiana que trata das superfícies planas, bem como da Geometrias não Euclidianas que trata das superfícies curvas.

Com o advento do novo ensino médio, a área da Matemática e Suas Tecnologias contemplam conteúdos de aprofundamentos em Linguagens Matemática na Construção da Cidadania e Matemática como Instrumento de Pesquisa, proporcionando o professor trabalhar esses conteúdos em sala de aula. A BNCC, limita-se aos temas "Números e Álgebra; Geometria e Medidas, Probabilidade e Estatística, porém, há exigência que eles sejam tratados de forma conexa com a realidade e consequentemente com outras áreas dos componentes curriculares. No desenvolvimento deste trabalho foram citados conceitos e definições de alguns tópicos tratados no ensino básico (Fundamental e Médio), envolvendo a Geometria e a Trigonometria. Reforça-se que o conhecimento está todo interligado nos componentes curriculares, principalmente, quando tratamos da Matemática como ferramenta de comprovação de desenvolvimento teórico das diversas áreas. Percebe-se que há um descontentamento dos resultados esperados dentro dos programas nacionais e internacionais do que deveria ser trabalhado em sala de aula. Segundo fonte: OCDE, banco de dados do PISA 2022, o PISA-Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes, uma avaliação internacional que mede o nível da educação dos países da OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico), posiciona o Brasil nas últimas colocações do ensino da Matemática comparado a esses países. A BNCC da área de Matemática e Suas Tecnologias trata no seu primeiro parágrafo que a Matemática do ensino médio propõe consolidação, ampliação e aprofundamento das aprendizagens do ensino fundamental, de forma que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática para ler e compreender o mundo. Nesse trabalho "Uma Abordagem interdisciplinar da Geometria Esférica no Ensino Médio", baseado no 5º postulado de Euclides, discutimos algumas definições e demonstrações em um recorte nas práticas de cálculo em sala de aula, reforçando a exigência da leitura e da escrita no processo ensino e aprendizagem da Matemática, por ser uma disciplina rígida nos algoritmos e rigorosa na escrita e nas demonstrações. Incentivos envolvendo os algoritmos de resoluções de problemas propostos e modelagens, aumenta a capacidade desses estudantes se motivarem. Ao participarem deste trabalho terão a oportunidade de desenvolver competências e habilidades de geometria que os auxiliarão a resolver situações da vida cotidiana tais como se organizar geometricamente dentro da própria casa com seus objetos pessoais possibilitando um melhor posicionamento de móveis dentro de seus lares e até quando estacionarem um veículo na rua quando dirigirem.

DESENVOLVIMENTO:

1.1-A GEOMETRIA EUCLIDIANA E AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS.

Guelli(1998), nos conta que a história da Geometria Euclidiana é de aproximadamente 3500 anos e Bertrand(2019) e VOGADO(2020), nos conta que Euclides organizou a Geometria através de princípios e teoremas escritos em sua obra, “Os Elementos” em seus 13 livros. Todo o embasamento se constrói sobre cinco postulados, dentre os quais o 5º postulado, (postulado das paralelas), passou a ser pesquisado e tratado como a principal divergência a ser debatida por alguns matemáticos desde então. O 5º postulado de Euclides afirma que: “Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos.” Segue abaixo uma construção do 5º postulado feita pelos estudantes conforme práticas demonstradas em sala de aula.

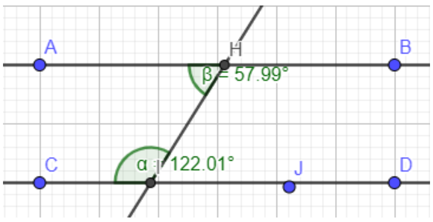

Figura 1: 5º postulado.

$$\propto\ + \beta = 180º$$

$$122{,}01\ + 57{,}99 = 180º$$

Figura 2: 5º Postulado

Por muitos séculos a Geometria Euclidiana foi reconhecida como a única base cientifica para justificar as exigências acadêmicas que envolveriam a explicações de ordem natural. Contudo, com o descontentamento de alguns matemáticos, confirmaram-se os questionamentos sobre o 5º postulado de Euclides, ensejando em dois estudiosos matemáticos: “Nokolai Lobachevsky (1829) e Janos Bolyai (1832), que propuseram uma Geometria não Euclidiana que contestava o 5º postulado de Euclides. através de novos desenvolvimentos dessa contestação. Um terceiro matemático Riemann (1854) reforça a nova teoria mostrando que o 5º postulado não estava satisfeito. Segue abaixo uma atividade executada por aluno em sala de aula.

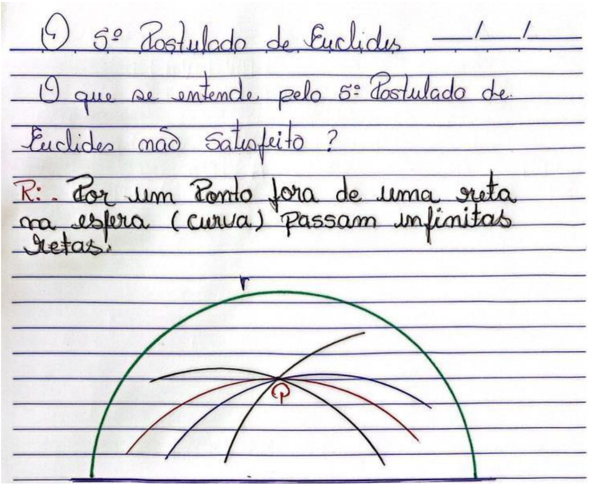

Figura 3: 5º postulado de Euclides não satisfeito.

Normalmente a Geometria Euclidiana não é muito evidenciada no ensino básico pelos professores de Matemática, e deixam este conteúdo para ser trabalhado no último bimestre do ano, até pelo motivo de seguir material didático contendo a geometria no último encarte do livro. Consequentemente, o estudante não tem contato satisfatório com este conteúdo e não aprende os principais conceitos e definições da Geometria básica. Portanto, percebe-se uma falha no ensino da Geometria Euclidiana tratada como conteúdo do componente curricular ao não contemplar aprendizagens mais aprofundadas na medida que os estudantes são convidados a mobilizar habilidades ao dar maior ênfase para os cinco postulados de Euclides, nos planos de aula. Evidenciando o descontentamento dos resultados esperados dentro dos programas nacionais e internacionais (PISA), que demonstram as tendencias no desempenho em matemática, leitura e ciência:

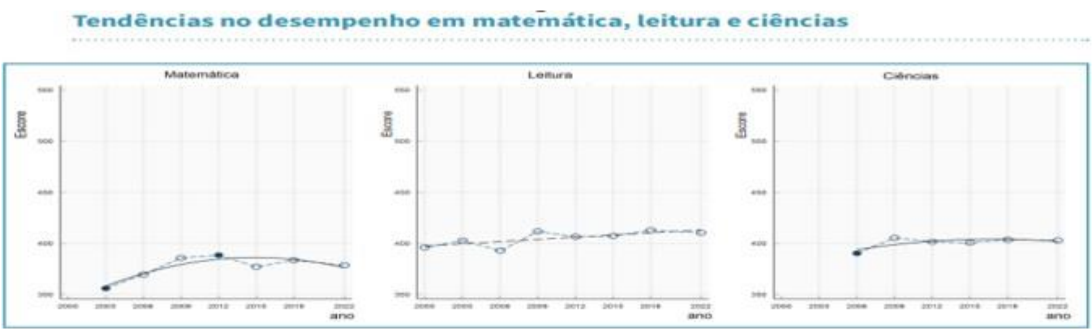

Figura 4: Tendências de desempenho em Matematica, Leitura e Ciencias

A grande dificuldade dos estudantes da EEPTN-Escola Estadual Presidente Tancredo Neves do novo ensino médio é escrever os algoritmos matemáticos referente a solução de cada problema envolvido, aliás, para haver contribuição na continuidade do letramento matemático no novo ensino médio é necessário que o estudante aprenda a ler e escrever os algoritmos matemáticos. A BNCC traz que é responsabilidade do novo ensino médio a ampliação e o letramento Matemático, através da investigação, da construção de modelos e da resolução de problemas matemáticos.

1.2-DISTANCIA ENTRE DOIS PONTOS:

É importante esclarecer que para calcular a distância entre duas cidades situadas sobre o globo terrestre, se faz necessário estudar alguns conceitos relacionados à Geometria Euclidiana e compará-los com a Geometria não Euclidiana.

Uma das representações na Geometria plana é a distância entre dois pontos no plano: “a menor distância entre dois pontos é uma reta” “ou o menor caminho a ser percorrido entre os dois pontos é uma reta”. Esta distância na superfície plana, pode ser calculada em 3 casos diferentes quando aplicadas às ferramentas da Geometria Analítica, segundo (Iezzi,1985). Se A e B são pontos do plano cujas coordenadas são A($x_A,\ y_A$) e B(x_B, y_B) , denota-se por d(AB) a distância do ponto A ao ponto B.

Caso Geral: Quando os pontos formarem um segmento não paralelo ao eixo “x” (abscissas) e não paralelo ao eixo “y” (ordenadas).

Assim a distância d(AB) é dada, por d(AB)=$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

1.3-AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

As Geometrias não Euclidianas abrangem três tipos de Geometrias: a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica e a Geometria Esférica todas apoiadas na inconsistência do 5º postulado de Euclides. Importante diferenciá-las, pois apenas uma delas será objeto de estudo do nosso trabalho. O 5º postulado de Euclides é trocado por um postulado alternativo conhecido como” postulado das paralelas de Sacchari-Legendre” e traz luz para discussão, a saber”. Dada uma reta e um ponto fora dela, existem infinitas retas paralelas à reta dada que passam pelo ponto dado”. Nessa teoria, a soma dos ângulos internos de um triangulo é sempre menor que 180º, pois a curvatura da superfície estudada é negativa. Segue abaixo uma atividade executada por aluno em sala de aula.

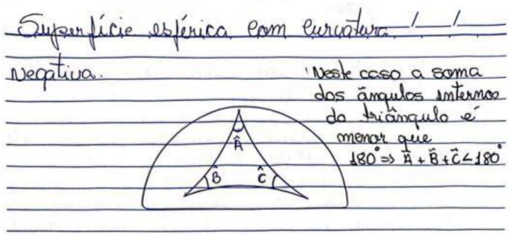

Figura 5: Curvatura Negativa.

Já a Geometria Elíptica se aplica a superfícies elipsoides e nessa versão, o 5º postulado de Euclides é negado, ou seja, significa que não existem retas paralelas a uma reta dada passando por um ponto fora desta reta. Neste caso todas as retas são curvas e se interceptam umas com as outras em vários pontos. Neste caso da Geometria Elíptica, a soma dos ângulos de um triangulo é sempre maior que 180º e menor que 540º, pois a curvatura da superfície é positiva. Segue abaixo uma atividade executada por aluno em sala de aula.

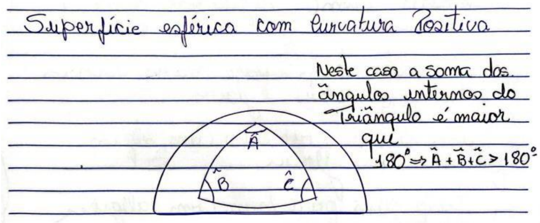

Figura 6: Curvatura Positiva.

Considera-se que houve uma contribuição da Geometria não Euclidiana e consequentemente uma revolução na Matemática e na Filosofia pelos princípios dos postulados e axiomas no que se refere as demonstrações, quebrando a ideia única de explicação Geométrica e provando que existem outras maneiras de abordar a Geometria e a Matemática ampliando seus respectivos conhecimentos e Algoritmos.

A Geometria esférica objeto desse trabalho, se aplica a superfícies esféricas, nelas a soma dos ângulos internos de um triangulo é sempre maior de 180º e menor que 540º. Na Geometria Esférica não existem linhas paralelas, e neste caso todas as linhas se encontram num único ponto sobre a superfícies esférica portanto não são a mesma geometria. Comparando a Geometria elíptica e a esférica pode se notar que possuem a interseção das propriedades dos ângulos internos de um triângulo, mas se distinguem em outras propriedades, ou seja: a Geometria esférica possui algumas propriedades que se diferem da Geometria Elíptica.

A Geometria esférica traz a definição de geodésica como sendo uma linha ou curva chamada de circunferência máxima, que representa a menor distância entre dois pontos em uma superfície curva. Comparativamente, a circunferência máxima exerce a mesma função na superfície esférica que a reta exerce na superfície plana. Geograficamente a geodésica é o menor caminho que um avião, navio ou carro deve percorrer para ir de um ponto a outro sobre a superfície da terra, ou seja, o menor caminho entre duas cidades.

Dentro desta concepção de ampliação do conhecimento podemos citar a Geodésia como ramo da ciência geográfica que se dedica ao estudo e medição da forma, dimensões e do campo gravitacional da terra, bem como sua orientação no espaço. A Geodésia é um campo muito importante para estudos da cartografia, da navegação, engenharia civil, estudos ambientais, geofísica bem como outras áreas afins. Os cientistas atuantes da Geodésia estudam sobre o tamanho e a forma da terra, respeitando todas as suas irregularidade e curvaturas características de superfície. Conforme IBGE/Atlas Geográfico, a terra não é uma esfera exata, na realidade é tratada como um geoide portadora de uma superfície equipotencial do campo gravitacional que mais se aproxima dos valores ao nível do mar, considerando todo o planeta com o objetivo de medir altitudes e coordenadas geográficas.

Portanto a Geodésia:

I - Estuda a determinação dos sistemas de coordenadas geodésicas através de um sistema de coordenadas para localizar pontos na superfície do planeta com precisão, aplicando as coordenadas (latitude, longitude e altitude) atividade muito aplicada na cartografia e engenharia civil.

II - Estuda também sobre o campo gravitacional da terra bem como a distribuição da massa do planeta e a deformação da crosta terrestre sofrida com o passar do tempo, bem como outros fenômenos da natureza.

Como a Geometria esférica se aplica à superfície da esfera, nessa seção vamos abordar algumas definições que são conhecimentos pré-requisitos para calcular à distância entre dois pontos na superfície esférica.

Definição 1: (Esfera), Segundo Iezzi (1985, pg 241-j)

> "Considerando um ponto O e um segmento de medida r, chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância $\overline{OP}$ seja menor ou igual a r."

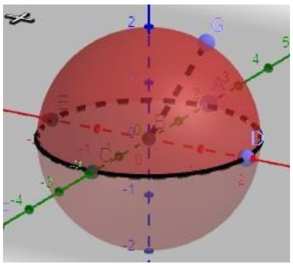

Figura 7: Esfera.

Em uma esfera regular como uma bola de basquete por exemplo, as geodésicas são segmentos de círculos máximos desta esfera que possuem o mesmo centro da esfera e círculo. Nas geometrias elíptica ou hiperbólica as geodésicas são diferentes porque as curvaturas dessas geometrias são diferentes.

Definição 2: (superfície esférica) Segundo Iezzi, (1985, pg 241-j)

> "(Chama-se superfície da esfera de centro) e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distancia $\overline{OP}$ seja igual a r."

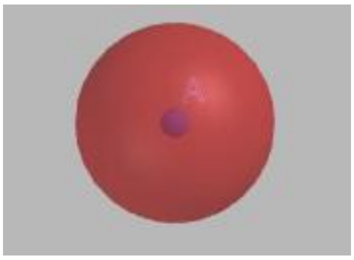

Figura 8: Superfície da Esfera

Definição 3: (Elementos notáveis da superfície esférica)
Secção plana de uma esfera: Segundo Iezzi (1985, pg 242-J)

> "A secção plana de uma esfera é um círculo."
> **(Polos – equador – paralelo – meridiano), são:** Segundo Iezzi(1985,pg 242-j), "considerando a superfície da esfera " e " temos:
> **Eixo**: É qualquer reta que contém o centro O
> Polos: são as intersecções da superfície com o eixo
> **Equador** é a secção (circunferência) perpendicular ao eixo pelo centro da superfície.
> **Paralelo**: é uma secção (circunferência) perpendicular ao eixo. É paralela ao equador,

Meridiano: é uma secção da circunferência cujo plano passa pelo eixo,"

. Segue abaixo uma atividade executada por aluno em sala de aula.

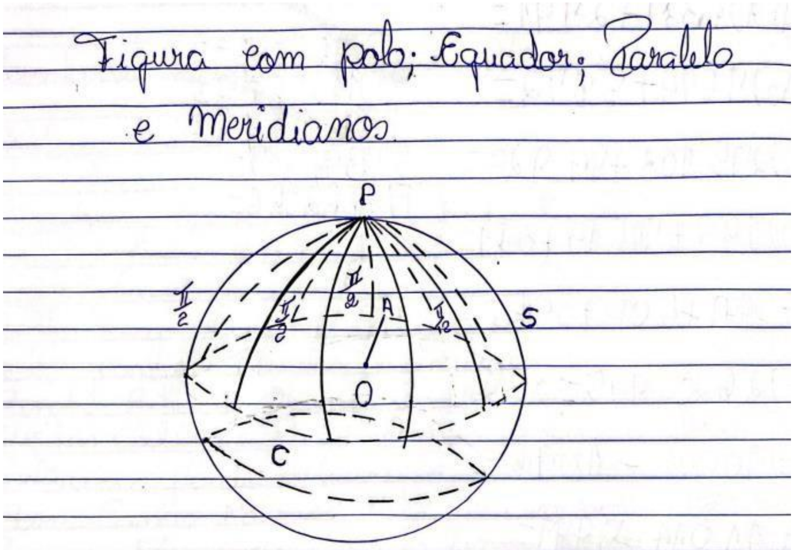

Figura 9: polos- equador-paralelo-meridiano

a) **Distância polar:** É a distância de um ponto qualquer de um paralelo ao polo.

Definição 4: Corda (Iezzi,1985)**:** É um segmento de reta determinado por dois pontos distintos da superfície esférica.

Definição 5: Diâmetro (Iezzi,1985)**:** É a corda que passa pelo centro da esfera e liga dois pontos antípodas de uma superfície esférica.

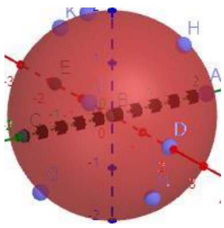

Figura 10: Diâmetro da esfera

Definição 6: Pontos Antípodas (Iezzi,1985): São pontos que estão em hemisférios opostos de uma esfera.

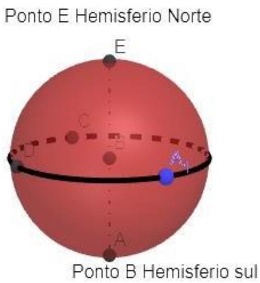

Figura 11: Pontos Antípodas

> **Definição 7: (Circunferência máxima),** (Iezzi,1985 pg 242-J): São as circunferências construídas com o maior raio da esfera, ou seja: S é a superfície da esfera de centro O e raio r, portanto chamamos de circunferência máxima a circunferência em S de centro O e raio r. Portanto,
> são curvas geodésicas, ou seja, são as menores distâncias entre dois pontos na superfície das esferas e auxiliam os cálculos da distância na superfície esférica da mesma forma que os cálculos das retas no plano.

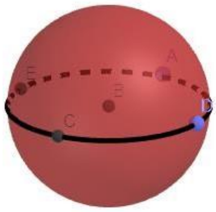

Figura 12: da circunferência máxima.

Definição 8: Distância entre dois pontos.

A distância entre dois pontos d(A,B) entre dois pontos A e B pertencentes a uma superfície esférica S, é o comprimento do arco menor $\hat{AB}$ da circunferência máxima que passa por A e B.

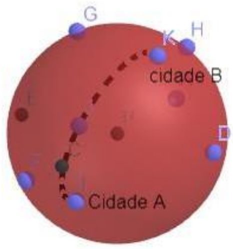

Figura 13: Distância entre dois pontos da superfície esférica.

Definição 9:Quadrante. Um quadrante é um arco de circunferência máxima que mede exatamente $\frac{\pi}{2}$ radianos ou 90º.

Definição 10 :Polo de uma circunferência máxima. Segundo Iezzi (1985, pg 242-J).

> "Seja C uma circunferência máxima para a superfície esférica S. Chama-se polo de uma circunferência máxima C ao ponto P situado na superfície S tal que a distância de p a qualquer ponto C é igual a $\frac{\pi}{2}$
> Como P e P´ na figura pertencem a hemisférios distintos, divididos por C, então C' intersecta C".

Teorema. (Iezzi,1985,): Uma circunferência máxima divide a superfícies esférica S em duas regiões chamadas de hemisférios, que são as chamadas superfícies semiesféricas.

Neste trabalho que propõe calcular a distância entre duas cidades, faz-se necessário mencionar alguns conceitos e definições relacionados a triângulos planos e alguns conceitos e definições relacionados a triângulos esféricos, portanto, como na Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica, há triângulos esféricos que são figuras geométricas fechadas por segmentos determinados por 3 pontos não colineares de uma superfície esférica. Geralmente considera-se a superfície de uma esfera de raio 1 para representação destes triângulos e seus 6 elementos, os 3 ângulos e os 3 lados. As medidas dos lados são calculadas ao longo da superfície da esfera e representados por arcos dos maiores círculos possíveis em uma esfera que possuem valores de raios congruentes. Os ângulos de um triângulo esférico são medidos ao longo da superfície curva da esfera. Existem três ângulos principais em um triângulo esférico e a soma deles é um valor entre 180º e 540º, diferentemente da soma dos ângulos internos dos triângulos na geometria Euclidiana que somam 180º. Segue abaixo uma atividade executada por aluno em sala de aula.

Figura 14: Triângulos Esféricos.

1.3.1. TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Os triângulos esféricos são importantes ferramentas para cálculos na navegação, Astronomia e Geodésia. Outras ferramentas para estes estudos são os conceitos de trigonometria aplicada nestes objetos tais como a lei dos senos esféricos e a lei dos cossenos esféricos que se baseiam na mesma definição das leis de seno e do cosseno aplicadas à geometria Euclidiana, porém adaptadas para superfícies curvas.

A lei dos senos esféricos é uma forma trigonométrica usada para calcular os lados de um triangulo esférico em relação a seus ângulos. Essa lei é análoga a lei dos senos aplicada em triângulos da geometria plana(bidimensional) contudo foi adaptada para superfícies esféricas. A lei dos senos esféricos se aplica a triângulos construídos sobre a superfícies de uma esfera e considerando como lados definidos por medidas de x,y,w opostos respectivamente aos seus ângulos X,Y,W e representada pela fórmula.

$$\frac{sen\frac{x}{R}}{senX} = \frac{sen\frac{y}{R}}{senY} = \frac{sen\frac{w}{R}}{senW}$$

Onde R =raio da esfera que contém o triângulo

A lei dos cossenos esféricos é uma forma trigonométrica usada para calcular os lados de um triangulo esférico em relação a seus ângulos. Essa lei é análoga a lei dos cossenos aplicada em triângulos da geometria plana (bidimensional) contudo foi adaptada para superfícies esféricas. A lei dos cossenos esféricos se aplica a triângulos construídos sobre a superfícies de uma esfera e considerando como lados definidos por medidas de x,y,w opostos respectivamente aos seus ângulos X,Y,W e representadas pelas fórmulas:

- ➔ cos x = cos y * cos w + sen y * sen w* cos X
- ➔ cos y = cos x * cos w + sen x * sen w* cos Y
- ➔ cos w = cos x * cos y + sen x * sen y* cos W Onde,

cos x, cos y e cos w são os cossenos dos lados do triângulo.

sen x, sen y, sen w são os senos dos lados do triângulo.

cos X, cos Y, cos W são os cossenos dos ângulos do triângulo.

Essa fórmula pode ser reorganizada para outros casos e permite calcular medidas dos lados de um triangulo esférico quando são conhecidos o raio da esfera e seus respectivos ângulos ou na falta de um desses elementos. Para aplicação dessa formula os ângulos devem ser mensurados em radianos, e caso não estejam nessa unidade de medida é necessário fazer as conversões para radianos. Apresentamos abaixo a proporção de conversão de graus para radianos a saber.

Regra de 3 simples.

Grandezas	graus	radianos

360º → 2π rad.

Grau fornecido → x π rad.

Ou 180º → π rad.

Grau fornecido → x π rad.

ÁREA DA SUPERFICIE DA ESFERA.

Segundo (Iezzi,1985) “A área da superfície da esfera de raio r é igual a $4\pi r^2$.”

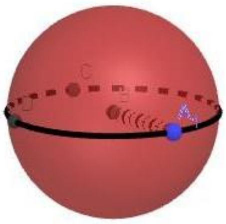

Figura 15: da área da superfície da esfera

Definição 11:Ângulo Diedro ou diedro ou Ângulo diédrico.

(Iezzi,1985) Ângulo diedro ou diedro é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos no mesmo plano. A origem dos dois semiplanos é a aresta do diedro e os dois semiplanos são suas faces.

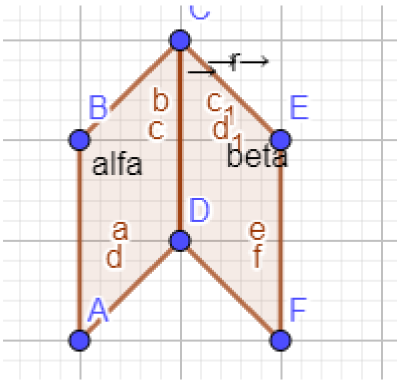

Figura 16: Diedros

Definição 12:Fuso esférico. (Iezzi,1985) “É a interseção da superfície de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica”, ou seja, um fuso esférico corresponde a um fuso horário.

O ângulo μ, medida do diedro, medido na secção equatorial, é quem caracteriza o fuso.

Definição 13: Area do fuso. (Iezzi,1985), a área do fuso de $\propto$ radianos, sobre uma superfície esférica de raio r é $2\propto r^2$.

Demonstração: Regra de 3

Área do fuso		superfície esférica
Af	→	$4\pi r^2$
$\propto$	→	$2\propto r^2$

Fuso completo: é o fuso de uma volta, formado por dois fusos esféricos um em cada hemisfério da esfera ou seja:

Sendo μ a medida do diedro, temos: Com μ em graus: Vamos aplicar uma regra de 3:

$$360^\circ \rightarrow 4\pi r^2$$
$$\mu^\circ \rightarrow A_{fUSO}$$

Vértices do fuso esférico: Denomina-se de vértices do fuso esférico, aos pontos de intersecção dos meridianos geradores.

Definição 14: Cunha Esférica. Conforme (Iezzi,1985). É a intersecção de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém o diâmetro da esfera.

Definição 15:A cunha. É caracterizada pelo raio da esfera e pela medida do diedro.

Definição 16: Ângulo esférico $\propto$. Obtido pela interseção de duas circunferências máximas (ou de dois arcos de circunferências máximas é o menor ângulo formado entre as retas tangentes às circunferências máximas (ou aos arcos de circunferências máximas num ponto de interseção).

PROJETO EM SALA DE AULA: CÁLCULO DA DISTÂNCIA ENTRE DUAS CIDADES SOBRE A SUPERFICIE TERRESTRE:

O Letramento Matemático passa pelo processo de leitura e escrita, e o estudante precisa exercer o papel de protagonismo e trocar no processo escrevendo e passando para o papel todas as suas ideias dos algoritmos matemáticos, buscando uma solução para atacar o problema do letramento matemático fizemos a pergunta, A resolução de problemas que trata assuntos da nossa realidade não seria uma estratégia para incentivar a inercia da escrita referente aos algoritmos? Não seria interessante propor para os estudantes calcularem a distância entre dois pontos sobre a superfície terrestre? Não seria necessário levar em conta que a terra não é uma esfera perfeita e sim um geoide que é uma forma aproximada da esfera e levando em consideração que o raio da terra não possui o mesmo tamanho em toda a sua extensão por possuir uma topografia irregular? Como respostas a esses questionamentos os estudantes podem usar a latitude e longitude das cidades aplicando formula da geometria não euclidiana contendo o círculo máximo na esfera seguindo os seguintes passos:

Passo I: Encontrar a latitude e longitude das cidades que se deseja calcular as distâncias, certificando que as coordenadas devem ser em graus decimais

Passo II- converter essas medidas em graus para radianos, usando o critério de dividir a latitude por 180 e a longitude multiplicada por 180, pois as fórmulas trigonométricas trabalham com radianos.

Passo III- usar a fórmula do círculo máximo abaixo, que considera que a terra é uma esfera perfeita, e consequentemente os cálculos não são precisos ou exatos para distâncias mais longas.

Passo IV- Fazer a conversão da distância calculada em radianos para a unidade de medida desejada, no nosso caso quilômetros. Multiplicar o valor encontrado pelo valor aproximado do raio da terra de 6.371, km.

Fórmula do círculo máximo para o cálculo da distância entre duas cidades em radianos: "Raio da terra x Arccos [seno (latitude cidade 1) x seno (latitude cidade 2) + cosseno (latitude cidade 1) x cosseno (latitude cidade 2) x cosseno (longitude da cidade 2 – longitude da cidade 1)]"

Onde: arccos é a função cosseno inverso.

Latitude cidade 1 e latitude da cidade 2 é informada em radianos

Longitude cidade 1 e longitude da cidade 2 é informada em radianos

Para aplicar na formula precisa-se das coordenadas geográficas (latitude e longitude) que são formas padrão de representar um ponto ou localização na superfície terrestre, sendo: latitude é a distância ao norte ou a sul a partir da linha imaginária do equador variando de +90º a -90º, enquanto que a longitude mede a distância a oeste ou a leste do meridiano de Greenwich variando de -180º a + 180 º.

É objetivo do nosso trabalho é apresentar o cálculo da distância entre duas cidades e como modelo, vamos mostrar como calcular a distância em quilômetros entre BH-Brasil e Tóquio-Japão e seguindo os passos citados anteriormente.

1º passo, encontrar a longitude e a latitude em graus de cada cidade.

2º passo: Converter as medidas encontradas de graus para radianos.

4º passo: Aplicar a fórmula do círculo máximo.

Solução.

Coordenadas geográficas de Belo Horizonte em graus são: latitude -19.9167 graus, e longitude --43.9395 graus e 767 metros de altitude do nível do mar.

Conversão para radianos como requisito para aplicar na formula de distancias entre duas cidades.

Para converter essas coordenadas para radiano, usa-se a fórmula.

Latitude em radianos=latitude em graus * $\left(\frac{\pi}{180}\right)$ (* → vezes)

Longitude em radianos= longitude em graus * $\left(\frac{\pi}{180}\right)$ (* → vezes)

Cálculo para cidade de Belo Horizonte.

Latitude em radianos = -19.9167 * $\left(\frac{\pi}{180}\right)$ = -0,3473

Longitude em radianos = -43,9345 * $\left(\frac{\pi}{180}\right)$ = - 0,7660

Coordenadas geográficas de Tóquio e, graus decimais são: Latitude = 35.682839 e a longitude = 139.759455.

Conversão para radianos como requisito para aplicar na formula de distancias entre duas cidades.

Latitude de Tóquio em radianos = 35.682839 x $\frac{\pi}{180}$ = 0,622979 radianos

Longitude de Tóquio em radianos = 139.759455 x $\frac{\pi}{180}$ = 2,437413

Aplicando a formula do circula máximo para calcular a distância entre Belo Horizonte e Toquio temos:

"Raio da terra x Arccos [seno (latitude BH) x seno (latitude Tóquio) + cosseno (latitude BH) x cosseno (latitude Toquio) x cosseno (longitude de Toquio – longitude da cidade BH)]" substituindo os valores. Temos:

- → 6.371 km x arccos [seno -0,3473 radianos x seno 0,622979 radianos + cosseno -0,3473 x cosseno 0,622979 x cosseno 2,437413- - (-0,7660)}=
- → 6.371 km x arccos { - 0.3390 x 0,5826 + 0,9392 x 0,7682 x (-0,79970-0]
- → 6.371 km x arccos [- 0,1964 + (- 0,4592) – 0]
- → 6.371 km x arccos {- 0,6556]

- ➔ Usando a função arccos para calcular o valor
- ➔ 6.371 km x 2.2622
- ➔ 14.408. 45 km aproximadamente

Memória de cálculo dos valores da fórmula.

seno (- 0,3473 radianos) = -0,3390.

seno (0,622979 radianos) = 0,5826

cos (-0,3473 radianos) = 0,9392

cos (0,622979 radianos) = 0,7682

cos (2,437413 radianos) = - 0,7997

(-0,7660 –(-0,7660) 0.

A educação escolar é um processo de alfabetização e letramento pelo qual o(a) estudante deve passar e aprender cada algoritmo em todos os seus passos como forma de comunicação e escrita, principalmente da linguagem matemática, que é universal; Por ser cheia de regras e rigor é objeto de ensino do professor e da aprendizagem do estudante nos termos escolares estabelecidos pelos órgão competentes. Em função de sua complexidade a interdisciplinaridade envolvendo as disciplinas de Matemática, Geografia e História se torna uma ótima opção para incentivar o aprendizado do estudante com temas tratados em várias áreas do conhecimento. Sendo assim, a Matemática é uma ciência que surgiu da necessidade de contar e medir e usada como uma ferramenta essencial em muitas áreas do conhecimento, é motivo de reprovação e de evasão escola em diversas estatísticas. Aquele que a domina ou tem facilidade para compreendê-la, geralmente é motivo de destaque na sala, na escola e na sociedade.

> Sadovsky (2011) reforça essa ideia, quando diz que a matemática é um produto cultural e social, baseando no fato de que os seus produtos resultam de concepções de uma sociedade da qual emergem; e também da interação entre pessoas de uma mesma comunidade. Desse modo, independente de amá-la ou de odiá-la, todos precisam conviver com a matemática: para vender ou comprar, para calcular lucros ou prejuízos e até para saber qual a pontuação que precisa na prova final de matemática para ser aprovado. Ela está por todos os lados; não há como fugir.

A partir das dificuldades enfrentadas, enquanto professor de Matemática na rede regular de ensino básico, na tentativa de incluir todos os estudantes de modo que pudessem aprender Matemática de forma significativa, surgiu a iniciativa de desenvolver práticas envolvendo a interdisciplinaridade com Geografia e História, tornando o conhecimento mais significativo para os alunos, tornando-os motivados nesse ambiente de aprendizagem.

METODOLOGIA:

A metodologia foi apoiada e sustentada por pesquisa bibliográfica feita em livros, artigos, dissertação de mestrado e na Base Nacional Comum Curricular-BNCC selecionados criteriosamente para se obter informações e dados para o trabalho afim de abordar as Geometrias objetos de estudos do Ensino Básico e principalmente do Novo Ensino Médio,

O processo utilizado foi através de práticas tipo laboratório roteirizada com atividades contendo modelagem matemática abrangendo elementos tratados como figuras construídas pelos professores e também desenvolvidas pelos alunos.

A modelagem também foi consolidada pelo estudante quando foram abordadas as fórmulas para os cálculos das distancias nas superfícies planas e esféricas inclusive nas propriedades do geoide tratado pelas áreas de Geografia e História.

CONCLUSÃO:

Foram estudados conteúdos que motivaram as abordagens no desenvolvimento e tratamento das geometrias que proporcionaram um nova visão e ampliação dos conhecimentos, envolvendo cálculos das distâncias entre dois pontos tanto na superfície plana como na esférica. Esse trabalho permitiu uma reflexão sobre os conteúdos a serem ministrados no ensino médio, que serviram como instrumento de auxilio no desenvolvimento da materialidade e aplicabilidade direta da geometria como conteúdo do componente curricular que foi abordado de forma interdisciplinar com as áreas da Geografia e História; proporcionando motivar o aluno para o estudo da Matemática, permitindo ampliar os conhecimentos para outras propriedades de figuras geométricas que podem ser construídas na superfície esférica. Finalmente esperamos que este artigo permita um maior alcance dos estudantes e uma melhor capacitação do professor objetivando melhorar suas práticas de geometria de forma interdisciplinar com outras áreas do conhecimento. Tendo em vista, essas abordagens são importantes no tratamento da Geometria não Euclidiana em função do 5º postulado de Euclides, pois, as fórmulas como modelagem matemática permitiram ao estudante escrever os caminhos para alcançar os resultados de forma eficiente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

Brasilia, DF.INEP/MEC.BRASIL(2002).

GUELLI, Oscar. Contando a História da Matemática: A invenção dos Números. 8ª ed. São Paulo: Ed. Ática, 1998.

IBGE | Atlas geográfico

https://atlasescolar.ibge.gov.br › o-que-e-cartografia

IEZZI, Gelson et al. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial, posição e métrica. Vol. 10. São Paulo: Atual, 1985.

IEZZI, Gelson et al. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica. Vol. 7. São Paulo: Atual, 1985.

IEZZI, Gelson et al. Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria. Vol. 3. São Paulo: Atual, 1985.

IEZZI, Gelson et al. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana. Vol. São Paulo: Atual, 1985.

OCDE (2023), PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education, PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/53f23881-en

SADOVSKY, Patrícia. O ensino da matemática hoje. Enfoques, sentidos e desafios. São Paulo:Ática,2011.