# PRINCÍPIO DE CAVALIERI, UMA AULA PRÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

*CAVALIERI'S PRINCIPLE, A PRACTICAL CLASS FOR HIGH SCHOOL*

*Fábio Batista*
*Universidade Federal de Alfenas*

*Fábio Alexandre de Matos*
*Universidade Federal de São João del-Rei*

**RESUMO**
A geometria é frequentemente deixada de lado por muitos professores do ensino médio ou não é apresentada de uma forma simples para compreensão dos conceitos por parte dos alunos. De acordo com Pavanello e Regina Maria (1989), o cálculo de áreas e volumes é um exemplo desta deficiência e, segundo Fainguelernt e Nunes (2012, p.114) as avaliações nacionais, por exemplo SAEB e ENEM, revelam que são grandes as dificuldades dos alunos do ensino médio em relação ao campo da geometria. O presente trabalho tem por objetivo realizar o cálculo de áreas e volumes com alunos do segundo ano do ensino médio utilizando o Princípio de Cavalieri, e como estratégia de ensino de Matemática, o processo de intervenção foi inspirado na modelagem matemática. Como ferramenta auxiliar, o GeoGebra teve um papel importante nas construções. O projeto de intervenção didática foi desenvolvido em duas aulas de 50 minutos cada, com apresentação de uma breve introdução histórica e o Princípio de Cavalieri. Como aplicação, foram realizados cálculo de volumes de sólidos através do Princípio de Cavalieri. Ao final das aulas e intervenção foi possível constatar que os alunos participantes tiverem seu interesse pela geometria ampliado e a sua curiosidade aguçada. É possível concluir que a participação do discente no processo de construção do conhecimento desempenha um papel importante no processo ensino aprendizagem.
**Palavras-Chave**: Princípio de Cavalieri, Geogebra, Intervenção pedagógica

**ABSTRACT**
Geometry is often left aside by many high school teachers or is not presented in a simple way for students to understand the concepts. According to Pavanello and Regina Maria (1989), the calculation of areas and volumes is an example of this deficiency and, according to Fainguelernt and Nunes (2012, p.114) national assessments, for example SAEB and ENEM, reveal that there are large difficulties of high school students in relation to the field of geometry. The present work aims to calculate areas and volumes with second-year high school students using Cavalieri's Principle, and as a Mathematics teaching strategy, the intervention process was inspired by mathematical modeling. As an auxiliary tool, GeoGebra played an important role in the constructions. The didactic intervention project was developed in two classes of 50 minutes each, with the presentation of a brief historical introduction and Cavalieri's Principle. As an application, solid volume calculations were carried out using Cavalieri's Principle. At the end of the classes and intervention, it was possible to see that the participating students had their interest in geometry expanded and their curiosity piqued. It is possible to conclude that student participation in the knowledge construction process plays an important role in the teaching-learning process.
**Keywords:** Cavalieri's Principle, Geogebra, Pedagogical intervention

## INTRODUÇÃO

E perceptível que estudantes têm chegado ao ensino médio com dificuldades em conceitos elementares de matemática. E, em sua maioria, acompanhados de um desinteresse ao longo sua vida escolar. Uma pergunta natural é se esse fato pode, em parte ser creditado à metodologia utilizada em sala de aula pelos docentes. Alguns autores como

Brito, D. D. S., & Almeida, L. M. W. D. (2021), têm se dedicado à busca por metodologias que tornem a geometria mais acessível. Acredita-se que a matemática pode ser apresentada de maneira mais didática. Com esse propósito, este estudo foi conduzido visando oferecer aos alunos do ensino médio uma perspectiva diferenciada sobre a geometria. Foi introduzida na sala de aula uma prática inspirada na modelagem matemática como ferramenta essencial para visualização de área e volume. Autores como Smith, J. K., & Johnson, L. M. (2019), ressaltam a importância de métodos inovadores no ensino de matemática, que permitam aos alunos uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos geométricos. Dessa forma, o presente estudo propõe uma abordagem prática e envolvente, buscando despertar o interesse dos estudantes e facilitar sua aprendizagem. O conceito central abordado foi o Princípio de Cavalieri, ilustrado por meio de uma prática envolvendo dois formatos distintos: quadrado e paralelogramo, ambos com a mesma área. Utilizou-se canudinhos de plástico para preencher completamente as áreas das figuras, representando as secções das formas mencionadas. Além disso, foi realizada uma constatação de volumes iguais em sólidos diferentes por meio do uso da calculadora Geogebra Classic. Foi demonstrado um prisma e um cilindro com mesma área da base e mesma altura, os quais ao serem preenchidos igualmente em uma simulação de líquido, evidenciam ter o mesmo volume em diferentes alturas. Adicionalmente, foi compartilhada uma breve história da geometria e do matemático Bonaventura Cavalieri, permitindo aos alunos compreenderem como tudo começou e os princípios básicos da geometria plana e espacial. O objetivo principal deste estudo é avaliar se a abordagem inspirada na modelagem matemática pode facilitar a compreensão dos alunos e despertar seu interesse pela geometria, transformando as aulas de matemática de momentos de preocupação em oportunidades de construção do conhecimento. No entanto, é importante ressaltar que devido ao tempo disponível para as atividades na escola, os conceitos abordados não puderam ser completamente verificados. A intervenção didática ocorreu no final do ano, durante um período intenso de provas bimestrais e finais. Isso limitou a extensão da prática e a oportunidade de uma avaliação mais abrangente dos resultados alcançados.

## 2 CONTEXTO HISTÓRICO

As origens da Geometria, são baseadas nos poucos artefatos restantes da pré-história, não sendo assim possível precisar sua origem em uma data específica, pois tratase de uma época em que não se realizavam registros escritos das respectivas descobertas, sendo assim conjectural e sua data provável descrita a partir dos documentos que se mantiveram passíveis de estudo e análise.

> Em geral, os vestígios matemáticos são encontrados no domínio das culturas primitivas, o que torna a avaliação de seu significado ainda mais complexa. Regras de operação podem existir como parte de uma tradição oral, muitas vezes na forma musical ou de versos, ou eles podem estar encobertos na linguagem da mágica ou em rituais. (Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach, 2012, p.23)

Segundo filósofos como Heródoto e Aristóteles, a geometria teria surgido no Egito Antigo. Para Heródoto, conforme registrado no segundo livro da sua obra "História", a geometria teria surgido graças ao Faraó Sesóstris III, que dividiu as terras da região para a agricultura, fazendo com que cada proprietário pagasse tributos conforme o tamanho do terreno. Quando o Rio Nilo transbordava, e tomava parte dessa terra, os agricultores requeriam nova metragem para pagar menos impostos. A partir dessas medições, teria surgido a geometria, tendo sido chamados os geômetras da época de "estiradores de corda" (ou agrimensores). Já a versão de Aristóteles, diz que no Egito havia uma classe sacerdotal que se dedicava aos estudos geométricos. Ou seja, nas versões desses filósofos, percebemos claramente origens distintas para o surgimento da geometria, uma baseada na prática e outra simplesmente na teoria. Os estudos iniciais sobre Geometria Plana, estão ligados à Grécia Antiga, também conhecidos como Geometria Euclidiana em homenagem a Euclides de Alexandria ( 360 a.c.-295 a.c.), autor da obra "Elementos" de 13 volumes, considerado um dos mais notáveis compêndios de matemática de todos os tempos, adotado como livro básico por gregos e romanos durante toda a Idade Média e até o Renascimento, por esta obra Euclides ficou conhecido como "o pai da geometria", embora sua obra contenha teoremas já demonstrados por Tales, Pitágoras, Platão, gregos e egípcios , foi Euclides quem sistematizou com clareza tais teoremas. A geometria euclidiana tem sua base em axiomas e postulados, em seu livro 1 dos Elementos de Euclides, são feitas 23 definições, entre as quais, ponto, reta, círculo, triângulo, retas paralelas, entre outras; e enunciadas 5 noções comuns, admitidas como conjecturas:

1 – Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais

2 – Se iguais são adicionados a iguais, os totais obtidos são iguais

3 – Se iguais são subtraídos de iguais, os totais obtidos são iguais

4 – Coisas que coincidem uma com a outra são iguais

5 – O todo é maior do que qualquer uma de suas partes

Através dessas conjecturas, Euclides constrói axiomaticamente a Geometria Plana, e através dos 5 postulados enunciados, deduz 465 proposições.

Postulados de Euclides:

Postulado 1. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.

Postulado 2. Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

Postulado 3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

Postulado 4. Todos os ângulos retos são iguais.

Postulado 5. Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r. Se a soma dos ângulos formados é menor do que 180 graus, então m e n não são paralelas. Além disso, elas se intersectam do lado dos ângulos cuja soma é menor do que 180 graus.

Muitos acreditavam que quando Euclides chegou no Postulado 5 não soube como demonstrá-lo e então resolveu deixá-lo como postulado. Com certeza Euclides deve ter pensado muito até aceitar que teria que acrescentar este postulado, visto que diferentemente dos demais, este parece muito mais com um teorema que com uma simples afirmação que podemos aceitá-la sem demonstração.

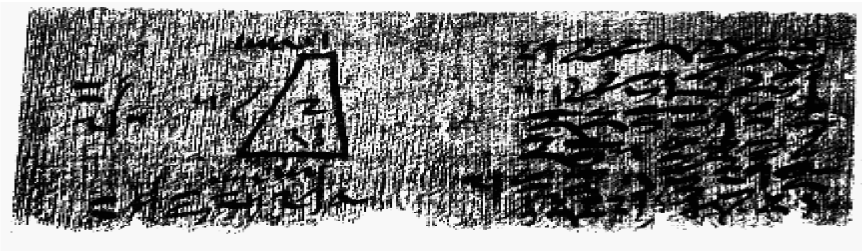
Diferentemente da geometria plana, a geometria espacial desenvolve-se no espaço tridimensional (altura, largura e comprimento). A geometria espacial teve início na História Antiga, com papiros como o "Papiro de Rhind" e o "Papiro de Moscou"

Fotografia 1 – Papiro de Rhind

Fonte: https://cs.i.uol.com.br/cienciaesaude/2010/12/08/o-papiro-de-rhind-que-data-de-1650-ac-e-um-entre-muitos-papiros-e-artefatos-antigos-exibindo-a-inventividade-matematica-do-egito-1291830486014_615x300.jpg

O Papiro de Rhind ou Papiro de Amósis que data de 1650 a.C., introduz cerca de 85 problemas dizendo estar apresentando "o método correto de cálculo, para que se possa captar o significado das coisas e saber tudo que existe, obscuridades e todos os segredos", possui problemas que calculam as inclinações de pirâmides e o volume de depósitos de diversos formatos, problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria, foi incorporado pelo Museu Britânico em 1865, permanecendo em seu acerto até os dias atuais.

Fotografia 2 – Papiro de Moscou



Fonte:https://3.bp.blogspot.com/_fSsSaKPmd2s/S3gNlCUQOiI/AAAAAAAAAS8/sK8M20EC7TM/w1200-h630-p-k-no-nu/ht_moscou.gif

O Papiro de Moscou também conhecido como Papiro Golonishev é um papiro egípcio em forma de uma estreita tira, com 25 problemas matemáticos, foi escrito por volta de 1850 a.C. por um escriba de identidade desconhecida, seus problemas estão relacionados à aplicação da geometria, outros de pesos e medidas.

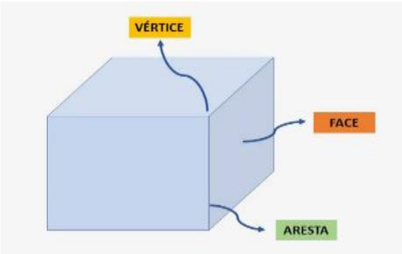
A geometria espacial baseia-se nos conceitos primitivos: ponto, reta, linha, plano e espaço.

As figuras geométricas espaciais são divididas em dois grupos: os corpos redondos (delimitados por alguma superfície arredondada) e os poliedros (superfícies delimitadas por figuras geométricas planas).

## 3 POLIEDROS

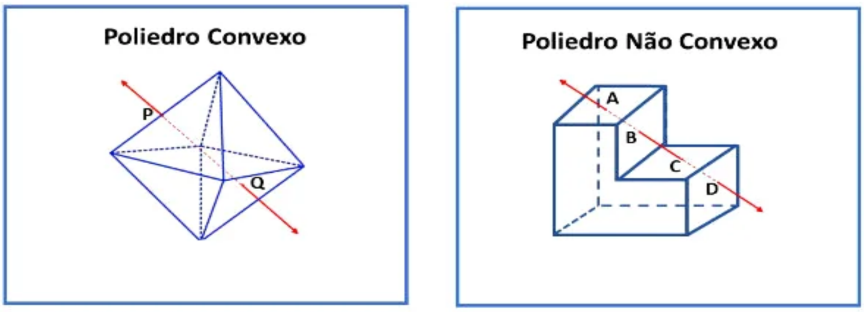
Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos, chamados de faces, os lados desses polígonos são chamados de arestas e o ponto de encontro dessas arestas de vértices. Poliedros podem ser convexos e não convexos. Convexos quando um segmento de reta formado por dois pontos quaisquer do polígono, encontra-se inteiramente dentro do polígono e não convexo ou concavo, quando existe um segmento de reta formado por dois pontos do polígono que não esteja inteiramente dentro do polígono.

FIGURA 1 – ELEMENTOS DE UM POLIEDRO




https://static.todamateria.com.br/upload/po/li/poliedroelementos.jpg

FIGURA 2 – POLIEDRO CONVEXO E POLIEDRO NÃO CONVEXO




https://static.todamateria.com.br/upload/po/li/poliedroconvexoconcavo.jpg?auto_optimize=low

## 4 CAVALIERI

CAVALIERI

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/49/Bonaventura_Cavalieri.jpeg

Francesco Cavalieri (1598-1647), foi um matemático e astrônomo italiano, que ao se juntar à ordem religiosa dos jesuítas em Milão, assumiu o nome pelo qual ficou conhecido, Bonaventura Cavalieri, estudou filosofia e teologia, tornou-se um famoso matemático e um dos discípulos de Galileu.

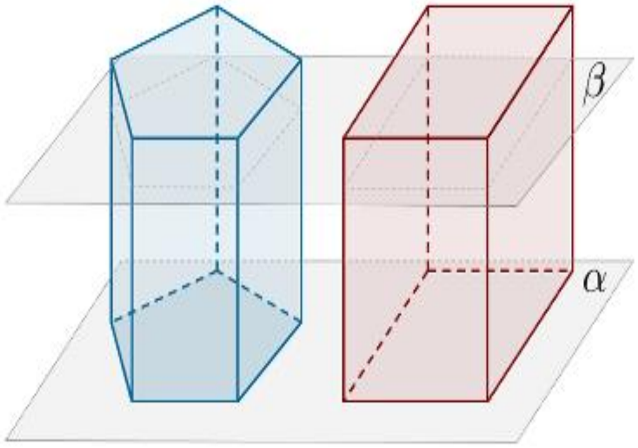
Professor da universidade de Bologna, criou o método dos indivisíveis, onde em seu livro *Geometria Indivisibulus Continuorum nova quadam ratione promota* (1635), diz que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos e que o volume pode ser composto de áreas que são volumes indivisíveis, esse método não era baseado em aproximações e sim numa correspondência um a um dos elementos, a partir desse método surge os princípios de Cavalieri:

- Dados dois sólidos geométricos A e B de mesma altura e área das bases, que, por sua vez, estão contidas no mesmo plano $\alpha$. Os sólidos A e B tem o mesmo volume se qualquer plano $\beta$, paralelo à $\alpha$, determinar duas secções transversais com áreas iguais. O princípio de Cavalieri pode também ser usado para sólidos geométricos diferentes de mesma altura e mesma medida de área da base e que qualquer corte transversal realizado nos dois por um mesmo plano resulte em figuras de mesma área.

Segundo NICOMEDES ALBUQUERQUE PONTES (2014, p.18):

> Os princípios de Cavalieri usados como axiomas podem resolver diversos problemas de área e volume, evitando o uso do cálculo integral moderno. Ao passo que os alunos do Ensino Médio brasileiro, que não possuem o cálculo em sua grade curricular, sejam capazes de resolver problemas de área e volume apenas com esses princípios

FIGURA 3 – SÓLIDOS SECCIONADOS POR PLANOS PARALELOS




Fonte: https://static.mundoeducacao.uol.com.br/mundoeducacao/conteudo/principio-de-cavalieri-solidos-diferentes.jpg

Cavalieri em seu livro *Directorium Generale Uranometricum* (1632) introduziu na Itália, o logaritmo de funções trigonométricas para o emprego em cálculo de astronomia

### 4.1.1 PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Duas figuras que possuem a mesma altura e a mesma área de secção transversal em todos os pontos ao longo dessa altura, possuem o mesmo volume, conforme resultado obtido por Guilherme Padovani Garavello (2013, p.6), que pode ser encontrado em sua dissertação de mestrado.

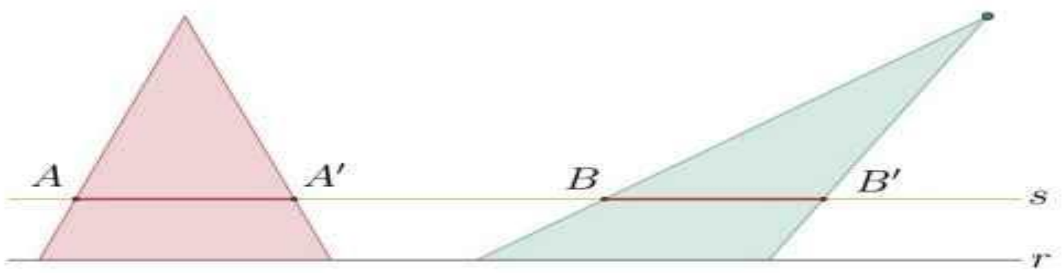
> O tratado de Cavalieri é longo demais e pouco claro, sendo difícil até descobrir o que ele entendia por indivisível. Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado por uma infinidade de secções planas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Um procedimento análogo com os elementos do conjunto das secções planas paralelas de um sólido dado fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original (este último resultado pode ser ilustrado claramente formando-se uma pilha vertical de cartas e depois deformando suas laterais transformando-as em superfícies curvas; o volume evidentemente não se altera com essa deformação). Esses resultados, ligeiramente generalizados, fornecem os chamados Princípios de Cavalieri (EVES, 2011, p. 425-426).

> Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana ´e igual `a da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. (EVES, 2011, p. 426).

O princípio de Cavalieri para figuras planas pode ser escrito da seguinte forma:

- Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.

FIGURA 4 – SECANTES EM ÁREAS PLANAS

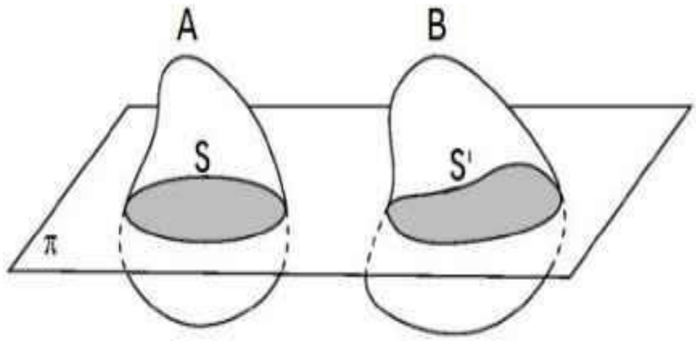



Fonte: https://www.geogebra.org/m/vTk5uFp4

Na figura anterior, dada a reta r, se para toda reta s paralela à r secante às duas porções do plano o segmento AA´ é igual ao seu correspondente BB´, então as duas porções do plano têm a mesma área. O princípio de Cavalieri para volumes pode ser escrito da seguinte forma:

- Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então os volumes de A e B são iguais.

FIGURA 5 – SÓLIDOS DE MESMO VOLUME




Fonte: Pontes (2014, p. 29)

De modo geral, sejam A e B dois sólidos. Cada plano horizontal π determina nos sólidos A e B seções planas geradas pela interseção dos sólidos com o plano, que indicamos respectivamente por S e S´. Se para todos os planos horizontais π, as seções S e S´ possuem a mesma área, o Princípio de Cavalieri afirma que o volume dos sólidos A e B são iguais.

As demonstrações serão omitidas por fugirem do objetivo deste trabalho.

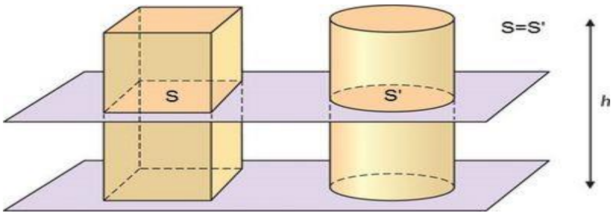
### 4.1.2 VOLUME DO CILINDRO COM O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Utilizando o princípio de Cavalieri, e sabendo que o cálculo volume de prismas e cilindros é feito através da fórmula

$A = A_b \times h$, sendo, $A_b \rightarrow$ área da base e $h \rightarrow$ altura

Quando a área da base e a altura de um prisma e a área da base e a altura do cilindro forem as mesmas, eles apresentarão também o mesmo volume, ainda que sejam sólidos geométricos com formatos diferentes

FIGURA 6 – PRISMA E CILINDRO




https://encryptedtbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRBld9ZIkUvay7sqTHBhUNUMUwhU0YOuTf5xQ&usqp=CAU

Como a base de um cilindro é igual a um círculo, a partir do princípio de Cavalieri, é possível deduzir a fórmula do volume do cilindro, pois a área do círculo é $A_b = \pi r^2$. Sendo assim, para calcular o volume do prisma, utilizamos a fórmula: $V = \pi r^2 \times h$

## 4.2 PROJETO DE INTERVENÇÃO

### 4.2.1 PROBLEMA

O projeto elaborado, tem o objetivo de aplicar o princípio de Cavalieri para comparação de figuras planas e para comparação de figuras sólidas, sendo este, uma proposta de intervenção para as aulas de geometria do ensino médio.

### 4.2.2 JUSTIFICATIVA

A percepção da dificuldade e desinteresse em geometria por parte de alunos, em sua maioria, nos leva a pensar em como podemos melhorar as metodologias utilizadas em sala de aula, para uma melhor compreensão dos alunos. O projeto foi desenvolvido por acreditar que a metodologia inspirada na modelagem matemática, pode contribuir para o aumento do entendimento e da vontade por parte dos alunos para o aprendizado da Geometria e aumentar seu interesse pela Matemática de forma geral.

### 4.2.3 PÚBLICO-ALVO

O público-alvo do projeto foi constituído de uma turma de 2º ano do ensino médio da Escola Estadual Professor Caetano Azeredo, situada na cidade de Belo Horizonte– MG

### 4.2.4 CRONOGRAMA

O projeto de intervenção foi desenvolvido em duas aulas sequenciais de 50 minutos cada:

!ª aula: Desafio em sala de aula

2ª aula: Aula expositiva com a introdução de uma parte da história da geometria e o Princípio de Cavalieri

### 4.2.5 MATERIAIS UTILIZADOS

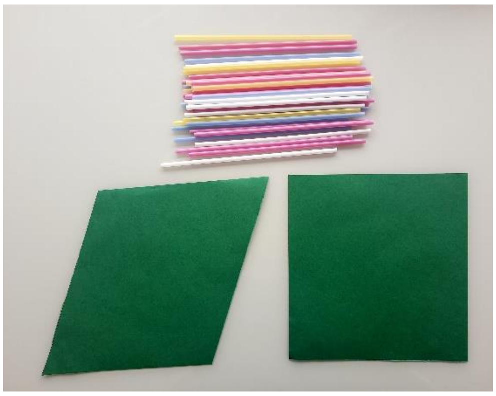
Cartolinas cortadas em formatos de quadrados e paralelogramos, canudinhos de plástico, retroprojetor, calculadora Geogebra Classic

### 4.2.6 EXECUÇÃO

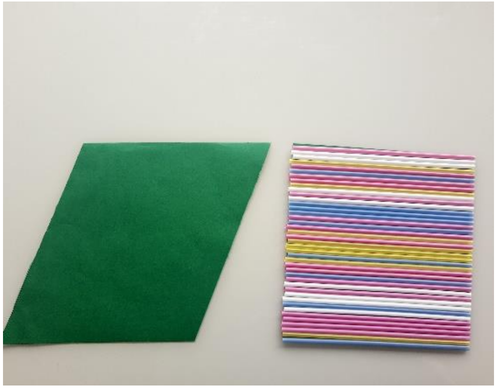
A primeira aula começou com um desafio para os alunos: foram distribuídas duas figuras planas de formatos diferentes - um quadrado e um paralelogramo com a mesma altura - para quatro grupos na sala de aula. Cada grupo recebeu um conjunto e foi perguntado o que poderiam dizer sobre essas figuras. Inicialmente, notou-se uma dificuldade dos alunos em compreender o que duas figuras diferentes poderiam ter em comum. O objetivo deste início era que os alunos, como protagonistas, percebessem que as figuras entregues possuíam a mesma altura. Após algum tempo e discussões em grupo, três dos quatro grupos perceberam isso. Em seguida, foram distribuídos 41 canudinhos de plástico para cada grupo, sem mais instruções. Foi pedido que, utilizando o conjunto completo, os alunos dissessem para que serviam aqueles canudinhos e quais conclusões poderiam tirar. Houve outro momento de reflexão nos grupos e, após um curto período, todos os alunos perceberam que os canudinhos eram para preencher as figuras, uma de cada vez. Chegaram à conclusão de que as duas formas planas podiam ser completamente preenchidas pelos canudinhos, sem sobra. Então, os alunos questionaram ao professor se isso significava que as figuras tinham a mesma área. Foram incentivados a chegar às próprias conclusões na busca pelo conhecimento. Após alguns minutos de discussões em grupo, todos conseguiram deduzir que essa afirmação se confirmava, apesar dos diferentes formatos das figuras. Apresentaram suas soluções ao professor, que prontamente confirmou essa propriedade. Percebeu-se na sala de aula a satisfação dos alunos ao perceberem que haviam resolvido o desafio, quase independentemente do professor, utilizando os conjuntos entregues e conversando com seus colegas para chegar às suas conclusões.

Fotografia 3 – Desafio em sala de aula

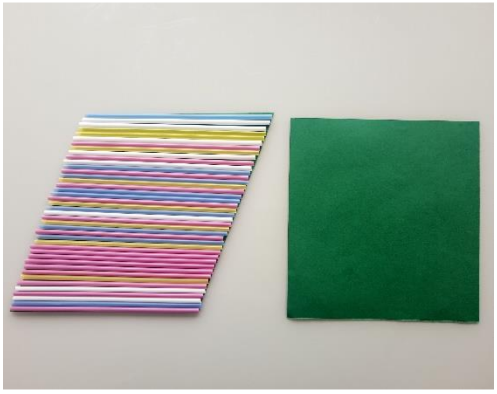
**a)**



**b)**



**c)**



**d)**

e)

Legenda: a) Quite entregue aos alunos
b) Quadrado preenchido
c) Paralelogramo preenchido
d) Alunos utilizando quite
e) Alunos explicando suas conclusões

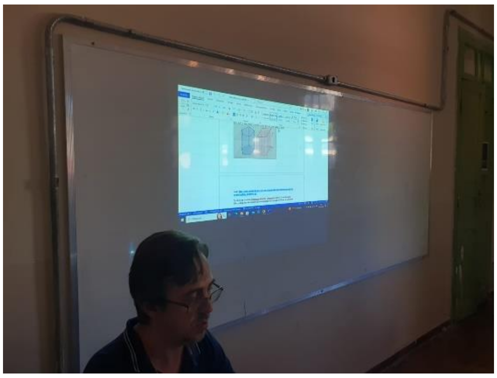
Após completo o desafio proposto e discutido os resultados com os alunos e entre os alunos, foi iniciada uma aula expositiva com o tema Cavalieri, utilizando o retroprojetor, quando se apresentou um pouco de sua história e de seus feitos, com o objetivo de apresentar o Princípio de Cavalieri formalmente aos alunos presentes, com a seguinte ordem:

1º - Definição do Princípio de Cavalieri

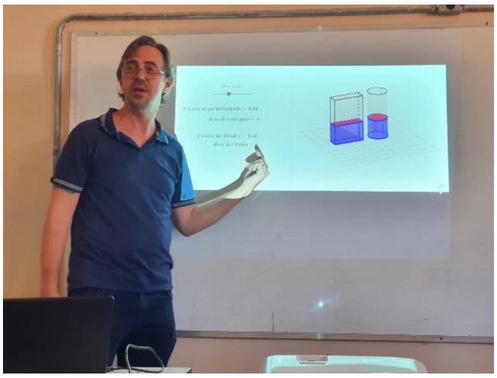
2º - Volume do cilindro com o Princípio de Cavalieri

Fotografia 4 – Princípio de Cavalieri

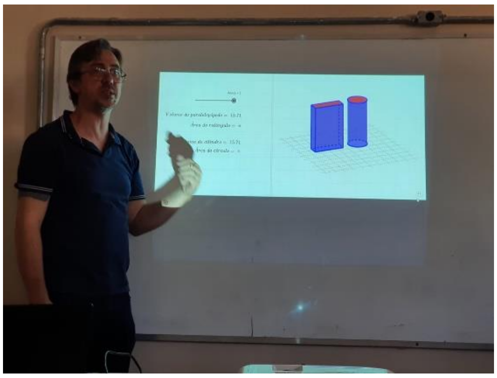
a)



b)



c)



Legenda: a) Apresentação do Princípio de Cavalieri
b) Volumes via Geogebra
c) Volumes via Geogebra

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após os dois horários de aulas expositivas, contexto histórico, e de aulas práticas realizadas com os alunos em sala de aula, podemos concluir que os objetivos foram alcançados, uma vez que foi visível o interesse e a participação de todos os alunos na aula prática. Ao ser exposta a história de Cavalieri, os alunos presentes já com o interesse aguçado pela prática anterior, demonstraram mais interesse do que o usualmente encontrado em aulas expositivas regulares. Uma outra percepção foi que a constatação da igualdade das áreas realizada em grupo com os quites entregues ( áreas cortadas em cartolinas e canudinhos) fez com que os alunos debatessem suas ideias, criando assim, dentro dos grupos suas teorias sobre o objetivo daquela prática, e colocando todos para pensar em busca do resultado final. A metodologia utilizada foi inspirada em modelagem matemática (caracterizada pela desafio proposto para que os alunos desenvolvessem o raciocínio matemático através da visualização de uma situação prática criando teorias e procurando uma maneira de explicá-las matematicamente). O desenvolvimento das atividades, utilizando a prática sala de aula invertida, mostrou-se uma boa estratégia para o trabalho da geometria de sólidos e suas respectivas áreas. A exposição da comparação dos volumes do cilindro e do prisma apresentado através da calculadora GeoGebra, também mostrou-se de grande valia aos interesses dos alunos, sendo atraídos pela apresentação e pelo movimento criado para comparação dos volumes. Foi evidente que o GeoGebra deveria ser uma ferramenta usada com maior frequência por professores de matemática, pois traz para sala a tecnologia que os alunos tanto se interessam e possibilita que o próprio aluno crie e investigue, melhorando seu entendimento das teorias estudadas. A metodologia inspirada em modelagem matemática mostrou-se uma grande aliada na busca de uma aula mais simples e de mais fácil entendimento dos conceitos geométricos, uma vez que o aluno foi o protagonista na busca de suas respostas e mostrando ser possível atrair o aluno e despertar seu interesse em Geometria. É de fundamental importância a inserção de ferramentas e metodologias atuais no ensino nas diferentes áreas da matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EVES, Howard. Introdução à história da Matemática. Campinas, SP. Editora da Unicamp, 2004.

BOYER, C. B. (1974). História da Matemática. São Paulo: Edgar Blucher.

LIMA, E. L. (1991). Medida e Forma em Geometria. Rio de Janeiro: Grafitex.

Iezzi, Gelson. (2002). Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial. São Paulo: Editora Atual

Dante, L. R., Matemática, Volume Único, São Paulo: Ática, 2011.

Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C., A Matemática no Ensino Médio, vol. 2, 6.ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

PONTES, Nicomedes Albuquerque. O Princípio de Cavalieri e suas Aplicações para o Cálculo de Volumes. 2014. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

PEREIRA, Maria Regina de Oliveira. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino**. 2001. 71 f. Dissertação (Mestrado) PUC-SP, São Paulo, 2001.Disponível:https://repositorio.pucsp.br/bitstream/handle/11182/1/dissertacao_maria_regina_pereira.pdf. Acesso cm: 21 nov. 2023.

PONTES, Nicomedes Albuquerque. **O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E SUAS APLICAÇÕES PARA CÁLCULO DE VOLUMES**. 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará– Ufc, Fortaleza, 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1037&id2=1190. Acesso cm: 29 dez. 2023.