

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS**

**RENATO PACHECO VILLAR**

**ESTUDO ANALÍTICO DA EQUAÇÃO DE FISHER  
LINEARIZADA: DETERMINAÇÃO DE TAMANHOS  
MÍNIMOS DE FRAGMENTOS POPULACIONAIS**

**RENATO PACHECO VILLAR**

**ESTUDO ANALÍTICO DA EQUAÇÃO DE FISHER LINEARIZADA: DETERMINAÇÃO DE  
TAMANHOS MÍNIMOS DE FRAGMENTOS POPULACIONAIS**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia Ambiental, pelo Programa de Pós-Graduação em Ciência e Engenharia Ambiental da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Ciências e Engenharia Ambiental  
Orientador: Prof. Dr. Daniel Juliano Pamplona da Silva

Poços de Caldas/ MG  
2014

Villar, Renato Pacheco.

Estudo analítico da equação de Fisher linearizada: determinação de tamanhos mínimos de fragmentos populacionais / Renato Pacheco Villar. – Poços de Caldas, 2014.

73 f. -

Orientador: Daniel Juliano Pamplona da Silva.

Dissertação (Mestrado em Ciência e Engenharia Ambiental) - Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, MG, 2014.

Bibliografia.

1. Fragmentação de sistemas. 2. FKPP. 3. Dinâmica de populações. 4. Fragmento não isolado. I. Pamplona da Silva, Daniel Juliano. II. Título.

CDD: 510

**RENATO PACHECO VILLAR**

**ESTUDO ANALÍTICO DA EQUAÇÃO DE FISHER  
LINEARIZADA: DETERMINAÇÃO DE TAMANHOS MÍNIMOS DE  
FRAGMENTOS.**

A banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Ciência e Engenharia Ambiental, pelo Programa de Pós-Graduação em Ciência e Engenharia Ambiental da Universidade Federal

Aprovada em: 19 de Setembro de 2014.

Prof (a) Dr (a). Daniel Juliano Pamplona da Silva  
Instituição: UNIFAL-MG

Prof (a) Dr (a). Edmundo Capelas de Oliveira  
Instituição: UNICAMP

Prof (a) Dr (a). Gustavo do Amaral Valdivieso  
Instituição: UNIFAL-MG

# AGRADECIMENTOS

Gostaria de dedicar este espaço para agradecer às pessoas que de alguma forma colaboraram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho:

Primeiramente, ao meu amigo Daniel Pamplona que, muito além de meu orientador, dedicou grande parte do seu tempo e abriu suas portas, inclusive em períodos de férias e domingos ensolarados, para que pudéssemos trabalhar nesta dissertação, vistas as dificuldades impostas pela distância e tempo.

Aos meus amigos e colegas do colégio Bandeirantes, em especial aos amigos do Laboratório de Física, que quando precisei me ausentar para cumprir algumas etapas deste processo me substituíram e me apoiaram, sempre com excelência e boa vontade. Devo uma para vocês!

Aos amigos de São Paulo, que quando eu mais precisei estavam do meu lado me distraíndo e me tirando um pouco o foco do trabalho. Um agradecimento especial aos meus grandes amigos Caio Zenatti e João Lima que, além de fornecerem estadias em São João da Boa Vista, me pouparam horas de viagens solitárias de ônibus por prazerosas companhias de/para São Paulo.

Aos meus amigos da UNICAMP, em especial aos irmãos que escolhi para viver durante os anos de graduação da CDC. Sem graduação ninguém chega a um mestrado!

Ao amigo Franco Ramunno que além do apoio e amizade, com sua leitura precisa do trabalho e discussões, contribuiu imensamente para o texto deste trabalho.

Aos colegas da primeira turma do PPGCEA da UNIFAL pelo companheirismo durante as disciplinas e pelas poucas, mas boas confraternizações que tivemos nestes 2 anos. Mesmo distante a maior parte do tempo, pude contar com a colaboração de vocês quando precisei. Agradeço especialmente ao amigo Fabio Lima, cujo seu interesse pelo trabalho gerou debates importantes que, me fizeram abrir os olhos para resultados importantes que estavam passando despercebidos.

Um agradecimento especial para minha família, em especial aos meus pais Carlos e Ana Lúcia, meus irmãos Daniel e Beatriz e minha avó Noêmia, que sempre me deram

apoio incondicional a todas as escolhas que tomei na vida. Minha eterna admiração a todos vocês!

Por último, mas não menos importante, a mulher da minha vida e minha companheira Marília, pela compreensão e paciência durante estes 2 anos de trabalho! Mesmo sabendo de toda a dificuldade que seria este período, nunca deixou de me apoiar e me colocar para frente, mesmo quando a vontade era de desistir. Te amo!

## RESUMO

O estudo de dinâmica de populações é um tema recorrente na biologia matemática. As características centrais a serem consideradas em problemas deste tipo são o comportamento do crescimento seguido por determinada população no tempo e a descrição dos aspectos espaciais. O problema abordado neste trabalho resume-se em descrever uma população movendo-se no espaço sujeita a uma taxa de crescimento contida por uma saturação. Pressupõe-se um modelo dinâmico com difusão espacial fikianiana em uma dimensão. Neste modelo, representado pela equação de Fisher-Komolgorov-Petroviski-Piskunov (FKPP), introduz-se algumas heterogeneidades espaciais, gerando descontinuidade no modelo. Tal descontinuidade pode ser interpretada em termos biológicos como uma fragmentação do espaço. Estamos interessados em encontrar a solução para o tamanho crítico mínimo que um fragmento deve ter para que seja próspero em sistemas de um ou dois fragmentos, todos de mesmo tamanho. Verifica-se com isso uma diferença entre o tamanho crítico dos fragmentos, que depende do grau de favorabilidade a vida, assim como a distância entre fragmentos. Verificou-se ainda a influência exercida pelo isolamento do sistema do meio externo aumentando significativamente o tamanho crítico de cada um dos fragmentos nos casos de isolamento.

Palavras-chave: Fragmentação de sistemas. FKPP. Dinâmica de populações. Fragmento não isolado.

# ABSTRACT

The study of population dynamics is a frequent topic in mathematical biology. The most important points to consider in these type of simulations are the growth behaviour of a specific population over time and the description of the spatial aspects. The addressed problem in this work is to describe a population moving in space subject to a growth rate contained by a saturation. A dynamic one-dimensional Fickian diffusion model was adopted. In order to introduce discontinuity in the model, described by the Fisher-Komolgorov-Petroviski-Piskunov (FKPP) equation, some spatial heterogeneities were added. In biological terms, this discontinuity can be understood as a space fragmentation. The aim of this work is to determine the minimum critical size that a fragment must have so it can be prosperous in systems of one or two fragments, all of the same size. It was found that the minimum critical size depends on the number of fragments, the degree of life favorability, as well as the distance between the fragments. It was also found that the higher the isolation from the external environment, the higher the critical size of each fragment in case of isolation.

Keywords: Fragmentation. FKPP. Population dynamics. Fragmentation of systems.

# SUMÁRIO

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | <b>INTRODUÇÃO</b> .....  | 8  |
| 2 | <b>OBJETIVOS</b> .....   | 13 |
| 3 | <b>FERRAMENTAL MATEMÁTICO E MODELOS</b> .....                                | 14 |
|   | 3.2 EVOLUÇÃO DOS MODELOS DE DINÂMICAS POPULACIONAIS PARA UMA ESPÉCIE .       | 15 |
|   | Modelo 1: Malthus.....   | 16 |
|   | Modelo 2: Verhulst (logístico).....  | 18 |
|   | Modelo 3: Gompertz .....   | 23 |
|   | 3.3 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO – 1 DIMENSÃO .....                                    | 27 |
|   | 3.4 EQUAÇÃO DE FISHER – 1 DIMENSÃO .....                                     | 28 |
|   | Caso 1 – Um fragmento isolado do meio externo .....                          | 30 |
|   | Caso 2 – Um fragmento não isolado do meio externo .....                      | 33 |
|   | Caso 3 – Sistema de 2 fragmentos idênticos isolados do meio externo.....     | 36 |
|   | Caso 4 – Sistema de 2 fragmentos idênticos não isolados do meio externo..... | 40 |
| 4 | <b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....  | 46 |
|   | 4.1 COMPARAÇÃO ENTRE OS CASOS 1 E 2 .....                                    | 55 |
|   | 4.2 COMPARAÇÃO ENTRE OS CASOS 3 E 4: DISTÂNCIA ENTRE OS FRAGMENTOS .....     | 57 |
|   | 4.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS CASOS 1, 2, 3 E 4: GRAU DE FAVORABILIDADE .....      | 58 |
| 5 | <b>CONCLUSÃO</b> .....   | 60 |
|   | <b>REFERÊNCIAS</b> .....   | 63 |
|   | <b>APÊNDICES</b> .....   | 66 |

# 1 INTRODUÇÃO

A Biomatemática ou biologia matemática se caracteriza por ser uma das interfaces entre a Biologia e a Matemática (BASSANEZI, 2002) e consiste no uso da modelagem matemática para descrever problemas reais através de um conjunto de símbolos e relações matemáticas. O modelo matemático tem muitas vezes como meta descrever uma determinada situação da forma mais abrangente possível, levando em consideração algumas simplificações (hipóteses), com o objetivo de entender e muitas vezes atuar sobre a situação em estudo.

A Biomatemática pode ser classificada atualmente em três grandes ramos: a tradicional, a genômica e a dinâmica de populações. A tradicional está relacionada a problemas que abordam a biofísica e biomecânica. A segunda, um ramo mais recente dedicado à análise genômica, que conta com um amplo uso da matemática computacional. A terceira, que será objeto de estudo deste trabalho, denominaremos aqui como Dinâmica de Populações, que trata de problemas relacionados a populações e suas interações com o meio que está inserido. Este último ramo envolve desde o estudo de microorganismos como células e bactérias, até organismos superiores como os seres humanos (BARROS, 2002).

O estudo de dinâmica de populações é um tema recorrente na biologia matemática. Este tipo de problema, que envolve uma infinidade de variáveis, pode ser descrito com algumas simplificações, de forma satisfatória, gerando resultados relevantes. As características centrais a serem consideradas em problemas deste tipo são o comportamento do crescimento seguido por determinada população no tempo e a descrição dos aspectos espaciais. É crescente o interesse pelo estudo da fragmentação do habitat de uma dada espécie e as implicações desta fragmentação (VANCE, 1984).

Neste sentido, pretende-se com este trabalho fornecer uma ferramenta matemática na descrição da dinâmica de uma população, considerando aspectos como crescimento, mortalidade, mobilidade, difusão, competição, entre outros, buscando encontrar a solução para a condição mínima para que prospere a população em determinados sistemas específicos.

A dinâmica de uma população em um domínio finito apresenta significantes diferenças quando comparada a de um domínio infinito, assim como existência de recursos em quantidade limitante e não limitante para o desenvolvimento de uma dada população

(ARTILES, 2008). No caso de existência de regiões não propícias à vida de uma determinada população, o grau de dificuldade à vida também deve ser considerado, pois uma região pouco imprópria à vida é diferente de uma onde a vida é impossível. A influência, nas mais diversas populações, destas heterogeneidades espaciais é de grande importância em muitas áreas de interesses como a biologia, saúde, ecologia entre outras. (RHODES, 1996; BRAUER, 2008)

Porém, resultados relevantes podem ser obtidos, sem que seja necessário considerar a interação entre a população e o espaço em que ela está inserida. Este tipo de modelo considera, muitas vezes, as taxas de nascimento, imigração, mortalidade e emigração (do inglês: *birth, imigration, death, emigration-BIDE*) (COHEN, 1969; PULLIAM, 1988). Alguns outros resultados podem requerer grandes esforços teóricos e computacionais, tais como invasão biológica (MELBOURNE, 2007), competição entre espécies invasoras e nativas (AMARASEKARE, 2003) entre outras (AZEVEDO, 2012).

Para um bom entendimento dos modelos abordados aqui, é importante definir alguns termos constantemente empregados, embora alguns já tenham aparecido, doravante seu entendimento será crucial para que não se façam confusões. Entende-se por população um conjunto de indivíduos de uma determinada espécie, onde as características individuais não são levadas em conta, importando apenas o comportamento coletivo dos indivíduos, descrito por sua densidade. O crescimento ou taxa de crescimento descreve a variação da população no tempo, sendo considerado neste termo a taxa de natalidade, mortalidade. Fragmento, ilha populacional ou simplesmente ilha é definido como uma região do espaço propícia à vida cercada por regiões não propícias. Mover-se no espaço deve ser entendido por movimentos individuais aleatórios que, no coletivo, geram uma difusão macroscópica bem comportada. A taxa de saturação está relacionada com a capacidade finita do meio onde a população está inserida. Este limite está ligado à existência de recursos em quantidade limitada e/ou relações ecológicas entre os indivíduos, tais como alimento, espaço e competição.

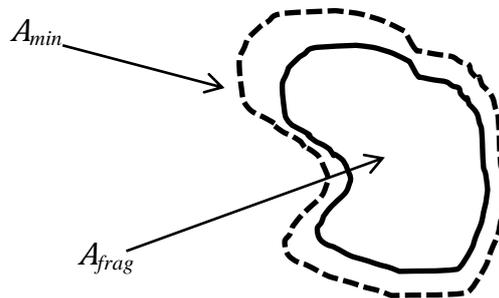
Para considerar a difusão que a população sofre no meio em que está inserida, é importante descrever este meio com maior riqueza de detalhes possível, que seja comportada pelo modelo. Estudos mostram que uma população que obedeça a uma dinâmica de difusão fickiana e uma lei de crescimento linear não pode subsistir se o tamanho do domínio no qual está inserida for menor que um determinado tamanho crítico

(SKELLAM, 1951; KIERSTAED, 1953). Logo, se o domínio for menor do que o tamanho crítico, a população decrescerá assintoticamente a zero para grandes intervalos de tempo. Tal tamanho crítico depende das condições para a vida da população na região interna e nas proximidades da ilha (condições que refletem diretamente na taxa de crescimento da população) e da difusão da população no meio inserido (KRAENKEL, 2010).

Estamos interessados então em determinar o menor fragmento em que a vida seja possível, levando em consideração 2 tipos de sistemas. O primeiro é referente a um sistema formado por um único fragmento e seu entorno. O segundo tipo de sistema que estudaremos é formado por 2 fragmentos espaçados entre si por uma distância em que seja possível a difusão. Todo o estudo está baseado em sistemas de uma única dimensão, mas para ilustrar a situação descrita, utilizaremos um sistema 2D para facilitar o entendimento do problema de estudo.

Trabalhos anteriores sugerem a existência de um tamanho mínimo ( $A_{min}$ ) para uma ilha populacional que proporcionasse viabilidade à vida, tamanho esse abaixo do qual uma dada população inicial qualquer não pode prosperar, tendendo a zero no tempo (SKELLAM, 1951).

Seja  $A_{frag}$  o tamanho do fragmento de estudo. Se  $A_{frag} \geq A_{min}$ , a população cresce até a capacidade do meio e se estabiliza. Já se  $A_{frag} \leq A_{min}$ , em algum momento no tempo a população se extinguirá.

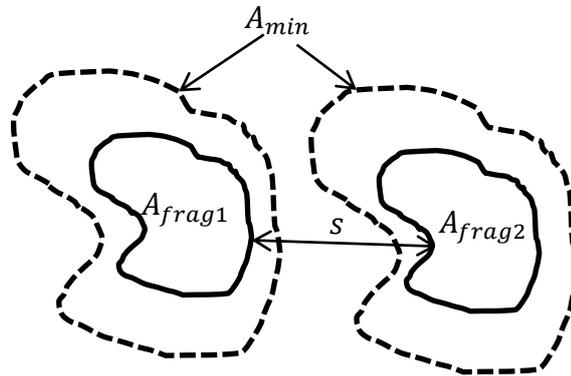


**Figura 1 - Esquema do tamanho mínimo que um fragmento deve ter para que seja possível a vida e um fragmento menor do que o mínimo.**

**Fonte: Do autor.**

Outros estudos evoluíram no sentido de entender o que aconteceria com o tamanho crítico mínimo do fragmento quando nas proximidades deste fosse inserido outro fragmento a uma distância  $s$  de modo que fosse possível ocorrer difusão entre os fragmentos. Estes trabalhos mostram que o tamanho mínimo de cada um dos fragmentos pode ser menor do

que o tamanho mínimo de um sistema composto por um único fragmento (PAMPLONA DA SILVA, 2012).



**Figura 2 - Esquema de dois fragmentos próximos, espaçados por uma distância  $s$ , onde ambos são menores do que o tamanho mínimo que um fragmento isolado deve ter para que possibilite a vida.**

**Fonte: Do autor.**

As diversas populações sejam elas microscópicas como bactérias, ou macroscópicas, como macacos ou aves, estão inseridas nos mais diversos domínios. Poucos são os que podem ser descritos por uma região simples e completamente isolada do meio externo como o estudado e testado (SKELLAM, 1951; KENKRE, 2008). Com isso, estudos foram feitos considerando os mais diversos tipos de heterogeneidade do meio. Estudos mostram que uma população inserida em uma ilha (propícia à vida), separada de outra ilha por uma região imprópria, pode subsistir em fragmentos com tamanhos menores do que se estivesse em uma região com um único fragmento (PAMPLONA DA SILVA, 2012). Outros estudos mostram que em um sistema composto de infinitos fragmentos idênticos intercalados com regiões impróprias pode apresentar tamanho crítico menor ainda para cada fragmento (KRAENKEL, 2010).

O problema abordado neste trabalho resume-se, de forma geral, em descrever uma população movendo-se no espaço sujeita a uma taxa de crescimento contida por uma saturação.

O presente trabalho está dividido basicamente em duas partes. A primeira parte consiste na apresentação da evolução histórica dos modelos que descrevem dinâmicas populacionais mais simples, basicamente a evolução da população no tempo, sem levar em consideração aspectos espaciais. Este tipo de modelo descreve bem como uma população

varia quantitativamente no tempo. Nesta parte será feita basicamente uma revisão e reprodução de resultados conhecidos e já apresentados em diversos trabalhos.

Na segunda parte do trabalho, acrescentaremos aspectos espaciais no modelo, que levem em consideração como uma população se difunde no meio em que está inserida e como isso pode influenciar na dinâmica populacional. Aqui estaremos interessados, não em número de indivíduos e sim no tamanho mínimo que um fragmento ou ilha populacional deve ter para que seja viável a vida de uma espécie em seu interior. Este trabalho também já foi bastante estudado, porém, alguns parâmetros ainda necessitam de maior atenção (PAMPLONA DA SILVA, 2008).

## 2 OBJETIVOS

Estudar diversos modelos de dinâmicas populacionais e suas principais aplicações e restrições.

Resolver a equação FKPP linearizada para quatro casos particulares.

Apresentar a solução analítica para os modelos e uma análise detalhada dos mesmos.

Encontrar uma condição mínima para que possa haver vida em um dado fragmento, ou conjunto de fragmentos, em termos dos parâmetros que caracterizam o sistema.

Comparar os comprimentos mínimos dos fragmentos em casos de fragmentação e heterogeneidades encontrados na literatura.

Esgotar a análise de parâmetros nos problemas de sistemas compostos por apenas um fragmento unidimensional.

Apresentar a influência do grau de favorabilidade à vida dentro do fragmento, no tamanho crítico mínimo, para diversos casos.

Apresentar a influência da distância entre fragmentos, nos casos de sistemas de dois fragmentos, no tamanho crítico que eles apresentam.

### 3 FERRAMENTAL MATEMÁTICO E MODELOS

Assim como qualquer problema real, na modelagem matemática de dinâmicas populacionais não é possível representar matematicamente todas as variáveis envolvidas no sistema de estudo. Sendo assim, o modelo deve ser apenas uma representação do fenômeno objeto de estudo e para que tenha solução analítica e computacional serão necessárias algumas considerações e aproximações.

Em nosso modelo, é importante destacar que não serão levadas em consideração características de cada indivíduo da população em estudo e sim do resultado coletivo. Deste modo, quando tratamos de uma população, muitas vezes, este termo aparecerá como sendo uma densidade espacial de população e sua variação aparecerá de forma contínua, o que é bastante razoável para grandes densidades em grandes intervalos de tempo.

#### 3.1 EQUAÇÕES AUTÔNOMAS E DINÂMICA POPULACIONAL

Na matemática existe uma classe importante de equações diferenciais de primeira ordem, nas quais a variável independente não aparece explicitamente, denominadas equações autônomas (BOYCE, 2006),

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (3.1.1)$$

no problema em questão  $x$  pode ser, por exemplo, a quantidade de indivíduos de uma determinada espécie, a sua densidade, a massa total (biomassa) ou seu tamanho e o tempo é representado por  $t$ .

Tais equações são separáveis, ou seja, podemos utilizar o método de separação de variáveis para encontrar soluções para o problema. Os modelos de crescimentos isolados estudados neste trabalho seguem este tipo de equação.

Os modelos aqui estudados foram formulados para tempo contínuo, onde se supõe que os indivíduos se reproduzem a todo instante, o que na realidade é um boa aproximação para grandes intervalos de tempo ou populações muito grandes.

Seja  $x$  o número de indivíduos em uma população animal ou vegetal. Este número é dependente do tempo e assim podemos escrever  $x = x(t)$ .

Como  $x(t)$  admite somente valores inteiros (não existe meio indivíduo), deve ser tratada como uma função discreta do tempo. Entretanto, para populações relativamente grandes,  $x(t)$  pode ser aproximado por uma função contínua.

As mudanças quantitativas no número de elementos que ocorrem em uma determinada espécie são ocasionadas por três fatores: natalidade, mortalidade e migração, onde migração envolve tanto imigração, quanto emigração. Este tipo de abordagem para uma dinâmica populacional, aparece muitas vezes na literatura como sendo modelo do tipo BIDE.

$\frac{dx}{dt}$  é proporcional a: natalidade – mortalidade + migração.

Em geral, para simplificar a modelagem matemática, não consideramos o processo migratório, ou seja, a população é tratada isoladamente embora existam também modelos que abordem este tipo de fenômeno. (BOYCE, 2006)

Uma condição indispensável para nossos modelos é que se a função  $x(0) = 0$ , ou seja, a população é nula no tempo  $t = 0$ , esta população também será nula para todo  $t \neq 0$ , uma vez que assume-se a hipótese de que não existe geração espontânea e a partir de uma população nula não é possível o surgimento de novas gerações. Outra condição que deve ser levada em consideração em todos os casos estudados aqui é que não existe  $x(t) < 0$ , para qualquer valor de  $t$ . Condição essa conhecida como positividade, já que não é possível a existência de um número negativo de indivíduos de qualquer espécie.

### 3.2 EVOLUÇÃO DOS MODELOS DE DINÂMICAS POPULACIONAIS PARA UMA ESPÉCIE

Como dito anteriormente, Dinâmica de Populações no seu sentido mais amplo engloba o estudo de populações de moléculas, células, micro-organismos, organismos superiores, enfermidades, sociedades humanas, dentre outras possibilidades.

Apesar de a maioria das dinâmicas não ocorrerem em sistemas isolados e sem interação com outras espécies ou mesmo com a própria espécie, em uma primeira aproximação estes modelos servem para descrever a dinâmica desta população. Quando inserimos em nossos modelos mais parâmetros e mais fatores, as equações ficam muito complexas e muitas vezes não apresentam solução analítica.

Apresenta-se na sequência do trabalho a evolução dos modelos de dinâmicas populacionais para sistemas isolados.

## Modelo 1: Malthus

A proposta de utilização da matemática para descrever quantitativamente o comportamento do crescimento de uma população, mais especificamente dos humanos, começou com o economista inglês T. R. Malthus (*An Essay on the Principle of Population* - 1798). Em seu modelo, Malthus assume que o crescimento da população é proporcional à população em cada instante de tempo. Em seu modelo, Malthus chegou ao resultado de que a população humana deveria crescer sem nenhum tipo de inibição (espaço físico, alimento, guerras, epidêmicas, etc) de forma exponencial e em determinado momento existiria mais pessoas no mundo do que a oferta de alimentos. Desta forma em seu trabalho Malthus descrevia que o crescimento populacional humano ocorria em uma progressão geométrica (BASSANEZI, 2011).

Neste modelo, admite-se ainda que a quantidade de reprodutores cresce proporcionalmente ao crescimento da população e que as taxas de natalidade  $n$  e de mortalidade  $m$  sejam constantes positivas, gerando uma taxa da variação da população  $r$  constante no tempo. Este tipo de hipótese é razoável quando analisamos grandes populações que variam em condições ideais, isto é, quando todos os fatores inibidores do crescimento estão ausentes, ou seja, a espécie tem recursos ilimitados e não interage com competidores ou predadores (BASSANEZI, 2006).

Feitas as considerações matemáticas, o modelo de Malthus pode ser descrito pela equação diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t), \quad (\text{M1.1})$$

onde  $x(t)$  é a população no instante qualquer de tempo  $t$ ,  $x_0 = x(0)$  é a população no instante inicial ( $t = 0$ ),  $r$  é a taxa de crescimento da população, ou seja, a diferença entre a taxa de natalidade  $n$  e de mortalidade  $m$

$$r = n - m$$

Como dito anteriormente, não é possível o surgimento de indivíduos a partir de uma população nula (geração espontânea), assim como não existe populações menores do que zero, ou seja, o limite inferior de qualquer população é a extinção total. Temos para o início

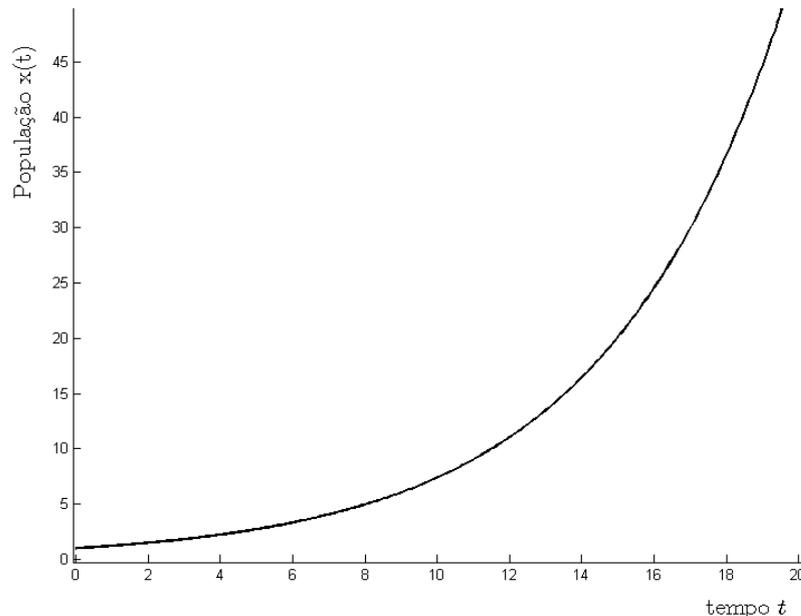
de qualquer estudo de populações que considerar  $x(0) = x_0$  com  $x_0 > 0$ , tendo assim um PVI (problema de valor inicial),

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \\ x(0) = x_0 > 0, \end{cases} \quad (\text{M1.2})$$

que apresenta solução analítica para quantidade de indivíduos em qualquer instante de tempo  $x(t)$  que pode ser expressa por,

$$x(t) = x_0 e^{rt}. \quad (\text{M1.3})$$

Para o caso de  $r = n - m < 0$ , temos a população decrescendo assintoticamente para 0, ou seja será extinta no tempo.



**Figura 3 - Curva malthusiana para um caso genérico,  $r > 0$ .**

**Fonte: Do autor.**

Verificamos que de acordo com este modelo, para  $r = n - m > 0$  a quantidade de indivíduos da população deveria crescer de forma geométrica, ou seja tende a valores muito grandes para tempos relativamente pequenos, visto que de acordo com ele a população cresce indefinidamente e exponencialmente (Figura 3). Em uma primeira análise, este tipo de resultado parece absurdo e o é para tempos longos, porém muitas espécies passam por um momento de crescimento exponencial em algum instante de seu crescimento, principalmente quando a população é relativamente pequena. Apesar de apresentar uma série de aplicações, inclusive para crescimentos populacionais em determinados intervalos

de tempo, verifica-se na prática que o crescimento de uma população não se dá de forma exponencial e indeterminada.

## Modelo 2: Verhulst (logístico)

Observa-se na prática é que a taxa de crescimento relativa tende a diminuir com o tempo. Desta forma é preciso incorporar ao modelo matemático a queda de crescimento da população, ou seja, que a população está sujeita a fatores inibidores, tais como competição, espaço finito, alimento limitado, entre outros (BASSANEZZI, 2011).

Observando isso, em 1838, Pierre F. Verhulst propôs um novo modelo de crescimento populacional para uma espécie que leva em consideração a capacidade do ambiente de suportar um número máximo de indivíduos, devido às limitações de, por exemplo, espaço e disponibilidade de alimentos.

Podemos partir do modelo de Malthus para chegar ao modelo proposto por Verhulst. No modelo proposto por Malthus a taxa de crescimento é constante, independente da população. Basta inserirmos uma taxa de crescimento variável e dependente da população de modo a diminuir quanto maior for a população, ou seja,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta(x)x(t), \quad (\text{M2.1})$$

com

$$\beta(x) = r \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right), \quad (\text{M2.2})$$

onde,  $k$  é uma constante positiva e  $r > 0$  uma constante que representa a taxa de crescimento logístico, ou seja, substituindo M2.2 em M2.1 temos,

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) x(t). \quad (\text{M2.3})$$

Antes de resolver o problema analiticamente e encontrar a solução para  $x(t)$ , vamos analisar alguns casos interessantes que a taxa de crescimento variável implica.

- Quando  $x(t) \ll k \Rightarrow \beta \rightarrow r$ , ou seja, em baixas densidades populacionais, o crescimento da população segue um crescimento Malthusiano.

- Quando  $x(t) < k$ , temos  $\beta > 0$ , ou seja, uma população crescente.
- Quando  $x(t) > k$ ,  $\beta < 0$  e a população passa a ser decrescente.
- Quando  $x(t) = k$ , ou seja, a população atinge a capacidade de suporte do meio,  $\beta = 0$  e população se estabiliza e tem uma variação nula no tempo. Logo, quando  $x(t) = k$  tem-se um equilíbrio estável.

Como vimos, neste modelo, a taxa de variação da população tende a zero para grandes intervalos de tempo já que quando a população é menor do que a capacidade de suporte ela cresce e quando é maior que a capacidade de suporte ela diminui, ou seja, em ambos os casos a população tende a um valor de suporte representado no modelo pela constante  $k$ . Estamos interessados em resolver o PVI apresentado pela equação logística:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases} \quad (\text{M2.4})$$

Este PVI apresenta solução analítica, que pode ser encontrada facilmente por separação de variáveis e frações parciais.

Soluções triviais:

- $x(t) = 0$ : população nula
- $x(t) = k$ : população limite

**Solução para o caso geral:**

Reescrevendo a equação M2.3 e tomando  $x(t) = x$ , temos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{r}{k}x(k - x).$$

Separando as variáveis e integrando,

$$\int \frac{dx(t)}{x(k-x)} = \int \frac{r}{k} dt. \quad (\text{M2.5})$$

Para resolver a integral do lado esquerdo da equação M2.5 é necessária a utilização de frações parciais. Sejam A e B a serem determinadas tais que:

$$\frac{1}{x(k-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(k-x)} = \frac{A(k-x) + Bx}{x(k-x)}$$

Da identidade de polinômios podemos escrever

$$A(k-x) + Bx = 1 \Rightarrow \begin{cases} Ak = 1; A = 1/k \\ -A + B = 0; B = 1/k \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{1}{x(k-x)} = \frac{1}{kx} + \frac{1}{k(k-x)} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{k-x} \right).$$

Retornando a integral de M2.5, temos

$$\int \frac{dx}{k} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{k-x} \right) = \int \frac{r}{k} dt,$$

ou seja,

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{k-x} = \int r dt.$$

Resolvendo as integrais temos:

$$\ln x + c_1 - \ln|k-x| + c_2 = rt + c_3,$$

com  $c_1, c_2$  e  $c_3$  constantes de integração. Tomando agora  $c = c_3 - c_1 - c_2$

$$\ln \left| \frac{x}{(k-x)} \right| = rt + c. \quad (\text{M2.6})$$

Da condição inicial  $x(0) = x_0$ , podemos determinar a constante de integração  $c$ .

$$\ln \left| \frac{x_0}{(k-x_0)} \right| = c. \quad (\text{M2.7})$$

Substituindo M2.7 em M2.6 obtendo

$$\ln \frac{x}{(k-x)} - \ln \frac{x_0}{(k-x_0)} = rt.$$

Simplificando,

$$\ln \frac{x(k-x_0)}{x_0(k-x)} = rt,$$

o que nos leva a

$$\frac{x(k-x_0)}{x_0(k-x)} = e^{rt}.$$

Precisamos isolar  $x(t)$  para encontrar a solução analítica do problema

$$\frac{x}{(k-x)} = \frac{x_0}{(k-x_0)} e^{rt}.$$

Invertendo ambos os lados temos,

$$\frac{(k-x)}{x} = \frac{(k-x_0)}{x_0} e^{-rt}.$$

ou seja,

$$\frac{k}{x} - 1 = \frac{(k - x_0)}{x_0} e^{-rt}.$$

Para isolar finalmente  $x(t)$ , deve-se isolar o termo  $\frac{k}{x(t)}$  e inverter novamente os dois lados da equação obtendo:

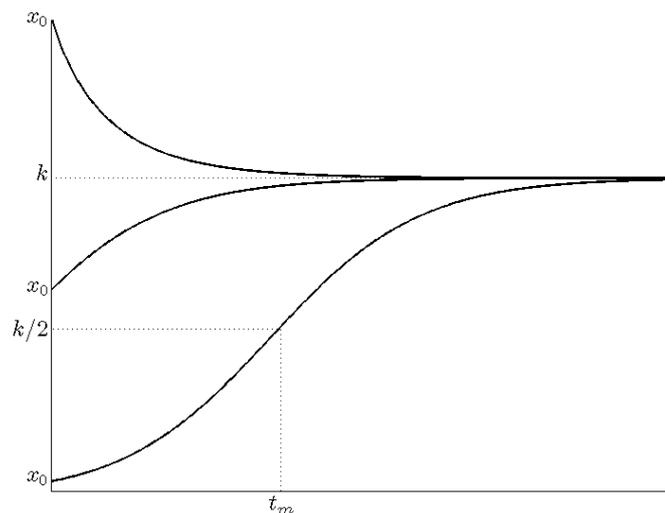
$$x(t) = \frac{x_0 k}{x_0 + (k - x_0) e^{-rt}}, \quad (\text{M2.8})$$

ou também, podemos expressar como encontramos na literatura por (MURRAY, 2002):

$$x(t) = \frac{k x_0 e^{rt}}{k + x_0 (e^{rt} - 1)}, \quad (\text{M2.9})$$

onde novamente  $x(t)$  é a população em um instante de tempo  $t$  qualquer,  $x_0$  é a população no instante de tempo inicial e  $r$  é uma constante vinculada ao crescimento da população. Neste modelo temos ainda a constante  $k$  que representa o valor de suporte das populações de acordo com os fatores inibidores da mesma. A análise das concavidades e do ponto de inflexão da curva da função encontram-se no apêndice A.

A função apresenta um gráfico do tipo sigmoidal para  $x_0 < \frac{k}{2}$ , com ponto de inflexão em  $x(t_m) = \frac{k}{2}$  com  $t_m = \frac{1}{r} \ln \left| \frac{k - x_0}{x_0} \right|$  como mostra a Figura 4.

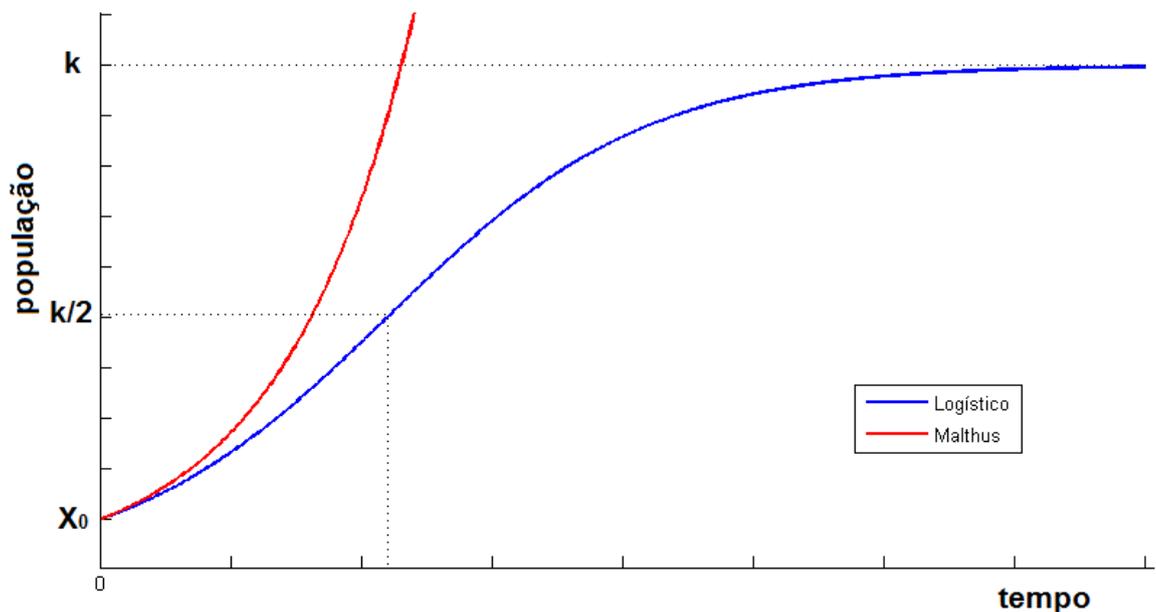


**Figura 4 - Curvas logísticas genéricas para  $0 < x_0 < k/2$ ,  $k/2 < x_0 < k$  e  $k < x_0$ .  
Fonte: Do autor.**

- Se  $0 < x_0 < \frac{k}{2}$ ,  $x(t)$  cresce sigmoidalmente para  $k$ , com ponto de inflexão da curva em  $k/2$ .
- Se  $\frac{k}{2} < x_0 < k$ , a população cresce assintoticamente para  $k$ .
- Se  $k < x_0$ , a população decresce assintoticamente para  $k$ .

Verificamos que no caso deste modelo, independentemente da população inicial, não nula, que se coloque no início do processo, para longos intervalos de tempo a população sempre tenderá a capacidade de suporte do meio.

Podemos obter também um gráfico comparativo entre o modelo de Malthus e o Modelo logístico de Verhulst de onde evidenciamos uma maior verossimilhança do modelo de Verhulst que o de Malthus. Neste gráfico, apresentado na Figura 5, consideramos a mesma taxa de crescimento e a mesma população inicial para ambos os casos.



**Figura 5 - Gráfico comparativo entre a curva logística e a curva malthusiana com taxas de crescimentos iguais e partindo da mesma população inicial.**

**Fonte: Do autor.**

Verificamos aqui que apesar de não ser completamente realista, o modelo Malthusiano apresenta resultados muito próximos do modelo logístico para tempos e populações pequenos, podendo ser uma ferramenta importante na modelagem de crescimentos no início do processo. Isso porque a sua solução é extremamente mais simples do que a do modelo de Verhulst.

### Modelo 3: Gompertz

Por completeza, analisaremos neste trabalho um outro modelo que descreve um crescimento populacional, mas com algumas considerações diferentes em relação ao modelo logístico, é o modelo de Gompertz, menos explorado na literatura em geral. Faremos aqui uma análise detalhada do modelo, resolvendo a EDO para alguns casos específicos.

Com o intuito de descrever o crescimento de tumores sólidos, o matemático Benjamin Gompertz, em 1938, desenvolveu uma equação que denominaremos aqui Equação de Gompertz (DETHLEFSEN, 1968; DOMINGUES, 2011).

Em seu modelo, diferentemente do modelo logístico já discutido, Gompertz afirma que a taxa de inibição da população estudada é proporcional ao logaritmo da população, o que significa que a taxa de crescimento é maior no início do processo e rapidamente se altera para um crescimento mais lento.

Este modelo é bastante utilizado para crescimentos celulares no geral, tais como plantas, bactérias, tumores entre outros (BASSANEZZI, 2011). A equação de Gompertz é encontrada na literatura com a seguinte forma (OLINICK, 2009):

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - b \ln[x(t)]), \quad (\text{M3.1})$$

onde  $x(t)$  é a população de uma dada espécie no instante de tempo  $t$ ,  $a$  e  $b$  constantes positivas.

Para encontrar os pontos de estabilidade da equação M3.1 é necessário igualá-la a 0, ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = 0 = x(a - b \ln x).$$

A solução trivial  $x(t) = x_{min} = 0$ , não é interessante, logo  $a - b \ln(x) = 0$ , ou seja,  $a = b \ln(x_{max})$ , ou ainda  $x_{max} = e^{a/b} = k$ , com  $k$  sendo a capacidade de suporte do meio. Substituindo  $a$  na equação M3.1 temos:

$$\frac{dx}{dt} = x(t)(b \ln k - b \ln x),$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx \ln\left(\frac{k}{x}\right) \\ x(0) = x_0 > 0. \end{cases} \quad (\text{M3.2})$$

O PVI do modelo de Gompertz (M3.2) apresenta solução analítica simples utilizando o métodos de separação de variáveis e integrando, ou seja,

$$\int \frac{dx}{x \ln\left(\frac{k}{x}\right)} = \int b dt.$$

Introduzindo a mudança de variáveis  $u = \ln\left(\frac{k}{x(t)}\right)$  e  $-du = \frac{dx}{x}$  temos

$$-\int \frac{du}{u} = bt + c_1,$$

com  $c_1$  sendo uma constante de integração. Resolvendo a integral do lado esquerdo temos:

$$-\ln u + c_2 = bt + c_1,$$

com  $c_2$  sendo outra constante de integração. Introduzindo  $c = c_2 - c_1$ , temos:

$$-\ln u + c = bt.$$

Voltando as variáveis originais do problema, ou seja,  $u = \ln\left(\frac{k}{x}\right)$ , temos

$$-\ln\left(\ln\left(\frac{k}{x}\right)\right) + c = bt. \quad (\text{M3.3})$$

Mas sabemos que  $x(0) = x_0$ , logo

$$\ln\left(\ln\left(\frac{k}{x_0}\right)\right) = c.$$

Substituindo  $c$  na equação M3.3 ficamos com

$$-\ln\left(\ln\left(\frac{k}{x}\right)\right) + \ln\left(\ln\left(\frac{k}{x_0}\right)\right) = bt,$$

que, reagrupando nos fornece

$$\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{k}{x_0}\right)}{\ln\left(\frac{k}{x}\right)}\right) = bt.$$

No intuito de isolar  $x(t)$  faz-se necessário aplicar a exponencial de ambos os lados o que implica em

$$\ln\left(\frac{k}{x_0}\right) = e^{bt} \ln\left(\frac{k}{x}\right) \quad \text{ou} \quad \ln\left(\frac{k}{x}\right) = e^{-bt} \ln\left(\frac{k}{x_0}\right)$$

ou ainda,

$$\frac{k}{x} = e^{e^{-bt} \ln\left(\frac{k}{x_0}\right)}$$

resultando finalmente em,

$$x(t) = ke^{e^{-bt} \ln\left(\frac{x_0}{k}\right)},$$

ou

$$x(t) = ke^{-e^{-bt} \ln\left(\frac{k}{x_0}\right)} \quad (\text{M3.4})$$

Onde novamente  $x(t)$  é a população no instante de tempo  $t$ ,  $x_0$  é a população no instante de tempo inicial,  $b$  é a taxa de crescimento da população e  $k$  a capacidade de suporte da população no meio.

Podemos ainda escrever a relação da seguinte forma:

Partindo de

$$x(t) = ke^{e^{-bt} \ln\left(\frac{x_0}{k}\right)} = k \left( e^{\ln\left(\frac{x_0}{k}\right)} \right)^{e^{-bt}},$$

finalmente obtendo

$$x(t) = k \left( \frac{x_0}{k} \right)^{e^{-bt}}.$$

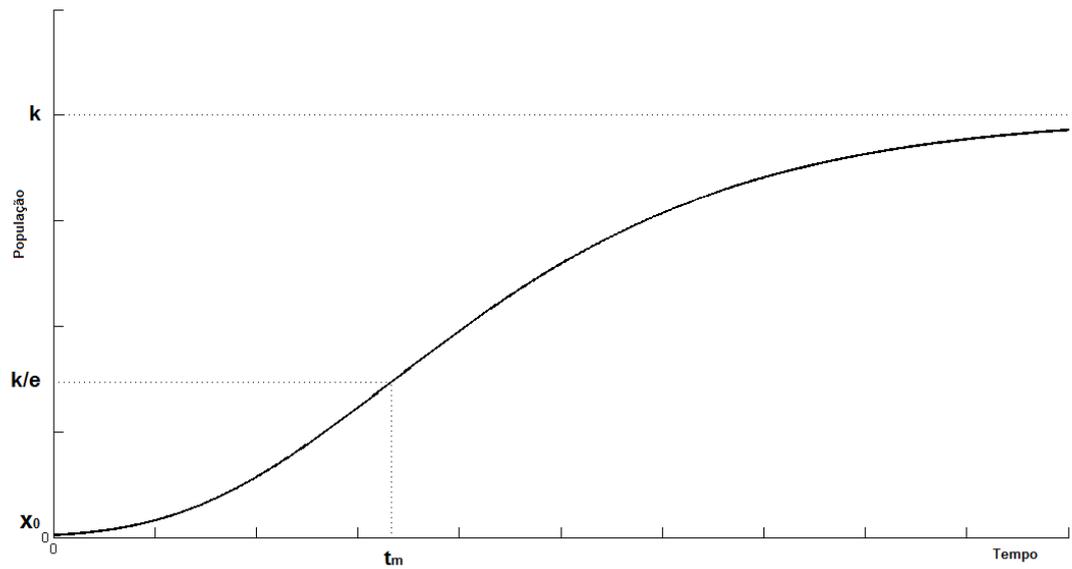
**Analisando:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{-e^{-bt} \ln\left(\frac{k}{x_0}\right)} = k$$

e

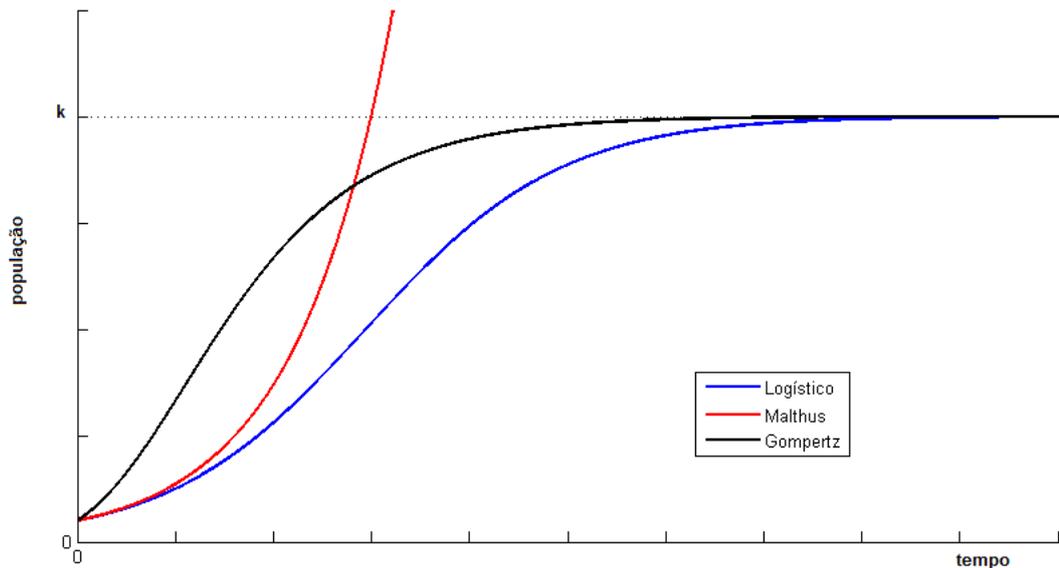
$$\lim_{t \rightarrow 0} ke^{-e^{-bt} \ln\left(\frac{k}{x_0}\right)} = x_0,$$

temos que no início do tempo, a população é igual a população inicial, de acordo com a condição inicial colocada e para grandes intervalos de tempo a população tende a capacidade do meio, independentemente da população inicial  $x_0$ . A análise da concavidade da função e a determinação do ponto de inflexão presentes no gráfico da Figura 6, encontram-se no apêndice B.



**Figura 6 - Curva genérica de Gompertz com ponto de inflexão em  $t_m$ .**  
**Fonte: Do autor.**

Verifica-se que a curva deste modelo se assemelha muito com a já discutida curva logística (Figura 7). A diferença básica entre esses modelos no entanto é onde ocorre a inflexão da curva e também a facilidade em encontrar solução analítica para o problema.



**Figura 7 - Gráfico comparativo entre as curvas geradas a partir dos modelos de Malthus, Verhulst (logístico) e Gompertz.**  
**Fonte: Do autor.**

Como é possível verificar no gráfico comparativo acima, tanto a curva logística, quanto a curva de Gompertz tendem a capacidade de suporte  $k$  para tempos grandes. Por apresentar um ponto de inflexão em um valor de população menor do que a curva logística, a curva gerada pelo modelo de Gompertz apresenta um crescimento maior no início do tempo e chega ao equilíbrio mais rapidamente. Dependendo da população estudada, este modelo pode ser o mais adequado.

### 3.3 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO – 1 DIMENSÃO

Passemos agora a estudar o comportamento de populações levando em consideração a variável espacial. Muitos trabalhos utilizam-se de equações de difusão para expressar o comportamento coletivo do movimento de uma população como veremos a seguir.

A difusão é um fenômeno físico de transporte no qual se observa a propagação de matéria ou energia pela matéria. Existem as mais diversas formas de difusão e essas podem ser modeladas a partir de equações denominadas equações de difusão.

Neste trabalho, consideramos populações macroscópicas. Sendo assim utilizaremos como hipótese que sua dinâmica espacial seja fickiana, ou seja, se produz um fluxo que tende a homogeneizar e uniformizar a distribuição de indivíduos. Evidentemente este tipo de abordagem não é universalmente aplicável quando se trata de dinâmica de populações. No entanto, esta hipótese pode ser utilizada sem restrições já que uma gama grande de populações biológicas obedece leis fickianas de difusão (CARVALHO, 2007).

Para entender a lei geral de conservação, consideremos inicialmente a difusão em três dimensões espaciais. Seja  $S$  uma superfície arbitrária que envolve um volume  $V$ . Partindo da equação geral de conservação que diz que a taxa de variação da quantidade de material  $u$  em  $V$  é igual à taxa de fluxo de material que atravessa  $S$  mais o material criado em  $V$  (MURRAY, 2002). Utilizaremos aqui negrito para diferenciar vetor de escalar.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u(\mathbf{x}, t) dv = - \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int f dv, \quad (3.3.1)$$

em que  $\mathbf{J}$  é o fluxo de material e  $f$  o termo de fonte, que pode ser uma função de  $u$ ,  $\mathbf{x}$  e  $t$ . Se aplicarmos o teorema de divergência à superfície integral e admitindo  $u(\mathbf{x}, t)$  constante, temos

$$\int \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} - f(c, \mathbf{x}, t) \right] dv = 0, \quad (3.3.2)$$

onde  $\nabla$  é um operador e  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  é o divergente do fluxo.

Desde que o volume  $V$  seja arbitrário, o integrando deve ser igual a zero e com isso temos a equação de conservação para  $u$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = f(c, \mathbf{x}, t). \quad (3.3.3)$$

A equação 3.3.3 é válida para um transporte de fluxo  $\mathbf{J}$  geral, quer por difusão ou algum outro processo. Estamos aqui interessados em estudar o fenômeno de difusão e no caso de um processo de difusão clássico ou fikian, temos  $\mathbf{J} = -D\nabla u$ , onde  $D$  pode ser uma função de  $\mathbf{x}$  e  $u$  que se substituirmos em 3.3.3 teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-D\nabla u) = f(c, \mathbf{x}, t). \quad (3.3.4)$$

Como estamos interessados na situação unidimensional e em todos os casos que trabalharemos  $D$  é constante, matematicamente podemos escrever que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(c, \mathbf{x}, t), \quad (3.3.5)$$

em que, a princípio, o termo de fonte  $f$  pode ser uma função de qualquer tipo. Nos capítulos que seguem, discutiremos um caso particular de  $f$  conhecido como equação de Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (FKPP), a qual é corriqueiramente chamada na literatura de Fisher-Kolmogorov, ou simplesmente equação de Fisher.

### 3.4 EQUAÇÃO DE FISHER – 1 DIMENSÃO

Nos modelos discutidos até aqui, não foi considerada a interação da população com o meio em que ela está inserida, pelo menos no que diz respeito a como essa população se locomove ou se distribui por esse meio. Neste trabalho, não estamos interessados em estudar como essa população interage com o meio, mas sim os efeitos disso no que diz respeito a existência ou não de vida em determinadas regiões.

Tomemos a partir de agora a população como sendo uma densidade populacional  $u$  e não mais em número de indivíduos absolutos.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f, \quad (3.4.1)$$

onde,  $y$  é a coordenada espacial,  $\tau$  o instante de tempo,  $D$  o coeficiente de difusão constante e  $f$  o termo de fonte. Mudamos aqui os símbolos das variáveis espacial e temporal por conviência de notação futura.

O problema mais simples que podemos trabalhar é o caso de inserir no termo de fonte uma função linear, ou seja, introduzir  $f(u)$  proporcional a  $u$ . Isso implicaria em inserir um termo de fonte malthusiano, o que não resultaria uma boa equação para descrever uma população em equilíbrio uma vez que, ou a densidade populacional cresceria indefinidamente, ou diminuiria até a extinção como vimos anteriormente. Essa função seria descrita pela equação a seguir.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu, \quad (3.4.2)$$

onde  $c$  é uma constante positiva relacionada com a taxa de crescimento da população.

Porém, iniciaremos o nosso modelo utilizando a equação de Fisher com uma função  $f(u)$  não linear logística no intuito de descrever a dinâmica de uma densidade populacional estável, evitando assim que para grandes intervalos de tempo a população modelada sofra de um crescimento ilimitado. Basta acrescentarmos um termo de saturação ( $-u^2$ ) na nossa função limitando assim o crescimento da população. Como vimos anteriormente, neste caso em que o termo de saturação é logístico a população sempre tenderá a um valor de saturação independentemente do seu valor inicial desde que não seja nula. Substituindo o termo de fonte da equação 3.4.1 por um termo logístico, temos

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu - bu^2. \quad (3.4.3)$$

Ou ainda em uma notação mais simplificada a equação FKPP (FISHER, 1937; LIN, 2004), em uma dimensão espacial, pode ser escrita na forma

$$u_\tau = Du_{yy} + cu - bu^2 \quad (3.4.4)$$

onde  $u = u(y, \tau)$  é a densidade populacional e os sub-índices as derivadas parciais,  $\tau$  o tempo,  $y$  a coordenada espacial,  $D$  é o coeficiente de difusão,  $c(y)$  termo relacionado ao crescimento e  $b$  uma constante de saturação. A equação FKPP – 3.4.4 pode ser reescrita com algumas mudanças de variáveis adequadas que nos levam para a seguinte forma não linear.

$$u_t = u_{xx} + a(x)u - u^2, \quad (3.4.5)$$

onde  $a(x) = \frac{c \left( x \sqrt{D/b} \right)}{b}$ ,  $x = y \sqrt{b/D}$  e  $t = b\tau$ . Esta mudança de variável está

detalhada no apêndice C.

A equação 3.4.5 pode ser classificada como equação diferencial parcial de segunda ordem parabólica e foi resolvida por Kenkre para o caso geral (KENKRE, 2003). Pode-se, porém retirar o termo não linear ( $-u^2$ ) e a equação resultante passa a apresentar solução analítica simples. Este termo não linear está associado à saturação do meio em questão e se em uma primeira aproximação considerarmos um crescimento sem limitação de saturação e a população não prosperar, isso implicará que se considerarmos o termo não linear a população não prosperará também. A técnica de linearização da equação FKPP aqui empregada já foi validada experimentalmente e teoricamente (LIN, 2004; NELSON 1998). Logo, pretende-se resolver a equação FKPP linearizada que apresenta a forma:

$$u_t = u_{xx} + a(x)u \quad (3.4.6)$$

Este problema pode facilmente ser resolvido levando em consideração o princípio de superposição e o método de separação de variáveis (ARFKEN, 1985), que nos garantem existir uma solução do tipo  $u(x, t) = \sum k_n X_n(x) e^{\lambda_n t}$  onde  $X_n(x)$  satisfaz:

$$\mathcal{L}X_n = \lambda_n X_n, \text{ sendo } \mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(x), \quad (3.4.7)$$

ou ainda para o nosso caso

$$X_{xx}(x) = (\lambda_n - a(x))X \quad (3.4.8)$$

onde  $a(x)$  é a função que descreve o meio (fragmento e suas vizinhanças), com  $\lambda_n$  e  $k_n$  constantes, ou seja, tem-se aqui um problema de autovalores para ser resolvido, onde estamos interessados em encontrar o menor autovalor não negativo para  $\lambda_n$ .

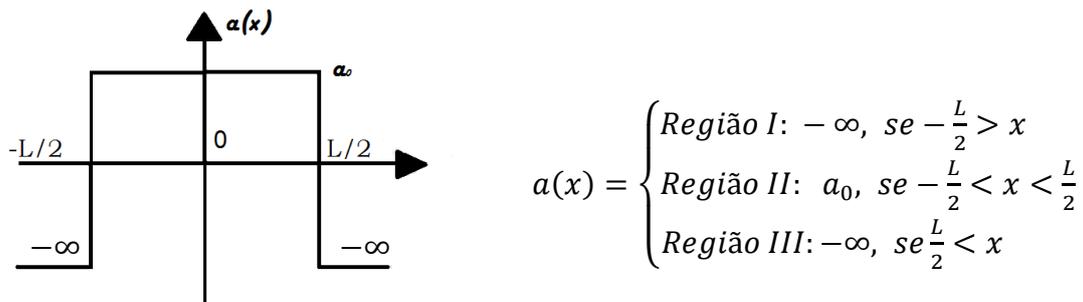
Estudar-se-á a seguir 4 casos particulares de perfis, ou seja, 4 funções  $a(x)$ , que compõem o cerne deste trabalho.

### Caso 1 – Um fragmento isolado do meio externo

O caso onde a população habita uma ilha populacional totalmente isolada do meio externo é o caso mais simples que conhecemos. Este problema, já profundamente estudado, foi resolvido de maneira completa, ou seja, utilizando a equação FKPP com a não linearidade

quadrática, onde foi encontrado um valor para o tamanho mínimo de fragmento abaixo do qual seria impossível a vida em longos intervalos de tempo (KENKRE, 2003).

Neste trabalho, reproduziremos o resultado encontrado na literatura (PAMPLONA DA SILVA, 2008), usando apenas a parte linear da FKPP a fim de encontrar a condição mínima para existência de vida. Faremos essa revisão a fim de comparar este resultado com os demais encontrados aqui neste trabalho.



**Figura 8 - Representação de um fragmento isolado: uma ilha de tamanho  $L$ , com uma taxa de propriedade à vida  $a_0$  cercada por uma região totalmente imprópria a vida.**

**Fonte: Do autor.**

Queremos então resolver a equação 3.4.8 para o perfil  $a(x)$  descrito na Figura 8 em cada uma das regiões.

#### **Regiões I e III**

Nas regiões I e III temos que a vida é completamente impossível, ou seja,

$$X_I(x) = 0$$

e

$$X_{III}(x) = 0.$$

#### **Região II**

Na região II onde a vida é possível, a equação 3.4.8 tome a forma:

$$X_{xx}(x) = (\lambda_n - a_0)X = -\gamma^2 X, \text{ com } \gamma^2 = a_0 - \lambda_n > 0,$$

ou simplesmente,

$$X_{xx}(x) = -\gamma^2 X. \tag{C1.1}$$

Precisamos encontrar uma função  $X_{II}(x)$ , cuja a segunda derivada é igual a uma constante vezes a própria função. Logo

$$X_{II}(x) = A\text{sen}(\gamma x) + B\text{cos}(\gamma x).$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

Este tipo de solução nos gera como implicação direta que  $a_0 > \lambda_n$ , o que poderia gerar estranheza em um primeiro momento, porém como estamos interessados na mínima condição necessária para a existência de vida, utilizaremos apenas em  $\lambda_n = \lambda_0 = 0$ . Neste caso, para qualquer valor de  $a_0 > 0$ , temos a relação satisfeita.

Utilizando as condições de contorno:

$$\begin{cases} X_I\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 = X_{II}\left(-\frac{L}{2}\right) = A\text{sen}\left(-\gamma\frac{L}{2}\right) + B\text{cos}\left(-\gamma\frac{L}{2}\right) \\ X_{III}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 = X_{II}\left(\frac{L}{2}\right) = A\text{sen}\left(\gamma\frac{L}{2}\right) + B\text{cos}\left(\gamma\frac{L}{2}\right) \end{cases}$$

Como  $L, \gamma \neq 0$ , podemos dizer que

$$\begin{cases} 0 = -A\text{sen}\left(\gamma\frac{L}{2}\right) + B\text{cos}\left(\gamma\frac{L}{2}\right) \\ 0 = A\text{sen}\left(\gamma\frac{L}{2}\right) + B\text{cos}\left(\gamma\frac{L}{2}\right) \end{cases}$$

Somando e subtraindo uma equação da outra ficamos com

$$\begin{cases} 2B\text{cos}\left(\gamma\frac{L}{2}\right) = 0 \\ 2A\text{sen}\left(\gamma\frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Levando em consideração a positividade do problema e a simetria imposta, temos que  $A = 0$  e  $B \neq 0$ , já que para  $-\pi < \theta < 0$ ,  $\text{sen}(\theta) < 0$ , fere essas condições. Logo,

$$\text{cos}\left(\pm\gamma\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow \gamma\frac{L}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$

Novamente a positividade do problema nos limita a utilização do estado fundamental ( $n = 0$ ), já que para qualquer valor de  $n > 0$  teremos valores negativos de  $X(x)$  na região entre  $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ , ou seja,

$$\gamma\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow L = \frac{\pi}{\gamma}$$

Para que  $u(x, t)$  não vá a zero para  $t \rightarrow \infty$ , é necessário que  $\lambda_0 \geq 0$ , já que  $u(x, t) = \sum k_n X_n(x) e^{\lambda_n t}$ . Essas condições nos fornecem que:

$$\lambda_0 \geq 0 \Rightarrow \gamma = \sqrt{a_0 - \lambda_n} \leq \sqrt{a_0} \Rightarrow L \geq \frac{\pi}{\sqrt{a_0}}$$

No limite, onde  $\lambda_0 = 0$ , temos o valor crítico para o tamanho do fragmento,

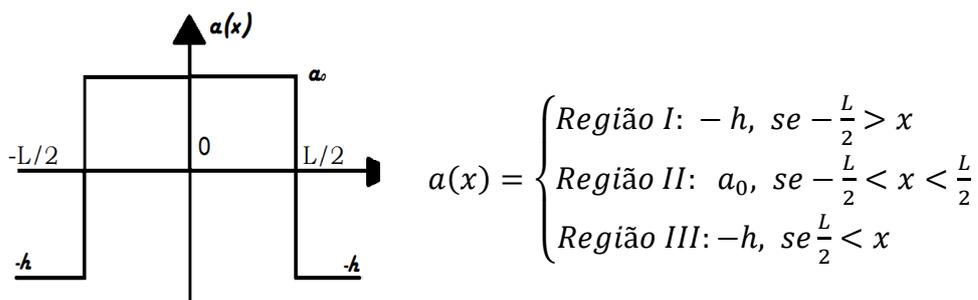
$$L_{si} = \frac{\pi}{\sqrt{a_0}} \quad (\text{C1.2})$$

Onde o índice *si* significa simples isolado, referência a um fragmento isolado. Este resultado utilizando as aproximações já foi validado anteriormente em diversos trabalhos (LIN, 2004; NELSON, 1998; PAMPLONA DA SILVA, 2008).

Verificamos com isso que o tamanho mínimo crítico que um fragmento deve ter para que seja possível a existência de vida para grandes intervalos de tempo, no caso dele estar completamente isolado do meio externo depende exclusivamente do grau de favorabilidade à vida do fragmento. Assim, se  $L < L_{si}$ , a densidade populacional no fragmento tende a zero em longos intervalos de tempo.

## Caso 2 – Um fragmento não isolado do meio externo

Uma função  $a(x)$  que representa um fragmento, em que a vida é possível, inserido em uma região imprópria a vida, porém não impossível é descrito na Figura 9.



**Figura 9 - Representação de um fragmento não isolado: uma ilha de tamanho L, com uma taxa de propiedade a vida  $a_0$  cercada por uma região imprópria a vida, onde o parâmetro  $h$  representa o grau de dificuldade à vida.**

**Fonte: Do autor.**

Observa-se de imediato que no caso de  $h \rightarrow \infty$ , retorna-se ao problema clássico de um fragmento totalmente isolado do meio externo, ou seja, em que o fragmento não apresenta interação com o meio externo, problema descrito anteriormente no caso 1.

Pretende-se resolver a equação 3.4.8 com a função  $a(x)$  descrita na Figura 9 para o caso de  $h$  finito, para isto, consideraremos as regiões I, II e III descritas também na Figura 9 separadamente, obtendo-se a solução em cada região, utilizando as condições de contorno e continuidade nas fronteiras. A parte espacial da função densidade populacional  $X(x)$  não é nula nas fronteiras, como no caso de um sistema isolado, ademais a função e sua derivada são contínuas em  $x = \pm \frac{L}{2}$ . Além disso, têm-se como condição de contorno deste problema as restrições  $X(\pm\infty) = 0$ .

Substituindo  $a(x)$  em 3.4.8 e utilizando as condições descritas temos:

### Regiões I e III

$$X_{xx}(x) = (\lambda_n + h)X = \gamma^2 X \text{ onde } \gamma = \sqrt{\lambda_n + h},$$

ou ainda,

$$X_I(x) = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}$$

e

$$X_{III}(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$$

onde A, B, C e D são constantes arbitrárias.

### Região II

$$X_{xx} - \beta^2 X = 0 \text{ onde } \beta = \sqrt{a_0 - \lambda_n}, \lambda_n \geq 0$$

$$X_{II}(x) = E \operatorname{sen}(\beta x) + F \cos(\beta x)$$

onde E e F são constantes arbitrárias.

De  $X(-\infty) = X(\infty) = 0$  temos

$$X_I(x) = Ae^{\gamma x} \text{ e } X_{III}(x) = De^{-\gamma x}$$

Da continuidade em  $\pm \frac{L}{2}$  temos:

$$Ae^{-\gamma \frac{L}{2}} = -E \operatorname{sen}\left(\beta \frac{L}{2}\right) + F \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right) \quad (\text{C2.1})$$

e

$$De^{-\gamma \frac{L}{2}} = E \operatorname{sen}\left(\beta \frac{L}{2}\right) + F \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right) \quad (\text{C2.2})$$

Da continuidade da derivada em  $\pm \frac{L}{2}$  temos que

$$\gamma Ae^{-\gamma \frac{L}{2}} = \beta E \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right) + \beta F \operatorname{sen}\left(\beta \frac{L}{2}\right) \quad (\text{C2.3})$$

e

$$-\gamma D e^{-\gamma \frac{L}{2}} = \beta E \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right) - \beta F \sin\left(\beta \frac{L}{2}\right) \quad (\text{C2.4})$$

Multiplicando (C2.1) e (C2.2) por  $\gamma$  e substituindo respectivamente em (C2.3) e (C2.4) obtemos

$$-\gamma E \sin\left(\beta \frac{L}{2}\right) + \gamma F \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right) = \beta E \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right) + \beta F \sin\left(\beta \frac{L}{2}\right) \quad (\text{C2.5})$$

e

$$-\gamma E \sin\left(\beta \frac{L}{2}\right) - \gamma F \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right) = \beta E \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right) - \beta F \sin\left(\beta \frac{L}{2}\right), \quad (\text{C2.6})$$

em que se somarmos e subtrairmos C2.5 de C2.6 e isolarmos  $\gamma$  chegamos a duas relações, que não podem ser satisfeitas simultaneamente.

$$\mathbf{condi\c{c}ao\ 1:} \quad \beta \tan\left(\beta \frac{L}{2}\right) = \gamma$$

$$\mathbf{condi\c{c}ao\ 2:} \quad \beta \cot\left(\beta \frac{L}{2}\right) = -\gamma$$

Como estamos tratando de um problema biológico, existe a obrigatoriedade de que a densidade de população só apresente valores positivos, já que não é possível a existência de uma quantidade negativa de indivíduos, condição essa conhecida como positividade. Logo, temos como solução única do problema a condição 1.

Podemos concluir, portanto que

$$L = \frac{2}{\beta} \arctan \frac{\gamma}{\beta}. \quad (\text{C2.7})$$

Estamos interessados em encontrar o menor autovalor não negativo para  $\lambda_n$ , ou seja,  $\lambda_0 \geq 0$ , o que nos gera  $\beta \leq \sqrt{a_0}$  e  $\gamma \geq \sqrt{h} \Rightarrow \gamma/\beta \geq \sqrt{\frac{h}{a_0}}$

$$L \geq \frac{2}{\sqrt{a_0}} \arctan \sqrt{\frac{h}{a_0}}. \quad (\text{C2.8})$$

Assim como no Caso 1 discutido anteriormente, no limite onde  $\lambda_0 = 0$  temos um valor crítico para o tamanho da ilha.

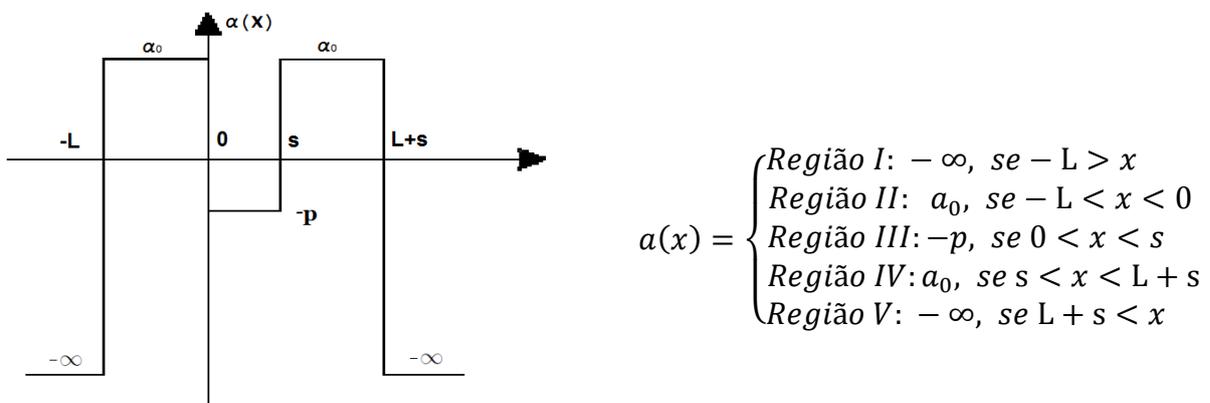
$$L_{sn} \geq \frac{2}{\sqrt{a_0}} \arctan \sqrt{\frac{h}{a_0}}, \quad (\text{C2.9})$$

onde o índice  $sn$  significa simples não isolado.

### Caso 3 – Sistema de 2 fragmentos idênticos isolados do meio externo

Estudamos até aqui o caso particular, mais simples que existe onde o sistema estudado é formado por apenas um fragmento onde a vida é possível e no seu entorno um ambiente desfavorável.

Neste caso particular estudaremos o que acontece com o tamanho mínimo do fragmento quando é introduzido outro fragmento idêntico que interaja com o primeiro, ou seja, que esteja a uma distância  $s$  do primeiro fragmento que seja possível a difusão entre fragmentos. Estamos interessados aqui no caso mais simples que é quando o segundo fragmento é idêntico ao primeiro, ou seja, o tamanho ( $L_1 = L_2 = L$ ) e a favorabilidade a vida ( $a_1 = a_2 = a_0$ ) dos dois fragmentos são iguais. O caso mais geral já foi estudado para alguns parâmetros (PAMPLONA DA SILVA, 2008). Um perfil que descreve este sistema pode ser representado pela função  $a(x)$  da Figura 10.



**Figura 10 - Representação de um sistema de dois fragmentos não isolados entre si, porém isolados do meio externo: duas ilhas idênticas de tamanho  $L$  e com uma taxa de propriedade à vida  $a_0$ , espaçadas por uma distância  $s$ , com taxa de desfavorabilidade a vida  $p$  cercadas por uma região totalmente imprópria a vida.**

**Fonte: Do autor.**

Estamos interessados em resolver a equação 3.4.8 para o perfil  $a(x)$  apresentado na Figura 10, o que faremos inicialmente para cada região separadamente.

#### **Regiões I e V**

Nas regiões I e V temos que a vida é completamente impossível, ou seja,

$$X_I(x) = 0$$

$$X_V(x) = 0$$

### Regiões II e IV

Nas regiões II e IV onde a vida é possível a equação toma a forma:

$$X_{xx}(x) = (\lambda_n - a_0)X(x) = -\gamma^2 X, \text{ com } \gamma^2 = a_0 - \lambda_n > 0$$

Precisamos encontrar uma função  $X_{II}(x)$ , cuja a segunda derivada é igual a uma constante vezes a própria função. Logo

$$X_{II}(x) = A\text{sen}(\gamma x) + B\text{cos}(\gamma x)$$

$$X_{IV}(x) = E\text{sen}(\gamma x) + F\text{cos}(\gamma x)$$

onde A, B, E e F são constantes arbitrárias a serem determinadas.

### Região III

$$X_{xx}(x) = (\lambda_n + p)X = \beta^2 X \text{ onde } \beta = \sqrt{\lambda_n + p}$$

$$X_{III}(x) = C e^{\beta x} + D e^{-\beta x}$$

com C e D constantes arbitrárias.

Precisamos determinar agora as constantes  $A, B, C, D, E$  e  $F$  para que seja possível encontrar uma relação geral do tamanho  $L$  do fragmento com as demais variáveis do problema. Para isso, utilizamos as condições de contorno e continuidade a seguir:

A. Continuidade de  $X(x)$

$$1. \quad x = -L$$

$$X_I(-L) = 0 = A\text{sen}(-\gamma L) + B\text{cos}(-\gamma L) = X_{II}(-L)$$

$$0 = -A\text{sen}(\gamma L) + B\text{cos}(\gamma L)$$

$$B = \frac{A\text{sen}(\gamma L)}{\text{cos}(\gamma L)} = A\tan(\gamma L), \quad (\text{C3.1})$$

ou seja,

$$X_{II}(x) = A(\text{sen}(\gamma x) + \tan(\gamma L)B\text{cos}(\gamma x))$$

$$2. \quad x = 0$$

$$X_{II}(0) = A\text{sen}(0) + B\text{cos}(0) = X_{III}(0) = C e^0 + D e^0$$

de onde obtemos

$$B = C + D. \quad (\text{C3.2})$$

De C3.1 e C3.2 obtemos a relação.

$$A \tan(\gamma L) = C + D. \quad (\text{C3.3})$$

$$3. \quad x = L + s$$

$$X_{IV}(L + s) = E \sin(\gamma(L + s)) + F \cos(\gamma(L + s)) = 0 = X_V(L + s),$$

ou ainda,

$$F = -E \tan(\gamma(L + s)), \quad (\text{C3.4})$$

logo

$$X_{IV}(x) = E(\sin(\gamma x) - \tan(\gamma(L + s))\cos(\gamma x)). \quad (\text{C3.5})$$

$$4. \quad x = s$$

$$X_{III}(s) = C e^{\beta s} + D e^{-\beta s} = E \sin(\gamma s) + F \cos(\gamma s) = X_{IV}(s).$$

Utilizando a relação encontrada para  $X_{IV}(x)$  em C3.5, temos

$$X_{IV}(s) = E(\sin(\gamma s) - \tan(\gamma(L + s))\cos(\gamma s)) = X_{III}(s) = C e^{\beta s} + D e^{-\beta s}$$

Utilizando as relações trigonométricas e algumas recombinações (apêndice C) podemos chegar na relação que é mais adequada para nossa análise:

$$-E \sin(\gamma L) = (C e^{\beta s} + D e^{-\beta s})\cos(\gamma(L + s)) \quad (\text{C3.6})$$

B. Continuidade de  $X'(x)$

Calculando inicialmente a derivada de  $X(x)$  para cada uma das regiões, obtemos as seguinte relações:

$$X'_{II}(x) = A \gamma \cos(\gamma x) - B \gamma \sin(\gamma x);$$

$$X'_{III}(x) = C \beta e^{\beta x} - D \beta e^{-\beta x};$$

$$X'_{IV}(x) = E \gamma \cos(\gamma x) - F \gamma \sin(\gamma x).$$

A continuidade nas fronteiras entre as regiões, fornece:

$$1. \quad X = 0$$

$$A \gamma \cos(\gamma 0) - B \gamma \sin(\gamma 0) = C \beta e^{\beta 0} - D \beta e^{-\beta 0}.$$

Do qual obtemos uma relação para  $A, C$  e  $D$ .

$$A \gamma = \beta(C - D) \quad (\text{C3.7})$$

$$2. \quad X = s$$

$$E \gamma \cos(\gamma s) - F \gamma \sin(\gamma s) = C \beta e^{\beta s} - D \beta e^{-\beta s},$$

ou ainda,

$$E \gamma \cos(\gamma L) = \beta(C e^{\beta s} - D e^{-\beta s})\cos(\gamma(L + s)). \quad (\text{C3.8})$$

Para eliminar  $E$  e  $A$ , podemos substituir as equações C3.3 em C3.7 e C3.6 em C3.8

$$\frac{C+D}{\tan(\gamma L)}\gamma = \beta(C - D) \quad (\text{C3.9})$$

$$-\frac{(Ce^{\beta s} + De^{-\beta s})\cos(\gamma(L+s))}{\sin(\gamma L)}\gamma\cos(\gamma L) = \beta(Ce^{\beta s} - De^{-\beta s})\cos(\gamma(L+s))$$

Simplificando, podemos escrever

$$-\frac{(Ce^{\beta s} + De^{-\beta s})}{\tan(\gamma L)} = \beta(Ce^{\beta s} - De^{-\beta s}) \quad (\text{C3.10})$$

$$\begin{pmatrix} -\left(\beta - \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right) & -\beta - \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)} \\ \left(\beta + \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)e^{\beta s} & \left(\beta - \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)e^{-\beta s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C3.11})$$

Temos como objetivo obter uma solução não trivial para este sistema. Logo, impomos que o determinante da matriz C3.11 seja nulo, o que fornece:

$$-\left(\beta - \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)\left(\beta - \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)e^{-\beta s} + \left(\beta + \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)\left(\beta + \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)e^{\beta s} = 0,$$

ou seja,

$$-\left(\beta - \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2 e^{-\beta s} + \left(\beta + \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2 e^{\beta s} = 0,$$

ou ainda,

$$-\left(\beta - \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2 e^{-\beta s} = -\left(\beta + \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2 e^{\beta s},$$

que realizando a distributiva fornece,

$$\left(\beta^2 - \frac{2\beta\gamma}{\tan(\gamma L)} + \left(\frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2\right)e^{-\beta s} = \left(\beta^2 + \frac{2\beta\gamma}{\tan(\gamma L)} + \left(\frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2\right)e^{\beta s}.$$

Realizando o rearranjo dos termos, temos que

$$e^{-\beta s}\left(\beta^2 + \left(\frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2\right) - e^{\beta s}\left(\beta^2 + \left(\frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2\right) = \frac{2\beta\gamma}{\tan(\gamma L)}(e^{\beta s} + e^{-\beta s})$$

$$\left(\beta^2 + \left(\frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2\right)(e^{-\beta s} - e^{\beta s}) = \frac{2\beta\gamma}{\tan(\gamma L)}(e^{\beta s} + e^{-\beta s}). \quad (\text{C3.12})$$

Dividindo ambos os lados da equação C3.12 por  $(e^{\beta s} + e^{-\beta s})$  e usando a relação

$$\tanh(\beta s) = \frac{(e^{\beta s} - e^{-\beta s})}{(e^{\beta s} + e^{-\beta s})}, \text{ temos}$$

$$\left( \beta^2 + \left( \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)} \right)^2 \right) \tanh(\beta s) = \frac{2\beta\gamma}{\tan(\gamma L)}. \quad (\text{C3.13})$$

Estamos interessados, assim como nos casos anteriores, no menor fragmento onde seja possível a existência de vida, sem que na solução haja a possibilidade de populações negativas. Esse resultado será expresso quando  $\lambda_n = 0$ , ou seja  $\gamma = \sqrt{a_0}$  e  $\beta = \sqrt{p}$ . Substituindo e rearranjando os termos em C3.13 obtemos

$$\left( p + \frac{a_0}{\tan^2(\sqrt{a_0}L)} \right) \tanh(\sqrt{p}s) = \frac{2\sqrt{pa_0}}{\tan(\sqrt{a_0}L)}$$

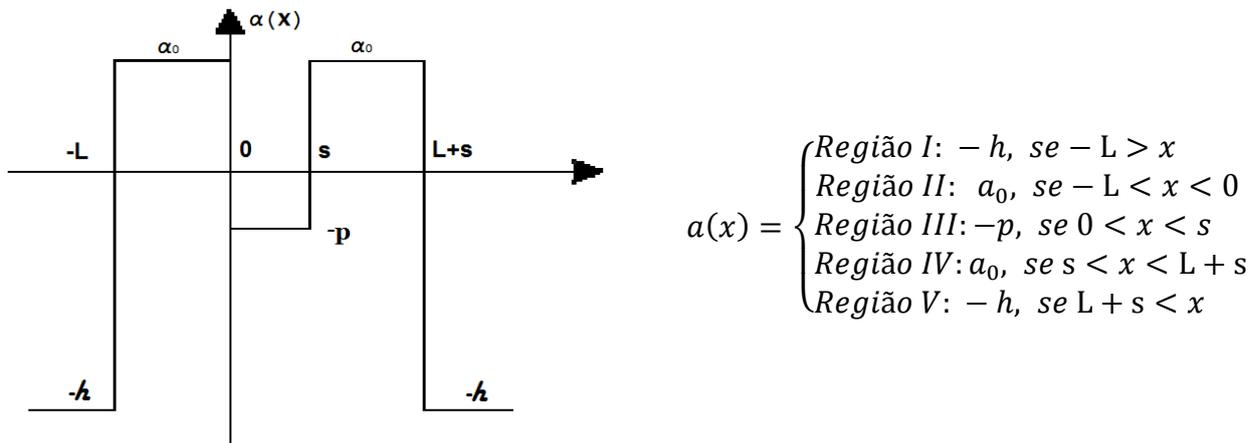
ou ainda

$$p \tan^2(\sqrt{a_0}L_{di}) \tanh(s\sqrt{p}) + a_0 \tanh(s\sqrt{p}) = 2\sqrt{pa_0} \tan(\sqrt{a_0}L_{di}) \quad (\text{C3.14})$$

onde temos uma relação implícita entre  $L_{di}$ ,  $p$ ,  $a_0$  e  $s$ . O índice  $di$  refere-se ao sistema duplo isolado. Existe uma outra forma de encontrar  $L_{di}$  isolado em função das demais variáveis, vide apêndice E.

#### Caso 4 – Sistema de 2 fragmentos idênticos não isolados do meio externo

Muito semelhante ao caso 3 discutido anteriormente, no caso 4 temos um sistema composto por 2 fragmentos, porém estes além de não estarem isolados entre si, eles não estão isolados do meio externo. Uma função  $a(x)$  que descreve essa situação pode ser definida pela função  $a(x)$  descrita na figura 11.



**Figura 11 - Representação de um sistema de dois fragmentos não isolados entre si nem do meio externo: duas ilhas idênticas de tamanho  $L$  e com uma taxa de propriedade à vida  $a_0$ , espaçadas por uma distância  $s$ , com taxa de desfavorabilidade à vida  $p$  cercadas por uma região desfavorável à vida com taxa de desfavorabilidade  $h$ .**

**Fonte: Do autor.**

Assim como no caso 3, estudaremos aqui um caso particular em que o sistema é formado por dois fragmentos de mesmo tamanho  $L_1 = L_2 = L$  e mesmo fator de favorabilidade a vida ( $a_1 = a_2 = a_0$ ). Além disso, consideraremos muitas vezes que o fator de desfavorabilidade à vida dentro e fora dos fragmentos seja único, ou seja,  $p = h$ .

Assim como nos casos anteriores, estamos interessados apenas no menor autovalor  $\lambda_0 \geq 0$ , cujo o caso crítico  $\lambda_0 = 0$  que gera a situação tamanho crítico para o qual o tamanho do fragmento  $L$  seja mínimo para a existência de vida. Portanto utilizaremos esta condição desde o começo da análise.

Assim como nos casos anteriores, estamos interessados em resolver a equação 3.4.8. para todas as regiões descritas por  $a(x)$ .

### **Regiões I e V**

Nas regiões I e V temos regiões impróprias a vida, ou seja, temos:

$$X_{xx}(x) = \theta^2 X, \text{ onde } \theta^2 = \lambda_0 + h \geq h$$

$$X_I(x) = Ae^{\theta x}$$

$$X_V(x) = Be^{-\theta x}$$

onde A e B são constantes arbitrárias e já aplicamos a condição assintótica  $X(\pm\infty) = 0$ .

### Regiões II e IV

Nas regiões II e IV onde a vida é possível a equação toma a forma:

$$X_{xx}(x) = (\lambda_n - a_0)X(x) = -\gamma^2 X, \text{ com } \gamma^2 = a_0 - \lambda_0 \leq a_0 > 0$$

Precisamos encontrar uma função  $X_{II}(x)$ , cuja a segunda derivada é igual a uma constante vezes a própria função. Logo

$$X_{II}(x) = C\text{sen}(\gamma x) + D\text{cos}(\gamma x)$$

$$X_{IV}(x) = G\text{sen}(\gamma x) + H\text{cos}(\gamma x)$$

onde C, D, G e H são constantes arbitrárias.

### Região III

$$X_{xx}(x) = (\lambda_n + p)X = \beta^2 X \text{ onde } \beta = \sqrt{\lambda_0 + p} \geq \sqrt{p}$$

com solução dada por

$$X_{III}(x) = Ee^{\beta x} + Fe^{-\beta x}$$

onde E e F são constantes arbitrárias.

Para encontrar a relação entre os parâmetros, vamos utilizar a continuidade de  $X(x)$  e sua derivada nas fronteiras entre as regiões.

A. Continuidade de  $X(x)$

1.  $x = -L$

$$\begin{aligned} X_I(-L) &= Ae^{-\theta L} = C\text{sen}(-\gamma L) + D\text{cos}(-\gamma L) = X_{II}(-L) \\ Ae^{-\theta L} &= -C\text{sen}(\gamma L) + D\text{cos}(\gamma L) \end{aligned} \tag{C4.1}$$

2.  $x = 0$

$$X_{II}(0) = C\text{sen}(0) + D\text{cos}(0) = X_{III}(0) = Ee^0 + Fe^0$$

$$D = E + F \tag{C4.2}$$

3.  $x = s$

$$X_{III}(s) = Ee^{\beta s} + Fe^{-\beta s} = G\text{sen}(\gamma s) + H\text{cos}(\gamma s) = X_{IV}(s) \tag{C4.3}$$

4.  $x = L + s$

$$X_{IV}(L + s) = G\text{sen}(\gamma(L + s)) + H\text{cos}(\gamma(L + s)) = Be^{-\theta(L+s)} = X_V(L + s) \tag{C4.4}$$

B. Continuidade da derivada de  $X(x)$

Primeiramente, precisamos calcular as derivadas das funções em cada região.

$$X'_I(x) = A\theta e^{\theta x}$$

$$X'_{II}(x) = C\gamma \cos(\gamma x) - D\gamma \sin(\gamma x)$$

$$X'_{III}(x) = E\beta e^{\beta x} - F\beta e^{-\beta x}$$

$$X'_{IV}(x) = G\gamma \cos(\gamma x) - H\gamma \sin(\gamma x)$$

$$X'_V(x) = -B\theta e^{-\theta x}$$

1.  $x = -L$

$$A\theta e^{-\theta L} = C\gamma \cos(-\gamma L) - D\gamma \sin(-\gamma L),$$

ou seja,

$$A\theta e^{-\theta L} = C\gamma \cos(\gamma L) + D\gamma \sin(\gamma L). \quad (\text{C4.5})$$

2.  $x = 0$

$$C\gamma \cos(\gamma 0) - D\gamma \sin(\gamma 0) = E\beta e^{\beta 0} - F\beta e^{-\beta 0}$$

$$C\gamma = \beta(E - F) \quad (\text{C4.6})$$

3.  $x = s$

$$G\gamma \cos(\gamma s) - H\gamma \sin(\gamma s) = E\beta e^{\beta s} - F\beta e^{-\beta s} \quad (\text{C4.7})$$

4.  $x = L + s$

$$G\gamma \cos(\gamma(L + s)) - H\gamma \sin(\gamma(L + s)) = -B\theta e^{-\theta(L+s)} \quad (\text{C4.8})$$

C. Associando as relações que encontramos da continuidade obtemos:

1. Em  $x = -L$ , associando C4.1 com C4.5, temos

$$C\gamma \cos(\gamma L) + D\gamma \sin(\gamma L) = -C\theta \sin(\gamma L) + D\theta \cos(\gamma L),$$

ou ainda,

$$C[\gamma \cos(\gamma L) + \theta \sin(\gamma L)] = D[\theta \cos(\gamma L) - \gamma \sin(\gamma L)]$$

donde extraímos:

$$C = D \frac{[\theta \cos(\gamma L) - \gamma \sin(\gamma L)]}{[\gamma \cos(\gamma L) + \theta \sin(\gamma L)]} \quad (\text{C4.9})$$

2.  $x = 0$ , associamos C4.2 com C4.6,

$$D\beta = \beta(E + F)$$

$$C\gamma = \beta(E - F).$$

Somando e subtraindo as relações acima podemos escrever

$$2\beta E = C\gamma + D\beta$$

$$2\beta F = D\beta - C\gamma.$$

Substituindo C, obtido com C4.9, nas equações acima obtemos

$$2\beta E = D \frac{[\theta \cos(\gamma L) - \gamma \operatorname{sen}(\gamma L)]}{[\gamma \cos(\gamma L) + \theta \operatorname{sen}(\gamma L)]} \gamma + D\beta = D \left( \frac{[\theta \cos(\gamma L) - \gamma \operatorname{sen}(\gamma L)]}{[\gamma \cos(\gamma L) + \theta \operatorname{sen}(\gamma L)]} \gamma + \beta \right) \quad (\text{C4.10})$$

$$2\beta F = D\beta - D \frac{[\theta \cos(\gamma L) - \gamma \operatorname{sen}(\gamma L)]}{[\gamma \cos(\gamma L) + \theta \operatorname{sen}(\gamma L)]} \gamma = D \left( \beta - \frac{[\theta \cos(\gamma L) - \gamma \operatorname{sen}(\gamma L)]}{[\gamma \cos(\gamma L) + \theta \operatorname{sen}(\gamma L)]} \gamma \right). \quad (\text{C4.11})$$

3. Em  $x = s$ , temos C4.3 e C4.7

$$G\gamma \cos(\gamma s) - H\gamma \operatorname{sen}(\gamma s) = E\beta e^{\beta s} - F\beta e^{-\beta s}$$

$$\beta G \operatorname{sen}(\gamma s) + \beta H \cos(\gamma s) = E\beta e^{\beta s} + F\beta e^{-\beta s}.$$

Subtraindo e somando as relações acima obtemos:

$$2E\beta e^{\beta s} = G(\gamma \cos(\gamma s) + \beta \operatorname{sen}(\gamma s)) + H(\beta \cos(\gamma s) - \gamma \operatorname{sen}(\gamma s)) \quad (\text{C4.12})$$

e

$$2F\beta e^{\beta s} = G(\beta \operatorname{sen}(\gamma s) - \gamma \cos(\gamma s)) + H(\beta \cos(\gamma s) + \gamma \operatorname{sen}(\gamma s)). \quad (\text{C4.13})$$

4. Em  $x = L + s$ , de C4.4 e C4.8, encontramos que

$$G\gamma \cos(\gamma(L + s)) - H\gamma \operatorname{sen}(\gamma(L + s)) = -B\theta e^{-\theta(L+s)}$$

$$G\theta \operatorname{sen}(\gamma(L + s)) + H\theta \cos(\gamma(L + s)) = B\theta e^{-\theta(L+s)}$$

Se substituirmos uma relação encontrada em 4 na outra, podemos escrever

$$G\theta \operatorname{sen}(\gamma(L + s)) + H\theta \cos(\gamma(L + s)) = -[G\gamma \cos(\gamma(L + s)) - H\gamma \operatorname{sen}(\gamma(L + s))],$$

ou ainda,

$$G = -H \frac{[\theta \cos(\gamma(L+s)) - \gamma \operatorname{sen}(\gamma(L+s))]}{[\gamma \cos(\gamma(L+s)) + \theta \operatorname{sen}(\gamma(L+s))]} \quad (\text{C4.14})$$

Substituindo C4.14 nas relações C4.12 e C4.13 temos

$$2E\beta e^{\beta s} = -H \frac{[\theta \cos(\gamma(L+s)) - \gamma \sin(\gamma(L+s))]}{[\gamma \cos(\gamma(L+s)) + \theta \sin(\gamma(L+s))]} (\gamma \cos(\gamma s) + \beta \sin(\gamma s)) + H (\cos(\gamma s) - \gamma \sin(\gamma s)) \quad (\text{C4.15})$$

$$2F\beta e^{\beta s} = -H \frac{[\theta \cos(\gamma(L+s)) - \gamma \sin(\gamma(L+s))]}{[\gamma \cos(\gamma(L+s)) + \theta \sin(\gamma(L+s))]} (\beta \sin(\gamma s) - \gamma \cos(\gamma s)) + H (\cos(\gamma s) + \gamma \sin(\gamma s)). \quad (\text{C4.16})$$

Vamos introduzir a notação:

$$\gamma = \sqrt{a_0}, \beta = \sqrt{p}, \theta = \sqrt{h}, R_1 = \frac{[\theta \cos(\gamma L) - \gamma \sin(\gamma L)]}{[\gamma \cos(\gamma L) + \theta \sin(\gamma L)]}, R_2 = \frac{[\theta \cos(\gamma(L+s)) - \gamma \sin(\gamma(L+s))]}{[\gamma \cos(\gamma(L+s)) + \theta \sin(\gamma(L+s))]}.$$

$-m_1 = (\gamma \cos(\gamma s) + \beta \sin(\gamma s)); m_2 = \beta \cos(\gamma s) - \gamma \sin(\gamma s), m_3 = \beta \sin(\gamma s) - \gamma \cos(\gamma s), m_4 = \beta \cos(\gamma s) + \gamma \sin(\gamma s)$ . Substituindo C4.15 e C4.16 em C4.10 e C4.11 respectivamente, podemos eliminar  $E$  e  $F$  escrevendo um sistema para  $D$  e  $H$ , como segue.

$$2\beta E = D(R_1\gamma + \beta)$$

$$2\beta F = D(\beta - R_1\gamma)$$

$$2E\beta = H(m_1R_2 + m_2)e^{-\beta s}$$

$$2F\beta = H(m_3R_2 + m_4)e^{\beta s}.$$

Ou ainda,

$$D(R_1\gamma + \beta) = H(m_1R_2 + m_2)e^{-\beta s};$$

$$D(\beta - R_1\gamma) = H(m_3R_2 + m_4)e^{\beta s};$$

que na forma matricial pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} (m_1R_2 + m_2)e^{-\beta s} & -(R_1\gamma + \beta) \\ (m_3R_2 + m_4)e^{\beta s} & (R_1\gamma - \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para solução não trivial, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo, gerando a equação secular nos parâmetros  $L, a_0, p, h$  e  $s$ ,

$$(m_1R_2 + m_2)e^{-\beta s}(R_1\gamma - \beta) + (R_1\gamma + \beta)(m_3R_2 + m_4)e^{\beta s} = 0. \quad (\text{C4.17})$$

Esta relação pode ser utilizada para determinar  $L_{dn}$ , onde o índice  $dn$  refere-se a sistema de fragmentos duplo não isolados porém, encontramos aqui uma equação onde é impossível isolar  $L_{dn}$  em função dos outros parâmetros. Para obtermos os valores numéricos de  $L_{dn}$  que satisfazem a equação C4.17, utilizaremos aqui o método numérico da bissecção para encontrar as raízes da função implícita.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este problema envolve uma grande gama de variáveis que podem ser estudadas separadamente. Focaremos nosso estudo no que diz respeito ao tamanho mínimo dos fragmentos, tendo como parâmetros a favorabilidade à vida dentro do fragmento e quando for o caso a distância entre os fragmentos e as dificuldades à vida entre os fragmentos e fora do sistema.

- Caso 1: Fragmento simples isolado ( $L_{si}$ )

Obtivemos para o caso de um fragmento completamente isolado do meio externo um tamanho mínimo que depende exclusivamente do grau de favorabilidade à vida do fragmento.

$$L_{si}(a_0) = \frac{\pi}{\sqrt{a_0}}$$

Para comparações futuras, adotaremos arbitrariamente o caso específico onde  $a_0 = 1$  que nos resulta um resultado bastante interessante

$$L_{si}(1) = \pi.$$

Como estamos tratando aqui de um comprimento de fragmento e o número  $\pi$  é irracional, é interessante considerar o caso onde  $a_0 = \pi^2$  que resulta em

$$L_{si}(\pi^2) = 1.$$

- Caso 2: Fragmento Simples não isolado ( $L_{sn}$ )

No caso do fragmento analisado não estar completamente isolado do meio externo, o mesmo depende do quão isolado ele está ( $h$ ) e do grau de favorabilidade à vida ( $a_0$ ).

$$L_{sn}(a_0, h) = \frac{2}{\sqrt{a_0}} \arctan \sqrt{\frac{h}{a_0}} = \frac{2}{\sqrt{a_0}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{h}{a_0}}$$

Assim como no caso 1, podemos adotar arbitrariamente  $a_0 = 1$ , obtendo como resultado um tamanho mínimo de fragmento que depende exclusivamente do grau de desfavorabilidade à vida  $h$

$$L_{sn}(1, h) = 2 \arctan \sqrt{h}$$

Uma forma simples de validar esta relação é verificar o que acontece quando  $h \rightarrow \infty$ . Neste caso, teríamos que retornar ao problema discutido no caso 1 de um sistema formado por um fragmento completamente isolado do meio externo. Calculando o limite

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{a_0}} \arctan \sqrt{\frac{h}{a_0}} = \frac{2}{\sqrt{a_0}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a_0}} = L_{si},$$

temos

$$\lim_{h \rightarrow \infty} L_{sn} = L_{si}$$

Temos aqui uma solução é coerente com o encontrado para o fragmento isolado da literatura (SKELLAM, 1951; KENKRE, 2008).

- Caso 3: Sistema de 2 fragmentos isolados do meio externo ( $L_{di}$ )

Quando temos 2 fragmentos idênticos, conectados entre si, porém isolados do meio externo, a relação que encontramos para o menor fragmento possível é:

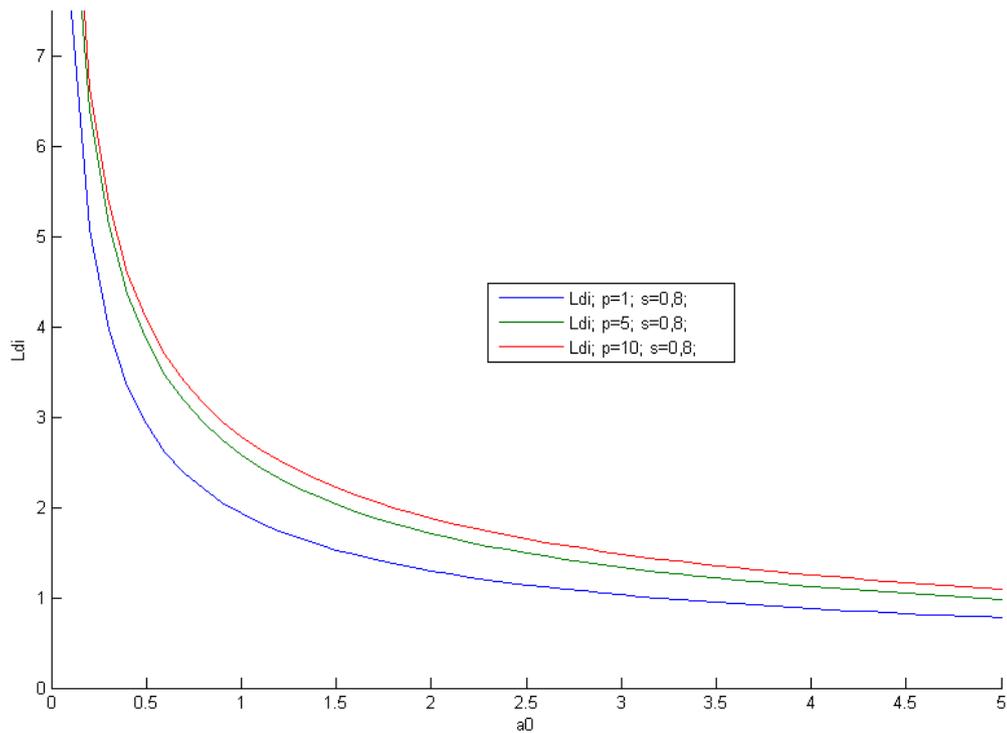
$$p \tan^2(a_0 L_{di}) \tanh(s\sqrt{p}) + a_0 \tanh(s\sqrt{p}) = 2\sqrt{pa_0} \tan(\sqrt{a_0} L_{di}).$$

Neste caso, o tamanho mínimo do fragmento depende da distância entre os fragmentos, a dificuldade à vida que existe no espaço que os separa, do grau de favorabilidade à vida em cada um dos fragmentos que no caso é único.

Encontramos também para este caso a relação explícita para  $L_{di}(s, p, a_0)$  (Apêndice E):

$$L_{di} = \frac{\pi}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} \operatorname{arccot} \left( \frac{\sqrt{p} \tanh\left(\frac{\sqrt{p}s}{2}\right)}{\sqrt{a_0}} \right).$$

Pretendemos aqui estudar a relação entre o grau de favorabilidade à vida dentro dos fragmentos com o tamanho mínimo que ele deve ter, fixando-se os parâmetros desfavorabilidade à vida e distância entre os fragmentos.

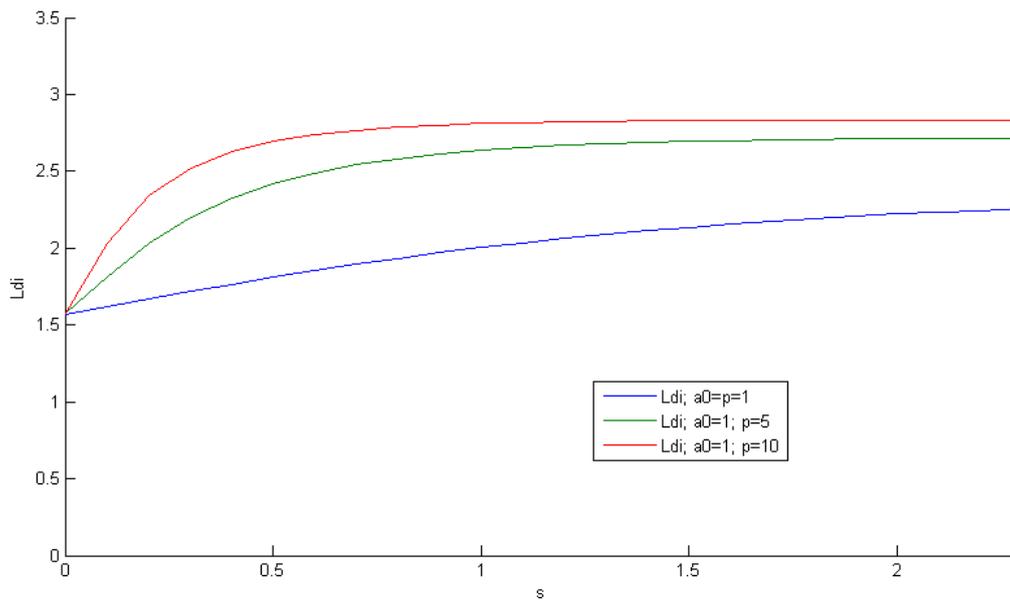


**Figura 12 - Gráfico comparativo entre o tamanho mínimo de fragmentos  $L_{di}$  em relação à taxa de favorabilidade à vida no mesmo, no caso de um sistema com dois fragmentos conectados entre si e isolados do meio externo.**

**Fonte: Do autor.**

Quando observamos o comportamento do tamanho  $L_{di}$  em função da favorabilidade à vida dentro do fragmento, podemos verificar que a medida que a condição é melhorada dentro do fragmento, o tamanho mínimo do fragmento tende a diminuir, mas nunca assintoticamente para zero, o que é bastante razoável, pois um fragmento de tamanho nulo significaria a ausência de fragmento.

O menor tamanho que obtivemos para  $L_{di}$ , aconteceu quando o grau de desfavorabilidade a vida entre os fragmentos era o menor possível, visto que até aqui fixamos aqui a distância entre os fragmentos.



**Figura 13 - Gráfico comparativo entre o tamanho mínimo de fragmentos  $L_{di}$  em relação à distância entre os fragmentos.**

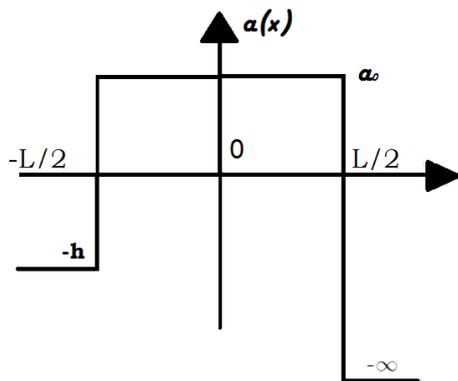
**Fonte: Do autor.**

De imediato, podemos observar que independente do grau de desfavorabilidade à vida empregado entre os fragmentos, quando a distância entre os fragmentos é zero ( $s = 0$ ), cada fragmento assume o valor de metade de um fragmento simples isolado, ou seja,

$$L_{di}(s = 0, a_0 = 1) = \frac{L_{si}(a_0 = 1)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Para o caso de  $a_0 = 1$ , obtivemos o valor de  $L_{di} = \frac{\pi}{2}$ , quando  $s = 0$ , ou seja, retomamos aqui o problema de um fragmento simples isolado, visto que não existe espaçamento entre os fragmentos e para fora do sistema, temos uma condição infinitamente dura que gera isolamento dos fragmentos com o meio externo descrito na Figura 8 e resolvido no caso 1.

Observamos no gráfico da Figura 13 que, em relação à distância  $s$  entre os fragmentos, o tamanho mínimo  $L_{di}$  atinge um valor limite para pequenos valores de  $s$ , estabilizando rapidamente neste valor. Observamos ainda que não importa o quão longe um fragmento está do outro, eles nunca atingem o valor encontrado para o sistema de um fragmento isolado. Este resultado é bastante razoável, visto que mesmo isolando um fragmento do outro pela distância entre eles, temos aqui que cada fragmento é completamente isolado do meio externo por uma das extremidades e a outra fronteira apresenta uma condição não tão dura. Uma função que poderia apresentar este resultado encontra-se na Figura 14.



$$a(x) = \begin{cases} \text{Região I: } -p, & \text{se } -\frac{L}{2} > x \\ \text{Região II: } a_0, & \text{se } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ \text{Região III: } -\infty, & \text{se } \frac{L}{2} < x \end{cases}$$

**Figura 14 - Representação de um sistema de um fragmento isolado de um lado, porém não completamente isolado do outro lado, com grau de desfavorabilidade a vida  $p$ .**

**Fonte: Do autor.**

Observamos na Figura 14 um fragmento em um sistema de uma única ilha isolada por um lado e desfavorável à vida pelo outro lado com grau de desfavorabilidade  $p$ . Neste caso, temos um sistema intermediário entre os sistemas estudados no caso 1 e no caso 2.

A predição do tamanho mínimo que um fragmento deve ter em um sistema, descrito pela Figura 14, foi obtida neste trabalho exclusivamente pelo distanciamento entre os fragmentos de um sistema duplo isolado. Para trabalhos futuros, a busca pela solução analítica do problema é um bom objeto de estudo, podendo validar ou não o resultado aqui encontrado.

Observamos ainda que quando o grau de favorabilidade e desfavorabilidade são ambos iguais à unidade temos o tamanho mínimo do fragmento aumentando, conforme aumenta-se a distância entre os fragmentos, porém de forma muito menos acentuada. Este resultado levanta uma questão; se isso ocorre sempre que a razão entre  $a_0$  e  $p$  for igual a unidade.

Uma continuação natural do estudo deste caso seria o estudo de um parâmetro  $d(p, s)$  que atrele os parâmetros  $p$  e  $s$ , sendo este um parâmetro de dificuldade de difusão entre os fragmentos.

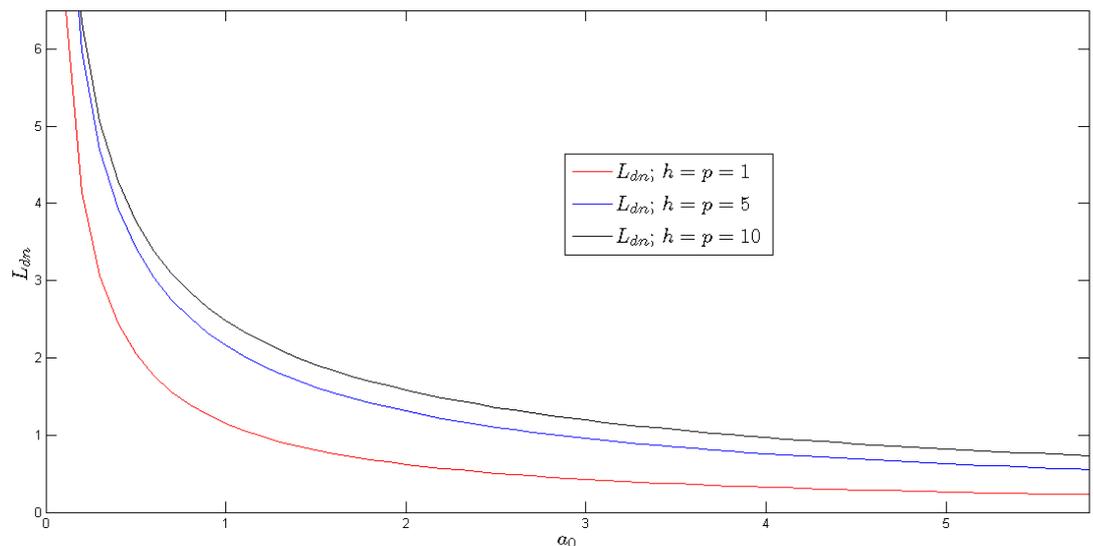
- Caso 4: Sistema de 2 fragmentos não isolados, nem entre si, nem do meio externo ( $L_{dn}$ ).

Para o caso de 2 fragmentos não isolados entre si, obtivemos uma relação onde é impossível explicitar  $L_{dn}$  em função dos outros parâmetros do problema. Porém, utilizando métodos computacionais é possível encontrar o tamanho mínimo em função dos parâmetros do problema.

$$(m_1 R_2 + m_2) e^{-\beta s} (R_1 \gamma - \beta) + (R_1 \gamma + \beta) (m_3 R_2 + m_4) e^{\beta s} = 0,$$

onde,  $R_1 = \frac{[\theta \cos(\gamma L) - \gamma \text{sen}(\gamma L)]}{[\gamma \cos(\gamma L) + \theta \text{sen}(\gamma L)]}$ ,  $R_2 = \frac{[\theta \cos(\gamma(L+s)) - \gamma \text{sen}(\gamma(L+s))]}{[\gamma \cos(\gamma(L+s)) + \theta \text{sen}(\gamma(L+s))]}$ .  $-m_1 = (\gamma \cos(\gamma s) + \beta \text{sen}(\gamma s))$ ;  $m_2 = \beta \cos(\gamma s) - \gamma \text{sen}(\gamma s)$ ,  $m_3 = \beta \text{sen}(\gamma s) - \gamma \cos(\gamma s)$ ,  $m_4 = \beta \cos(\gamma s) + \gamma \text{sen}(\gamma s)$ .

Quando observamos agora o comportamento do tamanho  $L_{dn}$  em função da favorabilidade a vida  $a_0$  dentro do fragmento (Figura 15), podemos verificar que, assim como no caso anterior, à medida que a condição é melhorada, o tamanho mínimo do fragmento tende a diminuir, porém desta vez os fragmentos tendem a valores mais próximos de zero, uma vez que não existe uma barreira brusca entre o sistema de fragmentos e seu entorno.

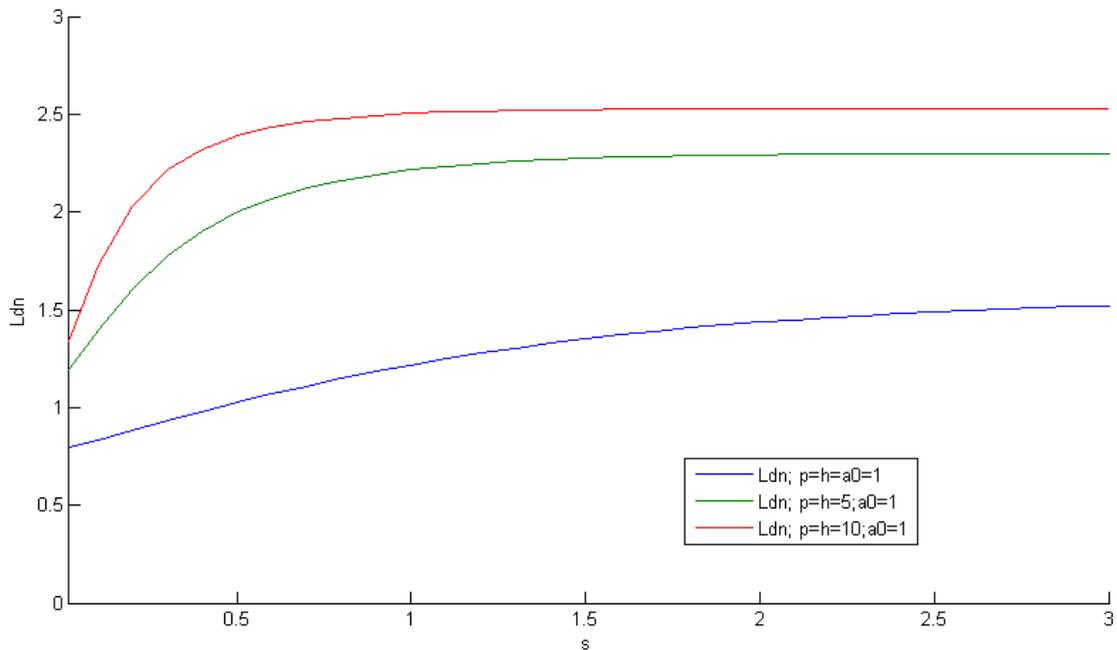


**Figura 15 - Gráfico comparativo entre o tamanho mínimo de fragmentos  $L_{dn}$  em relação à taxa de favorabilidade à vida no memso, no caso de sistema com dois fragmentos isolados do meio externo.**

**Fonte: Do autor.**

Assim como no caso 3, conforme aumentamos o grau de favorabilidade à vida dentro do fragmento, menor ele precisa ser para possibilitar a existência de vida em seu interior para grandes tempos. Notamos aqui que o tamanho mínimo neste caso é menor do que o caso anterior (caso 3), o que é razoável, visto que no caso 4 não temos nenhuma região com condições de vida tão duras quanto no caso 3.

Notamos ainda uma grande variação no tamanho do fragmento na região  $0 < a_0 < 2$ , para todos os valores de  $p = h$  analisados.



**Figura 16 - Gráfico comparativo entre o tamanho mínimo de fragmentos  $L_{dn}$  em relação à distância entre os fragmentos.**

**Fonte: Do autor.**

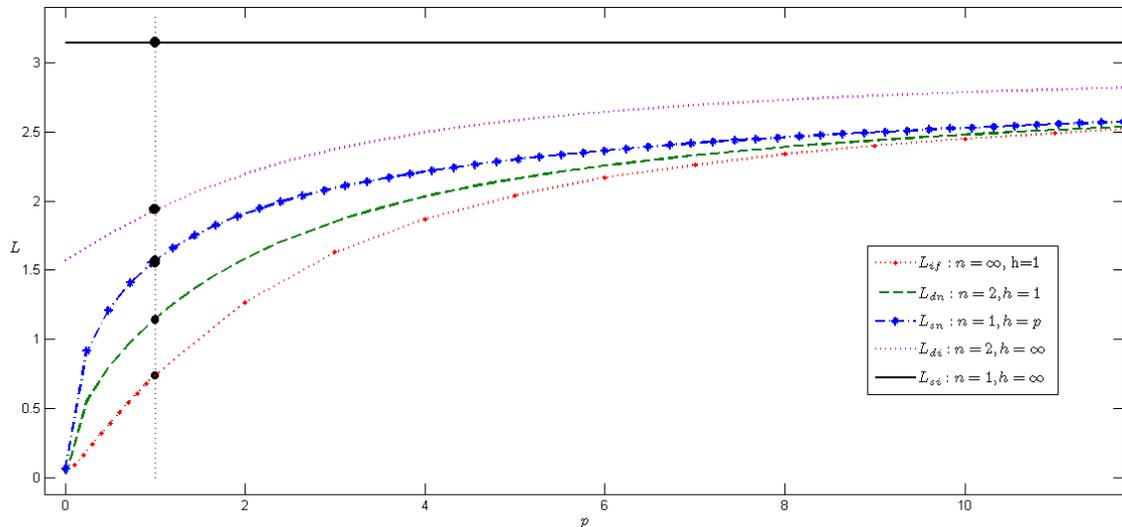
Como forma de resumir os resultados aqui obtidos, sintetizamos todos os casos em uma tabela. Para efeito de comparação, se adotarmos arbitrariamente o valor de  $p = h = a_0 = 1$  nos problemas de fragmentos não isolados do meio externo,  $p = a_0 = 1$  e  $h = \infty$  nos casos de fragmentos isolados e  $s = 0,8$  nos casos de problemas de 2 e infinitos fragmentos, pode-se comparar os diferentes casos analisados neste trabalho, obtendo assim um valor numérico para o tamanho mínimo do fragmento em todos os casos analisados.

**Tabela 1: Comparativo entre os tamanhos mínimos dos fragmentos para que seja viável a vida nos casos de uma e duas ilhas isoladas e não isoladas e infinitas ilhas de mesmo tamanho.**  $*R_1 = \frac{[\theta \cos(\gamma L) - \gamma \text{sen}(\gamma L)]}{[\gamma \cos(\gamma L) + \theta \text{sen}(\gamma L)]}$ ,  $R_2 = \frac{[\theta \cos(\gamma(L+s)) - \gamma \text{sen}(\gamma(L+s))]}{[\gamma \cos(\gamma(L+s)) + \theta \text{sen}(\gamma(L+s))]}$ ,  $-m_1 = (\gamma \cos(\gamma s) + \beta \text{sen}(\gamma s))$ ;  $m_2 = \beta \cos(\gamma s) - \gamma \text{sen}(\gamma s)$ ,  $m_3 = \beta \text{sen}(\gamma s) - \gamma \cos(\gamma s)$ ,  $m_4 = \beta \cos(\gamma s) + \gamma \text{sen}(\gamma s)$ . **\*\* resolvido numericamente para o caso de infinitos fragmentos**

| Situação  | Tamanho mínimo do fragmento (analítico)  | caso particular                      | Tamanho mínimo do fragmento |
|---|--|--------------------------------------|-----------------------------|
| <b>1 fragmento isolado</b>  | $L_{si} = \frac{\pi}{\sqrt{a_0}}$  | $h = \infty$<br>$a_0 = 1$            | $L_{si} = \pi$              |
| <b>1 fragmento não isolado</b>                                      | $L_{sn} = \frac{2}{\sqrt{a_0}} \arctan \sqrt{\frac{h}{a_0}}$   | $h = 1$<br>$a_0 = 1$                 | $L_{sn} = 1,57$             |
| <b>2 fragmentos não isolados entre si, isolados do meio externo</b> | $ptg^2(a_0 L_{di}) \tanh(s\sqrt{p}) + a_0 \tanh(s\sqrt{p}) = 2\sqrt{pa_0} tg(\sqrt{a_0} L_{di})$             | $h = \infty$<br>$a_0 = 1$<br>$p = 1$ | $L_{di} = 1,93$             |
| <b>2 fragmentos não isolados</b>                                    | $(m_1 R_2 + m_2) e^{-\beta s} (R_1 \gamma - \beta) + (R_1 \gamma + \beta) (m_3 R_2 + m_4) e^{\beta s} = 0^*$ | $h = 1$<br>$a_0 = 1$<br>$p = 1$      | $L_{dn} = 1,15$             |
| <b>Infinitos fragmentos (KRAENKEL, 2010)</b>                        | **   | $a_0 = 1$<br>$p = 1$                 | $L_{if} = 0,74$             |

Fonte: Do autor.

Com base na tabela 1, plotemos inicialmente um gráfico que compara os tamanhos mínimos de fragmentos em todos os casos estudados aqui e o caso estudado por Kraenkel de infinitos fragmentos idênticos, em relação ao grau de desfavorabilidade à vida  $p$  entre os fragmentos (Figura 17).



**Figura 17 - Relação entre o tamanho mínimo crítico dos fragmentos e o grau de não propiedade à vida. Comparação entre os tamanhos críticos para os diferentes casos: uma ilha isolada (SKELLAN, 1951), uma ilha não isolada com os casos de duas ilhas não isoladas (PAMPLONA DA SILVA, 2012), duas ilhas isoladas (PAMPLONA DA SILVA, 2008) e o caso de infinitas ilhas de mesmo tamanho espaçadas por regiões hostis a vida (KRAENKEL, 2010).**

**Fonte: Do autor.**

O gráfico da Figura 17 traz que, no caso particular de  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{1}$ ; para um fragmento não isolado têm-se um tamanho mínimo  $\mathbf{L}_{sn}(\mathbf{h})$  (caso 2) que depende basicamente do grau de isolamento do meio externo a que ele está sujeito. Verifica-se que a introdução de um outro fragmento idêntico e próximo a este ( $\mathbf{s} = \mathbf{0,8}$ ) gera uma difusão entre eles, de modo que o tamanho mínimo de cada um deles seja menor que o caso em que temos apenas um fragmento, ou ainda,  $\mathbf{L}_{dn}(\mathbf{p}, \mathbf{h}) < \mathbf{L}_{sn}(\mathbf{h})$ . Pode-se verificar ainda que a introdução de mais fragmentos próximos a estes (no caso infinitos fragmentos distanciados  $\mathbf{s} = \mathbf{0,8}$  entre si) permite um tamanho mínimo a cada fragmento  $\mathbf{L}_{if}(\mathbf{p})$  (o índice **if** refere-se a infinitos fragmentos) ainda menor, de modo que  $\mathbf{L}_{if}(\mathbf{p}) < \mathbf{L}_{dn}(\mathbf{p}, \mathbf{h}) < \mathbf{L}_{sn}(\mathbf{h})$ , como pode ser verificado na tabela 1, salvo quando  $\mathbf{p} \rightarrow \infty$ , pois neste limite, todos os casos se reduzem ao de um fragmento isolado, ou seja,  $\mathbf{L}_{if}(\infty) = \mathbf{L}_{dn}(\infty) = \mathbf{L}_{sn}(\infty) = \mathbf{L}_{si} = \pi$ .

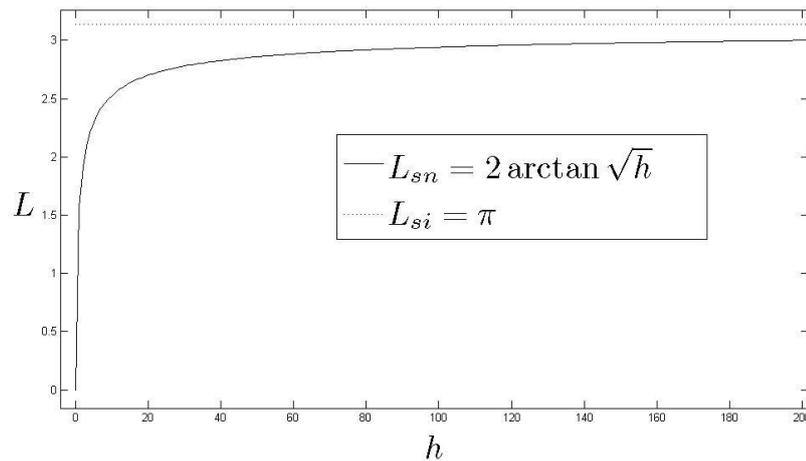
O caso de infinitos fragmentos não apresenta solução analítica e foi calculado a partir da solução numérica introduzindo periodicidade para  $a(x)$  para infinitos fragmentos de mesmo tamanho, mesmo grau de favorabilidade e espaçados de uma mesma distância  $s$  entre si.

#### 4.1 COMPARAÇÃO ENTRE OS CASOS 1 E 2

Nos casos 1 e 2, tratamos de sistemas compostos apenas por um fragmento e já vimos que no limite para grandes graus de desfavorabilidade à vida fora do fragmento estamos falando do mesmo problema. Com isso, pretendemos esgotar os parâmetros destes problemas buscando a relação entre o grau de favorabilidade e desfavorabilidade à vida do sistema com o tamanho mínimo que o fragmento deve ter para prosperar vida no mesmo.

Vamos comparar como se comporta o tamanho mínimo de um fragmento quando este fragmento está completamente isolado do meio externo com o caso em que ele está imerso em uma região pouco propícia à vida, mas não impossível. Vamos considerar inicialmente o caso onde o grau de favorabilidade à vida em ambos os casos seja fixo, ou seja,  $a_0 = 1$ . No caso do fragmento isolado, temos que ele depende exclusivamente do grau de favorabilidade à vida, ou seja, ao fixar este valor teremos como resultado uma constante no tamanho mínimo do fragmento. Já o fragmento quando não está isolado, depende além do grau de favorabilidade, também do grau de dificuldade à vida fora do fragmento.

Plotemos inicialmente um gráfico que relaciona o tamanho crítico do fragmento com o grau de dificuldade a vida fora do mesmo, reproduzindo um resultado apresentado por PAMPLONA DA SILVA (2008).

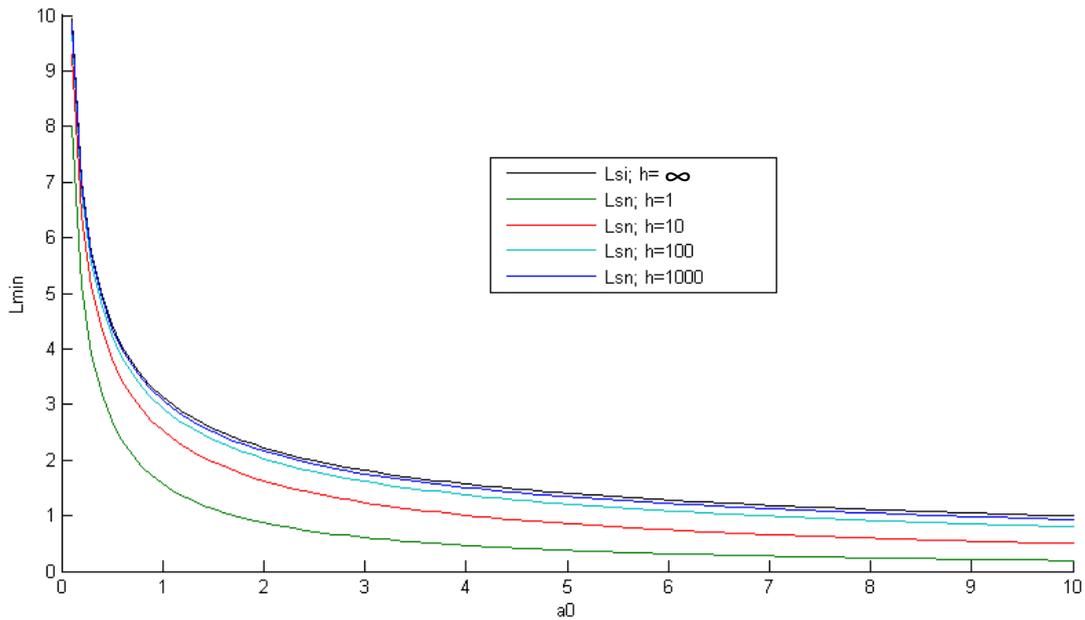


**Figura 18 - Tamanho crítico para um fragmento não isolado em função da resistência à vida fora do mesmo.**

**Fonte: Do autor.**

Analisando o gráfico da Figura 18, confirma-se a afirmação de que no caso de um fragmento não isolado, quando  $h \rightarrow \infty$  temos a reprodução do problema de um fragmento isolado, pois nesse limite  $L_{sn} \rightarrow L_{si} = \pi$ . Nota-se ainda que temos uma região de transição bem acentuada e que para valores de  $h$  maiores que  $10^2$ ,  $L_{sn}$  apresenta pequena variação, aproximando-se assintoticamente de  $\pi$ .

Podemos ainda verificar este resultado, quando analisamos o tamanho que um fragmento deve ter para que seja possível a vida quando analisado em função da favorabilidade à vida que o mesmo possui.



**Figura 19 - Relação entre o tamanho mínimo de um fragmento e o grau de favorabilidade à vida para vários graus de desfavorabilidade fora do mesmo.**

**Fonte: Do autor.**

Podemos verificar do gráfico da Figura 19 que, no caso de um fragmento não isolado, conforme aumenta-se o grau de desfavorabilidade à vida fora do fragmento, mais próxima a curva fica da curva encontrada para um fragmento isolado. Esse resultado é esperado e apenas confirma o resultado anterior do gráfico da Figura 18.

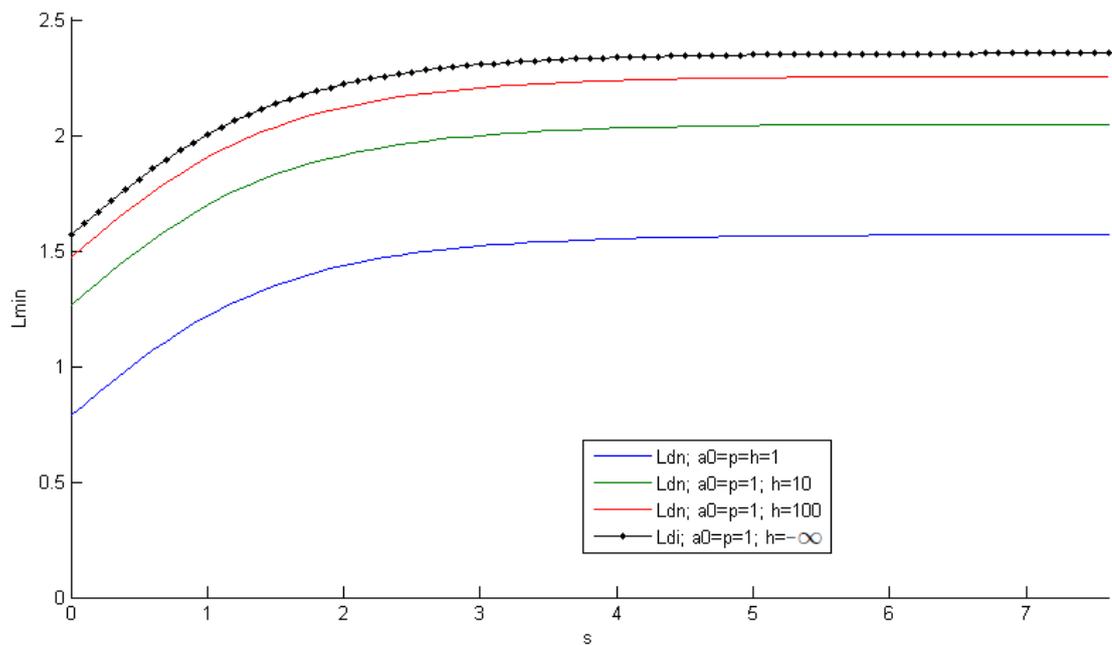
Verificamos ainda que para baixos graus de desfavorabilidade fora do fragmento ( $h = 1$ ), temos um tamanho mínimo de fragmento muito pequeno para grandes graus de favorabilidade à vida dentro do fragmento, aproximando-se de zero o seu tamanho.

#### 4.2 COMPARAÇÃO ENTRE OS CASOS 3 E 4: DISTÂNCIA ENTRE OS FRAGMENTOS

Verificamos em todos os casos analisados que a partir de  $s = 3$ , a variação do tamanho dos fragmentos mínimos passa a ser insignificante para maiores distâncias entre eles. Verificamos ainda que no caso de dois fragmentos não isolados, quando  $a_0 = h = p = 1$ , ao distanciar os fragmentos em grandes quantidades, ocorre o isolamento entre eles, ou seja, o tamanho mínimo que cada fragmento admite é o mesmo de um fragmento não isolado,

discutido no caso 1 para  $h = a_0 = 1$ . Verificamos ainda que à medida que a dificuldade à vida fora dos fragmentos  $h$  aumenta para o caso do sistema não isolado, a curva gerada se aproxima da curva gerada para o modelo de sistema de dois fragmentos isolados do meio.

Com os resultados discutidos até aqui, podemos inferir que a partir do modelo descrito para o caso 4, onde temos 2 fragmentos não isolados, é possível determinar o tamanho mínimo dos fragmentos em todos os casos discutidos neste trabalho, ou seja, variando os parâmetros  $p, h, s$  e  $a_0$  no modelo descrito para este caso é possível aferir tamanhos mínimos de fragmentos em sistemas de 1 ou 2 fragmentos, isolados ou não.



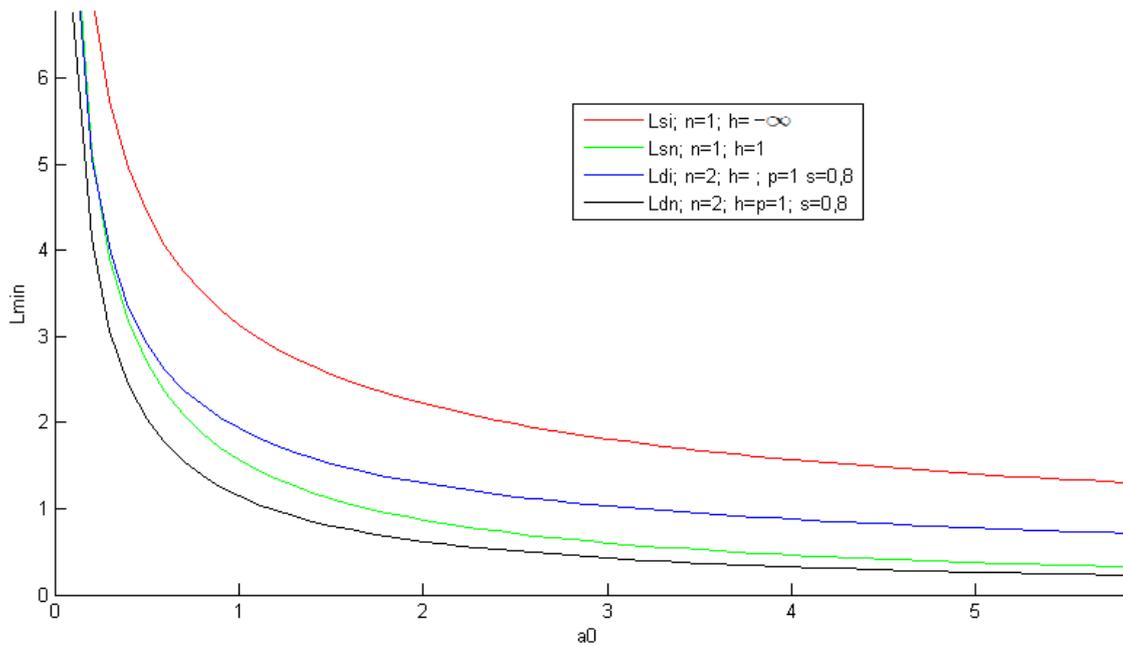
**Figura 20 - Tamanho mínimo do fragmento em função da distância que ele está de outro fragmento idêntico para vários graus de desfavorabilidade fora do sistema.**

**Fonte: Do autor.**

#### 4.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS CASOS 1, 2, 3 E 4: GRAU DE FAVORABILIDADE

Em relação ao grau de favorabilidade, assim como o resultado obtido no gráfico da Figura 17, em que relaciona-se o tamanho mínimo com o grau de desfavorabilidade entre os fragmentos, notamos que quando no sistema existe uma região com condições muito duras à vida, ou ainda, impossíveis a ela, que são os casos dos fragmentos isolados, o tamanho

mínimo que o fragmento deve admitir é sempre maior do que nos caso de não haver este tipo de região.



**Figura 21 - Gráfico comparativo que relaciona o tamanho mínimo de um fragmento e o grau de favorabilidade à vida para todos os casos estudados.**

**Fonte: Do autor.**

Como podemos verificar no gráfico da Figura 21, as curvas de  $L_{si}$  e  $L_{di}$  apresentam sempre valores superiores aos das curvas de  $L_{sn}$  e  $L_{dn}$  o que mostra que a existência de regiões duras à vida influenciam mais no tamanho mínimo do fragmento do que o fato de ter mais de um refúgio no sistema, por onde a espécie possa se difundir. O fato de  $L_{di}$  apresentar um valor superior a  $L_{sn}$  para as mesmas condições comprova isso e nos traz que se em um sistema de 2 fragmentos, cada fragmento apresenta valor superior ao tamanho mínimo de um sistema de um fragmento não isolado, o sistema em si apresenta um tamanho muito superior, já que é formado na sua totalidade por  $L_{di} + s + L_{di}$ .

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, obtivemos a relação entre o tamanho mínimo de ilhas populacionais (fragmentos) em diversos casos de heterogeneidade espacial. Verificamos que este tamanho crítico depende basicamente de um fator ( $a_0$ ) quando o sistema é formado por um único fragmento isolado, porém a partir do momento que se introduz uma possibilidade, mesmo que remota e temporária de vida fora do fragmento, este tamanho mínimo passa a depender de dois fatores ( $a_0, h$ ), em que  $h$  é grau de dificuldade à vida. Esgotamos estes parâmetros e comparamos os casos, apresentando analiticamente e numericamente, que no limite em que a desfavorabilidade fora do fragmento ( $h$ ) não isolado tende a infinito, voltamos ao problema de um fragmento isolado. Estes resultados estão de acordo com os resultados encontrados na literatura para a solução do problema geral considerando o termo não linear da FKPP (KENKRE, 2003; PAMPLONA da SILVA, 2008).

Pode-se concluir com este trabalho que ao inserir a possibilidade de vida nos arredores de um fragmento simples, mesmo esta possibilidade sendo em um ambiente hostil à vida, obtém-se uma redução do tamanho mínimo de um único refúgio no qual a vida possa prosperar sem se extinguir para grandes intervalos de tempo. Particularmente para  $h = a_0 = 1$  o tamanho crítico do fragmento se reduz próximo da metade do valor encontrado para um fragmento isolado, como podemos verificar na tabela 1.

Observa-se ainda que ao inserirmos um segundo refúgio próximo ao primeiro ( $s = 0,8$ ) com uma região hostil entre eles, sem que eles estejam isolados do meio externo, houve mais uma redução no tamanho mínimo de cada um dos fragmentos (KRAENKEL, 2010), porém não tão drástica. Já quando ocorre a inserção de infinitos fragmentos idênticos, espaçados  $s = 0,8$  entre si, ocorre uma nova diminuição do tamanho mínimo do fragmento, sendo este aproximadamente metade do tamanho mínimo encontrado no caso de uma única ilha não isolada.

Pode-se identificar ainda que um sistema não isolado do meio externo apresenta um tamanho mínimo de fragmento sempre menor do que o sistema isolado por completo. Tanto no caso de um fragmento, quanto no de dois fragmentos, ao isolar o sistema do meio externo, percebe-se um aumento no tamanho mínimo necessário para cada fragmento, o que leva-se a concluir que estas interrupções abruptas trazem mais influência ao tamanho

mínimo do fragmento do que o fato de ter-se mais de um fragmento no sistema espaçados por regiões hostis.

Em relação ao parâmetro referente à distância entre os fragmentos  $s$ , pudemos verificar que este prevê o isolamento total entre os fragmentos quando o elevamos para grandes valores. O mesmo sofre uma grande variação para valores pequenos, próximos aos valores de  $a_0$  e  $p$ , mas estabiliza rapidamente em um valor idêntico ao encontrado para o sistema de um fragmento simples. Este resultado nos leva a crer que este modelo consegue prever de maneira completa os efeitos da distância entre os fragmentos, já que é verossímil do ponto de vista biológico o afastamento das ilhas por distâncias grandes não permitir a difusão entre elas.

Para o caso 4, em que tínhamos um sistema formado por dois fragmentos não isolados o meio externo em que foi determinado  $L_{dn}$ , ao afastar um fragmento do outro, ou seja ao aumentar o valor de  $s$  significativamente, realizamos o isolamento entre os fragmentos, retornando ao resultado encontrado para  $L_{sn}$ . Da mesma forma, ao separarmos os fragmentos no caso 3 em que tínhamos duas ilhas isoladas do meio externo e determinamos  $L_{di}$ , encontramos um valor de tamanho mínimo de fragmento que deve ser compatível com o fragmento mínimo para o caso do perfil habitacional descrito na Figura 14 em que teríamos um fragmento isolado apenas por uma das extremidades, mas com possibilidade de difusão, mesmo que temporária, pela outra extremidade. Apesar de não resolver este problema analiticamente, a consistência encontrada nos outros resultados nos levam a concluir que este seja o resultado encontrado para a solução analítica do problema.

Com o intuito de dar continuidade ao estudo de dinâmica de populações em sistemas fragmentados temos, como continuidade natural, para trabalhos futuros:

- a) esgotamento dos parâmetros dos sistemas de dois ou mais fragmentos, para o caso geral.
- b) estudo da relação entre a desfavorabilidade à vida entre os fragmentos  $p$  e a distância entre os fragmentos  $s$ , com a criação de um parâmetro dificuldade  $d(p, s)$ .
- c) resolver analiticamente o problema de um sistema de um único fragmento isolado de apenas um dos lados e verificar a predição feita neste trabalho do tamanho mínimo que este tem.

- d) introduzir um termo de fonte não logístico na FKPP, buscar solução analítica para o problema e comparar com os resultados obtidos aqui.

## REFERÊNCIAS

- AMARASEKARE, P. **Competitive coexistence in spatially structured environments: A Synthesis.** *Ecol. Lett.*, 6, p. 1109-1122, 2003.
- ARFKEN, G., **Mathematical methods for physicists.** London: Academic Press, 1985.
- ARTILES, W.; CARVALHO, P.G.S.; KRAENKEL, R.A. **Patch-Size and isolation effects in the Fisher-Kolmogorov equation.** *J. Math. Biol.* 57, p. 521-535, 2008.
- AZEVEDO, F.; KRAENKEL, R.A.; PAMPLONA DA SILVA, D.J. **Competitive release and area effects,** *Ecological Complexity* 11, 154–159, 2012.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática.** Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2006.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002.
- BASSANEZI, R. C. **Uma Introdução à Biomatemática. notas de aula do minicurso de inverno em Matemática Pura e Aplicada.** São Paulo: Universidade Federal do ABC, 2011.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno Rio de Janeiro,** Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- BRAUER, F., VAN DEN DRIESSCHE, P., WU, J. (Eds.), **Mathematical Epidemiology, in: Lecture notes in Mathematics/Mathematical Biosciences Subseries.** NY-USA: Springer, 2008.
- CARVALHO, P. G. S. de **Modelo de Fisher-Kolmogorov em Dinâmica Populacional com Capacidade de Suporte Espacialmente Dependente.** Tese de doutorado –IFT-UNESP, 2007.
- COHEN, J. **Natural primate troops and a stochastic population model.** *Am. Nat.* vol: 103, pp. 455-477, 1969.
- DETHLEFSEN, L. A.; PREWITT, J. M. S.; MENDELSON, M. L. **Analysis of Tumor Growth Curves.** *J. Natl. Cancer Inst.*, 40 (2): 389-405, 1968.

- DOMINGUES, J. S. **Análise do Modelo de Gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento.** Pirapora-MG: Biomatemática vol. 21, p. 103-112, 2011.
- FISHER, R.A. **The wave of advance of advantageous genes.** Ann. Eugen, vol. 7, p. 355, 1937.
- KENKRE, V.M.; KUMAR, N. **Nonlinearity in bacterial population dynamics: proposal for experiments for the observational of abrupt transitions in patches.** USA: Proc. Natl. Acad. Sci. Vol. 105, pp. 18752-18757, 2008.
- KENKRE, V.M.; KUPERMAN, M.N. **Applicability of the Fisher equation to bacterial population dynamics.** Phys. Rev. Ed 67, 2003.
- KIERSTAED, H.; SLOBODKIN, I.B. **The size of water masses containing plankton bloom.** J. Marine research 12, pp. 141-147, 1953.
- KRAENKEL, R.A.; PAMPLONA DA SILVA, D.J. **Stochastic Skellam model.** Physica A, 389, 60–66, 2010.
- LIN, A.L.; MANN, B.; TORRES, G.; LINCOLN, B.; KAS, J.; SWINNEY, H. L. **Localization and extinction of bacterial populations under inhomogeneous growth conditions.** Biophys J. 87(1), p. 75–80, 2004.
- MELBOURNE, B.A. et al. **Invasion in a heterogeneous world: Resistance, coexistence or hostile takeover.** Ecol. Let. 10, p. 77-94, 2007.
- MURRAY, J.D. **Mathematical Biology: I. An Introduction.** New York: Springer-Verlag , 2002.
- NELSON, D.R.; SHNERB, N.M. **Non-Hermitian localization and population biology.** Phys. Rev. Ed. 58, p. 1383-1403, 1998.
- OLINICK, M. **Mathematical Modeling in the Social and Life Sciences.** Ed. Wiley, 2009.
- PAMPLONA DA SILVA, D.J. **Dinâmica de uma população em fragmentos unidimensionais.** Tese doutorado, Instituto de Física Teórica, UNESP, São Paulo-SP, 2008.
- PAMPLONA DA SILVA, D.J.; KRAENKEL, R.A. **Population persistence in weakly-coupled sinks.** Physica A, Ed. 391, p. 142-146, 2012.

PULLIAM, H.R. **Sources, sinks and population regulation.** Am. Nat. Vol. 132, p. 652–661, 1988.

RHODES, O.E.; CHESSER, R.K.; SMITH, M.H. **Population Dynamics in ecological Space and Time.** IL-USA: Univ. Chicago,, p 388, 1996.

SKELLAM, J.G. **Random Dispersal of Theoretical Populations.** Biometrika, Vol. 38 pp. 196-218, 1951.

VANCE, R.R., **The Effect of Dispersal on Population Stability in One-Species, Discrete-Space Population Growth Models.** The American Naturalist, Vol. 123, No. 2, pp. 230-254, 1984.

ZWIETERING, M. H.; JONGENBURGER, I.; ROMBOUITS, F. M.; VAN 'T RIET, K. **Modeling of the Bacterial Growth Curve.** Applied And Environmental Microbiology, p. 1875-1881, 1990.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A - Modelo Logístico: Análise da concavidade da curva

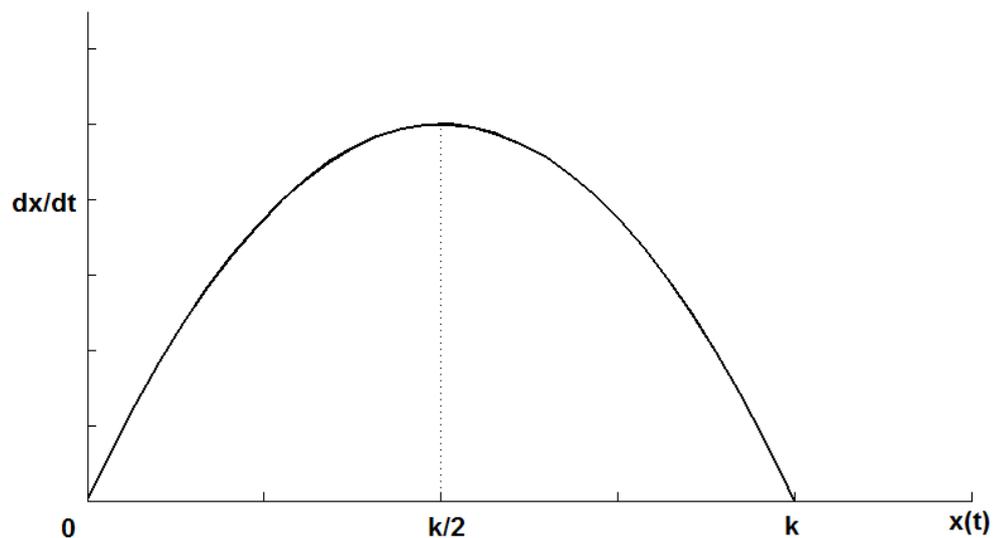
O modelo logístico caracteriza-se por descrever a variação da população de uma determinada espécie que siga a seguinte equação:

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \left( 1 - \frac{x(t)}{k} \right) x(t)$$

Para que seja possível realizar a análise de concavidade da curva gerada pela solução analítica para  $x(t)$ , vamos reescrever a equação de uma forma conveniente com  $x = x(t)$ .

$$\frac{dx}{dt} = rx - \frac{rx^2}{k}$$

Temos como gráfico para  $\frac{dx}{dt}$  x  $x$  uma parábola com a concavidade para baixo com raízes em  $x = 0$  e  $x = k$  e o ponto central seria o máximo valor atingido pela função.



**Figura 22 - Determinação do ponto de inflexão a partir do ponto de máximo da função  $dx/dt$ .**

**Fonte: Do autor.**

Logo,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \text{ é crescente em } 0 < x < \frac{k}{2} \\ \frac{dx}{dt} \text{ é decrescente em } \frac{k}{2} < x < k \end{cases}$$

Temos o ponto de máximo dessa função em  $x(t) = k/2$ , ou seja, nesse ponto a  $\frac{dx}{dt}$  deixa de ser crescente e passa a ser decrescente.

Da mesma maneira, é possível determinar o instante de tempo em que a população deixa de crescer de forma exponencial e passa a crescer assintoticamente para  $k$ . Este momento acontece quando a população atinge  $x(t_m) = k/2$ .

$$x(t_m) = \frac{k}{2} = \frac{x_0 k}{x_0 + (k - x_0)e^{-rt_m}}$$

Para determinar  $t_m$  é necessário inverter ambos os lados da equação.

$$2 = \frac{x_0 + (k - x_0)e^{-rt_m}}{x_0}$$

ou ainda,

$$e^{-rt_m} = \frac{2x_0 - x_0}{(k - x_0)} = \frac{x_0}{(k - x_0)}$$

ou seja,

$$t_m = \frac{1}{r} \ln \frac{k - x_0}{x_0}.$$

Temos então o ponto de inflexão da função em  $(t, x) = \left(\frac{1}{r} \ln \frac{k - x_0}{x_0}, \frac{k}{2}\right)$ .

## APÊNDICE B - Modelo de Gompertz: Análise da concavidade da curva

Assim como o modelo logístico, a curva gerada pelo modelo de Gompertz tem um ponto de inflexão, porém este acontece em um ponto diferente. Vamos apresentar aqui outra forma de determinar o ponto de inflexão de uma função.

### 1. Determinação do ponto de inflexão da curva de Gompertz

Para a determinação do ponto de inflexão é necessário encontrar a derivada da função proposta por Gompertz e igualar a zero (ZWIETERING, 1990).

$$\frac{dx(t)}{dt} = bx(t) \ln\left(\frac{k}{x(t)}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ bx \ln\left(\frac{k}{x}\right) \right] = b \ln\left(\frac{k}{x}\right) \frac{dx}{dt} + \frac{xb}{x} \left(\frac{-k}{x^2}\right) \frac{dx}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = b \frac{dx}{dt} \left[ \ln\left(\frac{k}{x}\right) - 1 \right] = 0$$

Ou seja, ou  $b = 0$ , o que representa uma taxa de crescimento nula e ocorre quando o sistema atinge o equilíbrio, ou  $\ln\left(\frac{k}{x}\right) - 1 = 0$  o que implica um ponto de inflexão em  $x = \frac{k}{e}$ .

### 2. Análise da concavidade da curva.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = b \frac{dx}{dt} \left[ \ln\left(\frac{k}{x}\right) - 1 \right]; b > 0$$

Para  $0 < x < \frac{k}{e} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} > 0 \Rightarrow$  *concavidade da curva voltada para cima.*

Para  $\frac{k}{e} < x < k \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} < 0 \Rightarrow$  *concavidade da curva voltada para baixo.*

Para  $x > k \Rightarrow$  *curva decrescente assintoticamente para  $k$ .*

### 3. Determinação de $t_m$ no ponto de inflexão.

Já vimos que o ponto de inflexão desta curva acontece quando

$$x(t) = ke^{-e^{-bt_m} \ln\left(\frac{k}{x_0}\right)} = \frac{k}{e}$$

Simplificando e extraindo o  $\ln$  de ambos os lados da equação.

$$e^{-e^{-bt_m} \ln\left(\frac{k}{x_0}\right)} = e^{-1}$$

$$-e^{-bt_m} \ln\left(\frac{k}{x_0}\right) = -1$$

$$-bt_m + \ln\left(\ln\left(\frac{k}{x_0}\right)\right) = 0$$

$$t_m = \frac{\ln\left(\ln\left(\frac{k}{x_0}\right)\right)}{b}$$

Temos então o ponto de inflexão da função em  $\left(\frac{\ln\left(\ln\left(\frac{k}{x_0}\right)\right)}{b}, \frac{k}{e}\right)$ .

### APÊNDICE C - Mudança de variável da FKPP

A mudança de variável apresentada para a Equação FKPP não se dá de forma trivial. Logo, vale a abertura das considerações feitas nesta mudança.

Partimos da equação FKPP com termo não linear expressa pela relação

$$u_\tau = Du_{yy} + c(y)u - bu^2,$$

onde  $b$  e  $D$  são constantes e  $b > 0$ .

Dividindo toda a equação por  $b$

$$\frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{D}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{c(y)}{b} u - u^2$$

e introduzindo as variáveis

$$a(x) = \frac{c\left(x\sqrt{D/b}\right)}{b}, \quad x = y\sqrt{b/D} \quad \text{e} \quad t = b\tau,$$

temos:

a) Primeiro termo

$$\frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \tau}; \quad \tau = \frac{t}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \left(\frac{t}{b}\right)} = \frac{b}{b} \frac{\partial u}{\partial t} = u_t.$$

b) Segundo termo

$$\frac{D}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad y = x\sqrt{D/b} \Rightarrow \frac{D}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial \left(x\sqrt{D/b}\right)^2} = \frac{D}{b} \frac{b}{D} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}.$$

c) Terceiro termo

$$\frac{c(y)}{b} u; \quad y = x\sqrt{D/b}; \quad a(x) = \frac{c\left(x\sqrt{D/b}\right)}{b} \Rightarrow \frac{c\left(x\sqrt{D/b}\right)}{b} u = a(x).$$

Enfim, obtemos a equação

$$u_t = u_{xx} + a(x)u - u^2.$$

APÊNDICE D - Continuidade da função  $X(x)$  para o caso de sistema de 2 fragmentos

Para maior entendimento, explicitamos as passagens que foram realizadas determinação da continuidade de  $X(x)$  nos casos do sistema com 2 fragmentos

$$E(\operatorname{sen}(\gamma s) - \tan(\gamma(L + s))\cos(\gamma s)) = Ce^{\beta s} + De^{-\beta s}$$

$$E\left(\operatorname{sen}(\gamma s) - \frac{\sin(\gamma(L + s))\cos(\gamma s)}{\cos(\gamma(L + s))}\right) = Ce^{\beta s} + De^{-\beta s}$$

$$E\left(\frac{\operatorname{sen}(\gamma s)\cos(\gamma(L + s)) - \sin(\gamma(L + s))\cos(\gamma s)}{\cos(\gamma(L + s))}\right) = Ce^{\beta s} + De^{-\beta s}$$

$$E(\operatorname{sen}(\gamma s)\cos(\gamma(L + s)) - \sin(\gamma(L + s))\cos(\gamma s)) = (Ce^{\beta s} + De^{-\beta s})\cos(\gamma(L + s))$$

Trataremos os termos dentro do parênteses do lado esquerdo da relação isoladamente e utilizaremos as seguinte relações trigonométricas

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}A\cos B - \operatorname{sen}B\cos A$$

$$\operatorname{sen}(\gamma s)\cos(\gamma(L + s)) - \sin(\gamma(L + s))\cos(\gamma s) = \operatorname{sen}(\gamma s - \gamma(L + s)) = \operatorname{sen}(-\gamma L).$$

Substituindo de volta na relação, obtemos

$$-E\operatorname{sen}(\gamma L) = (Ce^{\beta s} + De^{-\beta s})\cos(\gamma(L + s)).$$

APÊNDICE E - Solução analítica explícita alternativa para  $L_{di}$

Outra possibilidade que nos leva a uma relação onde  $L(s, p, a_0)$  fique explícito é a partir da relação:

$$-\left(\beta - \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2 e^{-\beta s} = -\left(\beta + \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right)^2 e^{\beta s},$$

multiplicando por (-1) e extraíndo a raiz, temos:

$$\left(\beta - \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right) e^{-\beta s/2} = \left(\beta + \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)}\right) e^{\beta s/2}.$$

Reagrupando os termos,

$$\beta \left(e^{-\beta s/2} - e^{\beta s/2}\right) = \frac{\gamma}{\tan(\gamma L)} \left(e^{-\beta s/2} + e^{\beta s/2}\right).$$

Reconhecendo  $\tanh\left(\beta s/2\right) = \frac{e^{\beta s/2} - e^{-\beta s/2}}{e^{\beta s/2} + e^{-\beta s/2}}$ , podemos reescrever a relação na forma

compacta

$$\frac{\gamma}{\tan(\gamma L)} = -\beta \tanh\left(\beta s/2\right)$$

ou seja, isolando  $L$ ,

$$L = -\frac{1}{\gamma} \arctan\left(\frac{\gamma}{\beta \tanh\left(\beta s/2\right)}\right).$$

Substituindo  $\gamma = \sqrt{a_0}$  e  $\beta = \sqrt{p}$  na expressão anterior temos

$$L = -\frac{1}{\sqrt{a_0}} \arctan\left(\frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{p} \tanh\left(\sqrt{p}s/2\right)}\right).$$

A partir da relação  $\operatorname{arccotan} A = \arctan\left(\frac{1}{A}\right)$ , podemos escrever a relação da seguinte forma:

$$L = -\frac{1}{\sqrt{a_0}} \operatorname{arccotan}\left(\frac{\sqrt{p} \tanh\left(\sqrt{p}s/2\right)}{\sqrt{a_0}}\right).$$

Das relações trigonométricas, temos que o período da função *arccotan* é  $\pi$ , ou seja,  $\cotan(x) = \cotan(x \pm n\pi)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , logo,

$$L = \frac{n\pi}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} \operatorname{arccotan} \left( \frac{\sqrt{p} \tanh\left(\frac{\sqrt{ps}}{2}\right)}{\sqrt{a_0}} \right).$$

Estamos interessados em  $0 < L < \pi$ , o que nos leva a  $n = 1$ , ou seja, temos uma relação onde conseguimos isolar  $L_{di}$  em função de  $p, s$  e  $a_0$ .

$$L_{di} = \frac{\pi}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} \operatorname{arccotan} \left( \frac{\sqrt{p} \tanh\left(\frac{\sqrt{ps}}{2}\right)}{\sqrt{a_0}} \right).$$