

EXPLORANDO EQUAÇÕES LINEARES EM UMA INTERVENÇÃO USANDO CARTOGRAFIA E GEOGEBRA

EXPLORING LINEAR EQUATIONS IN AN INTERVENTION USING CARTOGRAPHY AND GEOGEBRA

Rodrigo Jesus de Souza¹

*Discente do Programa de Pós -Graduação
Lato Sensu Modelagem
Matemática/Estatística na Educação*

Deive Ciro de Oliveira²

*Docente do Instituto de Ciências Aplicadas
da Universidade Federal de Alfenas*

RESUMO

O presente artigo visa abordar um Projeto de Intervenção com o conteúdo base da distância entre dois pontos com alunos do Ensino Médio, baseando-se na revisão bibliográfica de autores que discorrem sobre o assunto. Objetiva, de modo geral, implementar uma intervenção educacional no ensino de equações, usando a cartografia e aplicativos integrados, visando a melhoria do desempenho dos alunos, o desenvolvimento de habilidades cognitivas relacionadas à resolução de problemas algébricos e a promoção de uma aprendizagem significativa e duradoura no contexto específico das equações matemáticas. Neste estudo, será apresentada uma proposta de ensino e aprendizagem que visa contribuir para o trabalho com a temática em questão, utilizando ferramentas digitais de apoio, bem como a retomada de conceitos e o auxílio aos estudantes no que se refere às dificuldades enfrentadas no campo da matemática e geografia, desenvolvendo, portanto, competências e habilidades que sejam significativas para os alunos.

Palavras-Chave: Matemática. Ensino. Aprendizagem. Intervenção.

ABSTRACT

This article aims to address an Intervention Project with the basic content of the distance between two points with high school students, based on the bibliographic review of authors who discuss the subject. The aim, in general, is to implement an educational intervention in teaching equations, using cartography and integrated applications, aiming to improve student performance, develop cognitive skills related to solving algebraic problems and promote meaningful and lasting learning in the specific context of mathematical equations. In this study, a teaching and learning proposal will be presented that aims to contribute to the work with the theme in question, using digital support tools, as well as the resumption of concepts and assistance to students with regard to the difficulties faced in the field of mathematics and geography, therefore developing skills and abilities that are meaningful to students.

Keywords: Mathematics. Teaching. Learning. Intervention.

¹Rodrigo Jesus de Souza-
rodrigo.jesus.souza@educacao.mg.gov.br
Orcid: <https://orcid.org/0009-0005-8518-3102>

² Deive Ciro de Oliveira- deive.olivera@unifal-mg.edu.br.
Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-1525-7426>

INTRODUÇÃO

O estudo das equações é um pilar fundamental no desenvolvimento matemático dos estudantes, e sua importância transcende o âmbito da sala de aula. As equações permeiam diversos campos do conhecimento e são essenciais para a compreensão e resolução de problemas presentes no cotidiano. Dentro desse contexto, a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (Brasil, 2018), um marco regulatório na educação nacional, estabelece diretrizes e objetivos fundamentais para a formação educacional, delineando os pontos essenciais que os estudantes devem aprender em cada etapa de sua jornada acadêmica. No âmbito matemático, a BNCC dedica atenção especial ao estudo das equações, reconhecendo sua relevância não apenas como uma ferramenta técnica, mas como um elemento-chave para o desenvolvimento do pensamento lógico, da capacidade de resolução de problemas e da interpretação de situações reais.

A BNCC (Brasil, 2018) propõe uma abordagem gradual e contextualizada para o ensino de equações, começando a ser lançada já nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa jornada de aprendizado se desenvolve ao longo dos anos, incorporando progressivamente maior complexidade e aprofundamento, de forma a fornecer aos estudantes uma compreensão sólida e abrangente sobre essa poderosa ferramenta matemática.

No contexto da BNCC (Brasil, 2018), o estudo das equações visa o desenvolvimento de competências e habilidades fundamentais para a formação integral dos estudantes. Dentre as principais competências a serem desenvolvidas nesse tema, destacam-se: Raciocínio Lógico-Matemático, Pensamento Crítico e Criativo, Modelagem Matemática, Comunicação Matemática, Resolução de Problemas e Contextualização e Interdisciplinaridade. Essas competências são essenciais para o desenvolvimento matemático dos estudantes, não apenas no que diz respeito à resolução de equações em si, mas também na capacidade de pensar criticamente, na resolução de problemas do cotidiano e compreensão da relevância da matemática em diversos campos da vida. A BNCC visa fornecer uma base sólida para que os alunos adquiram essas habilidades ao longo de sua trajetória escolar.

A BNCC (Brasil, 2018) prevê que os alunos nas séries-alvo têm que saber representações sobre notação matemática, ou seja, aprender sobre formalização matemática, a qual, por sua vez, está relacionada à construção de argumentações, à utilização de linguagem simbólica e à compreensão dos fundamentos lógicos que

sustentam os conceitos matemáticos. O que se vê durante anos, é o ensino de uma geometria estática onde, para facilitar, os professores usam representações gráficas de equações, memorização de fórmulas, procedimentos e resolução de exercícios padronizados. Embora os educadores ainda possam seguir métodos mais tradicionais, há uma tendência crescente em direção a um ensino de matemática mais dinâmico, que visa não apenas à aquisição de conhecimento, mas também ao desenvolvimento de habilidades cognitivas e práticas relevantes para a vida dos alunos. De acordo com Agencia Minas (Minas Gerais, 2022), foi investido 413 milhões para modernização do parque tecnológico das escolas de Minas Gerais. E com a difusão das tecnologias de informação e comunicação, se faz necessário e é possível uma geometria dinâmica que permite aos alunos explorar visualmente as propriedades geométricas e ver como as figuras se transformam em tempo real, oferecendo uma compreensão mais tangível e intuitiva aos conceitos abstratos, facilitando a aprendizagem. Neste contexto, explorar o uso desses softwares gráficos dinâmicos no ensino de geometria e equações não é apenas incorporar tecnologia à sala de aula, mas abrir as portas para uma abordagem mais imersiva e participativa da matemática. Segundo o Departamento de Matemática da Unesp (Unesp, 2022), existem hoje vários softwares que possibilitam tais ações, como: GEOGEBRA, GEOPLANO VIRTUAL, CABRI GÉOMÈTRE, POLY, etc.

Softwares especializados e equações, sejam elas lineares ou não lineares, são fundamentais para a análise e modelagem de uma variedade de preferências, principalmente em geografia, pois pode-se transformar situações estáticas em situações dinâmicas, como: equações para analisar, representar e manipular dados geoespaciais, modelagem de crescimento populacional, análise de padrões climáticos, estudo de relevo e topografia, análise de dados espaciais e estudo de movimentos e migrações. Essas aplicações representam apenas uma amostra do amplo espectro de ferramentas e usos de equações lineares e não lineares na Geografia, demonstrando como a modelagem matemática é essencial para compreender e prever previsões geográficas complexas.

A produção de aplicativos interativos que combinam Geografia e Equações representa uma oportunidade inovadora na educação e tecnologia educacional. Essa integração proporciona diversos benefícios para a aprendizagem, como uma abordagem mais abrangente e prática dos conceitos, incentivando a interdisciplinaridade. Além disso, esses aplicativos estimulam a aprendizagem ativa, facilitam a compreensão conceitual, promovem a criatividade e inovação, e têm aplicações práticas em áreas profissionais

como urbanismo e planejamento territorial, permitindo análise e tomada de decisões baseadas em dados geográficos e modelos matemáticos.

A produção de aplicativos interativos que integram conceitos de Geografia e Equações representa uma oportunidade significativa e inovadora no campo da educação e da tecnologia educacional. Os benefícios dessa integração para a aprendizagem e aplicação desses conhecimentos são: a Relevância Educacional, que é a criação de aplicativos interativos que oferece uma nova abordagem, integrando esses campos de conhecimento para oferecer uma compreensão mais holística e prática dos conceitos, estimulando a interdisciplinaridade no ensino; o Estímulo à Aprendizagem Ativa, que se constituem em aplicativos interativos com plataforma dinâmica que incentiva a exploração e a descoberta por parte dos estudantes; a Facilitação da Compreensão Conceitual, que é a utilização de aplicativos interativos os quais permitem a visualização e a aplicação prática de conceitos abstratos, tornando-os mais tangíveis e acessíveis e auxiliando na compreensão de como equações matemáticas podem ser aplicadas para modelar características geográficas complexas; o Incentivo à Criatividade e Inovação, que se constitui na criação de aplicativos interativos que integram Geografia e Equações promovendo a criatividade e a inovação (assim, professores e alunos exploraram novas formas de representar e analisar dados geográficos, criar modelos interativos e desenvolver soluções para desafios geográficos usando ferramentas matemáticas) e as Aplicações Práticas e Profissionais que, além do ambiente educacional, da integração de Geografia e Equações em aplicativos interativos, possui aplicações em diversas áreas profissionais, tais como: urbanismo, planejamento territorial, entre outros, para análise, previsão e tomada de decisões baseadas em dados geográficos e modelos matemáticos.

Em resumo, a criação de aplicativos interativos que integram Geografia e Equações oferece uma oportunidade única de aprimorar a aprendizagem, facilitar a compreensão conceitual, promover a inovação e aplicar conhecimentos interdisciplinares de maneira prática e acessível, beneficiando tanto o contexto educacional, quanto o profissional. Este artigo busca explorar e demonstrar o potencial e os benefícios dessa integração para o ensino, aprendizagem e aplicações práticas.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL:

Implementar uma intervenção educacional no ensino de equações, usando a cartografia e aplicativos integrados, visando a melhoria do desempenho dos alunos, o desenvolvimento de habilidades cognitivas relacionadas à resolução de problemas algébricos e à promoção de uma aprendizagem significativa e duradoura no contexto específico das equações matemáticas.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Desenvolver um ambiente educacional inovador que integre conceitos matemáticos à cartografia, capacitando os alunos a estabelecerem conexões entre dois pontos geográficos através da representação gráfica por meio de segmentos de retas. Além disso, promover a realização precisa do cálculo das distâncias correspondentes, unindo de maneira prática e contextualizada as disciplinas de matemática e geografia;

- Capacitar os alunos na compreensão e aplicação de raios geográficos como ferramenta para definir regiões de inclusão de pontos em estudos cartográficos, utilizando conceitos matemáticos para representar e delimitar áreas específicas no espaço geográfico. Esta abordagem visa promover a habilidade de empregar equações e coordenadas de forma precisa, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada das relações espaciais;

- Desenvolver um aplicativo (APP) educacional que atenda às necessidades do contexto global, nacional e local, proporcionando uma plataforma interativa e adaptável para o ensino de equações, especialmente em problemas de cartografia. Este aplicativo será personalizado para abranger contextos geográficos diversos, enriquecendo a experiência de aprendizado dos usuários em diferentes escalas, desde cenários globais até situações específicas de nível local.

- Incorporar no âmbito do aplicativo, materiais lúdicos que permitam aos alunos explorar e compreender as diferenças entre distâncias euclidianas e geodésicas. Serão oferecidos recursos visuais e práticos para comparar e analisar as medidas em diferentes contextos geográficos, promovendo uma compreensão mais profunda das implicações matemáticas nas representações espaciais. Dessa forma, busca-se proporcionar uma

experiência de aprendizado envolvente e prática, integrando o ensino de matemática e geografia de maneira eficiente.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Abaixo respaldo-me nos trabalhos de alguns autores para fazer tal intervenção.

De acordo com Sampaio (2023), é preciso estimular os interesses dos estudantes pela matemática utilizando os conceitos matemáticos presentes no funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS), principalmente, o sistema de equações lineares. O autor explica a teoria dentro da matemática e, em seguida, a história do funcionamento do GPS - desde sua criação, até a atualidade. Demonstrando que conceitos teóricos aprendidos dentro de sala de aula tem aplicações práticas no cotidiano dos estudantes.

Usando o GPS, a geografia é trabalhada, mas será que geografia e matemática são compatíveis? Os autores Santos (2021) e Leão (2017) buscam discutir a interdisciplinaridade entre essas duas disciplinas, buscando alcançar professores e alunos, apresentando práticas interdisciplinares que facilitem o ensino aprendizagem. Ambos destacam que a interdisciplinaridade permite uma interlocução entre o conteúdo estudado e o meio vivenciado dos estudantes, fazendo com que a realidade do aluno venha para dentro da sala de aula. Fica enfatizado, porém, que as disciplinas de matemática e geografia devem passar por transformações, ou seja, levar em consideração toda bagagem dos estudantes, sua vida social e cultural. A matemática tem que ser contextualizada, e a geografia deve seguir os mesmos rumos que a matemática, isto é, levando em consideração a realidade e a vida dos alunos. Cita ainda a cartografia, como meio de interação das disciplinas. Fica evidente nos trabalhos desses autores que a interdisciplinaridade é uma prática facilitadora do ensino-aprendizagem, pois proporciona uma abordagem contextualizada, dinâmica e enriquecedora para a construção de conhecimento. Os autores citam alguns conteúdos de geografia que precisam de noções matemáticas como: mapas, escalas geográficas, cartografia entre outras.

Mariani (2018) usou a cartografia para saber como os alunos operam com atividades de investigação matemática, buscando criar nos alunos encanto, pois estarão inseridos no meio geográfico. O autor destaca, dentro da história da cartografia, a

evolução provocada pelos avanços tecnológicos e fala do uso de mapas em aulas de matemática. Deixa claro que a cartografia aliada a matemática instiga o aluno a ter criatividade, ser detalhista, criar conjecturas e outras habilidades. Evidencia ainda que a cartografia tem grande potencial em sala de aula, o autor cita Rocha (2004, p.78, apud Mariani, 2018):

O mapa representa um recurso de valor para as aulas de Geografia, de História, e de outras disciplinas que utilizam a ordenação do espaço geográfico como meio de demonstração de sua viabilidade de caminhos que se pode tomar ou seguir. A Matemática, como disciplina básica para a formação do homem, não pode ficar à parte dessa discussão. O que se propõe aqui é a utilização da cartografia, mais especificamente do mapa, que poderá contribuir para o aprendizado do aluno, sua formação como cidadão, inserido no contexto em que vive. Ao colocar o mapa como modelo matemático, tem-se como objetivo, modificar o processo metodológico da problematização dos conteúdos a serem ministrados em uma sala de aula e ultrapassar os limites da matemática pela matemática. (ROCHA, 2004, p. 78).

O autor citou a cartografia como forma de integração da matemática com a geografia. Mas o que é a cartografia? E como usar em sala de aula? Cartografia é uma parte da geografia que estuda a concepção, produção, interpretação e uso de mapas. Para usar em salas de aula, tem-se os mapas de papel. Porém, como prender a atenção dos alunos com os mapas de papel? Embora sejam grandes, fica difícil utilizá-los em sala com 30 alunos ou mais.

Corroborando com essa reflexão, Fernandes (2017, p. 02), afirma que:

A matemática e a geografia, mesmo sendo disciplinas com suas “particularidades” possuem conteúdos que permitem trabalhar de forma interdisciplinar sem prejudicar a compreensão dos conteúdos matemáticos e geográficos, pelo contrario, fazendo que aprendizagem seja mais satisfatória e significativa tanto para o professor quanto para os alunos. Essa prática pedagógica pode ser trabalhada com mapas, escalas geográficas, formas geométricas, cartografia. Todos esses conteúdos estudados na geografia, para melhor compreensão e significado para o aluno, se faz necessário às noções de conteúdos matemáticos. Fernandes (2017, p.02).

Conforme abordam Rêgo (2015) e Silva (2017), o potencial educacional dos aplicativos *Google Maps* e *Google Earth* no ensino de Geografia, explorando suas diversas funcionalidades e maneiras pelas quais podem ser integradas ao ensino. Os mapas apresentados nessas ferramentas não são estáticos como os mapas de papel, mas dinâmicos e interativos, promovendo maior concepção dos conceitos geográficos, bem como o estímulo ao engajamento dos alunos por meio de atividades práticas. Acrescenta-se ainda a possibilidade por parte dos alunos, da visualização/interação, compreensão do espaço geográfico, extrair dados e construir hipóteses. Diante do exposto pelos autores, fica evidente que as ferramentas *Google Maps* e *Google Earth* são ferramentas que vieram

para complementar o ensino de geografia, pois apresentam inúmeras possibilidades para as aulas de geografia, além de torná-las mais atrativas e interativas.

Para haver uma integração das disciplinas (matemática e geografia), deve-se buscar conteúdos que dialoguem e, basicamente, um *software* que consiga unir as duas temáticas. Para isso, Camargo (2021) deixa claro que a tecnologia se tornou um dos poderosos recursos de aprendizagem e que sua evolução no ensino e o processo de aprendizagem cresceram de maneira não planejada, devido à pandemia. E que o GeoGebra, embora seja projetado para ser usado como ferramenta no ensino de matemática com constantes aprimoramentos, hoje é considerado uma ferramenta de ensino multidisciplinar e multi plataformas. O *software* possibilita a união da matemática com a geografia, principalmente na cartografia. Por fim, o autor descreve que os alunos aproveitam as vantagens do *software* GeoGebra, como:

- Imersão em tecnologias;
- Letramento em informática;
- Oportunidades de aprender usando o suporte de tecnologia.

O ambiente digital motiva os alunos no ensino e aprendizagem.

Os alunos de hoje nascem e crescem em meio a tecnologias diversas, logo aulas diferenciadas chamam a atenção, ainda mais se puderem ver as transformações matemáticas aplicadas e poderem interagir com essas transformações. Os alunos terão suas curiosidades aguçadas e sairão em busca de respostas, produzindo mais conhecimento e aprendizado, tornando-se responsáveis pelo seu próprio saber.

4 MATERIAIS E MÉTODOS

4.1 ESTUDO DA DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Para dar início aos cálculos da distância entre dois pontos, é imperativo possuir uma base sólida de conhecimentos. Esses conhecimentos fundamentais abrangem:

- Habilidade de identificar os lados do triângulo retângulo, nomeando os catetos e a hipotenusa, sendo essencial para compreender e aplicar o Teorema de Pitágoras;
- Compreensão dos elementos do Plano Cartesiano, incluindo os eixos coordenados (abscissa e ordenada), envolvendo a capacidade de definir e reconhecer as coordenadas de um ponto no plano;

- Domínio do uso do Teorema de Pitágoras, sendo fundamental para calcular a distância entre dois pontos em um plano, especialmente quando se trata de triângulos retângulos.

Ao adquirir esses conhecimentos básicos, é possível enfrentar desafios potenciais, tais como:

- A possibilidade de confundir os termos associados aos lados do triângulo retângulo, como cateto e hipotenusa, pode surgir;
- Dificuldade em distinguir entre os eixos coordenados, incluindo discernir qual é o eixo da abscissa e qual é o eixo das ordenadas;
- Desafio em definir as coordenadas de um ponto, especialmente quando este está situado em um dos eixos coordenados;
- Incapacidade de utilizar adequadamente a equação do Teorema de Pitágoras para calcular distâncias.

Cientes dessas potenciais dificuldades, é crucial aprofundar o entendimento sobre a equação da reta, segmento de reta e, sobretudo, a distância entre dois pontos. Esses conhecimentos essenciais proporcionam uma base sólida para a resolução de problemas geométricos e são indispensáveis para análises mais avançadas no contexto matemático.

Um segmento de reta é uma porção finita de uma reta que se estende de um ponto inicial a um ponto final. Este segmento é delimitado pelos dois extremos e possui comprimento finito. Matematicamente, um segmento de reta pode ser representado por dois pontos distintos no plano cartesiano, sendo estes os pontos inicial e final do segmento.

A distância entre dois pontos em um plano cartesiano é a medida linear do caminho mais curto que os conecta. Utilizando o teorema de Pitágoras, a fórmula geral para calcular a distância d entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

Esta fórmula é derivada do teorema de Pitágoras aplicado em um triângulo retângulo formado pelos pontos e representa a distância euclidiana entre os dois pontos no plano.

4.2 SOFTWARE

O GeoGebra é uma poderosa ferramenta educacional e matemática interativa que combina elementos de geometria, álgebra, cálculo e estatística. Projetado para facilitar a

visualização e exploração de conceitos matemáticos, o GeoGebra oferece uma interface dinâmica que permite aos usuários criar construções matemáticas interativas e explorar relações entre diferentes áreas da matemática.

A plataforma disponibiliza uma variedade de ferramentas, como pontos, vetores, retas, curvas, gráficos, e oferece uma ampla gama de comandos matemáticos que possibilitam a criação de construções dinâmicas e manipuláveis. Além disso, o GeoGebra é capaz de gerar gráficos em duas e três dimensões, permitindo uma representação visual e interativa de funções e relações matemáticas.

O GeoGebra.org é uma plataforma online colaborativa dedicada à promoção da aprendizagem e ensino da matemática, fornecendo uma interface web que facilita a criação, manipulação e compartilhamento de construções matemáticas dinâmicas. A plataforma oferece um ambiente interativo baseado na web que permite aos usuários:

- Criar construções matemáticas dinâmicas;
- Explorar conceitos de geometria, álgebra, cálculo e estatística;
- Possibilita a colaboração em tempo real entre usuários, permitindo que múltiplos participantes trabalhem simultaneamente em uma mesma construção matemática compartilhada;
- Facilita o compartilhamento de construções matemáticas, possibilitando que usuários acessem e interajam com as criações de outros membros da comunidade GeoGebra;
- Disponibiliza uma variedade de ferramentas e recursos educacionais, como gráficos, comandos matemáticos, animações e elementos visuais, para apoiar o ensino e a aprendizagem de matemática;
- Permite a integração com a comunidade GeoGebra, possibilitando que educadores, estudantes e entusiastas compartilhem ideias, estratégias de ensino e materiais educacionais.

É projetada para atender a diversos níveis de ensino, desde o ensino fundamental até o ensino superior, proporcionando flexibilidade no uso da plataforma.

Em síntese, o GeoGebra.org representa uma extensão online colaborativa do software GeoGebra, promovendo uma abordagem interativa e socialmente construtiva para o ensino e aprendizado da matemática.

4.3 INTERVENÇÃO

A intervenção foi realizada em uma turma de 27 alunos, do 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Domingos Gonçalves de Mello Mingote, que fica localizada na cidade de Caxambu-MG. A escola possui Ensino Fundamental anos finais, Ensino Médio e Ensino de Jovens e Adultos (EJA) Fundamental anos finais, a estrutura física da escola conta com 13 (treze) salas de aula, 01 (uma) biblioteca, 01 (um) salão de reuniões, 01 (um) laboratório de física, 01 (um) laboratório de química, 01 (uma) sala de informática com 28 computadores com internet, 01 (uma) sala de jogos e uma 01 (uma) quadra poliesportiva coberta. São 65 profissionais que atuam na escola, entre Direção, professores, assistentes técnicos de educação básica e auxiliares de serviços de educação básica.

Para a intervenção foi criado uma *worksheet* para conduzir por meio de interação o aprendizado do aluno. Inicialmente apresentou-se um problema no contexto da cartografia, onde os alunos através de um *applet* puderam ver o problema, o que os levou a questionarem os meios para encontrar a solução. Os meios foram trabalhados na *worksheet* através de figuras e *applets*, conduzindo-os, a entenderem e interagirem com esse meios, fazendo com que em outro *applet* resolvam o problema. No final, para exemplificar a distância planar e a distância geodésica foi utilizado um conjunto educacional.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

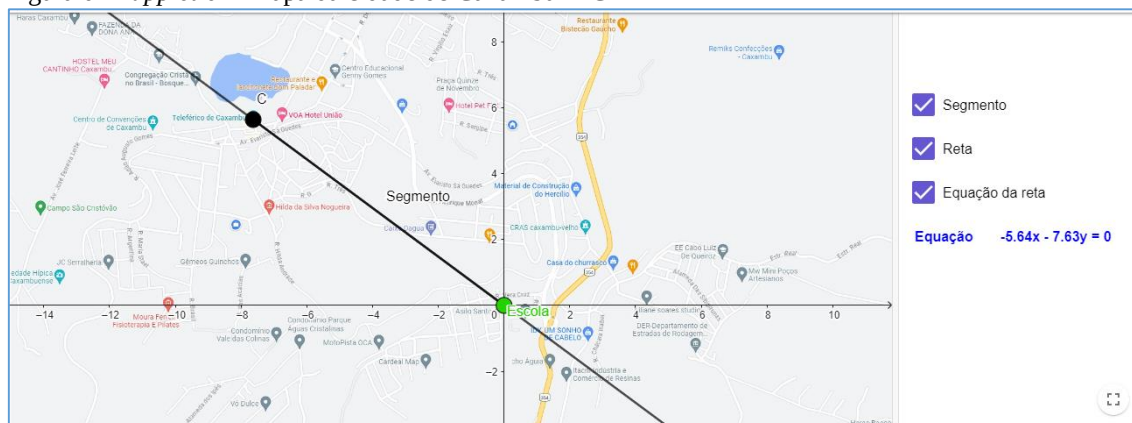
5.1 Sobre os Aplicativos

Para a intervenção foi criada uma sequência didática dentro de uma *Worksheet* que é uma folha de trabalho interativa que pode ser criada e utilizada na plataforma [geogebra.org](https://www.geogebra.org). Com a folha de trabalho (*worksheet* do GeoGebra), é possível criar sequências didáticas contendo *applets*, textos, questões e imagens. Essas folhas de trabalho interativas do GeoGebra são valiosas para o ensino e aprendizado de matemática, pois proporcionam uma abordagem prática e visual para explorar conceitos matemáticos de maneira mais dinâmica e envolvente.

Dentro dessa *worksheet*, inicialmente foi colocado um *applet* educacional que apresenta um fundo de mapa local, que combina conceitos de Matemática e Geografia, oferecendo uma experiência envolvente para os usuários explorarem retas e segmentos de reta em um contexto único. O *applet* possui um ponto fixo (Escola) e um ponto (C)

que é manipulável e no lado direito do aplicativo possui caixas que quando selecionadas apresentarão a reta, o segmento de reta e a equação da reta baseados no ponto C e no ponto Escola (figura 01).

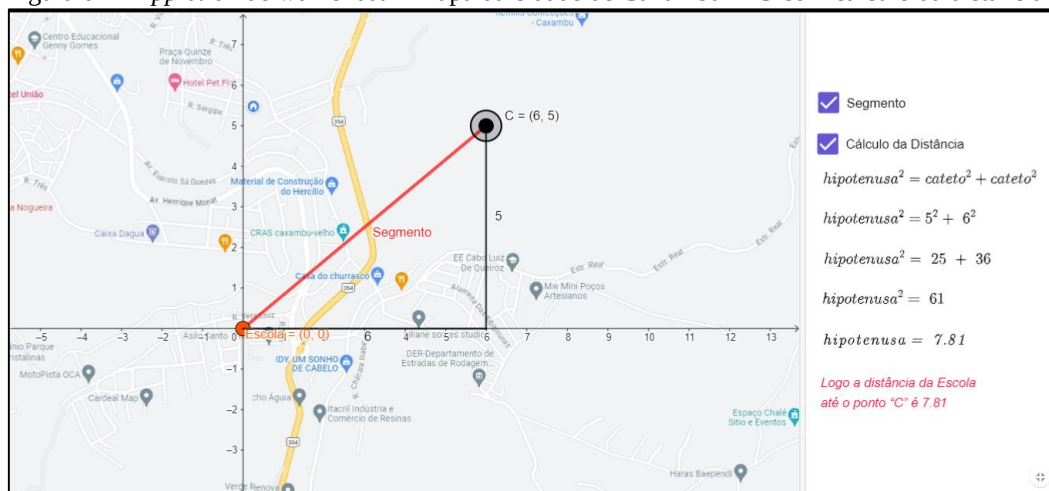
Figura 01 - *applet* 01– mapa da cidade de Caxambu-MG



Fonte: autor

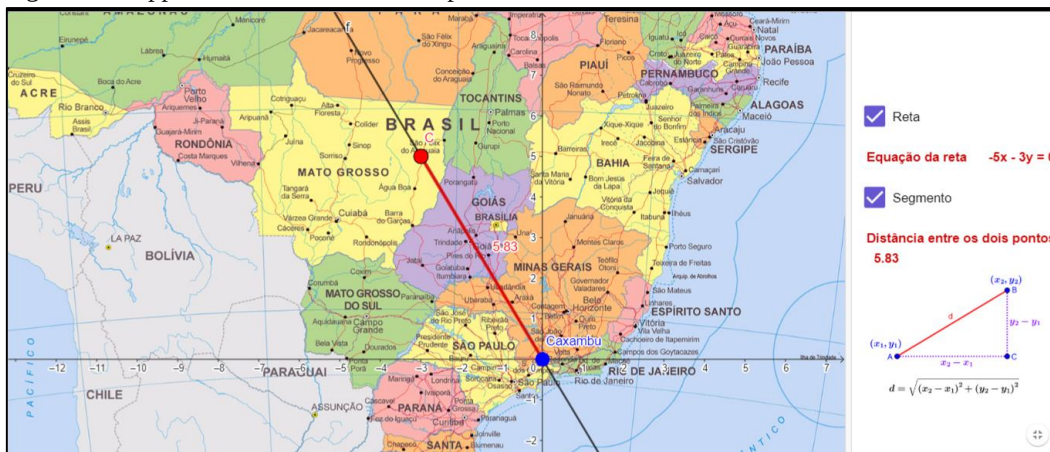
A seguir, apresenta-se um *applet* similar ao primeiro, onde há um ponto fixo (Escola) e um ponto manipulável (C), sobrepostos a um mapa local. Tanto o ponto C quanto o ponto ESCOLA exibem coordenadas, e à direita da tela encontra-se uma caixa de seleção denominada "Segmento". Ao ser clicada, esta caixa revela um segmento de reta que conecta o ponto Escola ao ponto C, desencadeando também a disponibilidade de outra caixa de seleção à direita, chamada "Cálculo da Distância". Ao ser selecionada, esta última realiza o cálculo da distância entre os dois pontos (figura 02). Após esse *applet*, há dois *applets* com a mesma finalidade, diferenciando-se apenas pelo fundo, sendo um de âmbito nacional (figura 03) e o outro global (figura 04).

Figura 02 – *Applet* 04 do *worksheet* – Mapa da cidade de Caxambu-MG com cálculo da distância



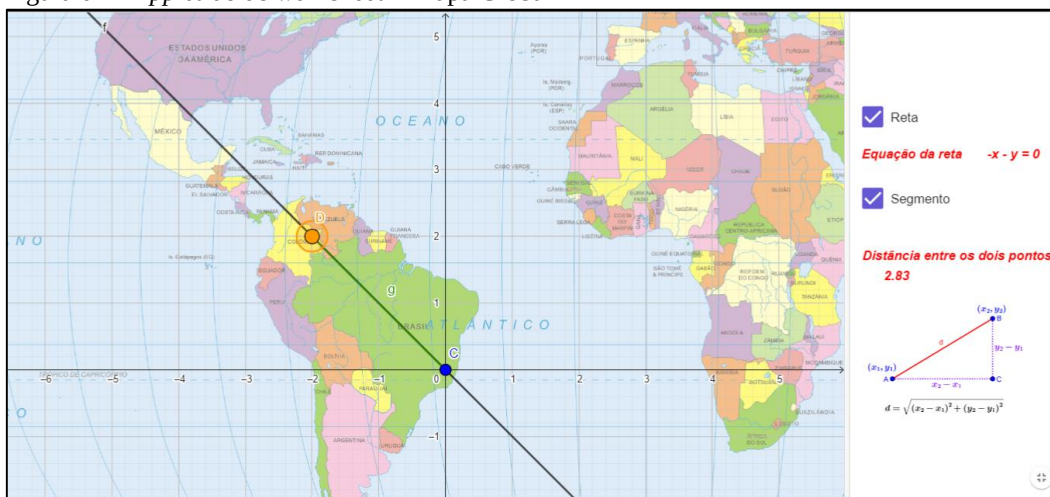
Fonte: autor

Figura 03 – Applet 05 do worksheet – Mapa do Brasil



Fonte: autor

Figura 04 – Applet 06 do worksheet – Mapa Global



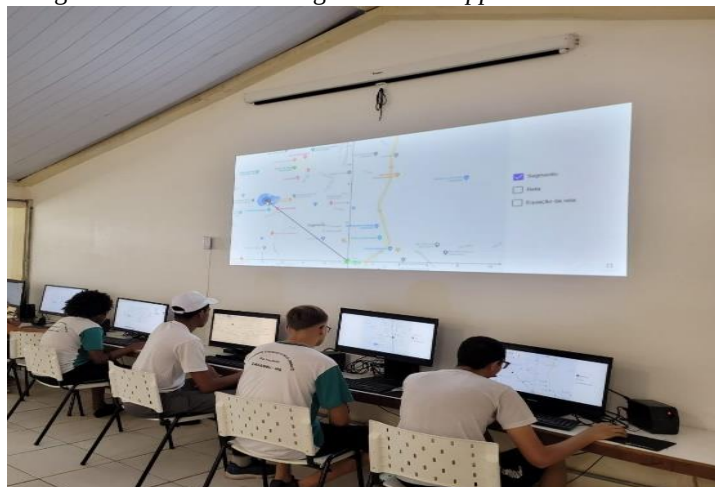
Fonte: autor

5.2 Sobre a Intervenção

Iniciando a aula, os alunos foram convidados a refletir sobre o trajeto diário que realizam ao sair de casa e se dirigirem à escola. Neste percurso, é possível identificar um ponto inicial, que é o lar de cada um, e um ponto final, que corresponde à escola. Nesse contexto, é questionado, qual seria a menor distância possível entre esses dois pontos. Antecipando a resposta, espera-se que percebam que a distância mais curta entre dois pontos é uma linha reta. Para ilustrar e consolidar esse conceito, foi solicitado ao aluno que entrasse no *worksheet* que está disponível no endereço: <https://www.geogebra.org/m/nardtgyv>. Dentro do *worksheet*, foi utilizado um *applet* que possui no plano de fundo um mapa local (Fotografia 01).

Após interagirem com o *applet*, é questionado aos alunos como calcular a distância entre esses pontos.

Fotografia 01 – alunos interagindo com o *applet*

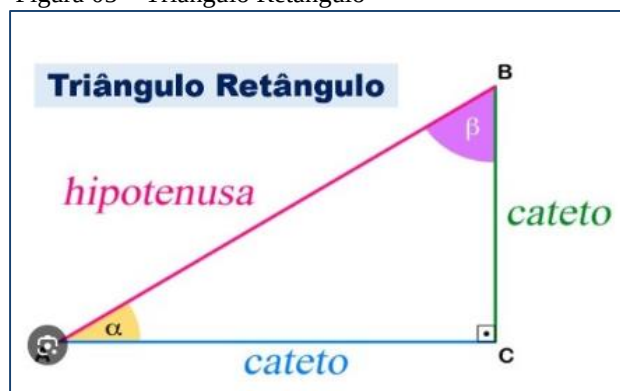


Fonte: autor – Sala de informática da E.E. Domingos Gonçalves de Mello Mingote

Conforme o exposto, é destacado aos alunos que para fazer o cálculo são necessários alguns conhecimentos básicos que serão apresentados no *worksheet*, como, conhecer os lados do triângulo retângulo e apresento dentro do *worksheet* a figura do triângulo retângulo recordando o nome dos lados do triângulo (figura 05). Dando continuidade, abaixo da figura apresentada tem algumas perguntas que foram feitas aos alunos com intuito de fazê-los recordar do aprendizado que tiveram, tais como:

- A hipotenusa pode ser menor que algum cateto?
- No triângulo retângulo temos obrigatoriamente um ângulo reto. Quanto esse ângulo mede?
- O lado que se opõe ao ângulo reto é o maior lado. Qual nome ele recebe?
- Qual deve ser a soma dos outros dois ângulos do triângulo retângulo?

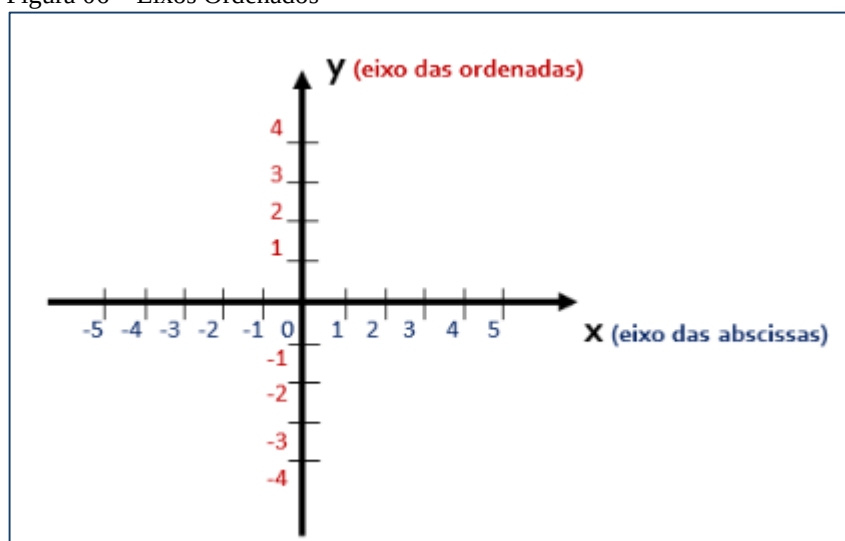
Figura 05 – Triângulo Retângulo



Fonte: Tela do *worksheet*

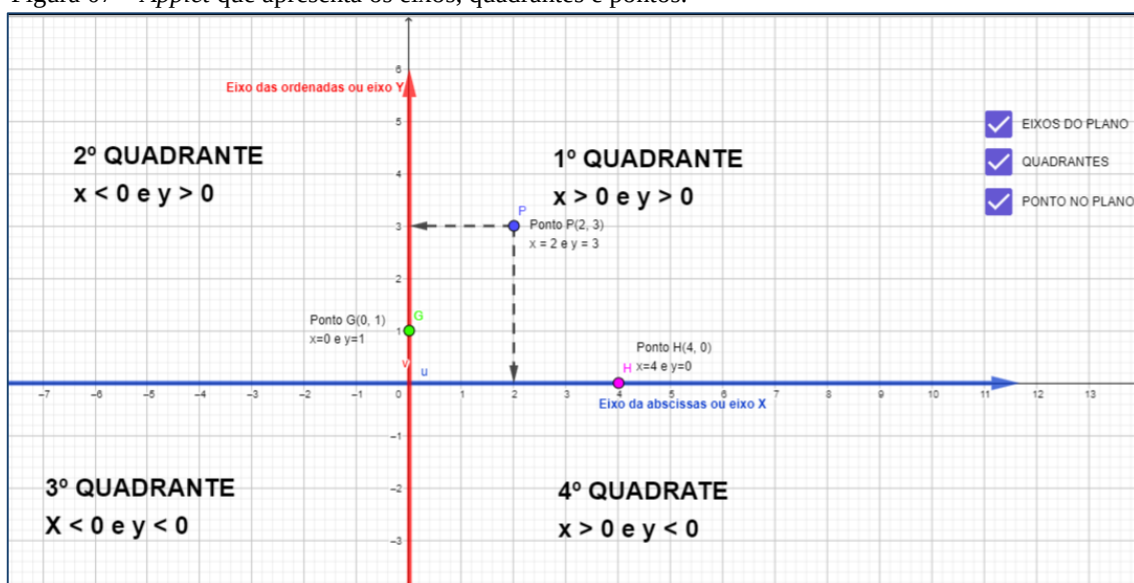
Na mesmo *worksheet*, foi lembrado através de figura outro conceito (figura 06), os eixos ordenados no plano cartesiano (abscissa eixo X e ordenada eixo Y). Os alunos puderam interagir em um *applet* que tem a função de apresentar os eixos ordenados, quadrantes e pontos (figura 07). Também puderam ler, observar e interpretar nesse *applet* algumas explicações e alertas sobre os erros mais comuns em relação ao plano cartesiano. Encerrado a interação no plano cartesiano, foi indagado aos alunos sobre dúvidas ou se tinham algum posicionamento a ser feito.

Figura 06 – Eixos Ordenados



Fonte: Tela do *worksheet*

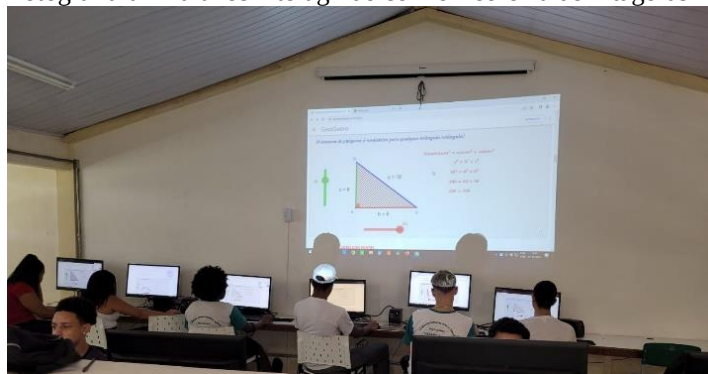
Figura 07 – *Applet* que apresenta os eixos, quadrantes e pontos.



Fonte: Tela do *worksheet*.

Não houve questionamentos, somente o comentário de um aluno, dizendo: “aulas que a gente consegue ver é melhor”. Em seguida, foi mencionado aos alunos outro conhecimento necessário, o Teorema de Pitágoras, alguns alunos responderam que lembravam da fórmula e do que se tratava, sendo, em seguida, direcionados a próxima etapa do *worksheet*, que é um *applet* do Teorema de Pitágoras, onde puderam manipular os controles deslizantes e ver o triângulo retângulo se alterar, aos mesmo tempo em que a equação ia se atualizando com as informações dos lados do triângulo retângulo e provando a validade do Teorema de Pitágoras para qualquer triângulo retângulo (Fotografia 02).

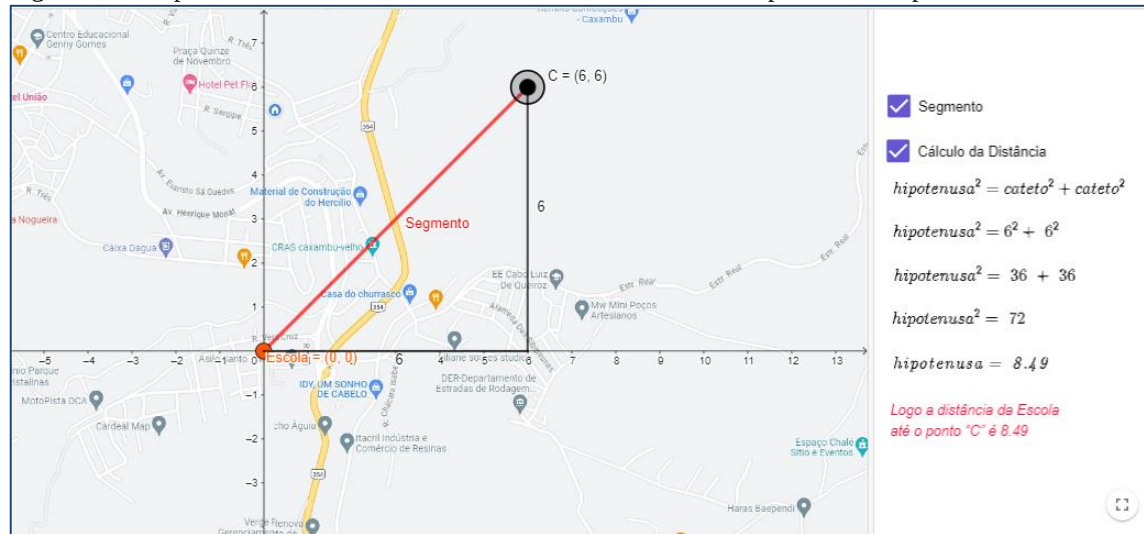
Fotografia 02 – alunos interagindo com o Teorema de Pitágoras



Fonte: autor – Sala de informática da E.E. Domingos Gonçalves de Mello Mingote

Após a interação dos alunos, foi solicitado que passassem para a próxima tela do *worksheet* que possui uma figura que exemplifica o uso do Teorema de Pitágoras no cálculo da distância entre dois pontos e dedução da equação. Foi feita explicações e no final deixado espaço para indagações. Como não houve indagações e para facilitar o entendimento foi solicitado que avançassem para a próxima tela, que possui um *applet* semelhante ao do início da aula, o mapa da cidade (Figura 08), então solicitou-se que manipulassem o ponto C, localizando as suas residências. Foi explicado que no ponto C e no ponto ESCOLA aparecerão as coordenadas. Os alunos interagiram com o *applet* e puderam visualizar as transformações e o cálculo em tempo real. Isso causou uma agitação na sala com comentários como: “assim fica fácil de aprender, pois vejo que quando eu mudo o ponto C, os lados do triângulo mudam de tamanho e o lado maior (hipotenusa) muda também e na fórmula é só calcular, já que tem os tamanhos”. Em seguida, foram apresentados os *applets* (Fotografia 03 e 04) que fazem os cálculos em escala nacional e global. Foi explicado que embora os mapas sejam diferentes, os cálculos são os mesmos.

Figura 08 – Mapa da cidade de Caxambu-MG, com as coordenadas no ponto C e no ponto ESCOLA.



Fonte: autor

Fotografia 03 – alunos interagindo com o *applet* em escala nacional



Fonte: autor – sala de informática da E.E. Domingos Gonçalves de Mello Mingote

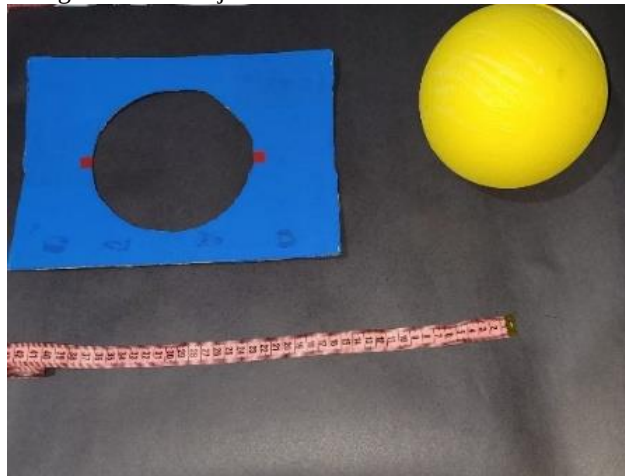
Fotografia 04 – alunos interagindo com o *applet* em escala global



Fonte: autor – sala de informática da E.E. Domingos Gonçalves de Mello Mingote

Continuando a aula e para estimular a curiosidade dos alunos, foi feito o seguinte questionamento: “Observando as distâncias calculadas acima, será que representam medidas verdadeiras? Ou seja, a medida da minha casa até a escola está correta?”. Muitos responderam que não está correta e também não sabiam o porquê, então foi explicado que a medida calculada chama-se Distância Euclidiana ou distância planar e é calculada em linha reta em um sistema de coordenadas cartesianas 2D. Agora a distância que apresenta valores conforme estão acostumados a ver, chama-se Distância Geodésica e é calculada em um espaço esférico 3D como a distância através da superfície curva do mundo. Para um melhor entendimento dos alunos, foi usado um conjunto educacional (Figura 04) composto por uma placa de papelão perfurada por uma circunferência de diâmetro de 150 mm, uma esfera com diâmetro de 150 mm e uma fita métrica.

Fotografia 04 – conjunto educacional



Fonte: autor

Na atividade foi pedido aos alunos que medissem a distância entre as marcas de vermelho contidas na placa de papelão (Fotografia 05).

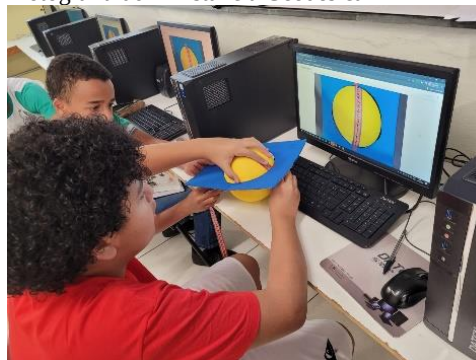
Em seguida, solicitou-se aos alunos que colocassem a esfera dentro da circunferência (na placa) e medissem a distância entre os dois pontos novamente. Foi explicado que agora é preciso contornar a esfera para poder medir (Fotografia 06).

Fotografia 05 – Distância Planar



Fonte: autor – sala de informática da E.E. Domingos Gonçalves de Mello Mingote

Fotografia 06 – Distância Geodésica



Fonte: autor – sala de informática da E.E. Domingos Gonçalves de Mello Mingote

Após as medições foi questionado aos alunos se a primeira medição era igual a segunda medição, responderam que não, logo foram questionados novamente se sabiam o porquê e responderam que não eram iguais, pois no segundo havia uma curvatura a ser feita para chegar no outro ponto. Então foi explicado aos alunos que por nosso planeta possuir o formato de uma esfera os cálculos são feitos de forma diferente e solicitei a eles que fossem para a última tela do *worksheet* que possui um figura ilustrando o cálculo da distância em nosso planeta. Então, foi finalizado a atividade, explicando que para esse cálculo são necessários três pontos e foi explanado que esse cálculo seria para uma próxima aula.

Foi proposto aos alunos um momento de avaliação das atividades realizadas, que consistia em uma folha com atividade e outra com um questionário. A atividade era um plano cartesiano com dois pontos e os alunos tinham que calcular a distância entre esses dois pontos, sendo que o resultado foi o esperado, no qual concluíram com êxito a atividade. O formulário era composto de em três perguntas e um espaço para comentários. A primeira pergunta foi “Você já tinha visto alguma aula com esses *applets* (programas interativos)? As respostas foram unânimes – “Não, nunca tive aulas com esses programas”. A segunda pergunta foi “O que você achou da aula?”. Algumas respostas foram – “Divertida, legal, explicativa, compreensiva, diferente, etc.”. A terceira pergunta “O conteúdo ficou mais fácil ou mais difícil de compreender?” a respostas foram – “Ficaram mais fácil de entender”. O espaço para comentários obteve respostas diversas. Um aluno escreveu, “Achei mais fácil de compreender, divertida, é melhor do que ficar na sala. Nós aprendemos mais fácil com esse tipo de aula”. Outro escreveu, “Deveria ter mais aulas como essas, são bem explicativas com detalhes no computador (não que as outras não sejam boas). Um outro alunos escreveu “Achei muito interessante esse tipo de aula e gostaria que o professor continuasse. Gostei também do treco de medir eu vi o que estava acontecendo”. Foi questionado ao aluno sobre o “treco” de medir e ele referiu ao conjunto educacional (placa de papelão, esfera de isopor e fita métrica).

Concluído o projeto de intervenção, foi feito um debate com os alunos, e os mesmos foram unânimes em pontuar que a aula abordou as dificuldades em sua totalidade, pois conseguiram ver as transformações e assim entender o porquê e o para quê das equações. Falaram também que nunca tiveram aulas assim, onde pudessem interagir o tempo todo com a matemática e que nunca imaginaram que um simples sair de casa e ir à escola pudesse ter “contas” (o aluno quis dizer cálculo). No debate, um aluno mencionou o conjunto educacional e lançou para os colegas o questionamento: “O Planeta Terra é redondo ou plano?” A sala ficou agitada com todos querendo falar, então foi explicado que esse assunto seria desenvolvido em uma próxima aula.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluindo o artigo em foco, vale ressaltar que muitas foram as aprendizagens oriundas do mesmo, especialmente para os alunos, que foram os protagonistas do Projeto de Intervenção planejado e desenvolvido objetivando o alcance de novas aprendizagens

através da interdisciplinaridade e a tecnologia. Ficou evidente a relevância da implementação de abordagens pedagógicas inovadoras, as quais buscam contextualizar o ensino com a vivência do aluno.

Em síntese, a implementação da intervenção educacional no ensino de equações, aliada ao uso da cartografia e aplicativos integrados, revelou-se uma abordagem promissora e eficaz. A busca pela melhoria do desempenho dos alunos foi acompanhada pelo desenvolvimento das habilidades cognitivas necessárias para enfrentar desafios relacionados à resolução de problemas algébricos. Além disso, a estratégia adotada contribuiu para a criação de uma experiência de aprendizagem significativa e duradoura, especialmente no contexto específico das equações matemáticas.

A proposta de desenvolver um ambiente educacional inovador que integre matemática à cartografia representou um passo significativo para enriquecer o aprendizado dos alunos, pois possibilitou ao aluno uma situação vivenciada pelo mesmo dentro de um contexto matemático, unindo as disciplinas de matemática e geografia de maneira sinérgica. Nesse contexto, constatou-se que o ambiente proporcionou um aprendizado significativo, pois puderam visualizar, identificar e compreender as equações de retas, segmentos de retas e a distância entre dois pontos.

A concepção e desenvolvimento de um aplicativo educacional representaram uma iniciativa de grande relevância para aprimorar o ensino de equações, notadamente em situações relacionadas à cartografia. Este aplicativo, meticulosamente projetado atendeu às necessidades no contexto global, nacional e local, e se apresentou como uma ferramenta versátil e adaptável, oferecendo uma experiência de aprendizado enriquecedora e contextualizada. A interatividade proporcionada pela plataforma não apenas transmitiu conceitos matemáticos, mas também envolveu os alunos de maneira dinâmica, contribuindo para a compreensão prática das equações. Ao oferecer uma abordagem personalizada, o aplicativo atendeu às necessidades individuais dos alunos, promovendo uma aprendizagem mais eficaz e significativa.

A incorporação de um conjunto educacional permitiu a exploração das diferenças entre distâncias euclidianas e geodésicas, reforçando a compreensão das implicações matemáticas nas representações espaciais. Dessa forma, a abordagem não apenas transmitiu conhecimento, mas também proporcionou uma experiência de aprendizado envolvente e prática, integrando eficientemente o ensino de matemática e geografia.

Assim, vale ressaltar que muitas são as possibilidades de o professor levar para o contexto da escola, novas formas de ensino-aprendizagem no campo da Matemática,

cabendo a ele, buscar formas de possibilitar aos alunos um ensino que de fato seja de qualidade e que atenda às suas necessidades, principalmente nos moldes da sociedade contemporânea. Com o uso da tecnologia, os alunos obtiveram um melhor resultado ao que compete a compreensão dos conteúdos matemáticos abordados nas atividades de intervenção propostas.

Mesmo tendo vários pontos positivos, o projeto possui várias limitações. Uma delas foi referente ao tempo de execução, pois alguns alunos têm dificuldade em manipular o computador, o que impossibilitou de trabalhar a equação da circunferência, que era um dos objetivos.

O tema aqui desenvolvido servirá de base para novas discussões em torno da intervenção do docente no processo de desenvolvimento do ensino-aprendizagem dos alunos no campo da Matemática a partir da interdisciplinaridade e da tecnologia, possibilitando, portanto, outras pesquisas e produções para trabalhos futuros nesse campo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

MINAS GERAIS. Agência Minas. **Escolas começam a receber novos computadores para renovação do parque tecnológico da rede estadual de ensino**. Disponível em: <https://www.agenciaminas.mg.gov.br/noticia/escolas-comecam-a-receber-novos-computadores-para-renovacao-do-parque-tecnologico-da-rede-estadual-de-ensino>. Acesso em dezembro de 2023.

UNESP. Departamento de Matemática. **Softwares Matemáticos**. Disponível em: <https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/softwares-matematicos/>. Acesso em dezembro de 2023.

CAMARGO, Everson Ferreira Camargo. **Geogebra como ferramenta de metodologia ativa**. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Christopher-Neves-2/publication/361914060_Geografia_e_ensino_Dimensoes_teoricas_e_praticas_3/links/630ea6015eed5e4bd1325302/Geografia-e-ensino-Dimensoes-teoricas-e-praticas-3.pdf#page=68. Acesso em janeiro de 2024.

LEÃO, Kenia Souza. Interdisciplinaridade entre o Ensino da Matemática e a Geografia como Prática Facilitadora no Ensino Aprendizagem. **Anais da Especialização em Educação Matemática**, 1ª Edição, 2017, Ano 02, V. 01. Universidade de Goiás. Disponível em: <https://www.anais.ueg.br/index.php/eem/article/view/9674>. Acesso em janeiro de 2024.

MARIANI, Mateus. **Cartografia e Investigação Matemática: Possibilidades Para Uma Intervenção Pedagógica Com Alunos Do 9º Ano Do Ensino Fundamental**. Lajeado, junho de 2018. Disponível em: <https://www.univates.br/bdu/handle/10737/2189>. Acesso em janeiro de 2024.

RÊGO, Eduardo Ernesto do. **A Utilização dos Aplicativos Google Maps e Google Earth no Ensino de Geografia: Múltiplas Possibilidades**. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2015/TRABALHO_EV045_MD1_SA4_ID1946_08052015200043.pdf. Acesso em janeiro de 2024.

SAMPAIO, Carlos Eduardo Francisco. **Aplicação de sistemas de equações lineares ao funcionamento do GPS**. 2023. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2023. Disponível em: <https://ri.ufs.br/handle/riufs/18314>. Acesso em: janeiro de 2024.

SANTOS, Gabriel Lucas Alves dos. **Geografia e Matemática: quais são os diálogos possíveis?** Disponível em: <http://repositorio.ifg.edu.br:8080/handle/prefix/151>. Acesso em janeiro de 2024.

SILVA, Carlos Vinícius Ribeiro. Os usos e aplicações do Google Earth como recurso didático no ensino de Geografia. **Revista PerCursos**, Florianópolis, v. 18, n.38, p. 152 - 166, set./dez. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.5965/1984724618382017152>. Acesso em janeiro de 2024.