

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS
UNIFAL-MG**

**MARIANA MOREIRA GONÇALVES
SANTOS**

**TESTES DE HIPÓTESES FREQUENTISTAS E
BAYESIANOS PARA RAZÃO ÁUREA VIA SIMULAÇÃO
MONTE CARLO**

Alfenas/MG
2015

MARIANA MOREIRA GONÇALVES SANTOS

**TESTES DE HIPÓTESES FREQUENTISTAS E BAYESIANOS PARA
RAZÃO ÁUREA VIA SIMULAÇÃO MONTE CARLO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, área de concentração em Estatística Aplicada e Biometria da Universidade Federal de Alfenas, MG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Linha de Pesquisa: Modelagem Estatística e Estatística Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alberto Beijo.

Coorientador: Prof. Dr. Fabricio Goecking Avelar.

Alfenas/MG
2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Alfenas

Santos, Mariana Moreira Gonçalves.

Testes de hipóteses frequentistas e bayesianos para razão áurea via
simulação Monte Carlo. / Mariana Moreira Gonçalves Santos. --
Alfenas/MG, 2015.

58 f.

Orientador: Luiz Alberto Beijo.

Dissertação (mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) -
Universidade Federal de Alfenas, 2015.

Bibliografia.

1. Alface. 2. Cromossomos. 3. Segmento aureo. 4. Tamanho da amostra.
5. Testes de hipótese. 6. Estatísticas não Paramétricas. I. Beijo, Luiz Alberto.
II. Título.

CDD-519

MARIANA MOREIRA GONÇALVES SANTOS


**TESTES DE HIPÓTESES FREQUENTISTAS E BAYESIANOS PARA
RAZÃO ÁUREA VIA SIMULAÇÃO MONTE CARLO**

A Banca examinadora, abaixo assinada, aprova a
Dissertação apresentada como parte dos requisitos para
a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e
Biometria pela Universidade Federal de Alfenas. Área de
concentração: Estatística Aplicada e Biometria.

Aprovado em: 30 de março de 2015.

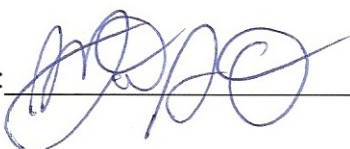
Prof. Dr. Luiz Alberto Beijo

Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura:  _____

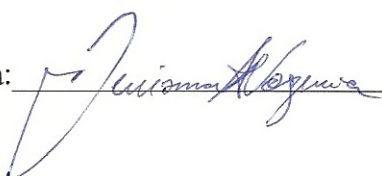
Prof. Dr. Marcelo Angelo Cirillo

Instituição: UFLA

Assinatura:  _____

Prof. Dr. Denismar Alves Nogueira

Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura:  _____

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Alfenas pela oportunidade de continuidade de aperfeiçoamento.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro concedido para a realização desse trabalho.

Ao meu orientador, professor Luiz Alberto Beijo, a quem tenho muita admiração e respeito, um mestre. Pelo direcionamento desse trabalho e ensinamento não só pelas palavras, mas por suas atitudes.

Ao professor Fabricio Goecking Avelar, meu coorientador. Pela contribuição, exemplo e palavras de incentivo.

A todos os meus professores, pela contribuição ao longo dos meus anos de estudo. Meu sincero reconhecimento àqueles que contribuíram não só para o meu conhecimento, como também na minha formação como ser humano.

À minha querida amiga Climene Cristina Dias Siqueira, pela orientação e presença em minha vida.

À toda minha família, pelo apoio incondicional. Ao meu esposo João Leandro dos Santos pelo companheirismo e apoio nos momentos difíceis. Ao meu filho Jean Moreira Santos, meu incentivo na busca por uma vida melhor.

Principalmente a Deus, pelo dom da vida. Sem Ele não seríamos alunos, nem professores. Simplesmente não seríamos.

RESUMO

A razão áurea é uma constante irracional que tem sido investigada por pesquisadores de diversas áreas do conhecimento. Presente na natureza e bastante utilizada em pinturas, esculturas e construções, a razão áurea está relacionada com a beleza perfeita e a proporção ideal. Atualmente pesquisas têm associado propriedades como bom funcionamento, eficiência e estabilidade a estruturas biológicas que possuem essa razão. Para inferir sobre a razão áurea, pesquisadores têm utilizado diversas metodologias, dentre elas, o teste t de *Student*, testes não paramétricos e, em muitos casos, critérios subjetivos. Para se inferir sobre a média das razões de duas populações não há na literatura um teste específico. Muitos pesquisadores, para inferir se a razão de determinados segmentos são iguais ao número de ouro ϕ , utilizam a média das razões amostrais, para estimar a média das razões populacionais e utilizam o teste t de *Student*. A razão de duas variáveis aleatórias quando são independentes, normais padrão é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Cauchy. No entanto, quando as variáveis aleatórias são dependentes, como é o caso em que se quer inferir sobre a razão áurea, a distribuição de probabilidade da razão não é conhecida e a inferência baseada em pressuposições que não são satisfeitas pode levar a resultados não confiáveis. Um dos objetivos desse trabalho foi avaliar a viabilidade do teste t de *Student* com diferentes estatísticas, algumas já utilizadas por pesquisadores e uma proposta, para se inferir sobre a razão áurea. Também foram avaliadas outras metodologias propostas: o teste não paramétrico Wilcoxon e o teste bayesiano com *priori* não-informativa. A avaliação das metodologias dos testes paramétricos e não-paramétrico se deu através da quantificação e comparação das taxas de erro tipo I e poder dos testes em diferentes situações de variabilidade e tamanhos de amostra, via simulação Monte Carlo. Para avaliação do teste bayesiano, quantificou-se as taxas de rejeição de H_0 nas simulações quando as amostras foram geradas sob H_0 e sob H_1 . Como aplicação, foram obtidos dados referentes à medida dos braços de nove pares de cromossomos de células do genótipo Cerbiatta da *Lactuca sativa* L., a alface e os testes foram comparados quando aplicados nessa amostra. Todas as simulações e as comparações dos testes foram realizadas no programa R. O t de *Student* com as estatísticas utilizadas em literatura foi liberal ou apresentou taxas de poder inferiores a 95% na maioria dos cenários e, por isso, não é recomendado. O teste bayesiano com *priori* de Jeffreys foi equivalente ao teste t de *Student* com a estatística proposta, que por sua vez, apresentou melhor desempenho no controle das taxas de erro tipo I, mas apresentou taxas de poder inferiores a 95% para amostras pequenas, principalmente quando a variabilidade dos dois segmentos é maior. Foi verificado que havia a presença de razão áurea nas medidas dos braços longo e curto do quinto par de cromossomo.

Palavras-chave: Cromossomo. Erro tipo I. *Lactuca sativa* L.. Número de ouro. Poder. Tamanho da amostra. Teste de postos de Wilcoxon.

ABSTRACT

The golden ratio is an irrational constant that has been investigated by researchers from various fields of knowledge. Present in nature and widely used in paintings, sculptures and buildings, the golden ratio is related to the perfect beauty and the ideal proportion. Currently research has associated properties such as proper functioning, efficiency and stability at biological structures that have golden ratio. In order to study the golden ratio, researchers have used different methodologies, such as, the *Student's* test, non-parametric tests and, in many cases, subjective criteria. There is no, in the literature, a specific test to infer about the mean ratio of two populations. Many researchers, to infer if the rate of certain segments are, on average, equal to the number of gold ϕ , use the of sample rates average to estimate the mean of population rates and use the *Student's* test. The ratio of two independent random variables standard normal is a random variable that follows a Cauchy distribution. However, when the random variables are dependent, as is the case where it is desired infer about the golden ratio, the ratio probability distribution is not known. The infer process based on assumptions that are not satisfied can lead to unreliable results. One goal of this study was to evaluate the viability of the *Student's* test with different statistics, some of them, already used by researchers, and a proposal one to infer the golden ratio. We evaluated other methodologies proposed: the nonparametric Wilcoxon test and the Bayesian test with non-informative *priori*. The evaluation of the methodologies of parametric tests and nonparametric occurred by quantifying and comparing of the tests type I errors rate and power in different situations variability and sample sizes, via Monte Carlo simulation. To evaluate the Bayesian test, it was quantified rejection rates of H_0 in the simulations when the samples were generated under H_0 and under H_1 . As an application, it was obtained data refers the measuring of the arms of nine pairs of the chromosomes of the cell Cerbiatta genotype of *Lactuca sativa* L., the lettuce and the tests were compared when applied in this sample. All simulations and comparisons of tests were performed using the statistical software R. The *Student's* test with the statistics used in literature was liberal or had power rates less than 95% in most scenarios and therefore is not recommended. The Bayesian test with Jeffreys's *priori* was equivalent to the *Student's* test with the statistical proposal, which in turn performed better on the control of Type I error rates, but showed lower power rates less than 95 % for small samples, especially when the variability of the two segments is large. It was verified that there is the presence of golden ratio in the rate between long and short arms in the fifth pair of chromosome.

Key-words: Chromosome. Type I error. *Lactuca sativa* L. Golden Number. Size sample. Power. Wilcoxon's test.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Razão entre os termos sucessivos da sequência de Fibonacci.	14
Tabela 2	- Coeficiente de variação (em %) do braço curto (cva) e do braço longo (cvb), média (\bar{R}) de cada razão BL/BC, valores- p dos testes $T\Delta$, TR, TED e WD, intervalo de credibilidade do teste TBPJD para cada par de cromossomo.	51

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Segmento dividido em média e extrema razão.	12
Figura 2	- Retângulo áureo e espiral áurea.	13
Figura 3	- Molúsculo náutico.	14
Figura 4	- Disposição das sementes na pinha e no girassol formando espirais.	15
Figura 5	- Distribuição a posteriori usando distribuição a priori não informativa (a) e distribuição a priori informativa (b).	27
Figura 6	- Idiogramas e metáfase somática de genótipos da <i>Lactuca sativa</i> L.	34
Figura 7	- Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 2 a 4 e $cva=5%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	36
Figura 8	- Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 2 a 4 e $cva=10%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	37
Figura 9	- Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 2 a 4 e $cva=15%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	38
Figura 10	- Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, $cva=5%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	39
Figura 11	- Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, $cva=10%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	39
Figura 12	- Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, $cva=15%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	40
Figura 13	- Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 100 a 200, $cva=5%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	41
Figura 14	- Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 100 a 200, $cva=10%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	42
Figura 15	- Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 100 a 200, $cva=15%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	43
Figura 16	- Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 2 a 40, $cva=5%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	44
Figura 17	- Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 2 a 40, $cva=10%$ com $cvb=5%, 10%, 15%$ e $20%$	45

Figura 18	- Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 2 a 40, cva=15% com cvb=5%, 10%, 15% e 20%.	46
Figura 19	- Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, cva=5% com cvb=5%, 10%, 15% e 20%.	47
Figura 20	- Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, cva=10% com cvb=5%, 10%, 15% e 20%.	48
Figura 21	- Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, cva=15% com cvb=5%, 10%, 15% e 20%.	49
Figura 22	- Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 100 a 200, cva=5%, 10% e 15% com cvb=5%, 10%, 15% e 20%.	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	REVISÃO DE LITERATURA	12
2.1	RAZÃO ÁUREA	12
2.1.1	Aplicações da razão áurea	15
2.2	TESTE DE HIPÓTESES	18
2.2.1	Erros envolvidos em um teste de hipóteses	19
2.2.2	Teste t de Student	20
2.2.3	Distribuição amostral de uma estatística	22
2.2.4	Teste não paramétrico de Wilcoxon	24
2.3	INFERÊNCIA BAYESIANA	25
3	MATERIAL E MÉTODOS	29
3.1	DADOS SIMULADOS	29
3.2	TESTES DE HIPÓTESES	30
3.2.1	Teste t com estatística razão	30
3.2.2	Teste t com estatística delta	31
3.2.3	Teste t emparelhado com estatística diferença	31
3.2.4	Teste não paramétrico Wilcoxon com estatística diferença	32
3.2.5	Teste bayesiano com priori de Jeffreys e estatística diferença	32
3.3	AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DOS TESTES	33
3.4	DADOS EXPERIMENTAIS	33
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	35
4.1	DADOS SIMULADOS	35
4.1.1	Tamanho dos testes	35
4.1.2	Taxas de poder dos testes	43
4.2	DADOS EXPERIMENTAIS	51
5	CONCLUSÕES	52
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53
	APÊNDICE	56

1 INTRODUÇÃO

A razão áurea, também conhecida como número de ouro, divina proporção e segmento áureo, é uma constante irracional presente em diversas medidas do corpo humano, na natureza, e utilizada em diversas áreas, como pintura, arquitetura, arte e construção civil.

Atualmente, pesquisas sobre a existência de razão áurea em estruturas biológicas têm sido tema de diversos estudos, sendo associada a propriedades como estabilidade, bom funcionamento e eficiência das estruturas que apresentam essa razão.

Para inferir sobre a razão áurea, pesquisadores têm utilizado diversas metodologias, dentre elas, o teste t de *Student*, testes não paramétricos e, em muitos casos, critérios subjetivos (SIQUEIRA, et al., 2012; GOPFERT; RIVERA, 2013)

Na construção de um teste de hipóteses para um parâmetro populacional existe uma variável aleatória Y associada a uma dada população e tem-se uma hipótese sobre determinado parâmetro θ dessa população. O objetivo do teste de hipótese é dizer, usando uma estatística, se a hipótese nula (H_0) pode ser rejeitada. Uma estatística é uma função dos dados observados de uma variável aleatória e, geralmente, um teste de hipóteses é especificado em termos de uma estatística de teste, que possui distribuição de probabilidade conhecida. A escolha da estatística de teste a ser usada em um teste de hipótese deve ser de acordo com o modelo de probabilidade assumido e as hipóteses em questão.

Quando a amostra é proveniente de uma população normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 , sabe-se que a média dessa amostra (\bar{Y}), possui uma distribuição normal com média μ e variância σ^2/n . Assim, sob H_0 , a estatística $T(\mathbf{Y}) = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ segue uma distribuição t de *Student*. Quando não há garantias de que os dados são provenientes de uma distribuição normal, tem-se pelo Teorema Central do Limite, que a média amostral de uma amostra aleatória de tamanho n extraída de uma população com distribuição qualquer, tem uma distribuição assintoticamente normal com média μ e variância σ^2/n quando n tende ao infinito. Nesse caso, também é utilizada a estatística $T(\mathbf{Y})$ para a realização do teste de hipóteses.

Quando o interesse do pesquisador é comparar duas populações com relação às suas médias, a estratégia é utilizar a diferença entre essas médias. Considerando a situação em que as populações são dependentes, sendo X_i e Y_i , as variáveis aleatórias associadas a essas populações, com $i = 1, \dots, n$, ambas normalmente distribuídas, a variável $M_i = X_i - Y_i$ também segue uma distribuição normal $N(\mu_M, \sigma^2_M)$. Sendo assim, a estatística $T(M) = \frac{\bar{M} - \mu_M}{S_M/\sqrt{n}}$ sob

H_0 , segue uma distribuição t de *Student* com $n - 1$ graus de liberdade.

Para se inferir sobre a média das razões de duas populações não há na literatura um teste específico. Muitos pesquisadores, para inferir se a razão de determinados segmentos é igual ao número de ouro ϕ , utilizam o estimador \bar{R} , a média das razões amostrais, para estimar μ_R , em que $R_i = \frac{X_i}{Y_i}$ e assumem que a estatística $T(R) = \frac{\bar{R} - \mu_R}{S_R/\sqrt{n}}$ sob H_0 , segue uma distribuição t de *Student* com $n - 1$ graus de liberdade. De acordo com Casella e Berger (2010), a razão R de duas variáveis aleatórias X_i e Y_i independentes, normais padrão é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Cauchy. No entanto, quando as variáveis aleatórias são dependentes, como é o caso em que se quer inferir sobre a razão áurea, a distribuição de probabilidade da razão não é conhecida e a inferência baseada em pressuposições que não são satisfeitas pode levar a resultados não confiáveis.

Uma maneira de se inferir sobre a razão áurea, proposta neste trabalho, foi considerar a variável aleatória $D_i = X_i \cdot \phi - Y_i$, supondo que $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Como a distribuição de uma combinação linear de variáveis aleatórias normais tem ainda uma distribuição normal, tem-se que D_i segue uma distribuição normal $N(\mu_D, \sigma_D^2)$, e a estatística $T(D) = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}}$ sob H_0 , segue uma distribuição t de *Student* com $n - 1$ graus de liberdade. Quando a distribuição da estatística de teste não é conhecida, uma alternativa é a utilização de um teste não paramétrico. Também foi estudado o teste Wilcoxon com a estatística de teste $T(D)$ para se inferir sobre a razão áurea.

Essas propostas utilizam a inferência frequentista que é baseada em teoria assintótica e/ou são fundamentadas em várias pressuposições. A alternativa que foi considerada, que tem sido bastante utilizada, foi a utilização da inferência bayesiana. A proposta de inferência para a razão áurea sob o enfoque bayesiano foi a realização de testes bayesianos a partir da distribuição *a posteriori*. Foram utilizadas duas *prioris* diferentes para a obtenção da distribuição *a posteriori*. Uma delas foi a não informativa de Jeffreys e outra a informativa normal.

Sendo assim, o objetivo geral deste trabalho foi avaliar diferentes testes frequentistas e bayesiano para identificação de razão áurea quanto ao erro tipo I e poder em diferentes situações de variabilidade e tamanho da amostra. Pode-se estabelecer os seguintes objetivos específicos: propor uma nova metodologia utilizando o teste paramétrico t de *Student* e não paramétrico Wilcoxon para identificação de razão áurea; propor um teste bayesiano com *priori* não-informativa para identificação de razão áurea e comparar os testes na identificação de razão áurea nos pares de cromossomos da *Lactuca sativa* L., a alface.

2 REVISÃO DE LITERATURA

A revisão da literatura foi dividida em três tópicos. No primeiro, intitulado Razão Áurea, são apresentadas algumas definições, a relação da razão áurea com uma sequência numérica denominada sequência de Fibonacci e alguns trabalhos em que pesquisadores fazem inferência sobre a presença de razão áurea em certas medidas de estruturas biológicas. O segundo tópico foi denominado Teste de Hipóteses. Nele são apresentados alguns conceitos relacionados a testes de hipóteses, os erros envolvidos, denominados erro tipo I e tipo II, a introdução sobre dois testes utilizados nesse trabalho, o teste t de *Student* e o teste não paramétrico Wilcoxon e, por fim, algumas estatísticas de teste utilizadas e suas respectivas distribuições. O terceiro e último tópico dessa seção é dedicado à Inferência Bayesiana. É apresentado um pequeno histórico, alguns elementos principais e algumas das abordagens de teste de hipótese bayesiano.

2.1 RAZÃO ÁUREA

A primeira definição clara de proporção áurea, de acordo com Livio (2008), foi dada por volta de 300 a.C., por Euclides de Alexandria (323-285 a.C.), matemático grego autor de *Os Elementos*. Para Euclides, um segmento de reta é dividido em *média e extrema razão* (em dois outros segmentos) se a razão entre o maior e o menor for igual à razão entre a soma de ambos e o maior. Para ele esse era o modo mais harmonioso para realizar a divisão de um segmento (LAURO, 2005).

Algebricamente, dado um segmento \overline{AB} pode-se determinar nele um ponto E .

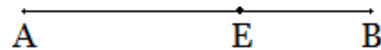


Figura 1 – Segmento dividido em média e extrema razão.

Denotando a medida do segmento \overline{AE} por b e a medida de \overline{EB} por a , e usando a definição dada por Euclides, com $b > a$, tem-se:

$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}. \quad (2.1)$$

Resolvendo a equação do segundo grau em função de b , a partir de (2.1), a raiz positiva

obtida é

$$b = a \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right). \quad (2.2)$$

A razão $\frac{b}{a}$ que pode ser deduzida de (2.2), é conhecida como razão áurea

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad (2.3)$$

e o número irracional obtido

$$\phi = 1,6180339887498948482045868343656\dots$$

é chamado de número de ouro.

Alguns pesquisadores, como Lauro (2005) e Sabrish et al. (2013), no entanto, consideram o inverso de ϕ , aproximadamente 0,618034, como sendo o número áureo.

Atualmente esse número é denotado por ϕ , a primeira letra grega do nome do escultor grego Fídias (490 a 430 a.C.), homenageado pelo matemático Mark Bar, no século XX. Segundo Livio (2008), a homenagem se deve ao fato de alguns historiadores da arte creditarem a Fídias o uso frequente da razão áurea em suas esculturas, dentre elas a de Zeus, em Olímpia, e o Partenon, em Atenas. A princípio, o símbolo utilizado era a letra grega τ , que significa *o corte*.

Um retângulo áureo ou retângulo de ouro é um retângulo cujos lados satisfazem a proporção áurea. Um retângulo de ouro sempre pode ser dividido num quadrado e em outro retângulo áureo semelhante ao original. Realizando essa divisão repetidas vezes e unindo dois dos vértices dos quadrados, obtém-se a espiral áurea (FIGURA 2).

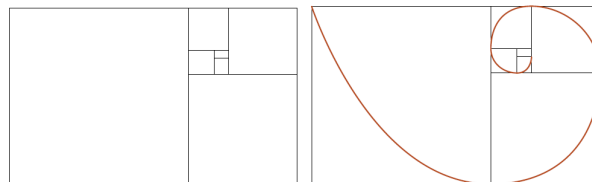


Figura 2 – Retângulo áureo e espiral áurea.
Fonte: LAURO (2005).

Essa espiral pode ser encontrada na natureza, como por exemplo, nos molúsculos náuticos, conforme Figura 3.



Figura 3 – Molúsculo náutico.

Fonte: OLIVEIRA; FERREIRA (2010).

O número de ouro também está relacionado a uma sequência numérica. O matemático Leonardo Pisa, mais conhecido como Fibonacci, propôs em 1202 um problema envolvendo coelhos, que deu origem a uma sequência numérica que ficou conhecida como sequência de Fibonacci (LAURO, 2005). Esta sequência é iniciada por dois números 1 e os demais números, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...). O escocês Robert Simsonm, quinhentos anos depois, descobriu que, à medida que se avança nessa sequência, o limite da razão entre cada número e seu antecessor tende a ϕ (TABELA 1).

Tabela 1 – Razão entre os termos sucessivos da sequência de Fibonacci.

Termos sucessivos da sequência	Resultado da divisão
1 : 1	1,0000000000000000
2 : 1	2,0000000000000000
3 : 2	1,5000000000000000
5 : 3	1,6666666666666667
8 : 5	1,6000000000000000
13 : 8	1,6250000000000000
21 : 13	1,61538461538462
34 : 21	1,61904761904762
55 : 34	1,61764705882353
89 : 55	1,61818181818182
144 : 89	1,61797752808989
233 : 144	1,61805555555556
377 : 233	1,61802575107296
610 : 377	1,61803713527851
987 : 610	1,61803278688525
1597 : 987	1,61803444782168
2584 : 1597	1,61803381340013
4181 : 2584	1,61803405572755

Fonte: LAURO (2005).

Essa sequência pode ser encontrada na natureza, por exemplo, na maneira de disposição de sementes do girassol. De acordo com Atela, Gole e Hotton (2002), apesar de centenas de milhares de espécies de plantas, com enorme diversidade de formas, poucas são as maneiras de disposição das unidades botânicas (folhas, escamas,...) ao longo de um tronco. Das três

maneiras convencionais para classificar esses padrões, uma delas é a espiral. Uma das características notáveis da filotaxia espiral é que o número de espirais ou hélices tendem a ser de dois elementos consecutivos na sequência de Fibonacci. Na Figura 4 pode-se observar as sementes da pinha organizadas em duas espirais com 8 sementes no sentido horário e 13 no sentido anti-horário. Similarmente ocorre no girassol: suas sementes preenchem o miolo dispostas em dois conjuntos de espirais: geralmente, 21 no sentido horário e 34 no anti-horário.



Figura 4 – Disposição das sementes na pinha e no girassol formando espirais.
Fonte: ATELA; GOLE; HOTTON (2002); CAMARA; RODRIGUES(2008).

Associada ao belo e agradável aos olhos e ouvidos, a razão áurea tem sido investigada por muitos pesquisadores nas mais diversas áreas do conhecimento. De fato, a fascinação pela razão áurea, também chamada de número de ouro, não se deteve aos matemáticos, também se intrigaram filósofos, artistas, arquitetos, músicos, biólogos, historiadores, psicólogos e até místicos (LIVIO, 2008).

2.1.1 Aplicações da razão áurea

A identificação de razão áurea em estruturas biológicas tem sido tema de diversos estudos, associando propriedades como estabilidade, bom funcionamento e eficiência a estruturas que apresentam essa razão.

Ricketts (1982) estudou a presença de razão áurea na face humana. De acordo com Gonzalez, Zarate e Rosales (2014), em Ortodontia ele foi o primeiro a associar a análise de uma face atraente com o número de ouro.

Ono et al. (2007) verificaram a presença de razão áurea em algumas medidas no esqueleto craniofacial de indivíduos com oclusão Classe I de Angle por meio de 200 radiografias cefalométricas laterais de indivíduos do sexo masculino e do feminino, na faixa etária entre 17 e 25 anos de idade, que apresentavam todos os dentes permanentes presentes. Para identificação

da razão áurea nessas medidas foi utilizado o teste *t* de *Student* ao nível de 5% de significância sob a hipótese de que a média de cada razão analisada era igual a 1,618. Das oito razões analisadas, quatro foram consideradas áureas, sendo no grupo dos mesofaciais. As médias das razões consideradas estatisticamente iguais a 1,618 foram: 1,627; 1,626; 1,617 e 1,645 com desvio padrão 0,07; 0,074; 0,10 e 0,112 respectivamente. Os autores também verificaram que as razões em proporção áurea podem propiciar uma análise cefalométrica individualizada e a possibilidade de identificar padrões específicos em cada padrão facial, criando referências para um planejamento de tratamento ortodôntico adequado e específico.

Takeshita et al. (2007) verificaram a razão áurea em radiografias cefalométricas laterais de 37 pacientes portadores de má-oclusão Classe II, antes e depois do tratamento ortodôntico. Foram analisadas 19 radiografias antes e 19 radiografias após o tratamento ortodôntico, obtendo assim, trinta e oito razões para cada paciente. Foi utilizado o teste *t* emparelhado ao nível de 5% de significância, primeiramente comparando se as médias das razões antes e depois do tratamento eram iguais. Em seguida, as razões foram subtraídas do número de ouro, considerado 1,618033, e foi testado se a média das diferenças era igual a zero. Observou-se que oito das dezenove razões eram diferentes estatisticamente antes e depois do tratamento e destas, sete apresentavam-se em proporção áurea, mostrando um resultado estético mais agradável ao paciente.

Olivete Junior (2009) verificou o estágio de crescimento de um indivíduo tomando como base a razão áurea nos ossos da mão. Foram selecionadas 685 imagens radiográficas das mãos de pacientes (do sexo masculino e feminino) na faixa etária de 6 a 16 anos. Nesse estudo foram analisadas quatro relações entre as medidas da falange e metacarpos da mão. Foi realizado o teste *t* de *Student* ao nível de 5% de significância considerando $\phi = 1,618$ como a média populacional. De acordo com o estudo, é possível relacionar o crescimento ósseo de acordo com a idade cronológica, a partir da razão áurea, considerando as quatro relações.

Silva et al. (2011) avaliaram a presença de razão áurea em quatro razões cefalométricas e duas fotométricas em 42 indivíduos adultos, na faixa etária de 18 a 45 anos, sendo 21 de cada gênero. A amostra foi obtida de um arquivo de radiografias de um consultório particular e foram selecionadas 84 radiografias cefalométricas laterais com as respectivas fotografias de perfil, sendo 42 antes e 42 após o tratamento ortodôntico. Foi testada a hipótese de que a média de cada razão era igual ao número de ouro, considerado 1,618, usando o teste *t* de *Student* ao nível de 5% de significância. Das quatro razões cefalométricas analisadas nenhuma apresentou-

se em razão áurea, no entanto, as duas razões fotométricas avaliadas estavam em razão áurea.

Henein et al. (2011) estudaram as dimensões e funções cardíacas de pacientes no final da diástole, a fase de repouso do ciclo cardíaco. A princípio eles tomaram as medidas cardíacas verticais e transversais do ventrículo esquerdo de 30 adultos suecos e 30 chineses. Eles descobriram que as dimensões chinesas do ventrículo esquerdo eram menores em comparação com as dos suecos, mas foi mantida a razão áurea, avaliada em 1,618. Isso sugere, segundo eles, que a razão das dimensões é que é importante para o funcionamento saudável do coração e não as dimensões absolutas. Para avaliar se a relação entre essas dimensões difere em insuficiência cardíaca, eles analisaram 40 pacientes suecos, 20 com insuficiência cardíaca leve e 20 com insuficiência cardíaca em fase terminal. A razão áurea foi mantida no primeiro grupo, o que não ocorreu no segundo. Para eles, esse resultado pode ser de grande valor para o prognóstico de pacientes, para o desenvolvimento de marcadores simples e confiáveis de desvio precoce da normalidade que poderiam ser tratados antes de desenvolver alterações irreversíveis na estrutura e função cardíaca. Foi utilizado no estudo o teste *t* de *Student*.

Siqueira et al. (2012) avaliaram a frequência da razão áurea regressiva em pacientes submetidos ao tratamento ortodôntico. Foram selecionados 43 pacientes, entre homens e mulheres com o tratamento ortodôntico concluído e com oclusão adequada. Foi utilizado o método proposto por Levin (1978) para verificação da razão áurea. Tomou-se o tamanho real (largura) dos dois incisivos centrais, multiplicando-se por 0,618 para obtenção da largura aparente do incisivo lateral. A razão áurea regressiva foi a mais prevalente após o tratamento ortodôntico. Segundo os autores, esta razão pode ser usada como guia para o planejamento de tratamentos onde se busca uma melhor estética e um sorriso mais harmônico.

Sabrish et al. (2013) verificaram se a razão entre o eixo do côndilo e o eixo corpus da mandíbula em pacientes era igual à razão áurea. O estudo foi realizado em seis grupos de 30 pacientes com diferentes padrões de crescimento facial. Verificou-se a presença da razão áurea em todos os grupos, exceto no que havia pacientes com padrão vertical de crescimento. As médias das razões encontradas como áureas foram 0,617; 0,619; 0,618; 0,617 e 0,619 com desvio padrão iguais a 0,0162; 0,0108; 0,0159; 0,0159 e 0,0155 respectivamente. No trabalho, o número de ouro considerado foi 0,618, o inverso do considerado no presente trabalho. Foi utilizado o teste *t* de *Student* com um nível de 5% de significância.

Dentre os trabalhos pesquisados, diversas metodologias foram usadas para inferir sobre a presença ou não de razão áurea em determinada população estudada. A teoria da decisão

foi a mais usada, no entanto, também foram encontrados critérios subjetivos, sem o uso de probabilidade.

2.2 TESTE DE HIPÓTESES

A Inferência Estatística é um procedimento que tem por objetivo estudar uma população por meio de evidências fornecidas por uma amostra. Segundo Bussab e Morettin (2002), a estimação, seja ela pontual ou intervalar, e os testes de hipóteses são os principais problemas de Inferência. O processo que permite verificar a veracidade de uma hipótese estatística acerca da população, a partir de informações amostrais, controlando (quantificando) as incertezas envolvidas na tomada de decisão é denominado teste de hipóteses.

Seja uma amostra aleatória Y_1, \dots, Y_n selecionada de uma população com uma distribuição $p(y|\theta)$, em que o parâmetro θ é um elemento do espaço paramétrico Θ . Diferentemente de problemas de estimação, em que o interesse é na aproximação do verdadeiro valor de θ , o teste de hipóteses é um processo que permite verificar se há evidências que apoiem ou não uma hipótese estatística (BARTOSZYNSKI; NIEWIADOMSKA-BUGAJ, 2008).

Uma hipótese estatística, de acordo com Casella e Berger (2010) é uma declaração sobre um parâmetro da população. A hipótese de interesse do pesquisador é denominada hipótese nula (H_0) e caso ela seja rejeitada, aceita-se como verdadeira a hipótese alternativa (H_1). Relacionados às hipóteses H_0 e H_1 estão os conjuntos Θ_0 e Θ_1 contidos em Θ , em que H_0 afirma que $\theta \in \Theta_0$ e H_1 afirma que $\theta \in \Theta_1$, em que Θ_0 e Θ_1 formam uma partição do domínio de Θ . Diz-se que H_i , para $i = 0,1$ é simples quando o conjunto Θ_i contém apenas um valor de θ . Se Θ_i contém mais de um valor de θ , então H_i é uma hipótese composta.

Sejam Ω o espaço amostral, a_0 a ação de considerar H_0 verdadeira e a_1 a ação de considerar H_1 verdadeira. Um teste de hipóteses estatístico, conforme Bolfarine e Sandoval (2001), é uma função de decisão d :

$$d : \Omega \rightarrow \{a_0, a_1\},$$

que divide o espaço amostral Ω em dois conjuntos, A_0 e A_1 , tais que:

$$A_0 = \{(y_1, \dots, y_n) \in \Omega; d(y_1, \dots, y_n) = a_0\}$$

e

$$A_1 = \{(y_1, \dots, y_n) \in \Omega; d(y_1, \dots, y_n) = a_1\},$$

em que A_0 e A_1 são disjuntos e $A_0 \cup A_1 = \Omega$ quando H_0 está completamente especificada. O conjunto A_0 é denominado região de aceitação de H_0 e A_1 a região de rejeição de H_0 , também chamada de região crítica. Na maioria dos problemas de testes de hipóteses, segundo DeGroot e Schervish (2012), a região crítica é definida em termos de uma estatística de teste $T(\mathbf{Y})$, calculada a partir dos dados de uma amostra.

A função poder de um teste de hipóteses com região crítica A_1 , denotada por $\pi(\theta)$, é definida como a probabilidade de H_0 ser rejeitada ao longo dos possíveis valores de θ . Assim, $\pi(\theta) = P(\mathbf{Y} \in A_1)$. O tamanho de um teste é definido como $\sup_{\theta \in \Theta_0} [\pi(\theta)]$ e corresponde ao tamanho da região crítica, denominado pelo nível de significância do teste, denotado por α e geralmente fixado pelo pesquisador. Os valores usuais de α , de acordo com Mood, Graybill e Boes (1974), mais utilizados são 1% e 5%.

Uma maneira de relatar os resultados depois da realização de um teste de hipóteses, segundo Casella e Berger (2010), é expor o valor de um determinado tipo de estatística, chamada valor- p . Denomina-se nível descritivo, denotado por $\hat{\alpha}$, também chamado de valor- p , o menor nível de significância α para o qual a hipótese nula H_0 seria rejeitada. Se $\hat{\alpha} \leq \alpha$, rejeita-se H_0 e, se $\hat{\alpha} > \alpha$, não se rejeita H_0 .

2.2.1 Erros envolvidos em um teste de hipóteses

Ao realizar um teste de hipóteses, dois tipos de erros são possíveis: rejeitar H_0 quando ela é verdadeira ou não rejeitá-la quando ela é falsa. Se $\theta \in \Theta_0$, então decidir que $\theta \notin \Theta_0$ é o erro tipo I. De acordo com Bolfarine e Sandoval (2001), a probabilidade de um erro do tipo I é

$$\alpha(\theta) = P_\theta(\mathbf{Y} \in A_1).$$

Por outro lado, se $\theta \notin \Theta_0$ e decide-se que $\theta \in \Theta_0$ é o erro tipo II; isso ocorre sempre que $\mathbf{Y} \notin A_1$. Portanto, a probabilidade de um erro tipo II é

$$\beta(\theta) = P_\theta(\mathbf{Y} \notin A_1).$$

As probabilidades de erros são funções de θ , e são expressos em termos de $\pi(\theta) = P_\theta(\mathbf{Y} \in A_1)$, a função poder do teste. O princípio da minimização requer que essa função poder seja tão pequena quanto possível para $\theta \in \Theta_0$ e a maior possível para $\theta \notin \Theta_0$. Assim, o melhor teste é tal que $P_\theta(\mathbf{Y} \in A_1) = 0$, se $\theta \in \Theta_0$ e $P_\theta(\mathbf{Y} \notin A_1) = 1$, se $\theta \notin \Theta_0$. No entanto, na maioria dos casos de importância prática e interesse, $P_\theta(\mathbf{Y} \in A_1)$ é uma função contínua de θ , com valores entre 0 e 1 (BARTOSZYNSKI; NIEWIADOMSKA-BUGAJ, 2008). Um bom teste é aquele que apresenta taxa de erro tipo I pequena e alta taxa de poder.

Dentre os testes de hipóteses estatística, o teste t de *Student* é bastante utilizado, inclusive utilizado indiscriminadamente por diversos pesquisadores na inferência sobre a razão áurea, como mencionado na seção 2.1.1.

2.2.2 Teste t de *Student*

Mais conhecido pelo seu pseudônimo *Student*, Willian Sealy Gosset (1876-1937) formou-se em química e matemática pela Oxford University e foi trabalhar na cervejaria Guinness na Irlanda em 1899, a fim de aprimorar os métodos de produção da empresa. Devido ao seu trabalho, estudou várias ferramentas de análise estatística e teve contato com vários estatísticos da época, como Karl Pearson, Egon Pearson e Ronald Aylmer Fisher (HANLEY; JULIEN; MOODIE, 2008).

Em 1908, publicou dois de seus trabalhos mais importantes, “The probable error of a mean” e “Probable error of a correlation coefficient” sob o pseudônimo de *Student*, uma vez que as normas da Guinness o impediam que publicasse em seu nome. No artigo “The probable error of a mean” Gosset apresentou a distribuição amostral da variância S^2 e do desvio padrão S para uma amostra independente e identicamente distribuída de tamanho n para uma população normal. Ele também mostrou que a média e o desvio padrão de tal amostra não são correlacionadas e apresentou a distribuição t de *Student* (FIENBERG; LAZAR, 2001).

Como o foco dos estatísticos da época estavam na teoria assintótica e a ênfase de Gosset era em problemas com pequenas amostras, sua publicação não teve grande impacto na comunidade estatística. De acordo com Fienberg e Lazar (2001), o trabalho de Gosset não foi totalmente reconhecido até Fisher generalizar a distribuição t de *Student*. Fisher também introduziu a noção de graus de liberdade, que não havia sido considerada por Gosset e o nome

“distribuição t de *Student*”.

A distribuição t de *Student* é definida pela razão entre uma variável aleatória normal padronizada e uma variável aleatória obtida pela raiz quadrada de uma qui-quadrado dividida pelos seus graus de liberdade. Se a variável aleatória Z segue uma distribuição normal padrão e U segue uma distribuição qui-quadrado, em que ν são os graus de liberdade, então a variável

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}} \quad (2.4)$$

segue uma distribuição t de *Student*.

A função de densidade de probabilidade t de *Student* com ν graus de liberdade é dada por

$$f(y; \nu, \mu, \sigma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\nu\pi}\sigma} \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \cdot I(y)_{-\infty < y < \infty},$$

Quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, a variável aleatória tem distribuição t de *Student* padronizada com ν graus de liberdade.

Pode-se mostrar que a distribuição t de *Student* converge para a distribuição normal com parâmetros μ e σ quando $\nu \rightarrow \infty$. Para alguns autores $\nu > 30$ é considerado suficiente para o uso desta aproximação (KINAS; ANDRADE, 2010).

Seja uma amostra aleatória de tamanho n proveniente de uma população com distribuição normal, com média μ e variância σ^2 . Sabe-se que $Z = \frac{(\bar{Y} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$ segue uma distribuição normal padrão, em que n é o tamanho da amostra e \bar{Y} é a média amostral, e $U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ segue uma distribuição qui-quadrado com $\nu = n - 1$ graus de liberdade. Substituindo essas expressões em (2.4) temos que:

$$T = \frac{\frac{(\bar{Y} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\frac{(\bar{Y} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{(\bar{Y} - \mu)}{S/\sqrt{n}}, \quad (2.5)$$

que também segue uma distribuição t de *Student* (CASELLA; BERGER, 2010).

Com esse resultado é possível, além de construir intervalos de confiança, realizar testes de hipóteses, usando T como estatística de teste.

2.2.3 Distribuição amostral de uma estatística

Na construção de um teste de hipóteses para um parâmetro populacional existe uma variável aleatória Y associada a uma dada população e têm-se uma hipótese sobre determinado parâmetro θ dessa população. Colhe-se uma amostra aleatória de elementos dessa população e deseja-se comprovar ou não tal hipótese. O objetivo do teste de hipótese é dizer, usando uma estatística, se a hipótese nula (H_0) é ou não aceitável (BUSSAB; MORETTIN, 2002).

Sejam Y_1, \dots, Y_n uma amostra aleatória de tamanho n a partir de uma população e seja $T = T(y_1, \dots, y_n)$ uma função com um valor real, cujo domínio inclui o espaço amostral de (Y_1, \dots, Y_n) . Então a variável aleatória T é chamada de estatística. A distribuição de probabilidade de uma estatística T é chamada de distribuição amostral de T . A escolha da estatística de teste a ser usada em um teste de hipótese deve ser de acordo com o modelo de probabilidade assumido e as hipóteses em questão.

Em testes de hipóteses em que o parâmetro de interesse é a média populacional μ , com hipóteses do tipo $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$ sob a suposição de que os dados sejam provenientes de uma população normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 , sabe-se que a média amostral \bar{Y} , o estimador de μ , também segue uma distribuição normal com média μ e variância σ^2/n . Sejam Y_1, \dots, Y_n variáveis aleatórias, a_1, \dots, a_n constantes em que pelo menos um dos valores a_i , $i = 1, \dots, n$, é diferente de zero e $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, então $a_i Y_i \sim N(a_i \mu_i, a_i^2 \sigma_i^2)$ e $\sum_{i=1}^n a_i Y_i \sim N(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2)$. Esse resultado diz que a distribuição de uma combinação linear de variáveis aleatórias normais tem ainda uma distribuição normal (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974). Assim, sob H_0 , a estatística

$$T(\mathbf{Y}) = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

segue uma distribuição t de Student com $n - 1$ graus de liberdade, em que S é o desvio padrão amostral.

Quando não há garantias de que os dados são provenientes de uma distribuição normal, utiliza-se o resultado a seguir. Sejam Y_1, Y_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Sejam a esperança e a variância de cada Y_i finitos e $E[Y_i] = \mu$ e $0 < Var[Y_i] = \sigma^2$. Definindo $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$, então, para qualquer y ,

$-\infty < y < \infty$, $z_n = \frac{\bar{Y}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tem uma distribuição normal padrão limite. Esse resultado, bastante conhecido é chamado de Teorema Central do Limite e, como consequência, tem-se que a média amostral de uma amostra aleatória de tamanho n de uma população com uma distribuição qualquer, tem uma distribuição assintoticamente normal com média μ e variância σ^2/n quando n tende ao infinito. A demonstração desse Teorema pode ser encontrada em Casella e Berger (2010). Como é pouco provável que se conheça σ^2 em situações práticas, utiliza-se a estatística $T(\mathbf{Y})$ para a realização do teste de hipóteses nesse caso, ao invés de z_n .

Em se tratando de testes de hipóteses em que o interesse é comparar duas populações com relação às suas médias, a estratégia é utilizar a diferença entre essas médias. Considerando a situação em que as populações são dependentes, como é o caso de observações tomadas em uma mesma unidade amostral, sejam X_i e Y_i as variáveis aleatórias associadas a essas populações. Sendo assim, a diferença para a i -ésima unidade amostral pode ser representada pela variável $M_i = X_i - Y_i$. A média amostral \bar{M} é um estimador do parâmetro μ_M e supondo, para $i = 1, \dots, n$ que a variável aleatória M_i segue uma distribuição normal $N(\mu_M, \sigma_M^2)$ (MAGALHAES; LIMA, 2010), então a estatística

$$T(M) = \frac{\bar{M} - \mu_0}{S_M/\sqrt{n}}$$

sob H_0 , segue uma distribuição t de *Student* com $n - 1$ graus de liberdade.

Não há na literatura um teste específico para inferir sobre a média das razões de duas populações. Muitos pesquisadores como Ono et al. (2007), Olivete Junior (2009), Silva et al. (2011), Henein et al. (2011) e Sabrish et al. (2013), no entanto, para inferir se a razão de determinados segmentos, sejam $R_i = X_i/Y_i$, são iguais ao número de ouro ϕ , utilizam o estimador \bar{R} , a média amostral das razões R_i , para estimar μ_R e assumem que a estatística

$$T(R) = \frac{\bar{R} - \mu_R}{S_R/\sqrt{n}}$$

sob H_0 , segue uma distribuição t de *Student* com $n - 1$ graus de liberdade. De acordo com Casella e Berger (2010), a razão R_i de duas variáveis aleatórias X_i e Y_i independentes, normais padrão é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Cauchy. Quando as variáveis aleatórias são dependentes, no entanto, como é o caso em que se quer inferir sobre a razão áurea, a distribuição de probabilidade da razão não é conhecida e a inferência baseada em pressuposições que não são satisfeitas pode levar a resultados não confiáveis.

Uma maneira de se inferir sobre a razão áurea, proposta neste trabalho, foi considerar a variável aleatória $D_i = X_i \cdot \phi - Y_i$, com $X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2_X)$ e $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2_Y)$. Como a distribuição de uma combinação linear de variáveis aleatórias normais tem ainda uma distribuição normal, tem-se que D_i segue uma distribuição normal $N(\mu_D, \sigma^2_D)$, e a estatística

$$T(D) = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}}$$

sob H_0 , segue uma distribuição t de *Student* com $n - 1$ graus de liberdade.

Na ausência da suposição de normalidade dos dados e assumindo que esses são provenientes de uma distribuição simétrica, uma alternativa ao teste t de *Student* é o teste não paramétrico Wilcoxon (CONOVER, 1971).

2.2.4 Teste não paramétrico de Wilcoxon

Segundo DeGroot e Schervish (2012), o teste não paramétrico de Wilcoxon foi introduzido por F. Wilcoxon e também por Mann e Whitney na década de 1940. É utilizado como metodologia alternativa ao teste t de Student emparelhado. Assumindo que os dados são provenientes de uma distribuição simétrica, o teste de Wilcoxon, também denominado por teste dos postos sinalizados de Wilcoxon, é baseado nos postos das diferenças $M_i = X_i - Y_i$. A hipótese nula testada é se a média ou a mediana da população de diferenças é igual a zero.

Sejam X_1, \dots, X_m e Y_1, \dots, Y_m amostras aleatórias dependentes. Definindo a diferença $M_i = X_i - Y_i$, o procedimento geral do teste, de acordo com Bussab e Morettin (2002) é considerar os valores absolutos das diferenças

$$|M_i| = |X_i - Y_i|, \quad i = 1, \dots, m.$$

No caso em que $X_i = Y_i$ omite-se a diferença correspondente. Sendo n o número de diferenças estritamente diferentes de zero, associa-se o posto do módulo D_i a cada par (X_i, Y_i) correspondente. Se houver alguma diferença D_i coincidente, usar postos médios. Indicando por T^+ a

soma dos postos positivos e considerando

$$R_i = \begin{cases} R(X_i, Y_i), & \text{se } D_i > 0, \\ -R(X_i, Y_i), & \text{se } D_i < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

em que $R(X_i, Y_i)$ é o posto associado a (X_i, Y_i) , se não houver empates, a estatística utilizada no teste é

$$T^+ = \sum_{i=1}^n R_i \quad (\text{com } D_i > 0).$$

Para $n > 50$ é utilizada uma aproximação normal com média $E[T^+] = \frac{n(n+1)}{4}$ e variância $Var[T^+] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$.

No caso de empates, a estatística utilizada é

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{\sum_{i=1}^n R_i^2}$$

que segue uma distribuição aproximadamente normal $N(0,1)$, sob a hipótese nula.

As metodologias propostas para se inferir sobre a razão áurea utilizando o teste t de *Student* e o teste Wilcoxon, fundamentadas na inferência frequentista, são baseadas em teoria assintótica e/ou com pressuposições a serem satisfeitas. Uma alternativa considerada foi a utilização da inferência bayesiana.

2.3 INFERÊNCIA BAYESIANA

De acordo com Paulino, Turkman e Murteira (2003), há uma diversidade de correntes e escolas ao aprofundarmos o estudo da estatística. Dentre elas, os frequentistas, os bayesianos, os estruturalistas e os verossimilhancistas. Não serão discutidas neste trabalho todas essas filosofias. Será feito apenas um pequeno paralelo entre a Inferência Frequentista e a Bayesiana.

A Inferência Estatística sob o enfoque bayesiano diferencia-se da frequentista, segundo DeGroot e Schervish (2012), pelo conceito distinto de probabilidade. A probabilidade, para os frequentistas, está relacionada com regularidade estatística de frequências relativas. Sendo assim, a probabilidade associada a um certo evento A é o quociente entre o número de resultados de A e o número de resultados possíveis, em que são equiprováveis os resultados possíveis.

Essa interpretação só é válida para os casos possíveis de serem repetidos indefinidamente sob as mesmas circunstâncias. A probabilidade para os bayesianos representa uma relação entre a evidência e a hipótese. A probabilidade mede o grau de credibilidade atribuído por uma pessoa na posse da evidência a um evento cuja veracidade é desconhecida (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

Outra diferença importante entre frequentistas e bayesianos está na concepção do parâmetro que, para os clássicos trata-se de um valor fixo, enquanto para os bayesianos é aleatório havendo possibilidade de utilizar uma distribuição de probabilidade para quantificar a incerteza do parâmetro.

A Inferência Bayesiana foi formalizada no artigo *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*, escrito por Thomas Bayes no século XVIII e publicado somente após sua morte por Richard Price. Por meio do Teorema de Bayes, presente no artigo, é possível a combinação da informação prévia (conhecimento *a priori*) com a informação dos dados para o cálculo da distribuição *a posteriori* do(s) parâmetro(s). A utilização de informação *a priori* em inferência bayesiana requer a especificação de uma distribuição *a priori* para o(s) parâmetro(s) de interesse $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$. Esta distribuição deve representar probabilisticamente o conhecimento que se tem sobre θ antes da obtenção da amostra.

Muitas vezes a distribuição *a priori* é a forma de se quantificar a incerteza sobre o experimento, porém a distribuição *a priori* não informativa não representa necessariamente o desconhecimento do pesquisador sobre o experimento, mas deve ser usada também de forma a viabilizar a inferência *a posteriori* (BOX; TIAO, 1992).

A distribuição de probabilidade *a priori* $p(\theta)$ reflete o conhecimento prévio sobre os parâmetros, anterior à observação dos dados. Na Figura 5 é apresentado um exemplo que mostra o efeito desta distribuição de probabilidade sobre a distribuição *a posteriori*. Uma distribuição “plana” indica pouca informação prévia e influencia levemente a distribuição *a posteriori* do parâmetro (FIGURA 5(a)). Neste caso, a informação contida nos dados (verossimilhança) é a dominante. A Figura 5(b) mostra a situação contrária, na qual a distribuição *a priori* contém informação suficiente para modificar substancialmente a distribuição *a posteriori*, gerando uma distribuição unimodal.

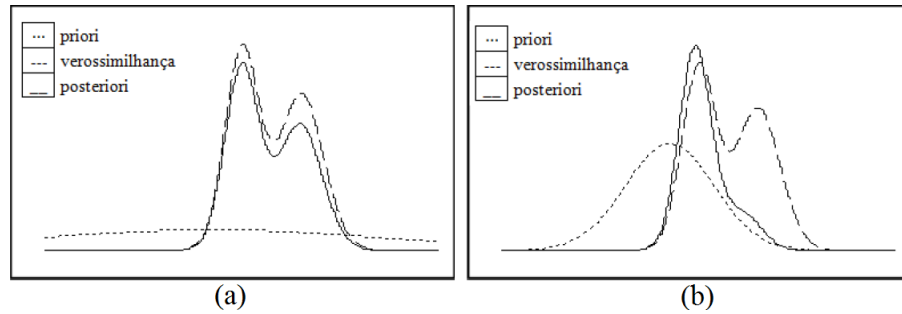


Figura 5 – Distribuição *a posteriori* usando distribuição *a priori* não informativa (a) e distribuição *a priori* informativa (b).

Fonte: COSTA (2004).

A distribuição *a posteriori* de θ , $p(\theta|\mathbf{Y})$, pode ser obtida através do Teorema de Bayes, com a combinação da distribuição *a priori* $p(\theta)$ e a função de verossimilhança $L(\mathbf{Y}|\theta)$, de forma que essa distribuição seja a forma mais completa de expressar o estado do conhecimento sobre o fenômeno investigado (KINAS; ANDRADE, 2010). A distribuição *a posteriori* de θ contém toda a informação probabilística a respeito deste(s) parâmetro(s) e sua função de densidade *a posteriori* é a melhor descrição do processo de inferência. Assim, estimativas pontuais e intervalares podem ser obtidas através desta distribuição.

A expressão matemática do Teorema de Bayes, segundo Paulino, Turkman e Murteira (2003), é dada por:

$$p(\theta|\mathbf{Y}) = \frac{L(\theta|\mathbf{Y})p(\theta)}{\int L(\theta|\mathbf{Y})p(\theta)d\theta}.$$

em que $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Como o denominador não depende de θ , tem-se:

$$p(\theta|\mathbf{Y}) \propto L(\theta|\mathbf{Y})p(\theta). \quad (2.7)$$

A expressão (2.7) pode ser entendida como *Posteriori* \propto *Verossimilhança* \times *Priori*, em que \propto representa proporcionalidade.

Para se inferir sobre qualquer elemento de θ , para $k > 1$ a distribuição *a posteriori* conjunta dos parâmetros, $p(\theta|\mathbf{Y})$, deve ser integrada em relação a todos os outros elementos que a constituem. Assim, se o interesse do pesquisador se concentra sobre determinado elemento de θ , tem-se a necessidade da obtenção da distribuição $p(\theta_i|\mathbf{Y})$, dada por:

$$p(\theta_i|\mathbf{Y}) = \int_{\theta \neq \theta_i} p(\theta|\mathbf{Y})d\theta_{\theta \neq \theta_i}.$$

A integração da distribuição conjunta *a posteriori* para a obtenção das marginais nem sempre é analítica e, portanto, necessita de algoritmos iterativos especializados como o Amos-

trador de Gibbs. Este algoritmo utiliza a simulação de Monte Carlo para gerar valores a partir de distribuições de probabilidades conhecidas e a teoria das Cadeias de Markov para representar a dependência entre os parâmetros, portanto o Amostrador de *Gibbs* faz uso do método conhecido como MCMC: *Monte Carlo Markov Chain* (SORENSEN, 1996).

Devido ao grande desenvolvimento da tecnologia, houve um aumento significativo da aplicação da inferência bayesiana nas últimas décadas. Assim, essa metodologia tem sido utilizada em vários segmentos da pesquisa científica.

Como mencionado anteriormente, a inferência sob o enfoque bayesiano é feita sobre a distribuição *a posteriori*. Através dela podem ser obtidas estimativas pontuais e intervalares do(s) parâmetro(s) de interesse. O intervalo obtido da distribuição *a posteriori* é chamado de intervalo de credibilidade e é denotado por IC_r . Embora semelhante ao intervalo de confiança clássico, sua interpretação é bastante diferente. Segundo Paulino, Turkman e Murteira (2003), a região de credibilidade é definida numericamente e admite uma interpretação probabilística direta e inequívoca.

Existe uma infinidade de regiões de credibilidade com o mesmo grau de credibilidade; normalmente o interesse está em selecionar aquela que englobe todos os valores de θ mais credíveis *a posteriori*. Esta região é dita a região de alta densidade *a posteriori*, abreviadamente região HPD (*Highest Probability Density*).

Uma abordagem bayesiana para testes de hipóteses é baseada em regiões HPD. Esse método, segundo Paulino, Turkman e Murteira (2003) consiste em construir uma região de credibilidade para θ , preferencialmente HPD, nos casos em que se tem uma priori vaga e rejeitar H_0 se o valor especificado pela hipótese nula H_0 está em uma região de *baixa* densidade *a posteriori*. Sejam $p(\theta|Y)$ a distribuição *a posteriori* para θ e $HPD(\alpha)$ um intervalo HPD para θ com respeito à distribuição *a posteriori* com credibilidade $(1 - \alpha)\%$. Testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta \neq \theta_0$, consiste em rejeitar H_0 se, e somente se, $\theta_0 \notin HPD(\alpha)$.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Esta seção foi dividida em quatro subseções. Na Subseção 3.1 é apresentado como foram realizadas as simulações Monte Carlo dos dados. A descrição dos testes estudados para razão áurea e como foi realizada a avaliação desses testes estão descritas nas Subseções 3.2 e 3.3 respectivamente. Os dados experimentais utilizados para aplicação dos testes para razão áurea são apresentados na Subseção 3.4.

3.1 DADOS SIMULADOS

Foram realizadas simulações Monte Carlo a fim de gerar n valores de dois segmentos com razão áurea para avaliar o erro tipo I e sem razão áurea para avaliar o poder. Para cada tamanho n de amostra igual a 2, 4, 6, 8, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180 e 200 foram realizadas 5.000 simulações.

Para avaliação da taxa de erro tipo I dos testes frequentistas e as taxas de rejeição de H_0 do teste bayesiano sob H_0 , os segmentos a_i e b_i foram gerados em proporção áurea. O segmento a_i foi gerado a partir de uma distribuição normal com média 1,5 e com os seguintes desvios padrão relativos: 5%, 10% e 15% da média de a_i . O segmento b_i foi obtido a partir de uma distribuição normal com média $1,5 \cdot \phi$ e desvios padrão iguais a 5%, 10%, 15% e 20% da média de b_i . O valor de ϕ considerado foi $(\sqrt{5} + 1)/2$.

A avaliação das taxas de poder dos testes frequentistas e as taxas de rejeição de H_0 do teste bayesiano sob H_1 , se deu com a geração dos segmentos a_i e b_i de modo que não estivessem em proporção áurea. O segmento a_i foi gerado a partir de uma distribuição normal com média 1,5 e os seguintes desvios padrão: 5%, 10% e 15% da média de a_i . O segmento b_i foi obtido a partir de uma distribuição normal com média $1,5 \cdot (\phi + 0,2)$ e desvios padrão iguais a 5%, 10%, 15%, e 20% da média de b_i .

Para definir a diferença mínima significativa foi realizado um estudo piloto sendo observado que quando essa diferença foi considerada 0,3 ou 0,4 ambas metodologias apresentavam taxas de poder semelhantes e altas. Por essa razão, definiu-se essa diferença igual a 0,2.

Sendo assim, as taxas de erro tipo I e o poder dos testes foram avaliados em 12 combinações de variabilidade dos segmentos em 33 tamanhos de amostra diferentes, formando assim

396 cenários diferentes. Sabendo que $cv = \frac{S}{\bar{Y}} \cdot 100\%$, se o desvio padrão de um segmento é igual a 5% da média, então o cv desse segmento é igual a 5%. Desse modo, optou-se pela discussão sobre o desempenho dos testes em função dos cv's e não em função do desvio padrão dos segmentos .

3.2 TESTES DE HIPÓTESES

Nesta subseção estão descritas as metodologias utilizadas para inferir sobre a razão áurea. Foram avaliadas duas estatísticas de teste utilizadas em literatura, fazendo uso do teste t de *Student*, aqui denominadas metodologias teste t com estatística razão (TR) e teste t com estatística delta ($T\Delta$). A estatística proposta para inferir sobre a razão áurea, utilizando o teste t de *Student*, foi denominada teste t emparelhado com estatística diferença (TED). O teste não paramétrico Wilcoxon proposto foi denominado teste Wilcoxon com estatística diferença (WD). A metodologia bayesiana foi denominada teste bayesiano com distribuição *a priori* de Jeffreys com estatística diferença (TBPJD).

3.2.1 Teste t com estatística razão

O teste t com estatística razão (TR), foi encontrado nos trabalhos de Ono et al. (2007), Olivete Junior (2009), Silva et al. (2011), Henein et al. (2011) e Sabrish et al. (2013). A hipótese nula testada foi $H_0 : \mu_R = \phi$. Ou seja, foi testado, para $i = 1, \dots, n$ se a média das razões de dois segmentos a_i e b_i , com $b_i > a_i$, são iguais ao número de ouro, ϕ , em que μ_R é a média das razões $R_i = \frac{b_i}{a_i}$. A estatística de teste utilizada foi

$$T(Y) = \frac{\bar{Y}_R - \phi}{S_R / \sqrt{n}},$$

em que \bar{Y}_R é a média e S_R o desvio padrão amostrais.

Nesse caso, a regra de decisão do teste foi rejeitar H_0 se o valor- p calculado fosse menor ou igual ao nível α de significância, adotado 5%.

3.2.2 Teste t com estatística delta

No teste t com estatística delta ($T\Delta$), encontrado no trabalho de Peron et al. (2012), verificou-se que a média das diferenças entre as razões da definição 2.1 é igual a zero, caracterizando assim, presença de razão áurea a certas medidas da face humana. A hipótese nula testada foi $H_0 : \mu_\Delta = 0$, em que μ_Δ é a média das diferenças $\Delta_i = \frac{a_i}{b_i} - \frac{b_i}{a_i + b_i}$.

A estatística de teste utilizada foi:

$$T(Y) = \frac{\bar{Y}_\Delta - 0}{S_\Delta/\sqrt{n}},$$

em que \bar{Y}_Δ é a média e S_Δ o desvio padrão amostrais.

Considerou-se como regra de decisão rejeitar H_0 se o valor- p calculado fosse menor ou igual ao nível α de significância adotado.

3.2.3 Teste t emparelhado com estatística diferença

A proposta de inferência para a razão áurea denominada teste t emparelhado com estatística diferença (TED) levou em consideração que, se dois segmentos a_i e b_i apresentam razão áurea, com $b_i > a_i$, então $\frac{b_i}{a_i} = \phi$ e, equivalentemente $a_i \cdot \phi - b_i = 0$. Denotando por X_i a variável aleatória referente à medida do segmento a_i e Y_i a variável aleatória referente à medida do segmento b_i , seja a variável aleatória $D_i = X_i \cdot \phi - Y_i$, com $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Nessa perspectiva, foi testada a hipótese de que a média das diferenças D_i é igual a zero, ou seja, $H_0 : \mu_D = 0$ caracterizando assim, a presença de razão áurea.

Como a distribuição de uma combinação linear de variáveis aleatórias normais tem ainda uma distribuição normal (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974), tem-se que D_i segue uma distribuição normal $N(\mu_D, \sigma_D^2)$, e a estatística

$$T(D) = \frac{\bar{D} - 0}{S_D/\sqrt{n}}$$

sob H_0 , segue uma distribuição t de *Student* com $n - 1$ graus de liberdade. Sendo assim, $T(D)$ foi a estatística de teste utilizada, em que \bar{D} é a média e S_D é o desvio padrão das diferenças amostrais.

Para a regra de decisão, rejeita-se H_0 se o valor- p calculado for menor ou igual ao nível

α de significância adotado.

3.2.4 Teste não paramétrico Wilcoxon com estatística diferença

Na proposta do teste não paramétrico de Wilcoxon com estatística diferença (WD) foi testado se a média das diferenças D_i é igual a zero, como em 3.2.3.

A estatística de teste utilizada foi:

$$T^+ = \sum_{i=1}^n R_i \text{ (com } D_i > 0\text{)}.$$

em que em que R_i é o posto associado a $(X_i \cdot \phi, Y_i)$ (BUSSAB; MORETTIN, 2002).

A regra de decisão utilizada foi rejeitar H_0 se o valor- p calculado fosse menor ou igual ao nível α de significância adotado.

3.2.5 Teste bayesiano com *priori* de Jeffreys e estatística diferença

No teste bayesiano proposto com distribuição *a priori* de Jeffreys e estatística diferença (TBPJD) foi testada a hipótese de que a média das diferenças D_i é igual a ϕ , como em 3.2.3.

A distribuição de probabilidade *a priori* utilizada foi a não informativa de Jeffreys, $p(\mu_D, \tau) = 1/\tau$, para $-\infty < \mu_D < \infty$ e $\tau > 0$, em que τ é o inverso da variância, ou seja, $\tau = 1/\sigma^2$. Assumiu-se que os dados amostrais foram provenientes de uma população normalmente distribuída e, para o cálculo da distribuição *a posteriori* conjunta foi utilizado o seguinte resultado, proposto em Kinas e Andrade (2010) e demonstrado no Apêndice A:

Teorema 3.1 *Se (μ_D, τ) tem distribuição a priori não informativa $p(\mu_D, \tau) = 1/\tau$ e $p(Y|\mu_D, \tau)$ tem distribuição $N^*(\mu_D, \tau)$, então, para $n \geq 2$, a posteriori $p(\mu_D, \tau|Y)$ terá distribuição normal-gama, em que $p(\mu_D|\tau, Y) \sim N^*(\mu_1, \lambda_1\tau)$ e $p(\tau|Y) \sim \text{Gama}(\alpha_1, \beta_1)$, com parâmetros $\mu_1 = \bar{Y}$, $\lambda_1 = n$, $\alpha_1 = (n-1)/2$ e $\beta_1 = (n-1)S^2/2$.*

A distribuição N^* a que se refere o Teorema 3.1 é a distribuição normal reparametrizada, considerando $\sigma^2 = 1/\tau$.

Para a inferência sobre a distribuição *a posteriori* foi necessário calcular a distribuição marginal para o parâmetro de interesse, nesse caso μ_D . Também foi utilizado um resultado proposto por Kinas e Andrade (2010) e a demonstração encontra-se no Apêndice B.

Teorema 3.2 *A distribuição de probabilidade a posteriori marginal para μ_D nas condições do Teorema 3.1 é a distribuição de probabilidade t de Student com $n - 1$ graus de liberdade.*

Para a decisão do teste TBPJD foi calculado um intervalo de credibilidade de 95% para μ_D e rejeitou-se H_0 se $\mu_D = 0$ não estava contido no intervalo de credibilidade.

3.3 AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DOS TESTES

Para avaliação do erro tipo I dos testes frequentistas e a taxa de rejeições de H_0 do teste bayesiano, foi calculada a proporção de rejeições de H_0 nas N simulações realizadas quando os segmentos a_i e b_i foram gerados em proporção áurea. Em seguida, essas proporções foram confrontadas com o nível de significância α fixado. A fim de avaliar o efeito de aleatoriedade, foi realizado um outro teste, chamado teste binomial exato, ao nível de 1% de significância, testando-se a hipótese de que a taxa de erro tipo I calculado em cada teste é igual ao nível de significância α . Foi construído, com o auxílio desse teste, um intervalo de confiança de 99% com valores estatisticamente iguais ao nível de significância, adotado em 5%.

A taxa do poder dos testes frequentistas e a taxa de rejeições de H_0 do teste bayesiano, foram obtidas contabilizando o número de vezes em que os testes rejeitaram H_0 nas N simulações feitas quando os segmentos a_i e b_i foram gerados de modo que não estivessem em proporção áurea. Nos testes frequentistas foram consideradas alto poder taxas acima de 95%.

3.4 DADOS EXPERIMENTAIS

Os dados amostrais utilizados foram obtidos do trabalho de Vaz (2014). A amostra referia-se à medida dos braços dos nove pares de cromossomos de 20 células do genótipo Cerbiatta da *Lactuca sativa* L., a alface. Um dos objetivos de Vaz (2014) foi quantificar as variações cariotípicas e morfométricas de genótipos da *Lactuca sativa* L. e identificar e quantificar a presença de proporção áurea na razão de braços dos cromossomos desses genótipos.

Sementes de cada genótipo foram colocadas para germinar em placas de Petri e seguindo procedimento conforme literatura específica, foram digitalizadas oito metáfases de cada genótipo. Para análise morfométrica dos cromossomos, foram obtidas as medidas do comprimento de braço curto e comprimento de braço longo de cada par cromossômico. Os cromossomos foram classificados de acordo com a posição do centrômero e os pares foram organizados de acordo com o comprimento e posição do centrômero. Na Figura 6 estão apresentados os idiogramas e a metáfase somática dos genótipos da *Lactuca sativa* L.

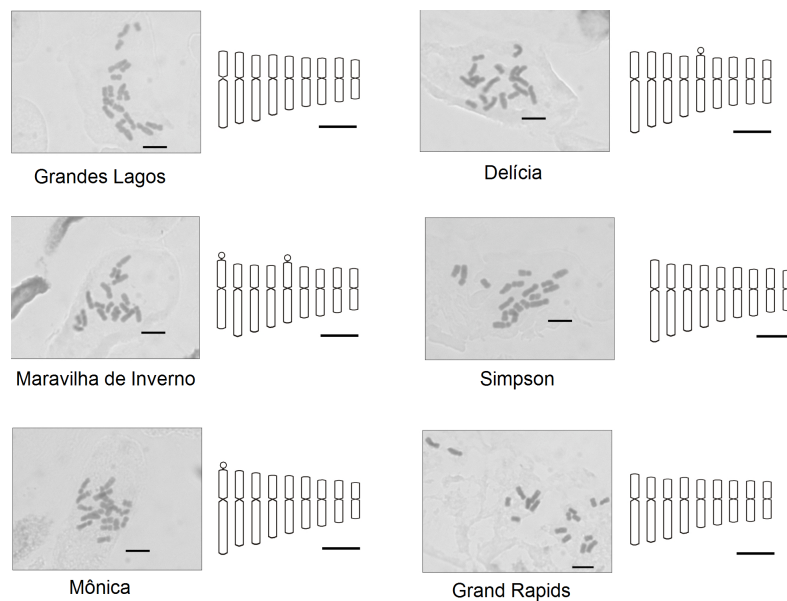


Figura 6 – Idiogramas e metáfase somática de genótipos da *Lactuca sativa* L.
Fonte: VAZ (2014).

De posse dessa amostra, com o auxílio do programa R (R CORE TEAM, 2014), foi testado se a razão entre as medidas do braço curto e longo dos cromossomos estavam em proporção áurea, utilizando todos os testes estudados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Estão apresentados na Seção 4.1 os resultados do desempenho dos testes avaliados via simulação Monte Carlo. Na Seção 4.2 estão os resultados dos testes quando aplicados nos dados experimentais.

4.1 DADOS SIMULADOS

O desempenho dos testes foi avaliado contabilizando-se as taxas de erro tipo I e poder nos diferentes cenários estudados. As retas horizontais em vermelho nos gráficos referente à taxa de erro tipo I representam taxas estatisticamente iguais a 5% e nos gráficos referentes às taxas de poder indicam taxa de poder igual a 95%.

A discussão acerca do teste TBPJD foi omitida em alguns casos por ter sido idêntica à do teste TED.

4.1.1 Tamanho dos testes

Dizer que um teste é exato é equivalente a afirmar que seu tamanho ou taxa de erro tipo I é estaticamente igual ao nível nominal de significância, adotado em 5%. Do mesmo modo, um teste é liberal quando seu tamanho é superior a 5% e conservador, quando seu tamanho é inferior a 5%.

Quando o tamanho amostral foi inferior ou igual a 40, no caso em que o coeficiente de variação do menor segmento (cva) foi igual a 5%, pode-se observar na Figura 7, que os testes TR e TED apresentaram taxas iguais ao valor nominal de significância em todas as combinações com o coeficiente de variação do maior segmento (cvb), fixados em 5%, 10%, 15% e 20%. O teste WD foi exato na maioria dos cenários. O teste $T\Delta$ foi liberal para amostras acima de 20 quando o cvb foi igual a 15% e 20%.

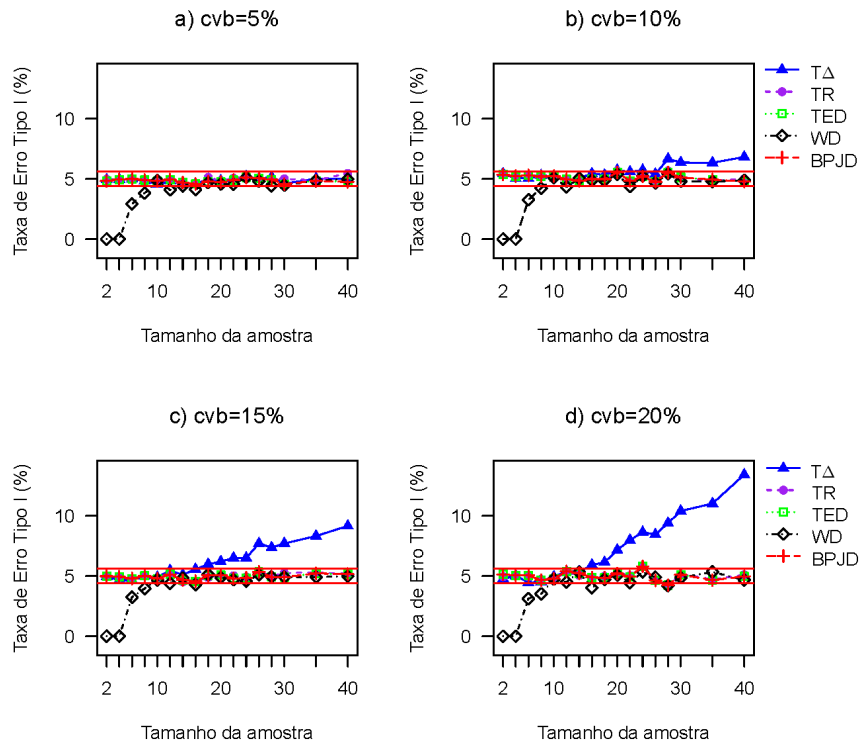


Figura 7 – Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras 2 de 40 e $cva=5\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Quando o cva foi igual a 10% , e o tamanho da amostra variou de 2 a 40, os testes TED e WD foram exatos na maioria dos cenários (FIGURA 8). O teste TR foi liberal para amostras acima de 20 quando cvb foi igual a 5% e, nos demais casos, apresentou taxas de erro tipo I próximas a 5% . O teste $T\Delta$ foi liberal para amostras acima de 20 quando cvb foi igual a 15% e 20% .

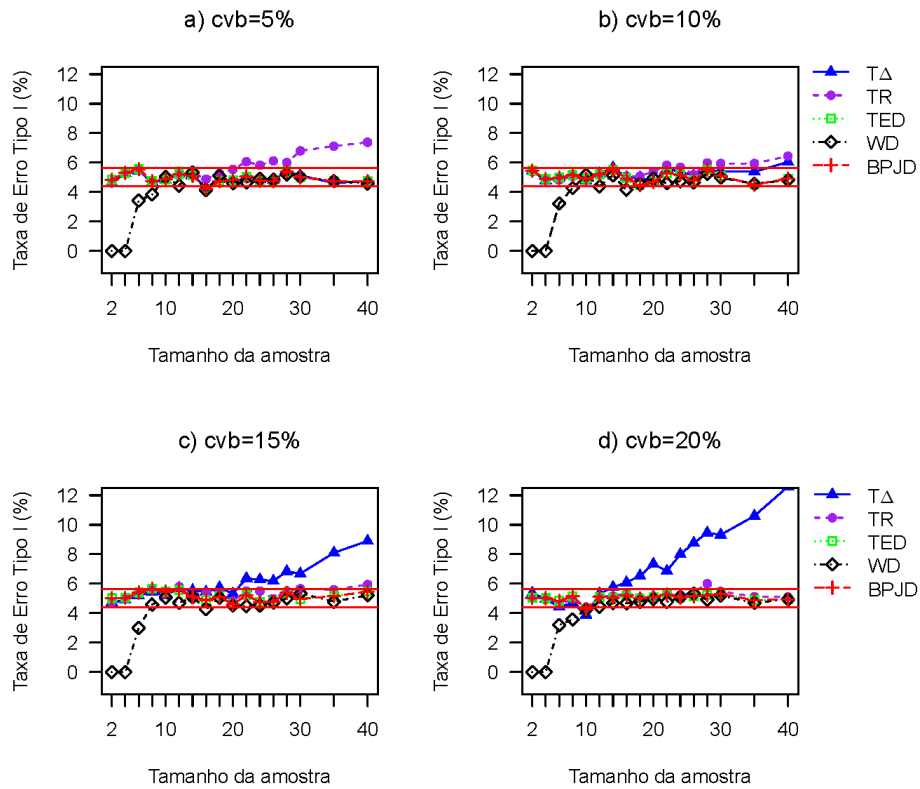


Figura 8 – Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 2 a 40 e $cva=10\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Quando o cva foi igual a 15% e o tamanho amostral até 40 os testes WD e TED foram exatos (FIGURA 9). O teste TR foi liberal na maioria dos cenários. O teste $T\Delta$ foi liberal para amostras acima de 20 quando cvb foi igual a 15% e 20% .

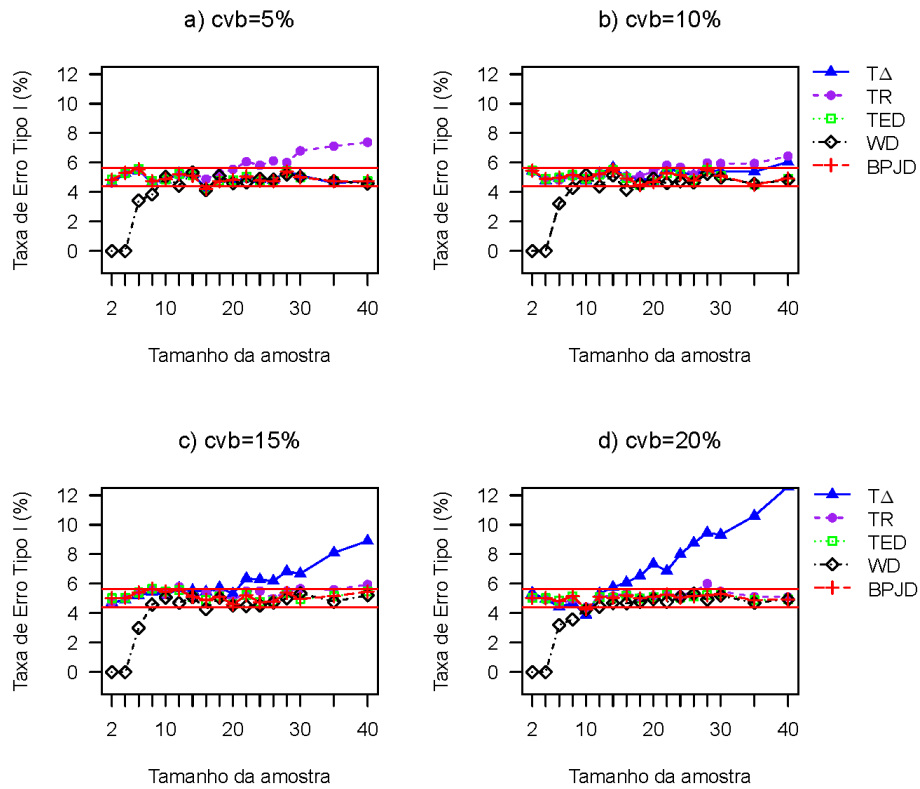


Figura 9 – Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 2 a 40 e $cva=15\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Para amostras de 40 a 100 e cva igual a 5% , os testes TR, WD e TED apresentaram taxas de erro tipo I iguais a 5% . O teste TΔ foi liberal quando cvb foi igual a 10% , 15% e 20% .

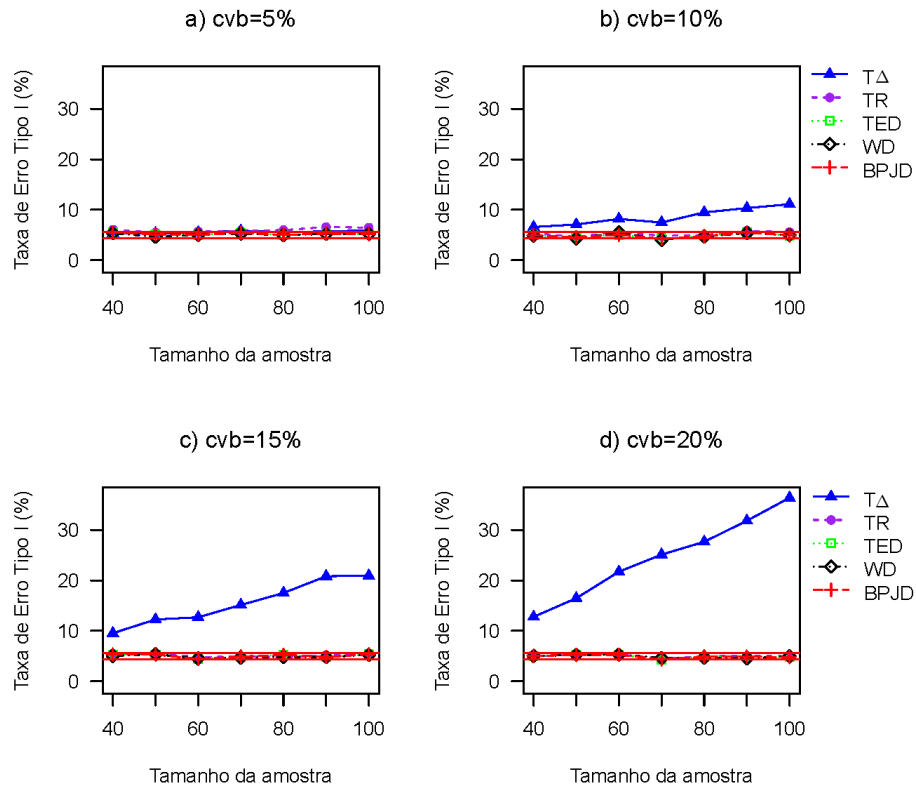


Figura 10 – Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, $cva=5\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Quando o cva foi igual a 10% para amostras de 40 a 100 os testes WD e TED foram exatos em todos os cenários. Os testes TR e TΔ foram liberais na maioria dos cenários.

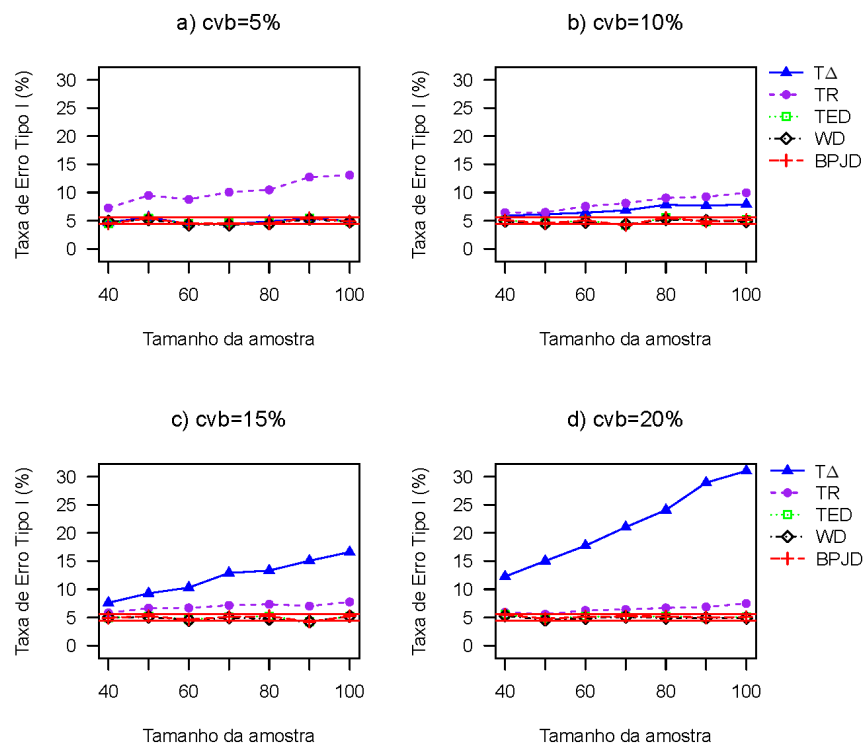


Figura 11 – Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, $cva=10\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

No caso em que o coeficiente de variação de a foi igual a 15% e o tamanho amostral variou de 40 a 100, pode-se notar, de acordo com a Figura 10, os testes WD e TED foram exatos em todos os cenários. O teste $T\Delta$ foi liberal quando cvb foi igual a 15% e 20% e o teste TR foi liberal em todos os cenários.

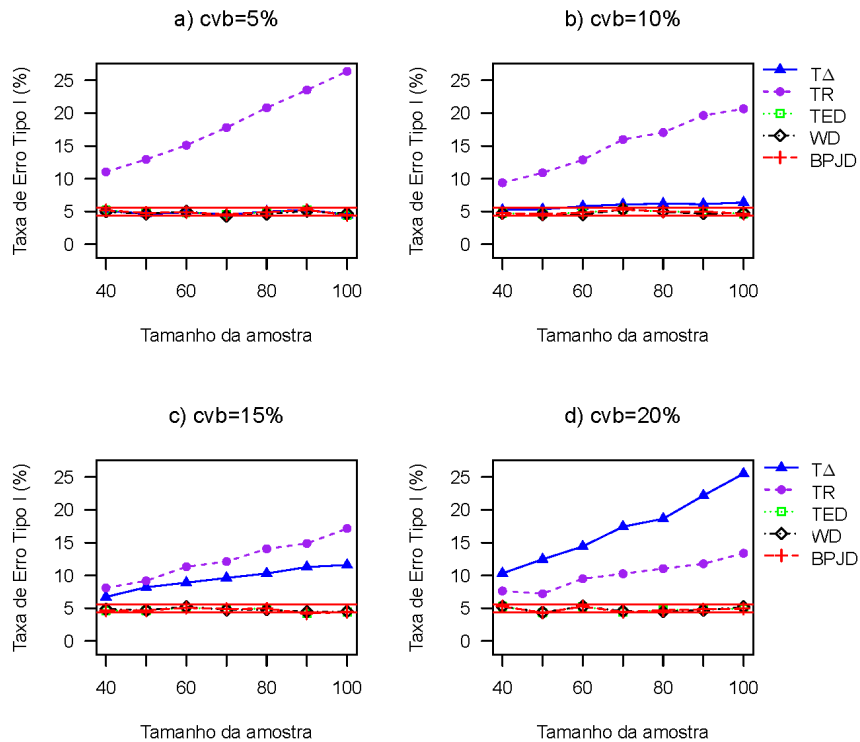


Figura 12 – Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, $cva=15\%$ com $cvb=5\%$, 10%, 15% e 20%.

Para amostras de tamanho maior ou igual a 100, no caso em que $cva=5\%$, os testes WD e TED foram exatos em todos os cenários (FIGURA 13). O teste TR apresentou taxas de erro tipo I próximas a 5% nessas combinações, enquanto o teste $T\Delta$ foi liberal em praticamente todos os cenários. Nos gráficos em que o cvb foram iguais a 15% e 20% o teste $T\Delta$ apresentou taxas de erro tipo I.

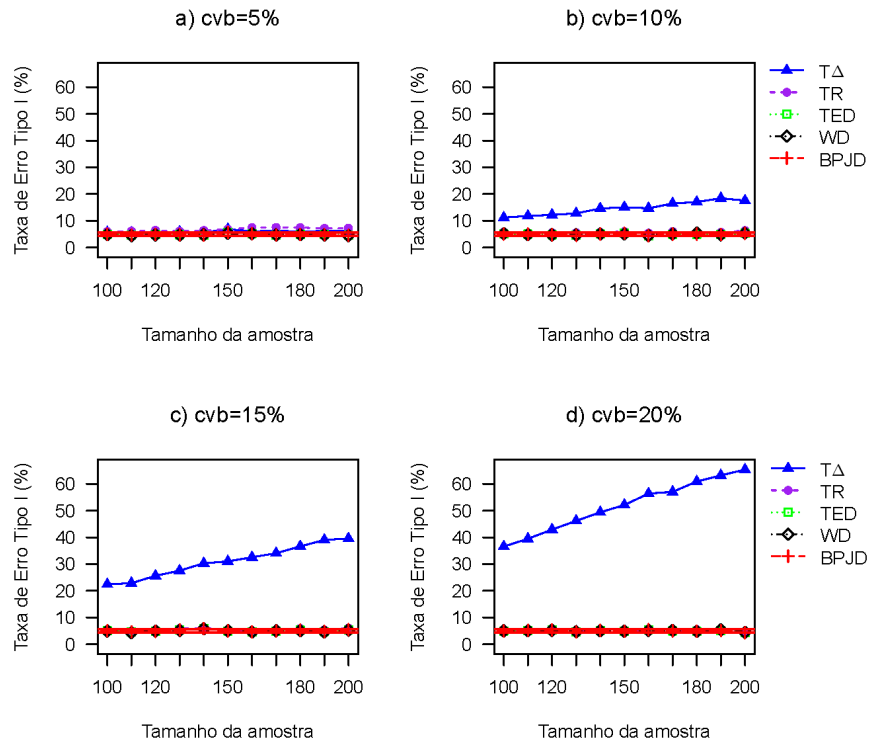


Figura 13 – Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 100 a 200, $cva=5%$ com $cvb=5%$, $10%$, $15%$ e $20%$.

No caso em que cva foi igual a $10%$ para amostras de tamanho superior a 100, os testes WD e TED foram exatos em todos os cenários (FIGURA 14). O teste TR apresentou taxas de erro tipo I acima de $5%$ em todas as combinações. O teste $T\Delta$ apresentou altas taxas de erro tipo I quando o cvb foi igual a $10%$, $15%$ e $20%$.

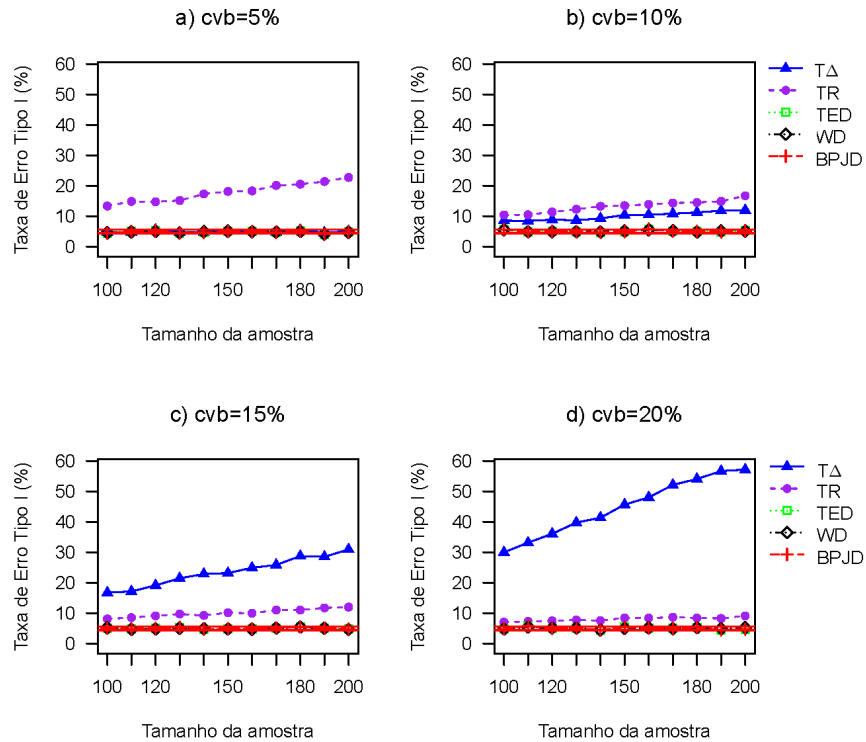


Figura 14 – Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 100 a 200, $cva=10\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Para cva igual a 15% e tamanho amostral acima de 100 os testes WD e TED foram exatos em todos os cenários (FIGURA 15) O teste TR apresentou taxas de erro tipo I acima de 5% em todas as combinações. O teste $T\Delta$ apresentou altas taxas de erro tipo I quando o cvb foi igual a 15% e 20% . Observa-se um aumento na taxa de erro tipo I dos testes TR e $T\Delta$ com o aumento do tamanho da amostra nessas combinações.

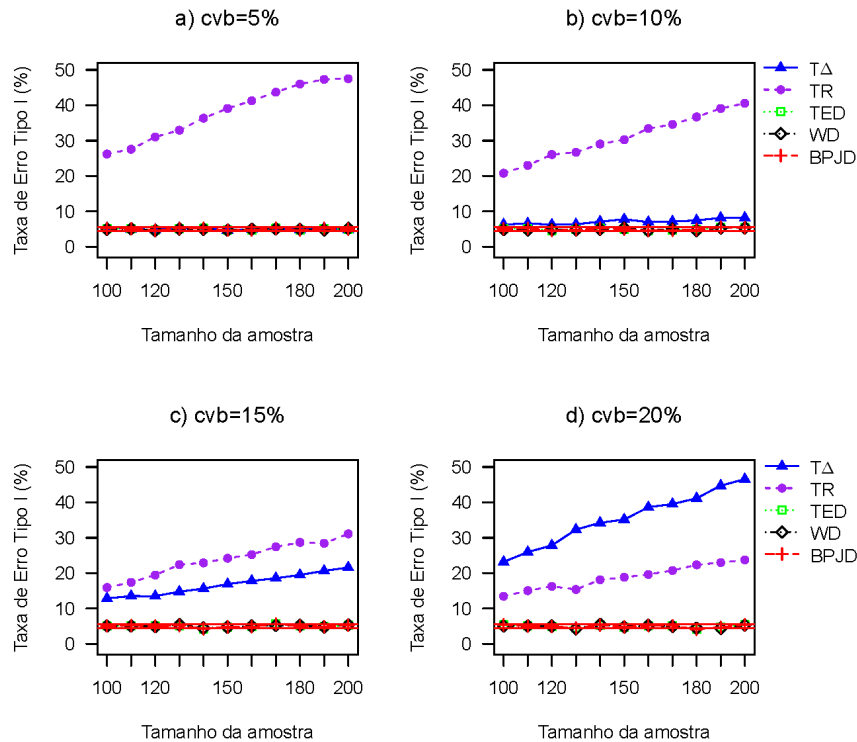


Figura 15 – Taxa de erro tipo I dos testes para tamanhos de amostras de 100 a 200, $cva=15\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Segundo Barros e Mazucheli (2005), num estudo via simulação Monte Carlo, as taxas de erro tipo I dos testes t de *Student* e Wilcoxon ficaram próximas do nível de significância adotado independente do tamanho amostral, que variou de 10 a 100. Esse resultado corrobora com os resultados obtidos para os testes TED e WD no presente estudo. Acredita-se que os testes TR e $T\Delta$ estudados envolvendo o teste t de *Student*, apresentaram desempenho inferior quanto ao controle do erro tipo I, pelo uso incorreto das estatísticas de teste por se tratar de razões.

Kinas e Andrade (2010) verificaram, por meio de alguns exemplos numéricos, que o intervalo de credibilidade encontrado para o teste bayesiano usando distribuição *a priori* de Jeffreys foi igual ao intervalo de confiança que faz uso da distribuição t de *Student*. Esse resultado também foi encontrado nas simulações realizadas com os testes TED e TBPJD e encontra-se demonstrado nos Apêndices A e B.

4.1.2 Taxas de poder dos testes

Para amostras menores ou iguais a 40, quando o cva foi igual a 5% (FIGURA 16), o desempenho dos testes quanto às taxas de poder são semelhantes. Observa-se que os testes $T\Delta$,

TR, TED e WD apresentam baixo poder (< 95%) para amostras menores que 8, 16, 28 e 40, quando o cvb foi igual a 5%, 10%, 15% e 20% respectivamente.

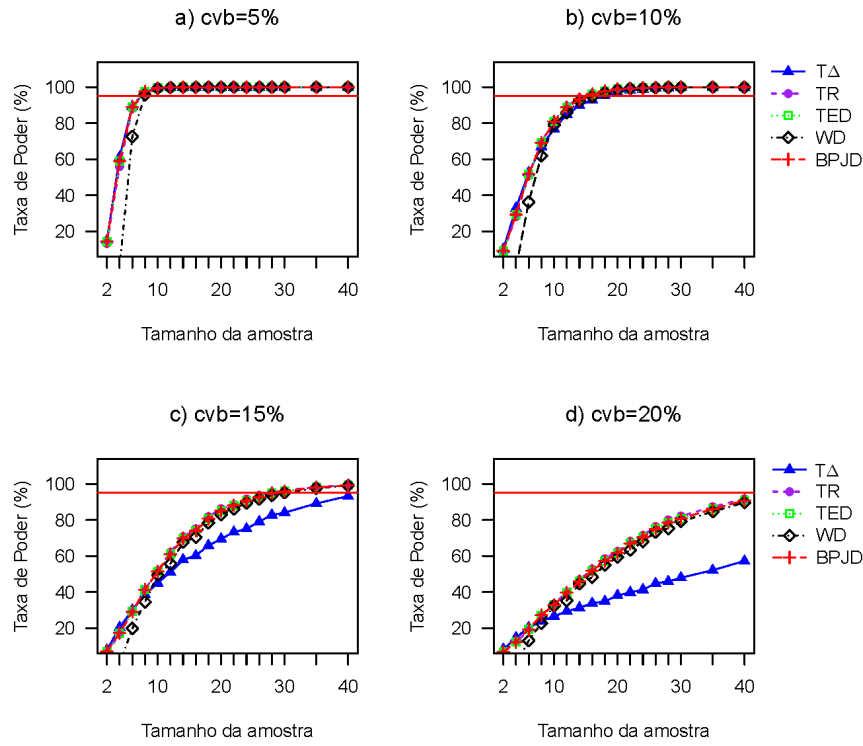


Figura 16 – Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 2 e 40, $cva=5\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Quando o cva foi igual a 10% (FIGURA 17), observa-se um pequeno aumento no tamanho da amostra, em relação ao $cva=5\%$ (FIGURA 16), para que os testes $T\Delta$, TR, TED e WD apresentassem alto poder, para amostras de tamanho inferior a 40. A partir de amostras de tamanho 14, 20, 28 para cvb igual a 5%, 10% e 15% respectivamente os testes alcançaram poder acima de 95%. No entanto para cvb igual a 20% observa-se taxas de poder inferior a 95% para todos os testes.

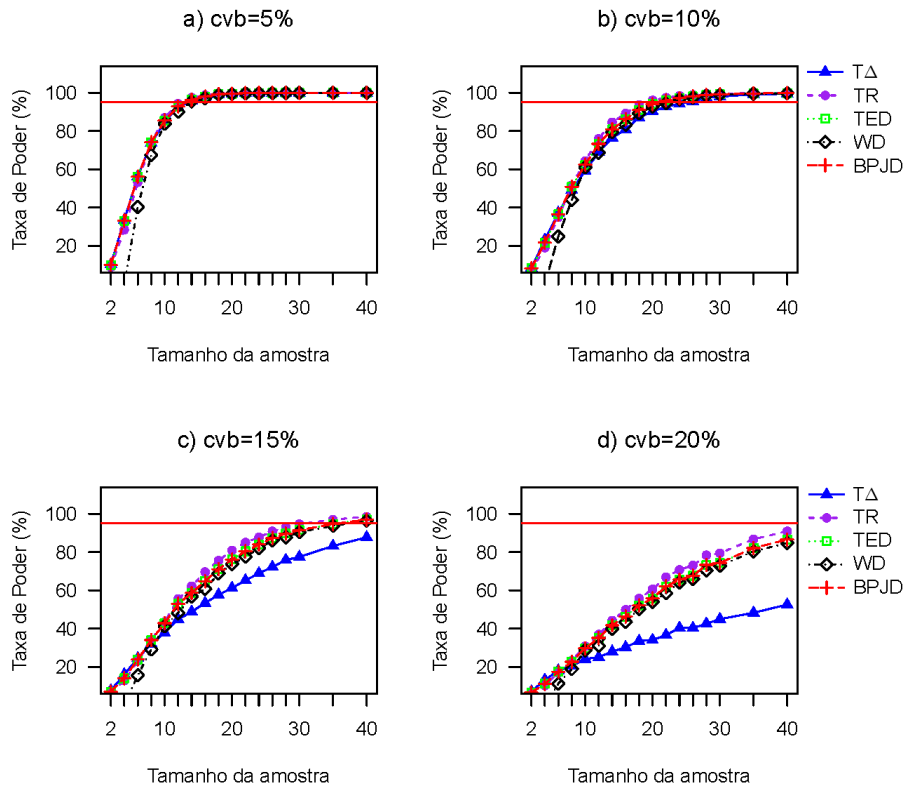


Figura 17 – Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 2 a 40, $cva=10\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Para as combinações com $cva = 15\%$ e amostras menores ou igual a 40 os testes apresentaram baixo poder para amostras menores que 20 e 26 quando o cvb foi igual a 5% e 10% respectivamente (FIGURA 18). No entanto, para cvb igual a 15% e 20% os testes apresentaram poder inferior a 95% em todos os tamanhos de amostra

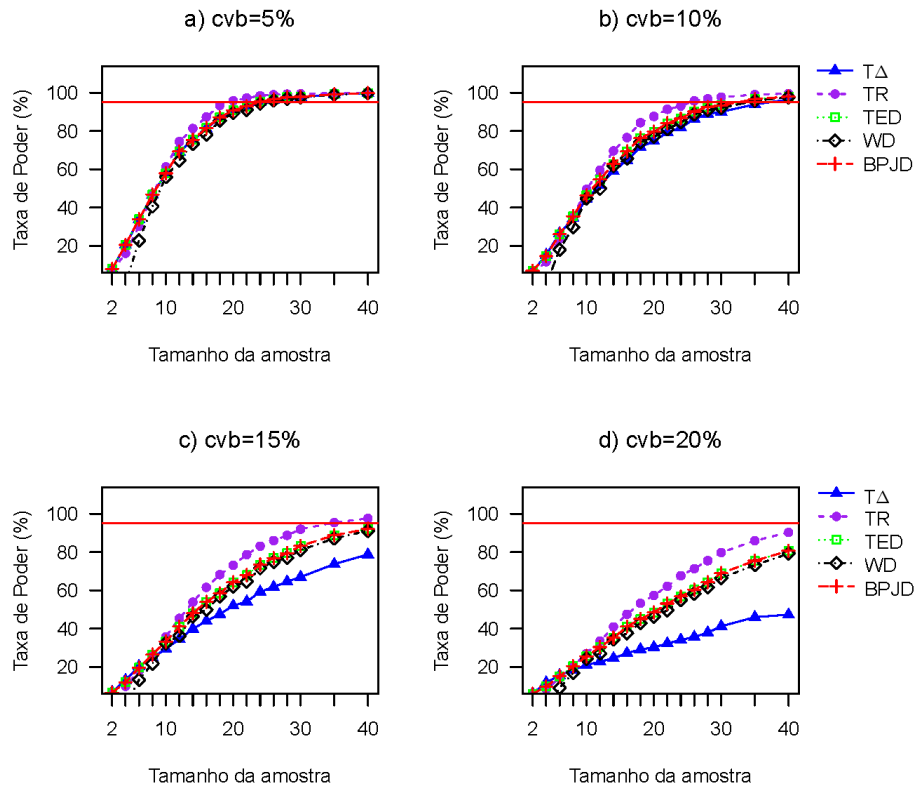


Figura 18 – Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 2 a 40, $cva=15\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Para amostras de tamanho de 40 a 100 e cva igual a 5% , pode-se observar, na Figura 19, que os testes apresentam poder igual ou superior a 95% para amostras acima de 40.

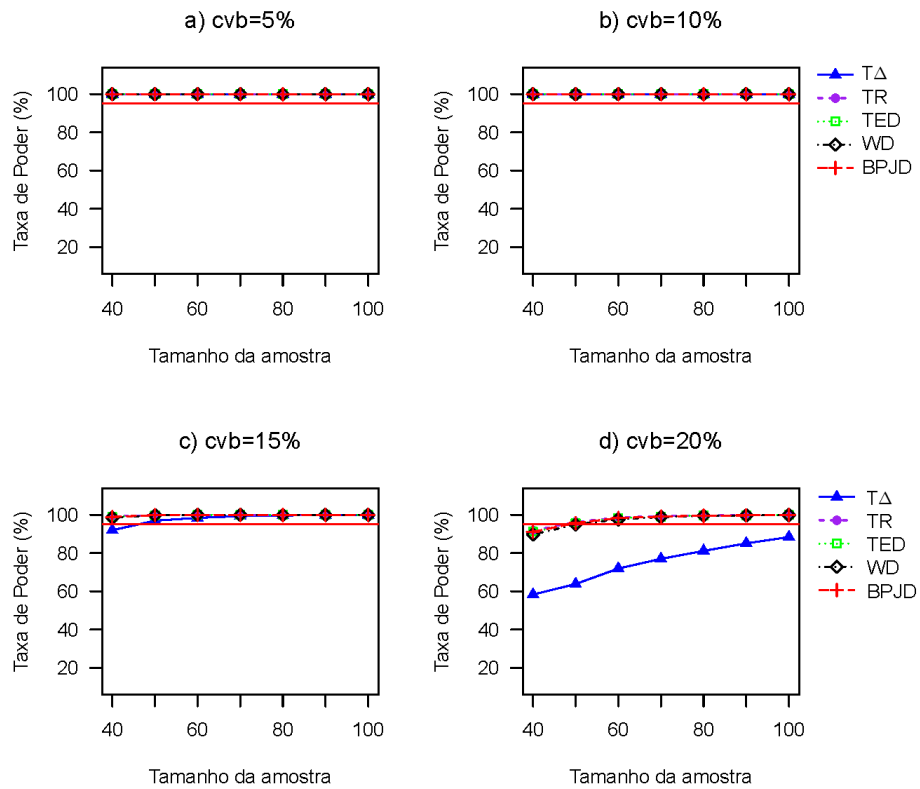


Figura 19 – Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, $cva=5\%$ com $cvb=5\%$, 10%, 15% e 20%.

Quando o cva foi igual a 10% e o tamanho amostral variou de 40 a 100, observa-se, na Figura 20, que os testes apresentam poder igual ou superior a 95% para amostras a partir de 50 quando cvb foi igual a 20% e acima de 40 nos demais cvb 's.

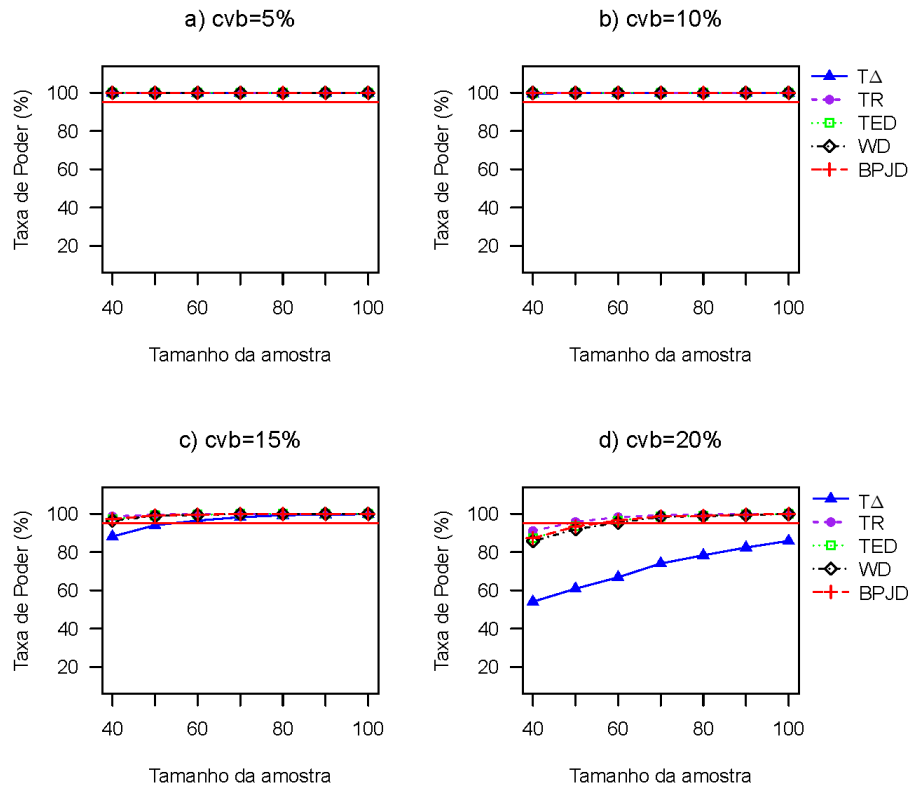


Figura 20 – Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, $cva=10\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Nos cenários de tamanho amostral de 40 a 100 e cva igual a 15% , os testes apresentam poder igual ou superior a 95% para amostras a partir de 60 quando cvb foi igual a 20% e acima de 40 nos demais cvb 's (FIGURA 21).

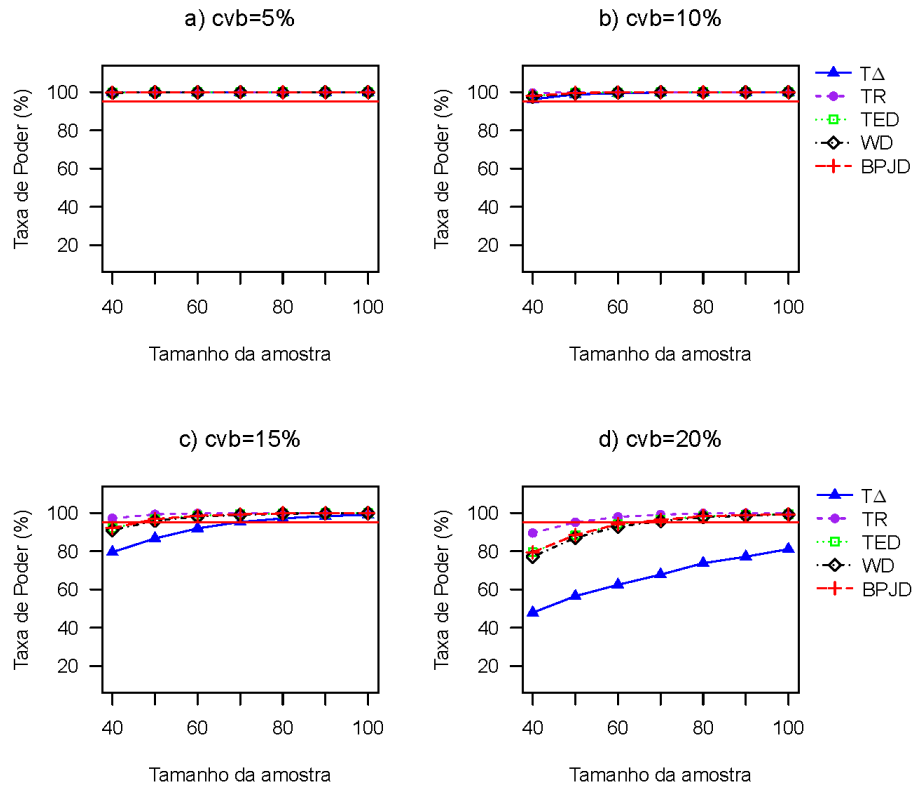


Figura 21 – Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 40 a 100, $cva=15\%$ com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Para todas as combinações de variabilidade dos segmentos estudadas, quando o tamanho da amostra foi superior a 100, pode-se observar que os testes apresentaram taxas de poder próxima ou acima de 95% (FIGURA 22).

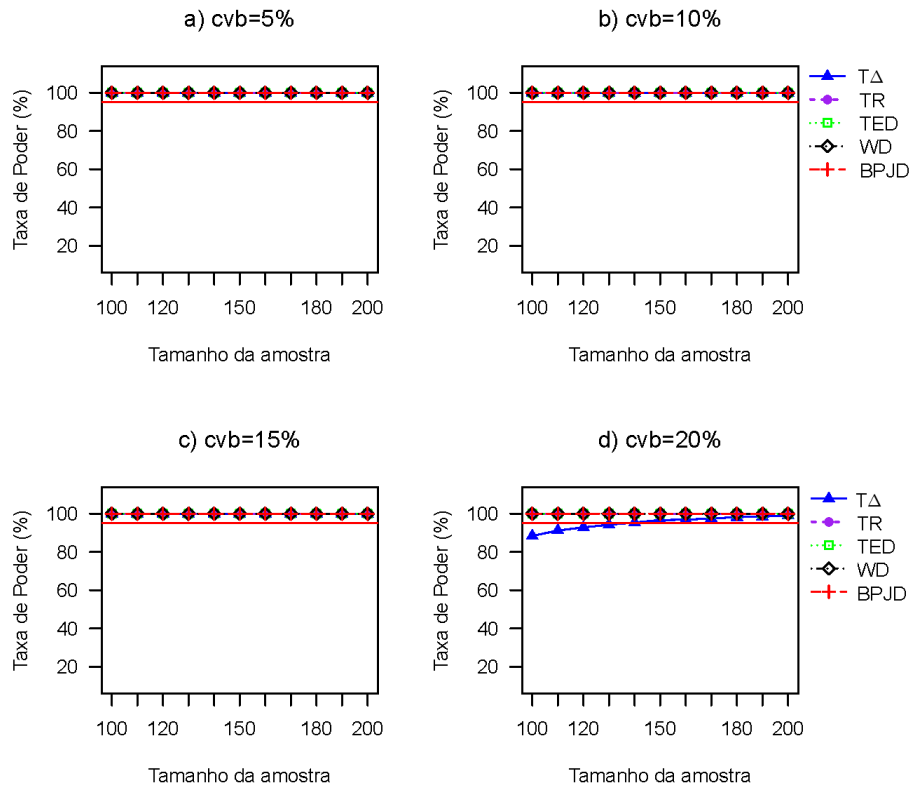


Figura 22 – Taxa de poder dos testes para tamanhos de amostras de 100 a 200, $cva=5\%$, 10% e 15% com $cvb=5\%$, 10% , 15% e 20% .

Pôde-se observar que, quanto maior a variabilidade dos segmentos, maior deve ser o tamanho da amostra para que os testes apresentem alto poder, considerado acima de 95%. De modo geral, esse tamanho de amostra necessário para obtenção de alta taxa de poder dos testes variou de 8 a 60, sendo o primeiro tamanho para a menor combinação de variabilidade dos dois segmentos (FIGURA 16, $cvb = 5\%$) e o segundo para a maior combinação (FIGURA 21, $cvb = 20\%$).

Segundo Barros e Mazucheli (2005), as taxas de poder dos testes t de *Student* e Wilcoxon aumentam e se aproximam de 100% com o aumento do tamanho da amostra. Esse resultado também foi observado no presente estudo. A variabilidade dos segmentos que formam a razão também influenciou nas taxas de poder dos testes. Para combinações com maior variabilidade menores foram as taxas de poder dos testes, para amostras de tamanho até 40.

4.2 DADOS EXPERIMENTAIS

O banco de dados analisado foi referente às medidas dos braços longo e curto dos cromossomos da *Lactuca sativa* L.

Na Tabela 2 estão apresentados os resultados dos testes estudados neste trabalho, quando aplicados à amostra. Observa-se que todos os testes avaliados levaram ao mesmo resultado quando aplicados aos dados: ambos detectaram a presença de proporção áurea no quinto par de cromossomo de células do genótipo Cerbiatta da *Lactuca sativa* L.

Tabela 2 – Coeficiente de variação (em %) do braço curto (cva) e do braço longo (cvb), média (\bar{R}) de cada razão BL/BC, valores-*p* dos testes T Δ , TR, TED e WD, e intervalo de credibilidade do teste TBPJD para cada par de cromossomo.

Par	\bar{R}	cva	cvb	T Δ	TR	TED	WD	$IC_{r95\%}$ TBPJD
I	2,23	12,0	15,5	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	[0,526; 0,995]
II	2,03	16,3	12,5	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	[0,309; 0,634]
III	2,05	13,2	10,5	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	[0,301; 0,620]
IV	1,91	8,10	13,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	[0,163; 0,451]
V	1,63	10,7	12,1	ϕ 0,9390	ϕ 0,7790	ϕ 0,9950	ϕ 0,6476	ϕ [-0,135; 0,134]
VI	1,42	10,7	10,4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	[-0,347; -0,134]
VII	1,30	11,0	11,7	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	[-0,448; -0,268]
VIII	1,29	10,4	12,7	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	[-0,463; -0,249]
IX	1,24	13,4	18,8	< 0,0001	< 0,0001	< 0,0001	0,0001	[-0,516; -0,245]

ϕ : presença de proporção áurea, ao nível de 5% de significância.

Segundo Vaz (2014), além da alface ser um vegetal importante na alimentação, é bastante utilizada como espécie alvo em bioensaios por possuir alta porcentagem de germinação em pouco tempo. E o conhecimento sobre os aspectos morfológicos dos cromossomos de espécies alvo é bastante importante. A identificação da proporção áurea na razão de braços de cromossomos ajuda nesse conhecimento, uma vez que, segundo ele, a presença de proporção áurea pode conferir a certas estruturas uma maior estabilidade e eficiência.

5 CONCLUSÕES

Na escolha de um teste para inferir sobre a razão áurea, deve-se levar em conta a variabilidade dos segmentos que formam essa razão e o tamanho da amostra.

O testes t com estatística razão (TR) e t com estatística delta ($T\Delta$) encontrados em literatura não são recomendados, pois, na maioria dos casos, não controlou o erro tipo I ou apresentaram baixas taxas de poder ($< 95\%$).

O teste bayesiano com distribuição *a priori* de Jeffreys para a diferença (TBJD) foi equivalente ao teste t emparelhado com estatística diferença (TED). Os testes TED e WD propostos, por sua vez, apresentaram melhor desempenho quanto ao controle da taxa de erro tipo I, sendo exato em todos os cenários, no entanto, apresentaram baixo poder ($< 95\%$) para pequenas amostras, principalmente quando a variabilidade dos dois segmentos é maior.

Todos os testes avaliados neste trabalho detectaram a presença de proporção áurea no quinto par de cromossomo de células do genótipo Cerbiatta da *Lactuca sativa* L., a alface.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ATELA, P.; GOLE, C.; HOTTON, S. A dynamical system for plant pattern formation: a rigorous analysis. **Journal of Nonlinear Science**, v. 12, n. 6, p. 641–676, 2002.
- BARROS, E. A. C.; MAZUCHELI, J. Um estudo sobre o tamanho e poder dos testes t-Student e Wilcoxon. **Acta Scientiarum. Technology**, Universidade Estadual de Maringá, v. 27, n. 1, p. 23–32, 2005.
- BARTOSZYNSKI, R.; NIEWIADOMSKA-BUGAJ, M. **Probability and statistical inference**. 2. ed. Hoboken: John Wiley and Sons, 2008.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à inferência estatística**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.
- BOX, G. E. P.; TIAO, G. C. **Bayesian inference in statistical analysis**. New York: J. Wiley-Interscience, 1992.
- BUSSAB, W. de O.; MORETTIN, P. A. **Estatística básica**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2002.
- CAMARA, M. A. da; RODRIGUES, M. da S. O número ϕ . **FAMAT em Revista**, n. 11, p. 81–184, 2008.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência estatística**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
- CONOVER, W. J. **Practical nonparametric statistics**. New York: John Wiley and Sons, 1971.
- COSTA, W. U. **Técnicas bayesianas para engenharia elétrica**. 2004. Disponível em: <<<http://www.cpdee.ufmg.br/~wadaed/Pesquisa/TecBayesianas.pdf>>>. Acesso em: 10 mar. 2015.
- DEGROOT, M. H.; SCHERVISH, M. J. **Probability and statistics**. 4. ed. New York: Addison Wesley, 2012.
- DESU, M. M.; RAGHAVARAO, D. **Nonparametric statistical methods for complete and censored data**. [S.l.]: CRC Press, 2003.
- FIENBERG, S. E.; LAZAR, N. William Sealy Gosset in statisticians of the centuries. **Springer New York**, p. 312–317, 2001.
- GIL, C. T. L. de A. **Proporção áurea craniofacial**. São Paulo: Santos, 2001.
- GONZALEZ, L. C. R.; ZARATE, H. C.; ROSALES, M. V. Relationship between facial golden ratio and malocclusion in mexican patients who attended the orthodontics clinic at facultad de odontología de la universidad tecnológica de méxico during 2009 with facial aesthetics criteria evaluated with marquardt mask. **Revista Mexicana de Ortodoncia**, São Paulo, v. 2, n. 1, p. 9 – 17, 2014.
- GOPFERT, I. M.; RIVERA, G. Proporção áurea e harmonia de sorriso em alunos de graduação da universidade católica de brasília. **Oral Sciences**, p. 43–47, 2013.

- HANLEY, J. A.; JULIEN, M.; MOODIE, E. E. M. Student's z, t, and s: What if Gosset had r? **The American Statistician**, v. 62, n. 1, p. 64–69, 2008.
- HENEIN, M. Y. et al. The human heart: application of the golden ratio and angle. **International Journal of Cardiology**, v. 150, n. 3, p. 239 – 242, 2011.
- KINAS, P. G.; ANDRADE, H. A. **Introdução à análise bayesiana (com R)**. Porto Alegre: maisQnada, 2010.
- LAURO, M. M. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. **Exacta**, v. 3, p. 35–48, 2005.
- LEVIN, E. I. Dental esthetics and the golden proportion. **The Journal of Prosthetic Dentistry**, v. 40, n. 3, p. 244 – 252, 1978.
- LIVIO, M. **Razão áurea: a história de fi, um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- MAGALHAES, M. N.; LIMA, A. C. P. de. **Noções de probabilidade e estatística**. São Paulo: IME-USP, 2010.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. **Introduction to the theory of statistics**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1974.
- OLIVEIRA, E.; FERREIRA, T. E. O número de ouro e suas manifestações na natureza e na arte. **Revista Complexus - Instituto Superior De Engenharia Arquitetura E Design**, n. 2, p. 64 – 81, 2010. Disponível em: <<<http://www.engenheiro.info>>>. Acesso em: 18 jun. 2014.
- OLIVETE JUNIOR, C. **Novos métodos para estimativa da idade óssea baseados no processamento de imagens radiográficas da mão**. 164 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2009.
- ONO, E. et al. Análise da proporção áurea em indivíduos dolico, braqui e mesofaciais, por meio de radiografias cefalométricas laterais. **Revista Odonto Ciência**, v. 22, p. 154 – 159, 2007.
- PAULINO, C.; TURKMAN, M. A. A.; MURTEIRA, B. E. **Estatística bayesiana**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.
- PERON, A. P. L. M. et al. Photometric study of divine proportion and its correlation with facial attractiveness. **Dental Press Journal of Orthodontics**, SciELO Brasil, v. 17, n. 2, p. 124–131, 2012.
- R CORE TEAM. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2014. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>. Acesso em: 10 ago. 2014.
- RICKETTS, R. M. The biologic significance of the divine proportion and Fibonacci series. **American Journal of Orthodontics**, v. 81, n. 5, p. 351 – 370, 1982.
- SABRISH, S. et al. Are all mandibles golden? A cephalometric study of mandibular morphology as compared to the golden proportion. **APOS Trends in Orthodontics**, v. 3, n. 3, p. 78 – 82, 2013.

SILVA, M. A. dos S. et al. Avaliação da proporção divina craniofacial antes e após tratamento ortodôntico, em fotografias e radiografias cefalométricas laterais. **Braz. Dent. Sci.**, v. 14, n. 1/2, p. 13 – 21, 2011.

SIQUEIRA, P. M. et al. Incidência da proporção áurea regressiva após tratamento ortodôntico. **ROBRAC (online)**, v. 21, p. 515 – 518, 2012.

SORENSEN, D. **Gibbs sampling in quantitative genetic**. Copenhagen: Foulun, 1996.

TAKESHITA, W. M. et al. Verificação da proporção áurea em radiografias cefalométricas laterais de paciente portadores de oclusão classe II de angle. **Revista de Odontologia da Metodista**, v. 15, p. 16 – 24, 2007.

VAZ, J. M. C. **Proporção áurea em modelos biológicos**. Dissertação (Mestrado em Ecologia e Tecnologia Ambiental) — Universidade Federal de Alfenas, UNIFAL-MG, Alfenas, 2014.

APÊNCICES

APÊNDICE A: Demonstração do Teorema 3.1 da Seção 3

Se (μ_D, τ) tem distribuição *a priori* não-informativa $p(\mu_D, \tau) = 1/\tau$ e $p(Y|\mu_D, \tau)$ tem distribuição $N^*(\mu_D, \tau)$, então, para $n \geq 2$, a *posteriori* $p(\mu_D, \tau|Y)$ terá distribuição normal-gama, em que $p(\mu_D|\tau, Y) \sim N^*(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $p(\tau|Y) \sim \text{Gama}(\alpha_1, \beta_1)$, com parâmetros $\mu_1 = \bar{Y}$, $\sigma_1^2 = n\tau$, $\alpha_1 = (n-1)/2$ e $\beta_1 = S^2(n-1)/2$.

Demonstração: Seja N^* a distribuição normal reparametrizada com $\tau = 1/\sigma^2$. Considere para os parâmetros (μ_D, τ) uma distribuição *a priori* não-informativa

$$p(\mu_D, \tau) = 1/\tau,$$

e uma função de verossimilhança dada por

$$L(\mu_D, \tau|Y) \propto \tau^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_D)^2 \right\}.$$

A distribuição *a posteriori* pode ser obtida através do produto da distribuição *a priori* $p(\mu_D, \tau)$ com a função de verossimilhança. Desse modo,

$$\begin{aligned} p(\mu_D, \tau|Y) &\propto p(\mu_D, \tau) \cdot L(\mu_D, \tau|Y) \\ &\propto \tau^{-1} \cdot \tau^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_D)^2 \right\} \\ &\propto \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_D)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Tomando o termo envolvendo somatório dentro das chaves em (5.1), adicionando e subtraindo \bar{Y} e realizando algumas operações algébricas, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_D)^2 &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y} + \bar{Y} - \mu_D)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(y_i - \bar{Y})^2 + 2(y_i - \bar{Y})(\bar{Y} - \mu_D) + (\bar{Y} - \mu_D)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 + 2(\bar{Y} - \mu_D) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y}) + n(\bar{Y} - \mu_D)^2 \\ &= (n-1) \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2}{n-1} + 2n(\bar{Y} - \mu_D) \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})}{n} + n(\bar{Y} - \mu_D)^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Observe que a expressão $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})$ em (5.2) refere-se à soma dos desvios em relação à média e, portanto, igual a zero, assim,

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_D)^2 = (n-1)S^2 + n(\bar{Y} - \mu_D)^2. \quad (5.3)$$

Substituindo o resultado obtido em (5.3) em (5.1), segue que:

$$\begin{aligned}
 p(\mu_D, \tau|Y) &\propto \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(n-1)S^2 + n(\bar{Y} - \mu_0)^2] \right\} \\
 &\propto \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (n-1)S^2 - \frac{n\tau}{2} (\bar{Y} - \mu_D)^2 \right\} \\
 &\propto \tau^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{n\tau}{2} (\bar{Y} - \mu_D)^2 \right\} \tau^{\frac{n-1}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{(n-1)S^2}{2} \tau \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Observe que $p(\mu_D, \tau|Y)$ é o produto do núcleo de uma distribuição normal N^* pelo núcleo de uma distribuição gama. Assim, a distribuição condicional $p(\mu_D|\tau, Y) \sim N^*(\mu_1, \lambda_1)$, em que

$$\mu_1 = \bar{Y} \quad \text{e} \quad \sigma_1^2 = n\tau.$$

E a distribuição condicional $p(\tau|Y) \sim \text{Gama}(\alpha_1, \beta_1)$, em que:

$$\alpha_1 = \frac{n-1}{2} \quad \text{e} \quad \beta_1 = \frac{(n-1)S^2}{2}.$$

APÊNDICE B: Demonstração do Teorema 3.2 da Seção 3

A solução analítica para a distribuição marginal $p(\mu_D|Y)$ é a distribuição de probabilidade t de *Student* com $n - 1$ graus de liberdade.

Demonstração: Vimos que a distribuição *posteriori* a que se refere o Teorema 3.1 satisfaz a seguinte relação:

$$\begin{aligned} p(\mu_D, \tau|Y) &\propto \tau^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{n\tau}{2}(\bar{Y} - \mu_D)^2\right\} \tau^{\frac{n-1}{2}-1} \exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2}\tau\right\} \\ &= \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}[n(\bar{Y} - \mu_D)^2 + (n-1)S^2]\tau\right\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para o cálculo da distribuição marginal para μ_D deve-se integrar (5.5) com respeito a τ :

$$p(\mu_D|Y) \propto \int_0^\infty \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}[n(\bar{Y} - \mu_D)^2 + (n-1)S^2]\tau\right\} d\tau. \quad (5.6)$$

Nomeando $\alpha_1 = \frac{n}{2}$ e $\beta_1 = \frac{1}{2}[n(\bar{Y} - \mu_D)^2 + (n-1)S^2]$ a equação (5.6) torna-se:

$$p(\mu_D|Y) \propto \int_0^\infty \tau^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1\tau} d\tau. \quad (5.7)$$

Multiplicando e dividindo o segundo membro de (5.7) por $\Gamma(\alpha_1) \cdot \beta_1^{\alpha_1}$, tem-se:

$$p(\mu_D|Y) \propto \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\beta_1^{\alpha_1}} \int_0^\infty \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \tau^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1\tau} d\tau. \quad (5.8)$$

Como o integrando de (5.8) é uma função densidade de probabilidade $\text{Gama}(\alpha_1, \beta_1)$ e $\Gamma(\alpha_2)$ é uma constante, segue que:

$$\begin{aligned} p(\mu_D|Y) &\propto \beta_1^{-\alpha_1} \\ &= \frac{1}{2}[n(\bar{Y} - \mu_D)^2 + (n-1)S^2]^{-\frac{n}{2}} \\ &= \left[\frac{(n-1)S^2}{2} + \frac{n(\bar{Y} - \mu_D)^2}{2}\right]^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dividindo ambos os termos dentro dos colchetes em (5.9) por $(n-1)S^2/2$ e realizando algumas operações algébricas, vem:

$$\begin{aligned} p(\mu_D|Y) &\propto \left[1 + \frac{n(\bar{Y} - \mu_D)^2}{(n-1)S^2}\right]^{-\frac{n-1+1}{2}} \\ &= \left[1 + \frac{(\bar{Y} - \mu_D)^2}{(n-1)\frac{S^2}{2}}\right]^{-\frac{n-1+1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Observe que (5.10) é o núcleo de uma distribuição t de *Student* central com $n - 1$ graus de liberdade, $\mu = \bar{Y}$ e $\sigma^2 = S/\sqrt{n}$.