# “MODELAGEM DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR”

## *“MODELING GEOMETRIC PROGRESSIONS: NA INTERDISCIPLINARY APPROACH”*

*Marcos Roberto Ramos dos Santos*[1]
*Afiliação do aluno*

Pablo Javier Grunmann[2]
*Afiliação do orientador*

**RESUMO**
O presente artigo oferece uma análise aprofundada do ensino de progressões geométricas, explorando, ao mesmo tempo, conceitos de funções exponenciais e a propriedade das potências de logaritmo. Para tornar o aprendizado mais envolvente e prático, o estudo empregou a metodologia de Modelagem Matemática e integrou a disciplina com a Biologia, conduzindo um experimento simulando a despoluição de um lago. O objetivo primordial consistia em desenvolver um modelo matemático capaz de determinar a quantidade de poluentes no lago-modelo ao longo do tempo. Os resultados obtidos destacaram a importância da abordagem por meio da modelagem matemática, capacitando os estudantes a adquirirem habilidades valiosas e compreender a utilidade da matemática em suas vidas cotidianas. A aplicação da modelagem matemática no contexto educacional demonstrou-se notável, proporcionando aos alunos a aquisição de competências cruciais que transcendem a matemática em si. Isso incluiu a aplicação prática da matemática no dia a dia, o estímulo ao pensamento crítico e ao raciocínio lógico, bem como a promoção da interdisciplinaridade e o aprimoramento das habilidades de comunicação. A abordagem também estimulou a curiosidade dos estudantes, resultando em um aprendizado genuinamente significativo e duradouro.

**Palavras-Chave***:* Modelagem Matemática. Modelo Matemático. Progressão Geométrica

**ABSTRACT**
The present article offers an in-depth analysis of the teaching of geometric progressions, simultaneously exploring concepts of exponential functions and the property of logarithm powers. To make learning more engaging and practical, the study employed the methodology of Mathematical Modeling and integrated the subject with Biology, conducting an experiment simulating the decontamination of a lake. The primary objective was to develop a mathematical model capable of determining the amount of pollutants in the model lake over time. The results highlighted the importance of the mathematical modeling approach, enabling students to acquire valuable skills and comprehend the utility of mathematics in their everyday lives. The application of mathematical modeling in the educational context proved to be remarkable, providing students with the acquisition of crucial competencies that go beyond mathematics itself. This included the practical application of mathematics in daily life, stimulating critical thinking and logical reasoning, as well as promoting interdisciplinary approaches and enhancing communication skills. The approach also sparked students' curiosity, resulting in genuinely meaningful and enduring learning.

## 1. INTRODUÇÃO

No século XXI, a ênfase se direciona para aprofundar e disseminar as pesquisas no campo da Educação Matemática. Um exemplo notável é a realização de encontros

[1] Essas informações deverão ser encaminhadas apenas na versão final do artigo, bem como a indicação do nome dos autores. E-mail do autor 1. Link do ORCID do aluno.

[2] Essas informações deverão ser encaminhadas apenas na versão final do artigo, bem como a indicação do nome dos autores. E-mail do autor 2. Link do ORCID do orientador.

internacionais sobre Educação Matemática, que teve seu marco inaugural com o primeiro Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática (SIPEM) em novembro de 2000, tornando-se um evento trienal desde então. (CRMG, 2023)

As mudanças nos métodos de avaliação do sistema educacional têm motivado os professores a repensarem suas práticas. A qualidade da educação é um tema constante em diversos grupos e segmentos sociais (ALARVASE, BRAVO e MACHADO, 2013). Neste artigo, discutiremos a importância da modelagem matemática e da interdisciplinaridade no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Conforme indicado por Valente (2016), metodologias de ensino fundamentadas em tecnologias da informação e comunicação (TICs), a abordagem de resolução de problemas, a incorporação da história da matemática, a promoção da matemática inclusiva na escola, a aplicação da modelagem matemática e o aprimoramento da formação de educadores de matemática, entre outros, estão emergindo como tendências proeminentes no campo da Educação Matemática.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), descreve as 10 competências gerais da educação básica. Entre elas, a competência 2,

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 11).

A presente pesquisa propõe o uso da modelagem matemática como fator motivador em sala de aula para trazer o aluno para o centro do processo de ensino e aprendizagem, tornando-o ativo no processo. Além disso, as 5 competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio estão estreitamente relacionadas à modelagem matemática. Ratificando, a competência 3 recomenda,

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p.533).

Corroborando, a competência 5 aconselha,

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 533).

Isso mostra como a modelagem matemática como metodologia de ensino tem sido cada vez mais utilizada nas aulas de matemática. Ela consiste em utilizar situações do mundo real para desenvolver modelos matemáticos que possam ser utilizados para resolver problemas. A modelagem matemática pode ser utilizada em conjunto com outras disciplinas, como biologia, física e química, para tornar o ensino mais interdisciplinar e contextualizado. A interdisciplinaridade é uma abordagem que busca integrar diferentes áreas do conhecimento para enriquecer o processo de aprendizagem.

A pesquisa envolveu a realização de um experimento em uma turma de alunos do 2º ano do ensino médio, contando com a participação de 29 estudantes. O experimento se concentrou na simulação do processo de despoluição de um lago. Seu objetivo principal foi desenvolver um modelo matemático que pudesse descrever a evolução da quantidade de poluentes presentes no lago ao longo do tempo. O problema que motivou essa investigação foi a análise das contribuições da modelagem matemática como uma metodologia de ensino. Além disso, essa experiência proporcionou oportunidades para discutir tópicos relevantes no contexto escolar dos alunos, como progressões geométricas, funções exponenciais e logaritmos.

Os resultados evidenciaram que a integração da modelagem matemática com a disciplina de Biologia representa uma contribuição substancial para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem, ao colocar o estudante no cerne desse processo. Isso promove uma abordagem educacional que transcende a simples transmissão de fórmulas e conceitos matemáticos isolados, permitindo ao aluno a aplicação prática na resolução de desafios do mundo real.

## 2. APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM PROCESSOS BIOLÓGICOS

### 2.1. Por que usar a Modelagem Matemática em sala de aula?

O ensino de Matemática passa constantemente por processos de revisão e transformação. Existem diversas orientações e metodologias que podem servir de suporte para o professor em sala de aula que servem de facilitadores na medição do conhecimento entre professor e aluno. Algumas ganham destaque nas discussões da Educação Matemática, como: jogos Matemáticos, Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Investigação Matemática, Etnomatemática, Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) e História da Matemática. Ensinar Matemática de forma descontextualizada, com aulas expositivas e exercícios repetitivos é uma prática que não faz muito sentido para os alunos na era digital, nem atende às exigências da legislação em vigor.

É preciso discutir metodologias que promovam um ensino contextualizado. A Modelagem Matemática permite uma abordagem interdisciplinar que permite, a partir de hipóteses simplificadas, transformar um problema complexo numa investigação matemática simples.

O conhecimento matemático tem sido construído principalmente dentro do terreno da matemática, sem muita preocupação com a aplicação prática. No entanto, essa abordagem tem sido criticada por muitos, que acreditam que a matemática aplicada é tão importante quanto a matemática pura. Esses defensores da matemática aplicada argumentam que ela é uma produção valiosa e elegante, capaz de resolver problemas do mundo real. (BASSANEZI, 1999).

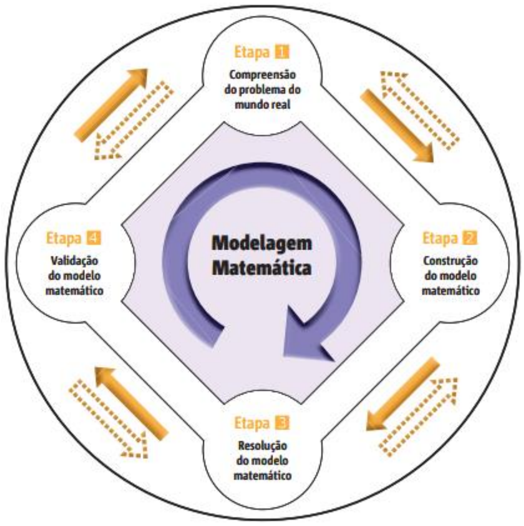
A Modelagem Matemática na educação brasileira teve um grande avanço no final da década de 70 e início da década de 80. O movimento teve como principais percursores os pesquisadores Aristides C. Barreto, Ubiratan D' Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani. (BIEMBEMGUT, 2009). A Modelagem, como metodologia de ensino, pode ser entendida como uma estratégia utilizada para obter explicações de problemas reais. Ela permite aliar teoria e prática de tal modo que o processo de ensino e aprendizagem tenha significados para os alunos.

Para Bertone, Bassanezi & Jafelice (2014, p. 9), "a modelagem é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação sobre a realidade carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador." Ainda, segundo os autores, "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real." (BERTONE, BASSANEZI & JAFELICE, 2014, P. 18).

A Modelagem Matemática é um processo dinâmico que busca estudar um problema real, utilizando ferramentas matemáticas adequadas. Ela permite determinar um modelo matemático que pode descrever o comportamento de um fenômeno no futuro, possibilitando a simulação de possíveis cenários e o entendimento de comportamentos. (MALAGUTTI e GIRALDO, 2010).

O esquema a seguir exemplifica as etapas da Modelagem Matemática,

Figura 1: Etapas da Modelagem Matemática.




Fonte: (MALAGUTTI e GIRALDO, 2010, p. 28).

A primeira etapa do processo de modelagem matemática consiste em realizar investigações e pesquisas para compreender o problema. Nessa etapa, as dificuldades e variáveis serão previstas, e o objetivo é conhecer e estudar o problema a ser resolvido. Na segunda etapa do processo de modelagem matemática, formulamos uma representação para o problema levando em consideração as diversas variáveis e leis envolvidas. Em seguida, simplificamos e traduzimos a representação para a linguagem matemática, criando um modelo matemático que pode descrever o comportamento do fenômeno estudado.

A terceira etapa é a fase se obtenção da solução através da aplicação de métodos numéricos. Existem diversas técnicas de resolução, mas destacam-se as algébricas e as geométricas. (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2010). A última etapa do processo de modelagem matemática é a validação ou refutação do modelo matemático a partir da confrontação com os dados da realidade. A modelagem é um processo dinâmico, e se o modelo atende e descreve a realidade, então ele é validado. Caso contrário, ele é abandonado e substituído por outro mais elaborado.

A metodologia de Modelagem Matemática foi utilizada em uma pesquisa para investigar e modelar um problema da vida real. O problema consiste em determinar como despoluir um lago. Para isso, foram utilizadas hipóteses simplificadoras e, em sala de aula, o problema inicial foi substituído por outro similar e prático capaz de descrever o processo de despoluição de um lago.

## 2.2. Conhecimentos básicos sobre progressão geométrica (P.G.)

O estudo de progressões é um dos conteúdos mais marcantes da vida escolar do estudante. O motivo pode estar relacionado às dificuldades, facilidade com o conteúdo, ou simplesmente pelos termos associados a cada tipo de progressão (P.A. para progressão aritmética e P.G. para progressão geométrica). De qualquer modo, o ensino de progressões deve acontecer de tal modo que tenha significado para os alunos. Segundo Lima et al. (2016), não convém encher a cabeça dos alunos com vários casos particulares, pois isso pode obscurecer as ideias gerais e dificultar o aprendizado. Uma sugestão de abordagem do conteúdo de progressões geométricas é associação com outras áreas do conhecimento, como por exemplo, Biologia. Todavia, no campo da matemática, pode ser associado com problemas que envolvam taxa de crescimento, tais como, matemática financeira, crescimento populacional, etc.

Uma progressão geométrica é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real. Essa constante é chamada de razão e é indicada por $q$. (IEZZI et al., 2013). Considere a sequência

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots)$$

em que cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante $q$. É fácil ver que,

$$a_2 = a_1 \cdot q \Longrightarrow \frac{a_2}{a_1} = q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q \Longrightarrow \frac{a_3}{a_2} = q$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Longrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Segue que,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Portanto, dada uma progressão geométrica qualquer, temos que a razão é igual ao quociente entre cada termo e seu antecessor. Então, $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, para todo $n$ natural com $n \geq 2$.

Considere a progressão geométrica a seguir,

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots)$$

Temos que,

$$
\begin{aligned}
&a_2 = a_1 \cdot q \\
&a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\
&a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 \cdot q^{n-2}) \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}
$$

Dizemos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é o termo geral da P.G, em que $a_n$ é o termo geral (enésimo termo), $a_1$ é o primeiro termo, $n$ é o número de termos e $q$ é a razão.

Analogamente, uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots)$ de razão $q$ e primeiro termo $a_1 = a$ pode ser definida por recorrência. De fato, se $\boldsymbol{a_1 = a}$, então $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} \cdot q}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (IEZZI e HAZZAN, 2013) e (DANTE, 2016).

Considere o seguinte problema adaptado de Morgado e Carvalho (2015, p. 54), "Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos de trigo pela segunda, 4 pela terceira, 8 pela quarta e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. Qual o total de grãos de trigo que o inventor do xadrez terá direito"?

Note a sequência que representa a quantidade de grãos de trigo pedidos por cada casa é uma progressão geométrica. De fato, $(1, 2, 4, 8, \cdots)$ é uma P.G. em que o primeiro termo é 1 e a razão é 2. É trivial encontrar todos os termos dessa P.G., mas somar todos os termos pode ser algo trabalhoso.

Considere o problema 79 do Papiro de Rhind extraído de Dante (2016, p. 227), "Há sete casas; em cada casa há sete gatos; cada gato mata sete ratos; cada rato comeu sete grãos de cevada; cada grão teria sete 'hekats' de cevada. Qual é a soma de todas as coisas enumeradas?". Os problemas anteriores servirão de motivação para determinar um método mais prático para encontrar os respectivos resultados.

Seja $a_n = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots)$ uma P.G. finita. Conhecendo os valores de $a_1$ e $q$, podemos encontrar uma fórmula para calcular a soma $S_n$ dos $n$ termos da progressão geométrica (se $q = 1$, a soma é trivial). Note que,

$$
\begin{aligned}
a_n &= (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n) \\
&= (a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{n-2}, a_1q^{n-1})
\end{aligned}
$$

Se $q \neq 1$, então,

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \qquad (1)$$

Multiplicando ambos os membros por $q$, obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \qquad (2)$$

Subtraindo as equações (1) e (2),

$$(1) - (2) \Longrightarrow qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Longrightarrow S_n \cdot (q-1) = a_1q^n - a_1.$$

Por hipótese $q \neq 1$, resulta:

$$s_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}.$$

■

Respectivamente, as soluções dos problemas anteriores são:

$$s_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{1 \cdot (2^{64}-1)}{2-1} = 2^{64} - 1$$

$$s_n = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Analogamente,

$$s_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{7 \cdot (7^5-1)}{7-1} = \frac{7 \cdot 16806}{6} = 19607.$$

O que surpreende é que no papiro com mais de 3500 anos de idade, os egípcios resolviam o problema anterior da seguinte maneira:

$$\frac{7 \cdot 16806}{6} = 19607$$

Existe evidência de que pelo menos um egípcio antigo conhecia um cálculo equivalente à fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica que conhecemos hoje. (DANTE, 2016).

Para finalizar o embasamento teórico básico sobre progressões geométricas, considere o seguinte problema extraído de Morgado e Carvalho (2015, p. 55): “Calcule o limite da soma da progressão geométrica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots .\text{”}$$

Para resolver o problema anterior, observe que a sequência representa uma progressão geométrica infinita de razão $q = \frac{1}{2}$. Dada uma progressão geométrica infinita qualquer em que $|q| < 1$, a soma $s_n$ dos infinitos termos é $s_n = \frac{a_1}{1-q}$. De fato, se $|q| < 1$, então

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{a_1 \cdot (0-1)}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

■

Segundo Morgado e Carvalho (2015, p. 55), o resultado do problema anterior admite uma interessante paráfrase. “Suponha que Salvador deva correr 1 km. Inicialmente ele corre metade dessa distância, isto é $\frac{1}{2}$ km; em seguida ele corre metade da distância que falta, isto é $\frac{1}{4}$ km; depois, metade da distância restante, isto é, $\frac{1}{8}$ km, e assim por diante”. Depois de $n$ etapas, Salvador terá corrido

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\text{ km.}$$

Se $n$ for muito grande, essa soma será aproximadamente 1 km. De fato,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Considere outro problema adaptado, exercício para o leitor, extraído de Morgado e Carvalho (2015, p. 59): “Larga-se uma bola de uma altura de 5 cm. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas $\frac{4}{9}$ da altura anterior. Determine a distância total percorrida pela bola e o tempo gasto pela bola até parar”.

### 2.3. Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa apresenta uma proposta de sequência didática baseada em uma atividade sugerida por Malagutti e Giraldo (2010) em um trabalho realizado para o “Curso de Especialização para Professores do Ensino Médio de Matemática na modalidade de Educação à Distância”. O curso, chamado de “Matemática na Pr@tica”, integra o Plano de Ações Articuladas do Ministério da Educação.

A pesquisa foi realizada a partir de um estudo de caso numa turma do 2º ano do ensino médio. É importante ressaltar que, de acordo com o professor, os alunos já tinham estudado os conteúdos necessários para realizar a atividade. Adotou-se métodos quantitativos e qualitativos no desenvolvimento e análise do material.

A atividade, aplicada em sala de aula, envolve a simulação da despoluição de um lago. Em uma abordagem interdisciplinar com a Biologia, foi elaborado um modelo matemático que explorou os seguintes conceitos matemáticos: recursividade, progressão geométrica, função exponencial, logaritmo, limite intuitivo e comportamento assintótico.

A sequência didática propõe um cenário de um acidente ambiental. Um lago foi contaminado com um certo poluente e a vida de todos os seres que dependem da água desse lago está em risco. Por isso, é preciso tomar medidas urgentes para despoluir o lago.

Sabendo que a água só será potável novamente quando houver uma quantidade *n* de poluente, como determinar a quantidade de poluente ao longo do tempo? Para solucionar essa e outras questões, os alunos fizeram um experimento no qual simulam a poluição e despoluição de um lago.

Para Malagutti e Giraldo (2010, p.15),

> A simulação é uma técnica de modelagem, utilizada para entender o comportamento de um sistema complexo. Por meio de uma simulação, é possível representar apenas as características essenciais deste sistema. Portanto, uma simulação é a reprodução parcial da realidade usando um modelo artificial que permite a compreensão do fenômeno natural de forma simplificada.

Como bem observado pelos autores, a natureza é um sistema complexo, e representá-la fielmente através de paisagens, organismos e ecossistemas é muito difícil de ser feito. Todavia, é possível realizar um experimento capaz de simular a quantidade de poluente presente no lago ao longo do tempo.

Os alunos receberam um questionário com algumas questões sobre progressão geométrica, função exponencial e logaritmo. Essas questões foram resolvidas ao longo do desenvolvimento da atividade.

A sequência didática durou 2h30min (três aulas de 50min consecutivas). O primeiro momento foi uma aula explicativa para revisar conceitos importantes de matemática que ajudariam os alunos a entender melhor. Os conceitos abordados foram: característica da função exponencial, gráfico da função exponencial e propriedade do logaritmo, especialmente, a propriedade da potência.

Para a realização do experimento foram necessários os seguintes materiais:

- Duas garrafas PET transparentes com capacidade de 2 litros;
- Dois copos transparentes com capacidade de 200 ml cada;
- Um copo (200 ml) de café preparado;
- Uma tigela/balde transparente com capacidade superior a 2 litros para simular o lago;
- Um balde com capacidade superior a 4 litros para descarte da água poluída;
- Calculadora para realização de cálculos.

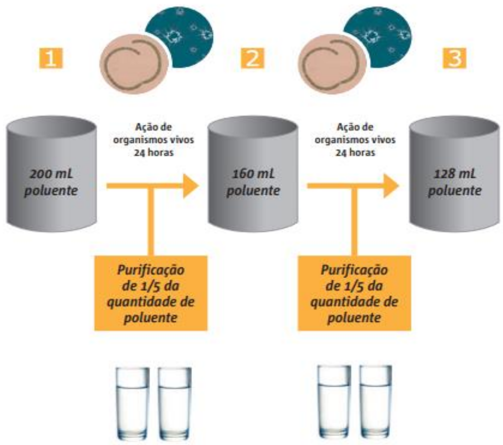
As etapas da simulação são as que seguem:

- Preencha uma garrafa PET com água límpida. Este representa o reservatório, e água limpa nele contida irá abastecer o nosso lago-modelo;

- Numa garrafa PET, misture um copo (de 200 ml) de café em aproximadamente um litro de água limpa;
- Na tigela/balde, coloque 9 copos (200 ml cada) de água limpa. Acrescente um copo (200 ml) de poluente (café) ao lago-modelo;

As etapas são exemplificadas na figura abaixo,

Figura 2: Etapas do experimento de despoluição




(MALAGUTTI e GIRALDO, 2010, p.31)

Observe que o lago-modelo é composto por 1800 ml de água limpa e 200 ml, ou seja, 80% de água limpa e 20% de poluente. Para simular a despoluição, vamos supor que os organismos vivos do lago purificam $\frac{1}{5}$, ou seja, 20% da quantidade de poluente no lago durante um período de 24 horas.

O processo de despoluição consiste em retirar dois copos (400 ml) de água do lago (perceba que a mistura é homogênea), e seguida acrescentar a mesma quantidade de água limpa. Com o questionário em mãos, os alunos deveriam responder as perguntas a partir dos questionamentos do professor e da compreensão do experimento. Uma pergunta pertinente nessa etapa é: "Qual a quantidade de poluente retirada nessa etapa (após 1 dia)? Esse processo de retirada e reposição se repetiu por várias vezes. As anotações foram feitas numa tabela.

Em determinado momento do experimento, espera-se que o (os) aluno (os) identifique (m) o padrão da quantidade de poluente retirada, sendo possível encontrar um modelo para representar a quantidade retirada no enésimo período (cada período corresponde a 24h).

### 2.4. Análise de dados

O questionário aplicado aos 29 alunos que participaram da pesquisa tinha um total de 7 questões. As respostas para cada uma das questões serão examinadas a seguir.

As duas primeiras questões foram discutidas com os alunos a fim de que a proposta de atividade fosse entendida por todos. A primeira pergunta refere-se ao período de 24 horas. O enunciado é o que segue: “Considerando que a mistura de água é perfeitamente homogênea, quantos mililitros de poluente foram retirados do lago-modelo neste procedimento?” A pergunta era de múltipla escolha e as opções foram: “(A) 40 ml; (B) 80 ml; (C) 100 ml; (D) 200 ml”. Enquanto o enunciado da segunda questão é: “Depois de fazer isto, quantos mililitros de poluente ainda ficaram no lago-modelo?”. As alternativas foram: “(A) 200 ml; (B) 180 ml; (C) 160 ml; (D) 120 ml; (E) nenhum”.

Observe que as duas primeiras questões estão relacionadas, ou seja, o sucesso na primeira sugere que o aluno acerte a segunda questão. A análise apontou que 100% dos alunos acertaram a questão 1, enquanto a questão 2 teve uma taxa de acerto de aproximadamente 93,10% (27 alunos) e uma taxa de erro de 6,9% (2 alunos). Todavia, é importante notar que o questionário foi entregue ao final de todas as discussões, o que implica que alguns alunos podem ter corrigido suas respostas. As marcas deixadas nos questionários sugerem isso. No entanto, o objetivo principal não é discutir os erros dos alunos sob a perspectiva de Cury (2009), nem estamos interessados em analisar os métodos de resolução de problemas dos alunos, como sugerido por Polya (1978). A pesquisa consiste em ministrar três aulas utilizando a metodologia de modelagem matemática para abordar alguns conceitos de matemática, como progressões geométricas, função exponencial, logaritmos, entre outros. Em vários momentos da discussão, foi necessário auxiliar os alunos no manuseio da calculadora e em conceitos triviais, como porcentagem e propriedades das potências.

A figura abaixo mostra revisões realizadas para facilitar o entendimento dos alunos em relação ao trabalho realizado.

Figura 3 – Revisão de conteúdo durante o experimento

Figura 3 – Fonte própria

Ao término da análise de todas as questões, espera-se obter mecanismos para avaliar a eficiência da abordagem por meio da metodologia de modelagem matemática e confrontá-la com a abordagem que utiliza aula expositiva.

Dando continuidade às análises, o enunciado da questão 3 é o que segue: “Calcule a quantidade de poluente restante no lago-modelo, após a segunda troca de água. Faça seus cálculos e anote o resultado no espaço a seguir”.

Dos 29 alunos participantes, 26 não entregaram solução por escrito. É fato que o professor ao propor determinada atividade, espera que os alunos cometam erros e acertos. No entanto, é comum que surjam soluções inesperadas. Por exemplo, o aluno 3 (os questionários foram numerados de 1 a 29 para representar todos os alunos) observou que ao final do primeiro dia a quantidade restante de poluente era de 160 ml. Assim, ele apresentou a seguinte solução: “$160 \cdot 0{,}8 = 128$ ml”. Em outras palavras, a quantidade de poluente é 80% da quantidade do dia anterior.

Os alunos 21 e 24 apresentaram a solução a seguir,

Figura 4 – Solução apresentada pela aluna 24

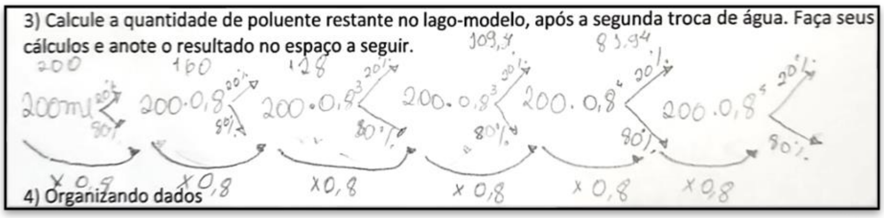



Figura 4 – Fonte própria

Como mencionado anteriormente, não é possível afirmar em qual momento o aluno resolveu a questão. Se a resolução foi desenvolvida quando foi proposta, ou após todas as discussões.

Um dos objetivos da questão 3 é desenvolver nos alunos competências para inferir e propor modelos que descrevam comportamentos, no caso específico, encontrar um modelo matemático que possa estimar a quantidade exata de poluente ao longo do tempo (em dia). O enunciado da questão é: “Organizando dados. Organize os dados na tabela abaixo, calculando a quantidade de poluente restante em cada período de 24 horas até o 5º dia do nosso experimento.

Tabela 1 – Anotações para a questão 5 do questionário

| **Período de 24 horas (n)** | | **Quantidade de poluente no recipiente $a(n)$** | |
|---|---|---|---|
| **1º período** | $n = 1$ | $a(1) =$ | $a(6) =$ |
| **2º período** | $n = 2$ | $a(2) =$ | $a(7) =$ |
| **3º período** | $n = 3$ | $a(3) =$ | $a(8) =$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **4º período** | $n = 4$ | $a(4) =$ | $a(9) =$ |
| **5º período** | $n = 5$ | $a(5) =$ | $a(10) =$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| **enésimo período** | $n$ | $a(n) =$ | |

Tabela 1 – Fonte própria

Quando, afinal, o lago estará despoluído?”.

Durante a atividade, o professor auxiliou os alunos em todas as dúvidas. Alguns pontos relevantes merecem destaque nessa questão, são eles:

1. Após 5 trocas de água (5 dias), é possível determinar um modelo capaz de descrever o comportamento da despoluição do lago-modelo?
2. Se não foi possível, continue os cálculos. É possível inferir sobre a aparência desse modelo?
3. Por fim, o que seria um “lago despoluído”? Será que podemos repetir o processo até que o lago seja completamente limpo?"

Segue a tabela com a solução esperada,

Tabela 2 – Quantidade de poluente após os primeiros períodos do experimento

| **Período de 24 horas (n)** | | **Quantidade (ml) de poluente no recipiente $a(n)$** |
|---|---|---|
| 1º período | $n = 1$ | $a(1) = 160$ |
| 2º período | $n = 2$ | $a(2) = 128$ |
| 3º período | $n = 3$ | $a(3) = 102{,}4$ |
| 4º período | $n = 4$ | $a(4) = 81{,}92$ |
| 5º período | $n = 5$ | $a(5) = 65{,}536$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| enésimo período | $n$ | $a(n) = 200 \cdot 0{,}8^n$ |

Tabela 2 – Fonte própria

Note que ao retirar dois copos (100 ml) de água do lago modelo, apenas $\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$ corresponde à quantidade de poluente. É possível que o aluno pense “se após 24h serão retirados 40 ml de poluente, então, após 120 horas (5 períodos) o lago-modelo será completamente descontaminado. Todavia, observe que a quantidade de poluente subtraída a cada período não é linear. Assim, sabendo que inicialmente tem-se 200 ml, a figura 2 a seguir mostra um raciocínio desenvolvido para determinar a quantidade de poluente restante no lago-modelo.

Figura 5 – Modelagem do problema

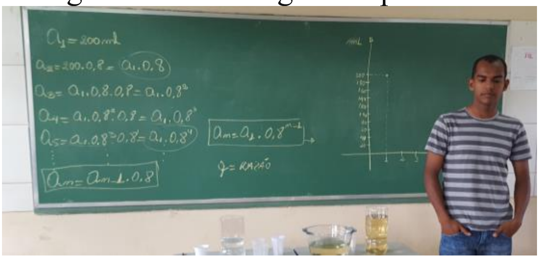



Figura 5 – Fonte própria

Inicialmente foi proposto para que os alunos determinassem a quantidade de poluente após 1dia, 2 dias, ..., 5 dias. Diante da dificuldade, foi apresentado (figura 2) uma solução genérica, $a_n = a_1 \cdot 0{,}8^{n-1}$, para o problema. Durante o debate foi necessário abordar e revisar conceitos de potenciação (propriedades das potências), bem como multiplicação usando números decimais.

Após sugerir que $a_n = a_1 \cdot 0{,}8^{n-1}$ é o modelo que descreve o processo de despoluição do lago, foram realizados alguns testes para validação do modelo. Os alunos foram questionados se o modelo fazia recordar algum conteúdo estudado em matemática. O debate prosseguiu até associarem o modelo à fórmula do termo geral da progressão geométrica, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, onde,

- $a_n$ é o enésimo termo da progressão geométrica (P.G.);
- $a_1$ é o primeiro termo da P.G.;
- $q$ é a razão da P.G.;
- $n$ é o número de termos da P.G.

A tabela 3 a seguir oferece um exemplo de um raciocínio que os estudantes poderiam empregar para calcular a quantidade de poluentes ao longo do tempo.

**Tabela 3 – Fórmula recursiva para determinar a quantidade de poluente**

| **Período de 24 horas (n)** | | **Quantidade (ml) de poluente no recipiente $a(n)$** |
|---|---|---|
| 1º período | $n = 1$ | $a(1) = 200$ |
| 2º período | $n = 2$ | $a(2) = a(1) - \frac{1}{5}a(1) = \frac{4}{5}a(1) = 160$ |
| 3º período | $n = 3$ | $a(3) = a(2) - \frac{1}{5}a(2) = \frac{4}{5}a(2) = 128$ |
| 4º período | $n = 4$ | $a(4) = a(3) - \frac{1}{5}a(3) = \frac{4}{5}a(3) = 102{,}4$ |
| 5º período | $n = 5$ | $a(5) = a(4) - \frac{1}{5}a(4) = \frac{4}{5}a(4) = 81{,}92$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $n + 1$ período | $n + 1$ | $a(n+1) = a(n) - \frac{1}{5}a(n) = \frac{4}{5}a(n), n = 1, 2, 3, 4$ ... |

Tabela 3 – Fonte própria

Mesmo com a orientação e cálculos realizados pelo professor, 9 (nove) alunos apresentaram soluções incompletas para a pergunta, o que sugere incompreensão do raciocínio utilizado na resolução da questão.

Prosseguindo com a análise das questões, o enunciado da questão 5 é o que segue: “O lago ficará totalmente isento de poluição em algum momento? Reflita sobre a resposta desta questão com base nos dados da tabela acima.” A questão refere-se à “tabela 1” acima. A resolução da pergunta permitiu a investigação da ideia intuitiva de limite. O diálogo com os alunos e as respostas apresentadas permitem inferir que os objetivos foram alcançados. É possível que a compreensão tenha se tornado mais satisfatória após as discussões das questões 6 e 7. Veja algumas justificativas apresentadas pelos alunos:

Aluno 21: “Não. Pois, de acordo com a tabela demonstrada nunca o rio irá se torna limpo de no qual representa pela função exponencial” [SIC]

Aluno 22: “Nunca. Mesmo trocada infinitas vezes, a água nunca sera 100% limpa.” [SIC]

As justificativas, transcritas fielmente, apresenta alguns pontos que podem ser discutidos. O argumento da aluna 21, possivelmente fundamentado nas discussões das questões 6 e 7, mostra que ela consegue interpretar o gráfico de uma função exponencial (Figura 8). Para esses alunos, a quantidade de poluente será tão pequena quanto eu queira, mas nunca igual a zero.

Seguindo com a análise das questões, o enunciado da questão 6 é: “Quanto tempo se passará até o lago estar limpo? Vamos admitir que, em nosso experimento, o lago estará despoluído quando a quantidade de poluente for inferior a 40 ml. Ou seja, nossa hipótese de trabalho é que, com a concentração de poluente menor que 40 ml, o lago estará despoluído. (Atenção, nesse caso o valor de 40 ml é uma escolha arbitrária. Isto é, poderíamos escolher outro valor qualquer, maior ou menor, como referência de despoluição aceitável. Essa escolha depende do grau de despoluição que desejamos atingir. Como nesse caso nosso objetivo é puramente pedagógico, fixamos o valor em 40 ml). A partir dos resultados obtidos ao longo do exercício 4, quantos dias, no mínimo, deverão se passar para que esse patamar seja atingido? (A) 1 dia; (B) 7 dias; (C) 8 dias; (D) 9 dias; (E) 10 dias.”

Note que o enunciado foi bem específico ao destacar que “o objetivo é puramente pedagógico”. Como esperado, a estratégia adotada pela maioria dos alunos foi dar continuidade ao preenchimento da tabela da questão 4, que inicialmente foi preenchida até o $a(5)$.

Figura 6 – Resolução da questão 6

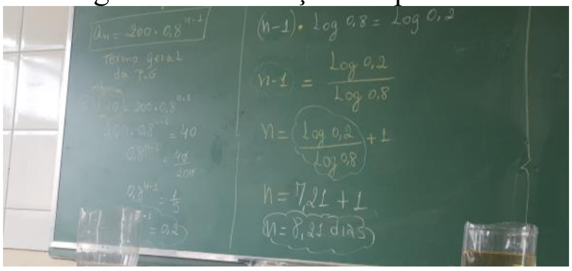



Figura 6 – Fonte própria

A resolução completa do exercício é,

$$\begin{aligned}
40 = 200 \cdot 0{,}8^{n-1} &\Longrightarrow 200 \cdot 0{,}8^{n-1} = 40 \\
&\Longrightarrow 0{,}8^{n-1} = \frac{40}{200} \\
&\Longrightarrow 0{,}8^{n-1} = \frac{1}{5} \\
&\Longrightarrow \log 0{,}8^{n-1} = \log 0{,}2 \\
&\Longrightarrow (n-1)\log 0{,}8 = \log 0{,}2 \\
&\Longrightarrow (n-1) = \frac{\log 0{,}2}{\log 0{,}8} \\
&\Longrightarrow n = \frac{\log 0{,}2}{\log 0{,}8} + 1 \\
&\Longrightarrow n = 8{,}21 \text{ dias}
\end{aligned}$$

Considerando que a unidade de tempo utilizada na questão é dia completo, após 9 dias, a quantidade de poluente no lago-modelo será a que atende ao enunciado da questão. Embora o conteúdo abordado não fosse novo para os alunos, ficou evidente a dificuldade, principalmente em compreender de onde foi "tirada" a propriedade das potências envolvendo logaritmos. No entanto, a curiosidade e o interesse em calcular o tempo necessário para que houvesse outras quantidades de poluentes tornaram a aula mais dinâmica. Nesse momento, foi possível discutir a ideia intuitiva de limite. A discussão foi reforçada pela questão 7.

O enunciado da última questão é: "Ficando um pouco mais exigente... Na atividade anterior, admitimos que em nosso experimento o lago estaria despoluído quando a quantidade de poluente fosse inferior a 40 ml. Agora está na hora de ficarmos um pouco mais exigentes. Imagine que em nosso experimento o lago só poderá ser considerado despoluído quando a quantidade de poluente for inferior a 1 ml. Nestas condições, quantos dias, no mínimo, deverão se passar a partir da situação inicial (200 ml de poluente) para que esse patamar seja atingido? (A) 11 dias; (B) 12 dias; (C) 20 dias; (D) 25 dias; (E) 30 dias”.

A resolução da questão 7 pode ser feita semelhante à questão 6, todavia, na expectativa de explorar mais conceitos matemáticos, a solução apresentada a seguir envolve uma desigualdade.

Figura 6 – Resolução da questão 7

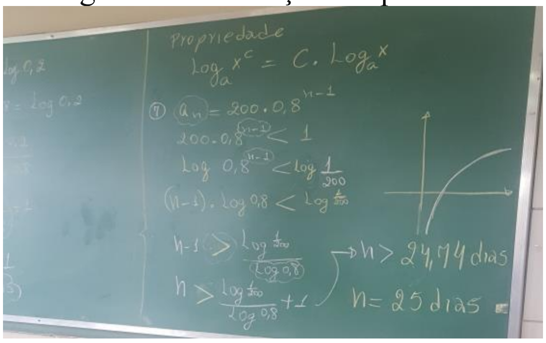


Figura 6 – Fonte própria

A interpretação e desenvolvimento da questão possibilita a exploração de diversos conteúdos matemáticos, tais como propriedades dos logaritmos, inequações e cálculos complexos que podem ser realizados com o auxílio da calculadora do celular. É importante ressaltar que para as questões 6 e 7, a metodologia de resolução de problemas proposta por Polya (1978) é altamente recomendada.

Por fim, convém citar que ao final do questionário havia uma malha milimetrada para que os alunos pudessem marcar os pontos da Tabela 1. Uma representação fiel da situação é a que segue,

Figura 7 – Representação, no GeoGebra, dos pontos da Tabela 2

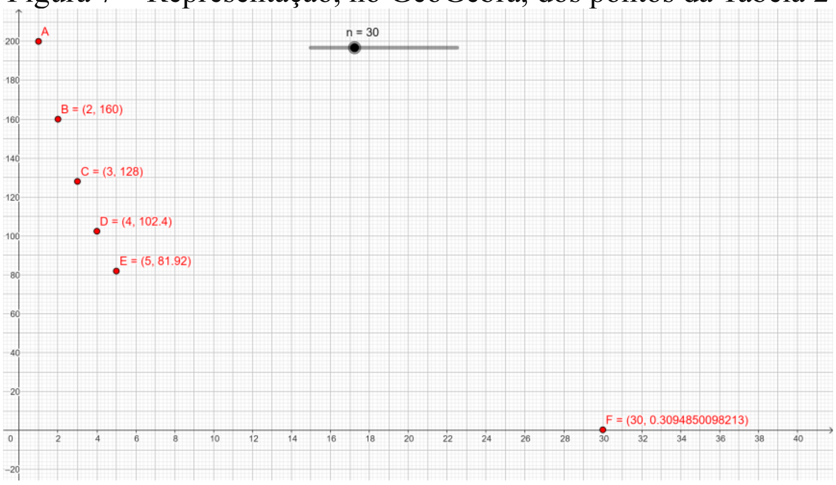



Figura 7 – Fonte própria

A figura mostra a quantidade de poluente que fica no lago depois de trocar a água várias vezes. Os pontos A, B, C, D, E e F representam os dias 1, 2, 3, 4, 5 e 30, respectivamente. O gráfico mostra que a quantidade de poluente diminui de 200 ml para cerca de 0,31 ml depois de 30 trocas de água. Isso pode surpreender o aluno que intuitivamente supõe que a quantidade de poluente pode ser tão pequena quanto se queira. O aluno pode se perguntar se existe um momento em que o poluente será igual a zero. O gráfico pode ajudá-lo a explorar essa questão e entender melhor o fenômeno.

Figura 8 – Representação gráfica da função $f(x) = 200 \cdot 0{,}8^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 1$

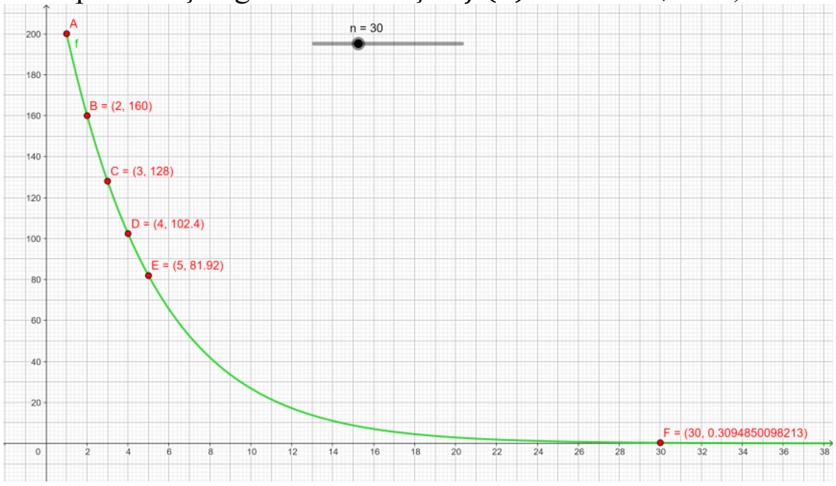



Figura 8 – Fonte própria

A representação gráfica da figura 7 ilustra o decaimento da quantidade de poluente no lago-modelo. O gráfico pode ser utilizado para diversas investigações, incluindo a apresentação de uma "solução visual" para o aluno.

Em poucas palavras, a discussão sobre a sequência didática desenvolvida com alunos do 2º ano do Ensino Médio mostrou-se uma oportunidade para abordar vários conceitos matemáticos com os alunos. A modelagem matemática é uma metodologia que permite trabalhar de forma contextualizada e estudar problemas reais por meio do uso de ferramentas matemáticas. É um processo cíclico que envolve as seguintes etapas, em ordem: construção do problema, construção do modelo matemático, resolução do modelo matemático e validação do modelo matemático. (MALAGUTTI e GIRALDO, 2010).

## 3. CONCLUSÕES

O experimento demonstrou sua relevância ao capacitar os estudantes no desenvolvimento de habilidades valiosas e ao iluminar a utilidade da matemática em suas vidas. As aplicações da modelagem matemática no ambiente de ensino foram notáveis, propiciando a aquisição de competências cruciais, que abrangem desde a aplicabilidade da matemática no quotidiano até o estímulo do pensamento crítico e raciocínio lógico, passando pela promoção da interdisciplinaridade e a melhoria das capacidades de comunicação. A abordagem também instigou a curiosidade dos estudantes, resultando em um aprendizado genuinamente significativo. A implementação bem-sucedida da modelagem matemática demanda planejamento meticuloso, porém, os frutos colhidos são altamente satisfatórios para todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Resumidamente, a estratégia que envolveu a utilização da modelagem matemática, ao simular a despoluição de um lago, capacitou o estudante a desempenhar um papel ativo no processo de ensino e aprendizado. Esse envolvimento foi alcançado por meio da exploração matemática, que estimulou a formulação de questionamentos, a resolução de problemas e o estabelecimento de hipóteses. Como resultado, o aluno foi conduzido a reunir dados, realizar experimentos, simulações e testes, na tentativa de generalizar a questão com base em um modelo matemático.

A abordagem com base na modelagem matemática demonstrou ser bem-sucedida ao alcançar os objetivos e desafios que impulsionaram esta pesquisa. Foi viável estabelecer um modelo matemático capaz de representar o processo de despoluição do lago, ao mesmo tempo que promoveu o aprimoramento das competências durante a validação desse modelo. Além disso, vale ressaltar que a estratégia adotada nesta pesquisa está em conformidade com as cinco competências delineadas na Base Nacional Comum Curricular e ao Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG).

Por último, é nossa expectativa que esta pesquisa inspire educadores a adotarem a modelagem matemática como uma ferramenta valiosa na sala de aula. Além disso, planejamos, em um momento oportuno, compartilhar as experiências deste estudo por meio de um minicurso destinado a professores da educação básica, com o propósito de destacar as oportunidades para efetuar impactos significativos no ambiente de ensino. Reconhecemos que o trabalho dos professores é desafiador, porém, a incorporação de novas estratégias e a interação com outros educadores têm o potencial de provocar transformações notáveis na forma como abordam tópicos como progressões geométricas, matemática financeira, funções exponenciais, logaritmos, entre outros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALAVARSE, Ocimar M.; BRAVO, Maria Helena; MACHADO, Cristiane. **Avaliações externas e qualidade na educação básica: articulações e tendências.** *Est. Aval. Educ.* [online]. 2013, vol.24, n.54, pp.12-31. ISSN 0103-6831. Disponível em: Avaliações externas e qualidade na educação básica: articulações e tendências (fcc.org.br). Acessado em 18 de outubro de 2023.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática: Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores**. Biomatemática IX, 1999. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf. Acessado em 15 de outro de 2023.

BIEMBENGUT, Maria Salett & HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 4º ed. São Paulo, Contexto, 2005.

BNCC Glossário Digital. Desenvolvido por Somos Educação /Kroton. Disponível em: http://glossario-digital-bncc-00-c8118adcf4fcd.webflow.io/ Acesso em: 18 de outubro 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação e Câmara de Educação Básica. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Relator: Ivan Cláudio Pereira Siqueira. Brasília – DF, 21/11/2018. DIÁRIO OFICIAL DA UNIÃO – Publicado em: 22/11/2018, Edição: 224, Seção: 1, Página: 21.

CARVALHO, P.C.P; MORGADO, A. C. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015 (Coleção PROFMAT).

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações – ensino médio**. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações**. 7ª ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

MALAGUTTI, P. L. A.; GIRALDO, V. A. **Modelo de despoluição: módulo I**. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010. (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática).

MEYER, J. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Os movimentos da matemática na escola: do ensino de matemática para a educação matemática; da educação matemática para o ensino de matemática; do ensino de matemática para a Educação Matemática; da Educação Matemática para o Ensino de Matemática. Pensar a Educação em Revista, v. 2, p. 3-33, 2016. Disponível em: Educação Matemática – Ano 2, vol. 2, n. 2, abr-jun/2016 – Pensar a Educação em Revista (pensaraeducacaoemrevista.com.br). Acessado em 18/10/2023.