

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS
UNIFAL-MG**

MICHELLE APARECIDA CORRÊA MONTEIRO

**DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE KUMARASWAMY
BIVARIADA**

**Alfenas - MG
2015**

MICHELLE APARECIDA CORRÊA MONTEIRO

DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE KUMARASWAMY BIVARIADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, área de concentração em Estatística Aplicada e Biometria da Universidade Federal de Alfenas, MG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Linha de Pesquisa: Modelagem Estatística e Estatística Computacional

Orientador: Prof. Dr. Denismar Alves Nogueira.

Coorientador: Prof. Dr. Eric Batista Ferreira.

Alfenas - MG
2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Alfenas

Monteiro, Michelle Aparecida Corrêa
Distribuição normal de Kumaraswamy bivariada / Michelle
Aparecida Corrêa Monteiro. -- Alfenas/MG, 2015.
65 f.

Orientador: Denismar Alves Nogueira.
Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada a Biometria) -
Universidade Federal de Alfenas, 2015.
Bibliografia.

1. Técnicas de Estimativa. 2. Funções Verossimilhança. 3.
Meteorologia.. 4. Distribuição (Probabilidades. I. Nogueira, Denismar
Alves. II. Título.

CDD-519.5

MICHELLE APARECIDA CORRÊA MONTEIRO

DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE KUMARASWAMY BIVARIADA

A Banca examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e Biometria pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Estatística Aplicada e Biometria.

Aprovado em: 16 de abril de 2015.

Denismar Alves Nogueira
Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura:  _____

Prof.ª Dr.ª Ana Paula Coelho Madeira Silva
Instituição: UFSJ – Campus Sete Lagoas

Assinatura:  _____

Prof. Dr. Luiz Alberto Beijo
Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura:  _____

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus que sempre guiou meus caminhos, iluminou meus estudos e esteve ao meu lado durante toda essa caminhada.

À Universidade Federal de Alfenas e ao Departamento de Ciências Exatas, juntamente com seus docentes do Núcleo de Estatística, pela oportunidade concedida para o aprendizado e realização do mestrado.

À Universidade Federal de Alfenas por conceder apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Agradeço a minha família pela paciência e por sempre apoiarem em todas as minhas decisões no decorrer da minha vida.

Ao meu marido Ronaldo, pelo amor, companheirismo, amizade, apoio e por estar sempre ao meu lado me incentivando a não desistir.

Ao meu orientador professor Dr. Denismar Alves Nogueira, pelo apoio, confiança, ensinamentos e acompanhamento desse trabalho.

Ao Professor Elcio, do Instituto Federal do Espírito Santo - Campus Alegre, pós doutorando, atenção e disposição em ajudar no desenvolvimento do trabalho.

Ao professores do Núcleo de Estatística, sempre alegres e dispostos a ajudar.

Aos meus colegas de turma, e meus amigos Mariana, Lislaine, Bruna e José Marcio e a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desse trabalho, meu muito obrigada!!!

RESUMO

A distribuição normal é a mais importante distribuição de probabilidade, usada na modelagem de dados contínuos. Entretanto, há casos em que a suposição da distribuição relacionada ao modelo normal é violada e a busca por outras distribuições que modelem esses casos se faz necessário. Um dos pontos que pode justificar a ausência de normalidade é a falta de simetria. Uma distribuição que tem como principal característica modelar dados de comportamento assimétrico é a Kumaraswamy. A junção da flexibilidade de modelar dados assimétricos da distribuição de Kumaraswamy com distribuições conhecidas, tais como normal e weibull, permitiu a criação de uma família de distribuições generalizadas. As distribuições multivariadas destacam-se pela importância de aplicações na modelagem de dados em diversas áreas do conhecimento. No entanto, observa-se a existência de poucas distribuições que modelem caudas mais pesadas e situações de assimetria. Este trabalho teve como objetivo, estudar a classe de distribuições generalizadas de Kumaraswamy, deduzir a distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, apresentar a função de verossimilhança e as expressões de seus estimadores. Implementou-se o procedimento de estimação com uso das funções *escores* no *software R* e uma abordagem de simulação. Foram avaliadas a estimação de dados simulados e também aplicação em exemplos reais com distribuição assimétrica. Conclui-se, portanto que, a distribuição normal de Kumaraswamy bivariada foi deduzida em relação à sua função de densidade conjunta, marginais, condicionais e implementada para o estudo de simulação. Os estimadores comportaram de maneira precisa, consistente e não tendenciosa. A distribuição normal de Kumaraswamy bivariada se ajustou satisfatoriamente aos dados reais de temperatura média e precipitação total.

Palavras-chave: Técnicas de Estimativa. Funções Verossimilhança. Distribuição (Probabilidades). Meteorologia.

ABSTRACT

The normal distribution is the most important probability distribution, used in modeling of continuous data. However, there are cases where the assumption of distribution related to normal model is violated and the search for other distributions that model these cases is necessary. One of the points that can justify the absence of normality is the lack of symmetry. A distribution whose main characteristic shape asymmetric behavior data is Kumaraswamy. The combination of the flexibility of the modeling asymmetric data distribution Kumaraswamy with known distributions, such as normal and Weibull, enabled the creation of a family of generalized distributions. The multivariate distributions we highlight the importance of applications in data modeling in various field of knowledge. However, there is the existence of few distributions that model heavier tails and asymmetry situations. This study aimed to study the class of generalized distributions Kumaraswamy deduct the normal distribution bivariate Kumaraswamy, present the likelihood function and the expressions of their estimators. Implemented the estimation procedure using the scores functions in textit software R and a simulation approach. We evaluated the simulated data estimation and also in real application examples with asymmetric distribution. It can be concluded therefore that the normal distribution bivariate Kumaraswamy was deduced in relation to their joint density function, marginal, conditional and implemented for the simulation study. The estimators behaved precisely, consistent and unbiased. The normal distribution bivariate Kumarawamy adjusted satisfactorily to the actual data of average temperature and total precipitation.

Key-words: Estimation techniques. Likelihood functions. Distribution (Probability). Weather.

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Média e a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) das estimativas dos parâmetros da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada independente de acordo com o tamanho amostral e 500 simulações (Valores simulados $\hat{\mu}_1 = 0$; $\hat{\mu}_2 = 0$; $\hat{\sigma}_1 = 1$; $\hat{\sigma}_2 = 1$; $\hat{\sigma}_{12} = 0$; $\hat{a} = 2$; $\hat{b} = 1$). . . . 43
- Tabela 2 – Média e a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) das estimativas dos parâmetros da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, para variáveis dependentes com correlação ($\rho = -0,5$) (Valores simulados: $\hat{\mu}_1 = 20,0$; $\hat{\mu}_2 = 2,5$; $\hat{\sigma}_1 = 1,4$; $\hat{\sigma}_2 = 1,8$; $\hat{\sigma}_{12} = -1,26$; $\hat{a} = 2,0$; $\hat{b} = 1,0$). 47
- Tabela 3 – Resultado da estimação dos parâmetros da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada para dados reais referentes ao mês de outubro. (Valores iniciais usados para as estimativas $\hat{\mu}_1 = 20,1$; $\hat{\mu}_2 = 115,5$; $\hat{\sigma}_1 = 2,3$; $\hat{\sigma}_2 = 51,5$; $\hat{\sigma}_{12} = 0,01$; $\hat{a} = 0,99$; $\hat{b} = 0,65$) 51
- Tabela 4 – Probabilidade de ocorrência abaixo (p), para valores conjuntos de temperatura média (TM) e precipitação total (PT), segundo a distribuição normal de Kumaraswamy bivariada. 52
- Tabela 5 – Probabilidade de superar (p), valores conjuntos de temperatura média (TM) e precipitação total (PT), segundo a distribuição normal de Kumaraswamy bivariada. 52

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação gráfica da distribuição de Kumaraswamy para diferentes valores dos parâmetros.	12
Figura 2 – Representação gráfica da distribuição normal para diferentes valores paramétricos.	14
Figura 3 – Representação gráfica da distribuição normal de Kumaraswamy (Kum- $N(0,1,a,b)$)	16
Figura 4 – Representação gráfica da distribuição normal bivariada ($N_2(0; 0; 9; 12; 0,5)$).18	
Figura 5 – Densidade conjunta da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada $\theta = (0; 0; 1; 1; -0,6; 3; 1)$	30
Figura 6 – Histogramas dos 500 valores simulados das estimativas de máxima verossimilhança com tamanho amostral de $n = 100$	44
Figura 7 – Histogramas dos 500 valores simulados das estimativas de máxima verossimilhança com tamanho amostral de $n = 1000$	45
Figura 8 – Histogramas dos 500 valores simulados das estimativas de máxima verossimilhança com tamanho de amostra $n = 100$	48
Figura 9 – Histogramas dos 500 valores simulados das estimativas de máxima verossimilhança com tamanho de amostra $n = 1000$	49
Figura 10 – Representação da dispersão entre as variáveis temperatura média e precipitação total no mês de outubro e respectivos histogramas.	51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	REFERENCIAL TEÓRICO	11
2.1	DISTRIBUIÇÃO DE KUMARASWAMY	11
2.2	DISTRIBUIÇÃO NORMAL	13
2.3	DISTRIBUIÇÕES GENERALIZADAS DE KUMARASWAMY	15
2.4	DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE KUMARASWAMY	15
2.5	DISTRIBUIÇÃO NORMAL BIVARIADA	17
2.6	DISTRIBUIÇÕES KUMARASWAMY GENERALIZADAS BIVARIADAS	19
2.7	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO	20
2.7.1	Método de <i>Newton-Raphson</i>	20
3	MATERIAIS E MÉTODOS	22
3.1	DERIVADA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL BIVARIADA ACUMULADA	22
3.2	FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA DAS CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES KUM-G	23
3.3	ESTUDO DE SIMULAÇÃO	24
3.3.1	Simulação dos dados para as variáveis independentes	24
3.3.2	Simulação dos dados para as variáveis dependentes	25
3.4	DADOS METEOROLÓGICOS NA ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS	26
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	28
4.1	DEDUÇÃO DA NORMAL DE KUMARASWAMY BIVARIADA	28
4.2	FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA DA NORMAL DE KUMARASWAMY BIVARIADA	30
4.3	FUNÇÕES ESCORES	31
4.4	ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS COM DADOS SIMULADOS	42
4.4.1	Estimação dos parâmetros com variáveis independentes	42
4.4.2	Estimação dos parâmetros com variáveis dependentes	46
4.5	ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS COM DADOS REAIS	50
5	CONCLUSÕES	53
	REFERÊNCIAS	54
	APÊNDICE	55
	ANEXO	59

1 INTRODUÇÃO

A distribuição normal tem um relevante papel na comunidade científica, principalmente em modelagem. Entretanto, há casos em que os dados simulados apresentam violações no modelo e a busca por distribuições diferentes que modelem esses casos se faz necessário. Outro ponto que caracteriza ausência de normalidade pode ser observado com a falta de simetria destes e chamamos as distribuições que modelam esse comportamento de assimétricas.

Uma distribuição que tem como principal característica modelar dados de comportamento assimétrico é a Kumaraswamy. Esta começou a ser estudada por volta de 1976 com aplicações em dados hidrológicos. A distribuição de Kumaraswamy, é semelhante a distribuição beta. Essa semelhança se deve ao comportamento que elas podem apresentar, os parâmetros de formas são idênticos, mas a Kumaraswamy tem a vantagem de possuir uma forma fechada para a função de distribuição acumulada e de mais fácil tratamento matemático.

A junção da flexibilidade de modelar dados assimétricos da distribuição de Kumaraswamy, com distribuições conhecidas, permitiu propor uma família de distribuições generalizadas. Desta forma a distribuição Kumaraswamy pode se misturar à distribuições como, por exemplo, a normal e Weibull, permitindo assim, a modelagem de situações com assimetria. Esta última é muito utilizada em estudos de sobrevivência.

Distribuições multivariadas têm um papel importante na Estatística, na investigação de fenômenos correlacionados e na procura por soluções de problemas relevantes na sociedade. As distribuições multivariadas destacam-se pela importância de aplicações na modelagem de dados em diversas áreas do conhecimento. No entanto, observa-se a existência de poucas distribuições multivariadas que modelem caudas mais pesadas e casos de assimetria.

Este trabalho teve como objetivo, estudar a classe de distribuições generalizadas de Kumaraswamy, deduzir a distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, apresentar a função de verossimilhança e as expressões de seus estimadores. Implementou-se o procedimento de estimação com uso das funções escores no software R e uma abordagem de simulação. Foram avaliadas a estimação de dados simulados e também aplicação em exemplos reais com distribuição assimétrica.

No capítulo 2 encontra-se uma revisão de distribuições univariadas tais como a distribuição de Kumaraswamy, normal, classes de distribuições Kumaraswamy Generalizadas, normal de Kumaraswamy. Também a distribuição normal multivariada que possui como caso particular

a bivariada. E, por fim, os métodos de otimização que serão de grande importância para o processo de estimação.

No capítulo 3 é apresentada a metodologia utilizada neste trabalho, assim como as derivadas da função de distribuição da normal bivariada, importantes para a definição da função densidade conjunta da normal de Kumaraswamy bivariada. Também a descrição das simulações para os dados com variáveis independentes, correlacionados e reais.

O cálculo da função de verossimilhança, as funções escores e os resultados obtidos no processo de estimação para os dados são discutidos no capítulo 4 e as conclusões no capítulo 5.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A estruturação do referencial teórico é dada nas seguintes seções: (2.1) Distribuição Kumaraswamy; (2.2) Distribuição Normal; (2.4) Distribuição Kumaraswamy-Normal (Kum-N); (2.5) Distribuição Normal Bivariada; (2.6) Generalização da Família de distribuições Kumaraswamy bivariada; (2.7) Método de Otimização: (Newton-Raphson).

2.1 DISTRIBUIÇÃO DE KUMARASWAMY

De acordo com Kumaraswamy (1976, 1978) dados hidrológicos como precipitação pluviométrica diária não são ajustados adequadamente por funções densidade de probabilidade (fdp) conhecidas, tais como a normal, log-normal e beta, principalmente se o período da série hidrológica é pequena. O autor desenvolveu uma distribuição denominada de *sine power* para ajuste de processos aleatórios hidrológicos com caudas inferiores (superiores) e unimodal. De forma a eliminar a condição de uma moda entre os limites, uma fdp mais geral denominada *Double-Bounded*, foi proposta por Kumaraswamy (1980), onde seus limites podem aplicados em um intervalo qualquer $[c,b]$.

A distribuição Kumaraswamy, derivada das distribuições anteriores, foi introduzida Pondi Kumaraswamy em 1980 é uma distribuição que se assemelha à distribuição beta. O comportamento de ambas distribuições é conduzida por duas formas, possuem dois parâmetros de fronteira e os valores dos seus parâmetros de forma são qualitativamente idênticos.

Ainda, Jones (2009) afirma que a distribuição de Kumaraswamy possui a vantagem em possuir uma forma fechada para a função de distribuição acumulada (fda) e sua inversa, assim distribuição de Kumaraswamy destacou-se pela flexibilidade em modelar dados hidrológicos, devido apresentar certo grau de assimetria.

Estudos de simulações com a distribuição de Kumaraswamy iniciou-se na década de 80, e as investigações teóricas foram estudadas e apresentadas por Garg (2008), Nadarajah (2008), Jones (2009) e Mitnik e Baek (2011). Relação entre as distribuições Kumaraswamy e a beta foi apresentada por El-Deen, Al-Dayian e El-Helbaway (2014).

A função densidade de probabilidade geral da distribuição de Kumaraswamy, para uma variável aleatória x , em qualquer intervalo real (c,b) pode ser escrita como:

$$f(x) = \frac{1}{(b-c)^{pq}} \left(\frac{x-c}{b-c} \right)^{p-1} \left[1 - \left(\frac{x-c}{b-c} \right)^p \right]^{q-1}.$$

A forma padrão da função densidade de probabilidade ($c = 0, b = 1$) é dada por

$$f(z) = pqz^{p-1}(1-x^p)^{q-1}$$

E a função de distribuição acumulada (fda) é dada por

$$F(z) = 1 - (1 - x^p)^q$$

$c < z < b$, com parâmetros de forma $p > 0, q > 0$ (MITNIK; BAEK, 2011).

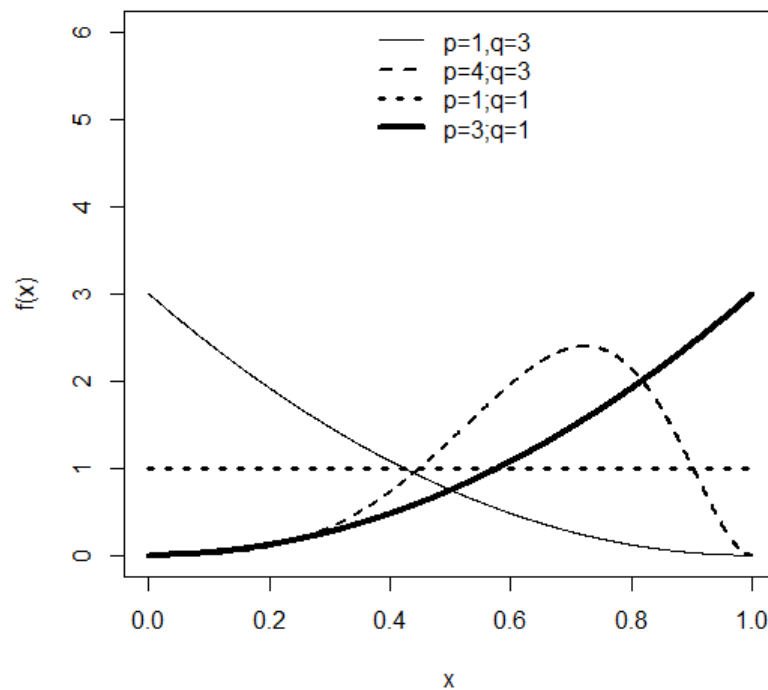


Figura 1 – Representação gráfica da distribuição de Kumaraswamy para diferentes valores dos parâmetros.

Fonte: DA AUTORA.

De acordo com a Figura 1 percebe-se a flexibilidade da distribuição de Kumaraswamy, semelhante a beta, destacando a situação de ajuste de assimetria ($p = 4; q = 3$). Para os valores dos parâmetros ($p = 1; q = 3$) e ($p = 3; q = 1$) a distribuição apresenta forma da distribuição *Double-Bounded* desenvolvida em 1978 por Pondi anterior definição da fdp de Kumaraswamy.

Com várias pesquisas sobre a distribuição de Kumaraswamy na comunidade científica,

os autores Cordeiro e Castro (2011) desenvolveram uma família de distribuições envolvendo a distribuição de Kumaraswamy e outras distribuições, tais como, weibull, gama, normal, entre outros. Esta última é uma das distribuições mais importantes na estatística inferencial, e será exibida na próxima seção, para agregar a apresentação da distribuição normal de Kumaraswamy.

2.2 DISTRIBUIÇÃO NORMAL

O matemático francês Abraham de Moivre, citado por Daw e Pearson (1972), introduziu a distribuição normal em um artigo que foi reimpresso na segunda edição do seu livro *The Doctrine of Chances* publicado em 1738. Ele percebeu que à medida que número de eventos do lançamento de moedas aumentava a distribuição binomial se aproximava de uma curva suave.

Os matemáticos alemães Robert Adrian em 1808, e Carl Friedrich, em 1809, desenvolveram a equação da distribuição e mostraram que modelava adequadamente os erros de observações astronômicas, de maneira independente. Gauss aplicou a equação em 1809 para justificar o MMQ (Método dos Mínimos Quadrados) introduzido por Adrien Marie Legendre, mas já utilizado por ele desde 1794 (DAW; PEARSON, 1972).

O nome de distribuição normal ou curva normal foi dado de forma independente pelo filósofo americano Charles S. Peirce, pelo antropólogo e geneticista britânico Francis Galton e pelo economista alemão Wilhelm Lexis, por volta de 1875. A terminologia de curva em forma de sino foi cunhada em 1872 pelo francês Esprit Pascal (BITTENCOURT; VIALI, 2006).

A curva normal apresenta formato de sino, unimodal e é simétrica em relação à média. Sua fdp é definida em relação à dois parâmetros: média (μ), parâmetro de posição ($-\infty < \mu < \infty$) e variância (σ^2), parâmetro de forma ($\sigma > 0$). Sua fdp é representada por $\phi(x)$ e expressa por

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (2.1)$$

E a fda, dada em termos de uma integral e representada por $\Phi(x)$ é:

$$F(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dt, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (2.2)$$

A distribuição normal tem como caso especial, a normal padronizada, com média 0 e variância 1, objetivando facilitar operações numéricas. Sua fdp, é dada por

$$f(z) = \phi(z) = \phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right), \quad z \in (-\infty, \infty). \quad (2.3)$$

E a fda normal padrão é da forma

$$F(z) = \Phi(z) = \Phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (2.4)$$

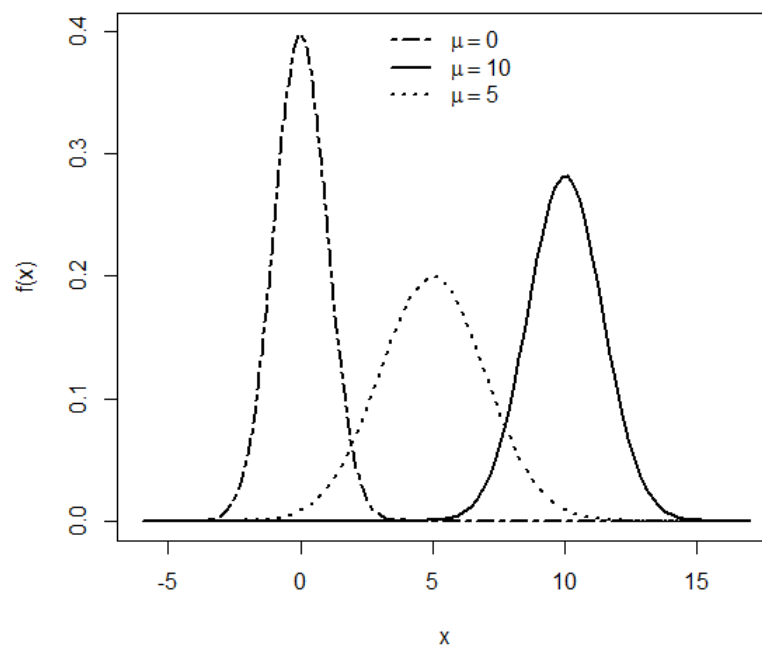


Figura 2 – Representação gráfica da distribuição normal para diferentes valores paramétricos.

Fonte: DA AUTORA.

A Figura 2 apresenta algumas formas da distribuição normal em diferentes valores paramétricos. Da esquerda para a direita temos a normal padrão ($N(0,1)$), no centro uma distribuição normal com $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 2$ e por último a distribuição representada por $\mu = 5$ e

$$\sigma^2 = 4.$$

Cordeiro e Castro (2011) verificaram que unindo, uma distribuição características importantes na modelagem de dados assimétricos, a outras distribuições importantes na comunidade científica, permitiu a propor uma família de distribuições generalizadas a partir da distribuição de Kumaraswamy. Na próxima seção é apresentada a família distribuições generalizada de Kumaraswamy.

2.3 DISTRIBUIÇÕES GENERALIZADAS DE KUMARASWAMY

Cordeiro e Castro (2011), apresentaram uma família generalizada de distribuições, a partir da distribuição de Kumaraswamy, e a denominaram Kum-G. Foi apresentada com o propósito de inserir os parâmetros da distribuição Kumaraswamy à uma distribuição associada com o intuito de permitir uma distribuição que modele melhor a assimetria. A função densidade de probabilidade da família de distribuição Kum-G é definida por

$$f(x) = abg(x)G_{(x)}^{a-1} [1 - G_{(x)}^a]^{b-1} \quad (2.5)$$

e sua fda por:

$$F(x) = 1 - [1 - G_{(x)}^a]^b \quad (2.6)$$

em que $a > 0$ e $b > 0$ são parâmetros adicionais que modelam assimetria e variando o peso da cauda, $g(x)$ e $G(x)$ são a função densidade de probabilidade e função de distribuição acumulada da distribuição associada (weibull, gama, gumbel, inversa Gauciana, normal). Assim, várias distribuições foram originadas a partir da generalização, como exemplo Kum-normal, Kum-weibull, Kum-gama, entre outras, foram apresentadas por Cordeiro e Castro (2011), utilizando a família de distribuições generalizadas.

2.4 DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE KUMARASWAMY

A distribuição normal de Kumaraswamy é originada da família de distribuições generalizadas em que foram propostas por Cordeiro e Castro (2011). A distribuição normal de

Kumaraswamy tem como função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{ab}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \left[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{a-1} \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{b-1}. \quad (2.7)$$

em que $x \in \mathbb{R}$, μ é a média, parâmetro de posição ($\mu \in \mathbb{R}$), $\sigma > 0$, desvio-padrão ($\sigma > 0$) parâmetro de forma, $a > 0$ e $b > 0$ são parâmetros de assimetria, $\phi(x)$ e $\Phi(x)$ função densidade de probabilidade (2.1) e função de distribuição acumulada (2.2) da distribuição normal. Uma variável aleatória com densidade dada pela equação (2.7) é denotada por $X \sim \text{Kum-N}(a,b,\mu,\sigma^2)$.

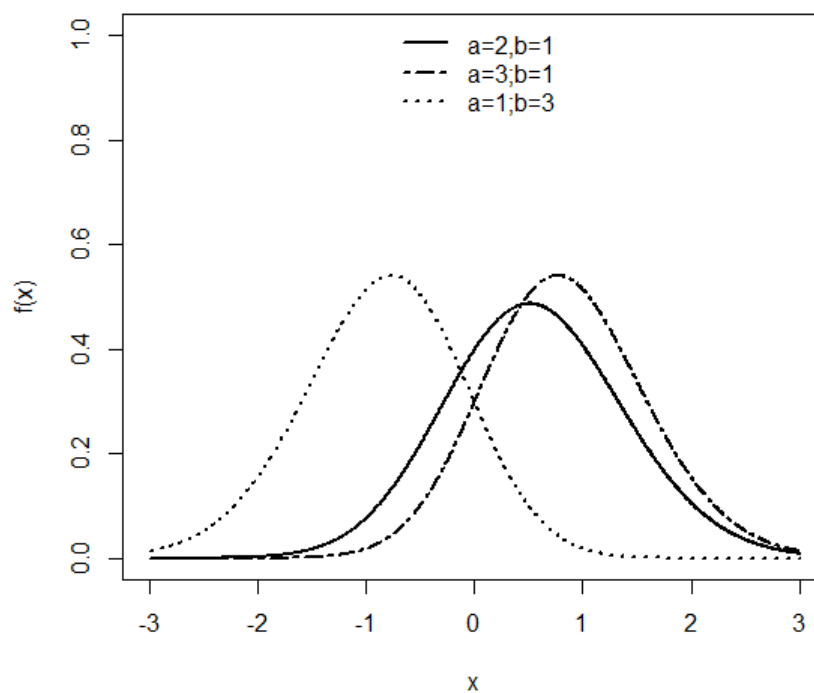


Figura 3 – Representação gráfica da distribuição normal de Kumaraswamy (Kum-N($0,1,a,b$))
Fonte: DA AUTORA.

Na Figura 3 está representado a função densidade de probabilidade da distribuição normal de Kumaraswamy, em situações de assimetria positiva com os valores paramétricos ($a = 1; b = 3$) e negativa ($a = 3; b = 1$).

Vários autores tem estudado a família de distribuições Kumaraswamy generalizadas (Kum-G), podendo destacar, Nadarajah, Cordeiro e Ortega (2012) estudaram uma representação para a família Kum-G como uma combinação linear da distribuição exponencial-G. Correa, Nogueira e Ferreira (2012) implementaram a distribuição Kum-N e compararam o ajuste com a normal assimétrica quanto à assimetria utilizando critérios de informação para a qualidade do ajuste e teste da razão da verossimilhança. Nadarajah e Afuecheta (2014) implementaram o

pacote *VaRES* que possui muitas distribuições conhecidas, incluindo a família de distribuições Kum-G, com suas funções densidade de probabilidade e função de distribuição acumulada. Incluindo funções de risco e déficit esperado.

A distribuição normal também possui sua versão multivariada. As distribuições multivariadas, destacam-se na Estatística, em relação a investigação de variáveis aleatórias correlacionadas, e na modelagem de dados multivariados em várias áreas do conhecimento. Portanto, na próxima seção é apresentada a distribuição normal bivariada.

2.5 DISTRIBUIÇÃO NORMAL BIVARIADA

A distribuição normal multivariada é uma generalização da distribuição normal univariada, com média μ e variância σ^2 e sua fdp apresentada na equação (2.1). Para a extensão do caso multivariado, tem-se:

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = (x - \mu)(\sigma^2)^{-1}(x - \mu) \quad (2.8)$$

em que, no caso univariado, (2.8) representa o expoente da função densidade e mede a distância de x até μ . Logo, a generalização para um vetor $\mathbf{x}_{(p \times 1)}$ de várias variáveis é dada por:

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \quad (2.9)$$

em que, $\boldsymbol{\mu}_{p \times 1}$ representa o vetor de médias e $\boldsymbol{\Sigma}_{(p \times p)}$ a matriz de variâncias e covariâncias do vetor aleatório \mathbf{X} . Assumindo que $\boldsymbol{\Sigma}$ é positiva definida, a expressão (2.9) é a distância quadrada generalizada de \mathbf{x} até $\boldsymbol{\mu}$.

Johnson e Wichern (2007), afirmam que a normal multivariada é caracterizada substituindo-se a distância expressa em (2.8) pela distância generalizada (2.9) na fdp da normal equação (2.1). Seja $\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$ um vetor aleatório com dimensão p , em que a função densidade conjunta da normal multivariada é da forma

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \right\} \quad (2.10)$$

em que $p = 1, \dots, p$.

Para $p = 2$ tem-se um caso particular da normal multivariada, a distribuição normal bivariada. Assim, sejam as variáveis aleatórias X_1 e X_2 com matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$ o

vetor de médias e ρ o coeficiente de correlação linear ($-1 \leq \rho \leq 1$), entre as variáveis x_1 e x_2 é apresentado por meio de

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$$

em que σ_{12} é a covariância da variável x_1 com a variável x_2 .

Ferreira (2011) apresenta a função densidade conjunta da distribuição normal ($\phi_{(x_1, x_2)}$), dada por

$$\phi_{(x_1, x_2)} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.11)$$

em que $x \in \mathbb{R}$, médias (μ_1 e μ_2) parâmetros de posição (μ_1 e $\mu_2 \in \mathbb{R}$); desvios-padrão (σ_1 e σ_2) parâmetros de forma (σ_1 e $\sigma_2 > 0$); covariância (σ_{12}).

A distribuição normal bivariada está representada graficamente na Figura 5, com os seguintes parâmetros $N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})$.

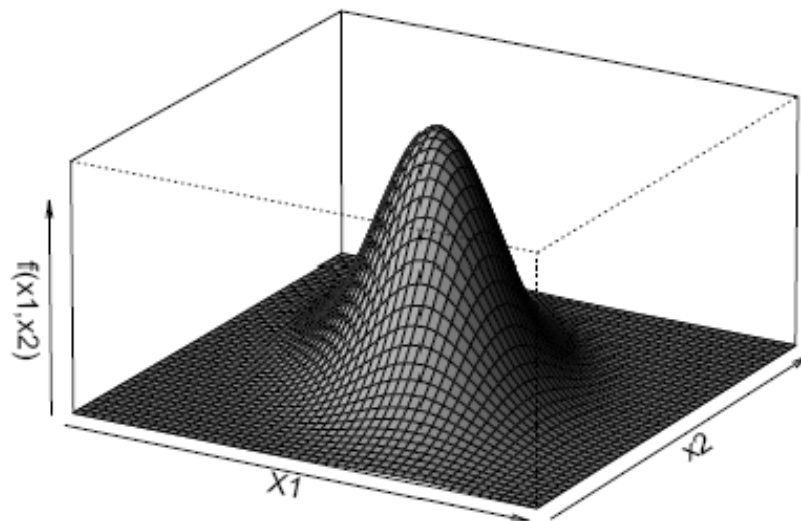


Figura 4 – Representação gráfica da distribuição normal bivariada ($N_2(0; 0; 9; 12; 0,5)$).

Fonte: DA AUTORA.

Na próxima subseção será apresentada a extensão bivariada da distribuição generalizada

Kumaraswamy bivariada apresentada por Nadarajah, Cordeiro e Ortega (2012), que será útil para obtenção da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada.

Na próxima subseção é apresentada a extensão bivariada da distribuição generalizada Kumaraswamy bivariada apresentada por Nadarajah, Cordeiro e Ortega (2012), que será útil para obtenção da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada.

2.6 DISTRIBUIÇÕES KUMARASWAMY GENERALIZADAS BIVARIADAS

Nadarajah, Cordeiro e Ortega (2012), definem uma possível expansão para o caso bivariado da família Kumaraswamy generalizada bivariada. Seja G uma função de distribuição acumulada bivariada qualquer definida em $(0, \infty) \times (0, \infty)$, e g a função densidade conjunta, com marginal $g_i, i = 1, 2$ e a marginal acumulada $G_i, i = 1, 2$. Logo, uma distribuição Kumaraswamy bivariada generalizada é definida com distribuição acumulada:

$$F_{(x_1, x_2)} = 1 - [1 - G_{(x_1, x_2)}^a]^b \quad (2.12)$$

com $a > 0$ e $b > 0$.

As distribuições de probabilidades marginais $f_i, i = 1, 2$ e a marginal acumulada $F_i, i = 1, 2$ de F são:

$$f_i = abg_{i(x)}G_i^{a-1}(x)[1 - G_i^a(x)]^{b-1}$$

e

$$F_i = 1 - [1 - G_i^a(x)]^b$$

para $i = 1, 2$.

A função densidade conjunta de F é dada por:

$$f_{(x_1, x_2)} = \frac{abG^{a-2}_{(x_1, x_2)} [A_{(x_1, x_2)} + B_{(x_1, x_2)} + C_{(x_1, x_2)}]}{[1 - G^a_{(x_1, x_2)}]^{1-b}} \quad (2.13)$$

em que:

$$A_{(x_1, x_2)} = \left[-\frac{a(b-1)G^a_{(x_1, x_2)}}{1 - G^a_{(x_1, x_2)}} \right] \cdot \left[\frac{\partial G_{(x_1, x_2)}}{\partial x_1} \right] \cdot \left[\frac{\partial G_{(x_1, x_2)}}{\partial x_2} \right] \quad (2.14)$$

$$B_{(x_1, x_2)} = (a - 1) \left[\frac{\partial G_{(x_1, x_2)}}{\partial x_1} \right] \cdot \left[\frac{\partial G_{(x_1, x_2)}}{\partial x_2} \right] \quad (2.15)$$

$$C_{(x_1, x_2)} = G_{(x_1, x_2)} g_{(x_1, x_2)} \quad (2.16)$$

2.7 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Os métodos de otimização tem como objetivo minimizar (ou maximizar) uma determinada função objetivo que depende de alguns parâmetros.

De acordo com Bolfarine e Sandoval (2010), existem situações em que a função de verossimilhança apresenta um modelo mais complexo, em que não há solução analítica explícita. Nestes casos, uma das alternativas é a obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança por meio de métodos numéricos. No *software* R (R CORE TEAM, 2014), um dos pacotes com métodos iterativos para estimação de parâmetros é o pacote *MaxLik* dos autores Henningsen e Toomet (2011), e alguns dos métodos existentes são: Nelder-Mead (NM), Berndt-Hall-Hausman (BHHH), Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), Newton-Raphson (NR), *Simulated Annealing* (SANN). O método usado neste trabalho foi de Newton-Raphson e será apresentado a seguir seu algoritmo.

2.7.1 Método de *Newton-Raphson*

O método de *Newton-Raphson*, sob determinadas condições, possui vantagens em relação à outros métodos, pois é de convergência rápida. Seja $U(\theta)$ a função escore dada por:

$$U(\theta) = \frac{\partial \ln(L(\theta; x))}{\partial \theta}$$

tem-se que, para o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$,

$$U(\hat{\theta}) = 0,$$

de modo que, expandindo $U(\hat{\theta})$ em série de Taylor em torno de um θ_0 , obtém-se:

$$0 = U(\hat{\theta}) \cong U(\theta_0) + (\hat{\theta} - \theta_0)U'(\theta_0),$$

ou seja,

$$\hat{\theta} \cong \theta_0 - \frac{U(\theta_0)}{U'(\theta_0)}. \quad (2.17)$$

De (2.17), obtém-se o processo iterativo de Newton-Raphson

$$\theta_{j+1} = \theta_j - \frac{U(\theta_j)}{U'(\theta_j)}, \quad (2.18)$$

em que é iniciado com o valor θ_0 e então um novo valor de θ_1 é obtido a partir da equação 2.18 e assim por diante, até que o processo se estabilize, ou seja, para um dado ϵ pequeno, $|\theta_{j+1} - \theta_j| < \epsilon$. Nesse caso, o ponto $\hat{\theta}$ em que o processo se estabiliza é tomado como o estimador de máxima verossimilhança de θ (BOLFARINE; SANDOVAL, 2010).

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Em concordância com os objetivos propostos em (1), a metodologia a ser utilizada nesse trabalho será descrita nas seguintes seções: (3.1) Derivada da distribuição normal bivariada acumulada; (3.2) Aspectos Inferenciais; (3.3) Simulação dos dados para estimação dos parâmetros; (3.4) Aplicação dos dados reais na estimação dos parâmetros.

3.1 DERIVADA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL BIVARIADA ACUMULADA

Na expansão para o caso bivariado definido por Nadarajah, Cordeiro e Ortega (2012) da família Kumaraswamy generalizada, com função densidade conjunta da distribuição normal de Kumaraswamy dada pela equação (2.13) foi necessário a obtenção das seguintes derivadas para a formalização da distribuição:

$$\frac{\partial G_{(x_1, x_2)}}{\partial x_1} \text{ e } \frac{\partial G_{(x_1, x_2)}}{\partial x_2},$$

sendo que, a função $G_{(x_1, x_2)}$ é a função de distribuição acumulada conjunta da normal ($\Phi_{(x_1, x_2)}$).

Meyer (2013) encontrou as derivadas da função de distribuição acumulada conjunta da normal, em um estudo, que consistia em propor um algoritmo para avaliar tal função acumulada. Este estudo foi desenvolvido, a partir de uma pesquisa de Marsaglia (2004) que teve como objetivo estudar derivada da função de distribuição acumulada da normal univariada, e essas derivadas foram definidas e apresentadas a seguir

$$\frac{\partial \Phi_{(x_1, x_2)}}{\partial x_1} = [2\phi(x_1, \mu_1, \sigma_1)] \cdot [\Phi(\gamma(\rho)x_1, \mu_1, \sigma_1)] \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \Phi_{(x_1, x_2)}}{\partial x_2} = [2\phi(x_2, \mu_2, \sigma_2)] \cdot [\Phi(\gamma(\rho)x_2, \mu_2, \sigma_2)] \quad (3.2)$$

A função $\Phi(\gamma(\rho)x_i)$, para $i = 1, 2$ é definida pelo produto da função $\gamma(\rho)$ pela variável x_i , ou seja, uma transformação feita nos dados a partir da correlação (ρ) e essa função é dada por:

$$\gamma = \gamma(\rho) = \sqrt{\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)}$$

em que $\phi(\cdot)$ se refere a densidade normal (2.1) e $\Phi(\cdot)$ acumulada da normal (2.2).

3.2 FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA DAS CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES KUM-G

Seja θ o vetor de parâmetros da família de distribuições Kumaraswamy generalizadas. Considere $(x_{11}, x_{12}), \dots, (x_{n1}, x_{n2})$ uma amostra aleatória bivariada ($\mathbf{X}' = [X_1, X_2]$) de uma população com fdp dada pela equação (2.13), logo a função de verossimilhança é dada pela expressão:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{abG^{a-2}_{(x_{i1}, x_{i2})} [A_{(x_{i1}, x_{i2})} + B_{(x_{i1}, x_{i2})} + C_{(x_{i1}, x_{i2})}]}{[1 - G^a_{(x_{i1}, x_{i2})}]^{1-b}}$$

em que as expressões $A_{(x_{i1}, x_{i2})}$, $B_{(x_{i1}, x_{i2})}$ e $C_{(x_{i1}, x_{i2})}$ são dadas por (2.14), (2.15) e (2.16).

E a função suporte é expressa por:

$$\ln(L(\theta)) = n\ln(a) + n\ln(b) + (a-2) \sum_{i=1}^n \ln(G_{(x_{i1}, x_{i2})}) \quad (3.3)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \ln(A_{(x_{i1}, x_{i2})} + B_{(x_{i1}, x_{i2})} + C_{(x_{i1}, x_{i2})}) +$$

$$-(1-b) \sum_{i=1}^n \ln(1 - G^a_{(x_{i1}, x_{i2})})$$

Derivando a função suporte em relação aos parâmetros obtém-se as funções escore ou gradiente para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança e os resultados estão apresentados na seção (4).

3.3 ESTUDO DE SIMULAÇÃO

A simulação foi dividida em dois estudos, um para as variáveis independentes e outro para variáveis dependentes.

3.3.1 Simulação dos dados para as variáveis independentes

Para verificar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, a, b)$ da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, foi realizado um estudo de simulação Monte Carlo. Este consiste em obter os resultados a partir de 500 repetições Monte Carlo, realizadas no *software* R (R CORE TEAM, 2014). Para cada repetição, é gerada uma amostra aleatória \mathbf{X} de tamanho n , em que cada variável (x_1) e (x_2) seguem uma distribuição normal de Kumaraswamy univariada. Assim, para maximizar o logaritmo da verossimilhança $ln(\theta)$, foi utilizado o método de estimação *Newton Rapshon*, pois é um método de convergência rápida, que é encontrado no pacote *maxLik*, Henningsen e Toomet (2011). Foram geradas amostras de tamanho $n = 100$; $n = 500$ e $n = 1000$, com os seguintes parâmetros $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0$; $\sigma_1 = 1$; $\sigma_2 = 1$; $\sigma_{12} = 0$; $a = 2$ e $b = 1$. Os valores arbitrários iniciais foram escolhidos para iniciar o processo de estimação dos parâmetros com os seguintes valores $\hat{\mu}_1 = 0,1$; $\hat{\mu}_2 = 0,1$; $\hat{\sigma}_1 = 0,9$; $\hat{\sigma}_2 = 0,9$; $\hat{\sigma}_{12} = 0,03$; $\hat{a} = 1,8$ e $\hat{b} = 0,9$. E por fim, como a distribuição normal de Kumaraswamy bivariada é dependente da normal bivariada, na função de log-verossimilhança, foi utilizado o pacote *mvtnorm*, Genz et al. (2014) para a gerar a densidade conjunta (2.11) e a função de distribuição acumulada conjunta da normal. Maiores detalhes dos códigos para a simulação, são apresentados no apêndice B (5).

Como resultado, temos os valores das 500 simulações e com isso foi feita a média dessas estimativas e encontramos o valor médio estimado de cada parâmetro. E, para verificar a precisão dos estimadores, foi utilizado a raiz quadrada do erro quadrático médio, que tem como finalidade avaliar a diferença entre o estimador e o verdadeiro valor do parâmetro, dada pela equação

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{\theta}_{ij} - \theta_j)^2}$$

em que $i = 1, \dots, R$ com R é o número de simulações; $\hat{\theta}_{ij}$ é o valor da estimativa e θ_j o verdadeiro valor do parâmetro, com $j = 1, \dots, 7$.

3.3.2 Simulação dos dados para as variáveis dependentes

Na simulação para as amostras correlacionadas, primeiramente, foi feita uma adaptação de Graybill (1976), em que o autor apresenta uma maneira de gerar dados correlacionados de uma distribuição normal bivariada. Para gerar uma amostra correlacionada com valores assimétricos, substituímos a distribuição normal pela distribuição normal de Kumaraswamy univariada apresentada pelos autores Correa, Nogueira e Ferreira (2012). Dessa forma, temos (X_1, X_2) variáveis aleatórias, onde $X_1|X_2 = x_2$ é encontrado por uma relação linear de X_2 . Logo, para simular valores de uma distribuição normal de Kumaraswamy, é necessário conhecer todos os seus parâmetros, logo:

$$X_1 \sim \text{KumN}(\mu_1, \sigma_1^2, a, b),$$

$$X_2 \sim \text{KumN}(\mu_2, \sigma_2^2, a, b)$$

e ρ é a correlação linear entre as variáveis X_1 e X_2 dada por

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2},$$

em que σ_{12} é a covariância entre X_1 e X_2 .

A relação linear existente entre X_1 e X_2 é a esperança matemática da condicional $X_1|X_2 = x_2$

$$E[X_1|X_2 = x_2] = \mu_2 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2},$$

$$\text{Var}[X_1|X_2 = x_2] = \sigma_1^2(1 - \rho^2),$$

logo o valor da variável é $X_1|X_2 = x_2$ é dado por

$$X_1|X_2 = \mu_{X_1|X_2=x_2} + \varepsilon(x_2),$$

em que $\varepsilon(x_2) \sim N(0, \sigma_2^2(1 - \rho^2))$. Detalhes são apresentados no apêndice (5).

Assim, foram geradas variáveis com correlação negativa ($\rho = -0,5$) e com os seguintes valores paramétricos: $\mu_1 = 20,0$; $\mu_2 = 2,5$; $\sigma_1 = 1,4$; $\sigma_2 = 1,8$; $\sigma_{12} = 1,26$; $a = 2$; $b = 1$.

Logo, para a simulação Monte Carlo, foi realizado o mesmo procedimento para as variáveis independentes na seção (3.3.1) e com os seguintes valores arbitrários iniciais: $\hat{\mu}_1 = 19,5$; $\hat{\mu}_2 = 2,1$; $\hat{\sigma}_1 = 1,12$; $\hat{\sigma}_2 = 1,21$; $\hat{\sigma}_{12} = -0,75$; $\hat{a} = 1,90$; $\hat{b} = 0,94$.

3.4 DADOS METEOROLÓGICOS NA ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

O conjunto de dados reais explorados, provém de séries históricas da estação convencional do posto agro meteorológico da escola superior de Agricultura Luiz de Queiroz (Esalq/SP), do período de 1917 a 2008 e referem-se a observações da temperatura média ($^{\circ}C$) e precipitação pluvial total (mm) por mês.

O clima da região é do tipo Cwah, ou seja, tropical úmido com chuvas de verão e seca no inverno, de acordo com a classificação de Köppen. É caracterizado por um total de chuvas no mês mais seco uma média de 26 mm e no mês mais chuvoso média de 217 mm, por uma temperatura média do mês mais quente de 24,6 $^{\circ}C$ (NOVA, 2003).

Para efetuar a análise, as amostras foram agrupadas em períodos mensais e o mês de outubro foi usado para estimar os parâmetros da distribuição normal de Kumaraswamy. Foi realizado o teste de Shapiro-Wilk multivariado Cirillo e Ferreira (2003) para verificar se o conjunto de dados reais seguem ou não uma distribuição normal. Ainda, verificando se o conjunto de dados seguem uma distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, realizou-se também um teste chamado *Ks* que se encontra no pacote *kde* Duong (2007). Este teste tem como objetivo verificar se um conjunto de dados simulados a partir da distribuição de interesse e um conjunto de dados reais seguem a mesma distribuição. O nível de significância adotado para a realização dos testes foi de 5%.

A estimação do vetor $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, a, b)$ da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, para os dados reais, foi realizada utilizando a função de log-verossimilhança e as funções escores. Para o processo de estimação foram necessários os pacotes *maxLik*, (Henningsen e Toomet (2011)) que faz a estimação dos parâmetros e *mvtnorm*, (Genz et al. (2014)) para a gerar a densidade conjunta dada pela equação (2.11) e a função de distribuição acumulada conjunta da normal. Os valores arbitrários iniciais usados no processo de estimação

para o mês outubro foram: $\hat{\mu}_1 = 20,144$; $\hat{\mu}_2 = 1,39$; $\hat{\sigma}_1 = 1,338$; $\hat{\sigma}_2 = 1,426$; $\hat{\sigma}_{12} = -0,85$; $\hat{a} = 2,124$; $\hat{b} = 1,184$.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para o início das atividades foi necessário obter as derivadas da função de distribuição normal bivariada, que faz parte da função densidade conjunta da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada apresentada a partir da generalização de Cordeiro e Castro (2011). De posse dessas funções foi calculada a função de verossimilhança e as funções escores para utilizar no processo de estimação dos parâmetros da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada. Para avaliar o processo de estimação foram simulados vetores bivariados, assumindo correlação e ausência desta. Uma aplicação à dados reais referentes a temperatura média e precipitação total originados do posto agro meteorológico da escola superior de Agricultura Luiz de Queiroz (Esalq/SP), no período de 1917 a 2008, também foi utilizada.

4.1 DEDUÇÃO DA NORMAL DE KUMARASWAMY BIVARIADA

A função densidade conjunta da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, é derivada da generalização da família de distribuições de Kumaraswamy proposta por Nadarajah, Cordeiro e Ortega (2012). Na generalização apresentada na equação (2.13), as derivadas parciais que aparecem nas equações (2.14) e (2.15) foram substituídas pelas derivadas adaptadas do trabalho de Meyer (2013), nas funções (3.1) e (3.2).

Seja $\Phi_{(x_1, x_2)}$ uma função de distribuição normal bivariada, e $\phi_{(x_1, x_2)}$ a função densidade conjunta, com marginal com marginal ϕ_i , $i = 1, 2$ e a marginal acumulada Φ_i , $i = 1, 2$. Logo, a distribuição normal de Kumaraswamy bivariada é dada pela função de distribuição acumulada

$$F_{(x_1, x_2)} = 1 - [1 - \Phi_{(x_1, x_2)}^a]^b \quad (4.1)$$

com $a > 0$ e $b > 0$. Com as seguintes funções densidade de probabilidade marginais f_i , $i = 1, 2$ e as funções de distribuição acumulada marginais F_i , $i = 1, 2$ de F são

$$f_i = ab\phi_i(x)\Phi_i^{a-1}(x)[1 - \Phi_i^a(x)]^{b-1}$$

e

$$F_i = 1 - [1 - \Phi_i^a(x)]^b$$

para $i = 1, 2$.

As funções de distribuição acumuladas de F são dadas por

$$F(x_2|x_1) = \frac{1 - [1 - \Phi_{(x_1, x_2)}^a]^b}{1 - [1 - \Phi_1^a(x_1)]^b}$$

e

$$F(x_1|x_2) = \frac{1 - [1 - \Phi_{(x_1, x_2)}^a]^b}{1 - [1 - \Phi_2^a(x_2)]^b}$$

Logo, a função densidade conjunta de F da distribuição é representada por

$$f_{(x_1, x_2)} = \frac{ab\Phi_{(x_1, x_2)}^{a-2} [A_{(x_1, x_2)} + B_{(x_1, x_2)} + C_{(x_1, x_2)}]}{[1 - \Phi_{(x_1, x_2)}^a]^{1-b}} \quad (4.2)$$

em que,

$$A_{(x_1, x_2)} = -4 \frac{a(b-1)\Phi_{(x_1, x_2)}^a}{1 - \Phi_{(x_1, x_2)}^a} [\phi_1(x_1)\Phi_1(\gamma x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(\gamma x_2)] \quad (4.3)$$

$$B_{(x_1, x_2)} = 4(a-1) [\phi_1(x_1)\Phi_1(\gamma x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(\gamma x_2)] \quad (4.4)$$

$$C_{(x_1, x_2)} = \Phi_{(x_1, x_2)}\phi_{(x_1, x_2)} \quad (4.5)$$

sendo $\phi_{(x_1, x_2)}$ e $\Phi_{(x_1, x_2)}$ são a densidade conjunta da normal, dada pela equação (2.11) e a função de distribuição conjunta acumulada da normal, respectivamente. Em que vetor $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, a, b)$ de parâmetros da distribuição normal de Kumraswamy bivariada, com $x \in \mathbb{R}$, médias (μ_1 e μ_2) parâmetros de posição (μ_1 e $\mu_2 \in \mathbb{R}$); desvios-padrão (σ_1 e σ_2) parâmetros de forma (σ_1 e $\sigma_2 > 0$); covariância ($\sigma_{12} \in \mathbb{R}$); $-1 < \rho < 1$; $a > 0$ e $b > 0$.

A Figura 6 apresenta a densidade conjunta da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada dada pela equação (4.2), com $\theta = (\mu_1, \mu_2; \sigma_1; \sigma_2; \sigma_{12}; a; b)$.

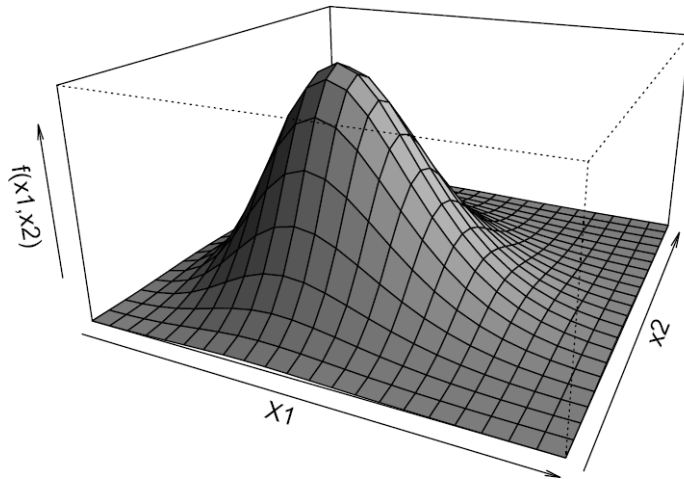


Figura 5 – Densidade conjunta da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada $\theta = (0; 0; 1; 1; -0,6; 3; 1)$.
Fonte: DA AUTORA.

4.2 FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA DA NORMAL DE KUMARASWAMY BIVARIADA

A função de verossimilhança da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, foi obtida a partir da função dada pela equação (3.3), substituindo as funções $G_{(x_1, x_2)}$ e $g_{(x_1, x_2)}$ pelas expressões da função de distribuição acumulada conjunta ($\Phi_{(x_1, x_2)}$) e densidade conjunta da normal bivariada $\phi_{(x_1, x_2)}$ expressa por (2.11) e apresentada

$$L[\theta] = \prod_{i=1}^n \frac{ab\Phi^{a-2}_{(x_{i1}, x_{i2})} [A_{(x_{i1}, x_{i2})} + B_{(x_{i1}, x_{i2})} + C_{(x_{i1}, x_{i2})}]}{[1 - \Phi^a_{(x_{i1}, x_{i2})}]^{1-b}}$$

E a função suporte é expressa por:

$$\ln[L(\theta)] = n \ln(a) + n \ln(b) + (a - 2) \sum_{i=1}^n \ln[\Phi_{(x_{i1}, x_{i2})}] \quad (4.6)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \ln[A_{(x_{i1}, x_{i2})} + B_{(x_{i1}, x_{i2})} + C_{(x_{i1}, x_{i2})}] +$$

$$-(1 - b) \sum_{i=1}^n \ln[1 - \Phi^a_{(x_{i1}, x_{i2})}]$$

em que,

$$A_{(x_1, x_2)} = -4 \frac{a(b-1) \Phi^a(x_1, x_2)}{1 - \Phi^a(x_1, x_2)} \phi(x_1) \Phi(\gamma(\rho)x_1) \phi(x_2) \Phi(\gamma(\rho)x_2),$$

$$B_{(x_1, x_2)} = 4(a-1) \phi(x_1) \Phi(\gamma(\rho)x_1) \phi(x_2) \Phi(\gamma(\rho)x_2),$$

$$C_{(x_1, x_2)} = \Phi_{(x_1, x_2)} \phi_{(x_1, x_2)}.$$

Para obter os estimadores de máxima verossimilhança da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, é necessário derivar a função de log-verossimilhança, equação (4.6), em relação a cada parâmetro obtendo assim as funções escores, que estão apresentadas na próxima seção.

4.3 FUNÇÕES ESCORES

A distribuição normal de Kumaraswamy bivariada é dependente da distribuição normal bivariada em suas funções de densidade conjunta e distribuição acumulada. No desenvolver do trabalho foi necessário a obtenção das derivadas da função densidade conjunta equação (2.11) e distribuição acumulada bivariada em relação aos seus parâmetros $\tau = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})$ da distribuição normal bivariada.

As derivadas da função densidade conjunta da normal foram calculadas a partir da equação (2.11) e são apresentadas a seguir

1. Derivada da função densidade conjunta da normal em relação ao parâmetro (μ_1):

$$\frac{\partial \phi_{(x_1, x_2)}}{\partial \mu_1} = \left(\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2} \right) \left(\frac{(x_1 - \mu_1)}{\sigma_1^2} - \frac{\sigma_{12} (x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right) \phi_{(x_1, x_2)};$$

2. Derivada da função densidade conjunta da normal em relação ao parâmetro (μ_2):

$$\frac{\partial \phi_{(x_1, x_2)}}{\partial \mu_2} = \left(\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2} \right) \left(\frac{(x_2 - \mu_2)}{\sigma_2^2} - \frac{\sigma_{12} (x_1 - \mu_1)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right) \phi_{(x_1, x_2)};$$

3. Derivada da função densidade conjunta da normal em relação ao parâmetro (σ_1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{(x_1, x_2)}}{\partial \sigma_1} &= \left(-\frac{\sigma_1 \sigma_2^2}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2} \right) \phi_{(x_1, x_2)} - 2\phi_{(x_1, x_2)} \left\{ \left[\left(\frac{2\sigma_1 \sigma_2^2 (\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2) - 2\sigma_1^3 \sigma_2^4}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_2} \right)^2 - \left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] + \left(\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left[\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1^2 \sigma_2} \right) \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) - \left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1^2} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \frac{2(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^3} \right] \right\}; \end{aligned}$$

4. Derivada da função densidade conjunta da normal em relação ao parâmetro (σ_2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{(x_1, x_2)}}{\partial \sigma_2} &= \left(-\frac{\sigma_1^2 \sigma_2}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2} \right) \phi_{(x_1, x_2)} - 2\phi_{(x_1, x_2)} \left\{ \left[\left(\frac{2\sigma_1^2 \sigma_2 (\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2) - 2\sigma_1^4 \sigma_2^3}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] + \left(\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left[\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2^2} \right) \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2^2} \right) + \frac{2(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^3} \right] \right\}; \end{aligned}$$

5. Derivada da função densidade conjunta da normal em relação ao parâmetro (σ_{12}):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{(x_1, x_2)}}{\partial \sigma_{12}} &= \left(-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \right) \phi_{(x_1, x_2)} - 2\phi_{(x_1, x_2)} \left\{ \left(\frac{2\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_{12}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2} \right) \right. \\ &\quad \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_2} \right)^2 - \left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] - \left(\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \right) \\ &\quad \left. \left(\frac{2}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

A derivada da função de distribuição acumulada conjunta da normal em relação aos parâmetros $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, é dada pela expressão

$$\frac{\partial \Phi_{(x_1, x_2)}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = -\frac{\phi_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \frac{\sigma_{12}^2}{(\sigma_1 \sigma_2)^2}}}.$$

A derivada da função de distribuição acumulada conjunta da normal em relação aos

parâmetros da matriz de variâncias e covariância Σ , é dada pela expressão

$$\frac{\partial \Phi_{(x_1, x_2)}}{\partial \Sigma} = - \{ \mathbf{1}'_{(n \times 1)} \Sigma^{-1}_{(2 \times 2)} [\mathbf{X}_{(n \times 2)} - \boldsymbol{\mu}_{(1 \times 2)}] \} \phi_{(x_1, x_2)},$$

em que $\mathbf{1}'$ é um vetor de números (1) e $[\mathbf{1}' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})]$ é um produto matricial, calculado para cada linha da matriz de dados (\mathbf{X}).

As funções $\phi_1(x_1)$, $\phi_2(x_2)$, funções densidade de probabilidade da normal dada pela equação (2.1) $\Phi_1(x_1)$ e $\Phi_2(x_2)$, funções de distribuição acumulada da normal dada pela equação (acumulada) encontradas nas expressões $A_{(x_1, x_2)}$, $B_{(x_1, x_2)}$, $C_{(x_1, x_2)}$ definidas nas equações (4.3), (4.4) e (4.5), respectivamente, necessitam ser derivadas em relação aos seus parâmetros para compor as expressões das funções escores. E estas derivadas são dadas por

1. Derivada de $\phi_1(x_1)$ em relação ao parâmetro (μ_1)

$$\frac{\partial \phi_1(x_1)}{\partial \mu_1} = \frac{(x_1 - \mu_1)}{\sigma_1^2} \phi_1(x_1);$$

2. Derivada de $\phi_1(x_1)$ em relação ao parâmetro (σ_1)

$$\frac{\partial \phi_1(x_1)}{\partial \sigma_1} = \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^3} - \frac{1}{\sigma_1} \right] \phi_1(x_1);$$

3. Derivada de $\phi_2(x_2)$ em relação ao parâmetro (μ_2)

$$\frac{\partial \phi_2(x_2)}{\partial \mu_2} = \frac{(x_2 - \mu_2)}{\sigma_2^2} \phi_2(x_2);$$

4. Derivada de $\phi_2(x_2)$ em relação ao parâmetro (σ_2)

$$\frac{\partial \phi_2(x_2)}{\partial \sigma_2} = \left[\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^3} - \frac{1}{\sigma_2} \right] \phi_2(x_2);$$

5. Derivada de $\Phi_1(x_1)$ em relação ao parâmetro (μ_1)

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1)}{\partial \mu_1} = - \frac{\phi_1(x_1)}{\sigma_1};$$

6. Derivada de $\Phi_1(x_1)$ em relação ao parâmetro (σ_1)

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1)}{\partial \sigma_1} = -\frac{(x_1 - \mu_1)}{\sigma_1^2} \phi_1(x_1);$$

7. Derivada de $\Phi_2(x_2)$ em relação ao parâmetro (μ_2)

$$\frac{\partial \Phi_2(x_2)}{\partial \mu_2} = -\frac{\phi_2(x_2)}{\sigma_2};$$

8. Derivada de $\Phi_2(x_2)$ em relação ao parâmetro (σ_2)

$$\frac{\partial \Phi_2(x_2)}{\partial \sigma_2} = -\frac{(x_2 - \mu_2)}{\sigma_2^2} \phi_2(x_2).$$

De posse dessas derivadas foi possível a obtenção das funções escore da distribuição normal de Kumaraswamy, que foram calculadas a partir da função de log-verossimilhança dada pela equação (??) que dão suporte ao processo de estimação, feito por meio de métodos iterativos e são representadas por

A derivada de l em relação ao parâmetro μ_1

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_1} = m_{11} + \frac{(m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15} + m_{16} + m_{17} + m_{18})}{m_{19} + m_{110}} + m_{111},$$

em que,

$$m_{11} = -\frac{(a-2)\phi_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1 \sigma_2 \left(\sqrt{1-\rho^2}\right) \Phi_{(x_1, x_2)}};$$

$$m_{12} = \frac{4a^2(b-1)[\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]\phi_{(x_1, x_2)}\Phi^a_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1 \sigma_2 \left(\sqrt{1-\rho^2}\right) [1-\Phi^a_{(x_1, x_2)}]\Phi_{(x_1, x_2)}};$$

$$m_{13} = -\frac{4a(b-1) [\Phi^a_{(x_1, x_2)}] (x_1 - \mu_1) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{\sigma_1^2 [1-\Phi^a_{(x_1, x_2)}]};$$

$$m_{14} = \frac{4a(b-1) [\Phi^a_{(x_1, x_2)}] [\phi_1^2(x_1)\Phi_1(x_1)] \phi_2(x_2)}{\sigma_1 [1-\Phi^a_{(x_1, x_2)}]};$$

$$m_{15} = \frac{4a^2(b-1) [\Phi^a_{(x_1, x_2)}]^2 [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] \phi_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1 \sigma_2 \left[\sqrt{1-\rho^2}\right] [1-(\Phi^a_{(x_1, x_2)})]^2 \Phi_{(x_1, x_2)}};$$

$$m_{16} = \frac{4(a-1)(x_1 - \mu_1) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{\sigma_1^2};$$

$$m_{17} = -\frac{(a-1) [\phi_1^2(x_1)\Phi_1(x_1)] \phi_2(x_2)}{\sigma_1} - \frac{\phi_{(x_1, x_2)}^2}{\sigma_1 \sigma_2 \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)};$$

$$m_{18} = \frac{\Phi_{(x_1, x_2)} \phi_{(x_1, x_2)} \sigma_1^2 \sigma_2^2 \left[\frac{2(x_1 - \mu_1)}{\sigma_1^2} - \frac{2\sigma_{12}(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right]}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2};$$

$$m_{19} = -\frac{4a(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)} [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{1-\Phi^a_{(x_1, x_2)}};$$

$$m_{110} = 4(a-1) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] + \phi_{(x_1, x_2)} \Phi_{(x_1, x_2)};$$

$$m_{111} = -\frac{a(1-b)\phi_{(x_1, x_2)}\Phi^a_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1 \sigma_2 \Phi_{(x_1, x_2)} \left(\sqrt{1-\rho^2}\right) [1-\Phi^a_{(x_1, x_2)}]}.$$

A derivada de l em relação ao parâmetro (μ_2)

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_2} = m_{21} + \frac{m_{22} + m_{23} + m_{24} + m_{25} + m_{26} + m_{27} + m_{28}}{m_{29} + m_{210}} + m_{211}$$

em que,

$$m_{21} = -\frac{(a-2)\phi_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1 \sigma_2 \left(\sqrt{1-\rho^2}\right) \Phi_{(x_1, x_2)}};$$

$$m_{22} = \frac{4a^2(b-1)[\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]\phi_{(x_1, x_2)}\Phi^a_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1 \sigma_2 \left(\sqrt{1-\rho^2}\right) [1-\Phi^a_{(x_1, x_2)}]\Phi_{(x_1, x_2)}};$$

$$m_{23} = \frac{4a(b-1) [\Phi^a_{(x_1, x_2)}] [\phi_2^2(x_2)\Phi_2(x_2)] \phi_1(x_1)}{\sigma_2 [1-\Phi^a_{(x_1, x_2)}]};$$

$$m_{24} = -\frac{4a(b-1) [\Phi^a_{(x_1, x_2)}] (x_2 - \mu_2) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{\sigma_2^2 [1-\Phi^a_{(x_1, x_2)}]};$$

$$m_{25} = \frac{4a^2(b-1) [\Phi^a_{(x_1, x_2)}]^2 [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] \phi_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1 \sigma_2 \left(\sqrt{1-\rho^2}\right) [1-(\Phi^a_{(x_1, x_2)})]^2 \Phi_{(x_1, x_2)}};$$

$$m_{26} = \frac{4(a-1)\phi_1(x_1) [\phi_2^2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{\sigma_2};$$

$$m_{27} = \frac{4(a-1)(x_2 - \mu_2) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{\sigma_2^2} - \frac{\phi_{(x_1, x_2)}^2}{\sigma_1 \sigma_2 \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)};$$

$$m_{28} = \frac{\Phi_{(x_1, x_2)} \phi_{(x_1, x_2)} \sigma_1^2 \sigma_2^2 \left[\frac{2(x_2 - \mu_2)}{\sigma_2^2} - \frac{2\sigma_{12}(x_1 - \mu_1)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right]}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2};$$

$$m_{29} = -\frac{4a(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)} [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{1-\Phi^a_{(x_1, x_2)}};$$

$$m_{210} = 4(a-1) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] + \phi_{(x_1, x_2)} \Phi_{(x_1, x_2)};$$

$$m_{211} = -\frac{a(1-b)\phi_{(x_1, x_2)}\Phi^a_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1 \sigma_2 \Phi_{(x_1, x_2)} \left(\sqrt{1-\rho^2}\right) [1-\Phi^a_{(x_1, x_2)}]}.$$

A derivada de l em relação ao parâmetro (σ_1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \sigma_1} &= s_{11} + \frac{(s_{12} + s_{13} + s_{14} + s_{15} + s_{16} + s_{17} + s_{18} + s_{19})}{s_{113} + s_{114}} + \\ &+ \frac{\Phi_{(x_1, x_2)} \{s_{116} + \phi_{(x_1, x_2)} [s_{110} + s_{111} + s_{112}]\}}{s_{113} + s_{114}} + s_{115} \end{aligned}$$

em que,

$$s_{11} = \frac{(a-2)[\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1, x_2)}}{\Phi_{(x_1, x_2)}};$$

$$s_{12} = \frac{4a^2(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)}[\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1, x_2)}[\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{\Phi_{(x_1, x_2)}[1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}}];$$

$$s_{13} = -\frac{4a(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)}\left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^3} - \frac{1}{\sigma_1}\right][\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{[1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}}];$$

$$s_{14} = \frac{4a(b-1)(x_1 - \mu_1)[\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)][\phi_1^2(x_1)]\Phi^a_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1^2[1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}}];$$

$$s_{15} = \frac{4a(b-1)(x_1 - \mu_1)[\phi_1(x_1)]^2[\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]\Phi^a_{(x_1, x_2)}}{\sigma_1^2[1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}}];$$

$$s_{16} = -\frac{4a^2(b-1)[\Phi^a_{(x_1, x_2)}]^2[\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)][\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1, x_2)}}{\Phi_{(x_1, x_2)}[1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}]^2};$$

$$s_{17} = (a-1)\left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^3} - \frac{1}{\sigma_1}\right][\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)];$$

$$s_{18} = -\frac{4(a-1)(x_1 - \mu_1)[\phi_1^2(x_1)\Phi_1(x_1)]\phi_2(x_2)}{\sigma_1^2};$$

$$s_{19} = -\frac{4(a-1)(x_1 - \mu_1)[\phi_1^2(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{\sigma_1^2} + [\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1, x_2)}^2;$$

$$s_{110} = -\frac{4\sigma_1\sigma_2^2\left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\sigma_{12}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2};$$

$$s_{111} = -\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2\left[-\frac{2(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^3} + \frac{4\sigma_{12}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^3\sigma_2^2}\right]}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2};$$

$$\begin{aligned}
s_{112} &= \frac{4\sigma_1^3\sigma_2^4 \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\sigma_{12}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}; \\
s_{113} &= -\frac{4a(b-1)\Phi^a_{(x_1,x_2)} [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{1 - \Phi^a_{(x_1,x_2)}}; \\
s_{114} &= 4(a-1) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] + \phi_{(x_1,x_2)}\Phi_{(x_1,x_2)}; \\
s_{115} &= \frac{a(1-b)[\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1,x_2)}\Phi^a_{(x_1,x_2)}}{\Phi_{(x_1,x_2)} [1 - \Phi^a_{(x_1,x_2)}]}; \\
s_{116} &= -\frac{\phi_{(x_1,x_2)}\sigma_1\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}.
\end{aligned}$$

A derivada de l em relação ao parâmetro (σ_2)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \sigma_2} &= s_{21} + \frac{(s_{22} + s_{23} + s_{24} + s_{25} + s_{26} + s_{27} + s_{28} + s_{29})}{s_{213} + s_{213}} + \\
&+ \frac{\Phi_{(x_1,x_2)} \{s_{212} + \phi_{(x_1,x_2)} [s_{210} + s_{211} + s_{212}]\}}{s_{213} + s_{213}} + s_{215}
\end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned}
s_{21} &= \frac{(a-2)[\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1,x_2)}}{\Phi_{(x_1,x_2)}}; \\
s_{22} &= -\frac{4a^2(b-1)\Phi^a_{(x_1,x_2)}[\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1,x_2)} [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{\Phi_{(x_1,x_2)} [1 - \Phi^a_{(x_1,x_2)}]}; \\
s_{23} &= -\frac{4a(b-1)\Phi^a_{(x_1,x_2)} \left[\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^3} - \frac{1}{\sigma_2} \right] [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{[1 - \Phi^a_{(x_1,x_2)}]}; \\
s_{24} &= \frac{4a(b-1)(x_2 - \mu_2) [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] 2\phi_1(x_1)\Phi^a_{(x_1,x_2)}}{\sigma_2^2 [1 - \Phi^a_{(x_1,x_2)}]}; \\
s_{25} &= \frac{4a(b-1)(x_2 - \mu_2)\phi_1(x_1) [\phi_2^2(x_2)\Phi_2(x_2)] \Phi^a_{(x_1,x_2)}}{\sigma_2^2 [1 - \Phi^a_{(x_1,x_2)}]};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{26} &= -\frac{4a^2(b-1) [\Phi^a_{(x_1, x_2)}]^2 [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] [\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \phi_{(x_1, x_2)}}{\Phi_{(x_1, x_2)} [1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}]^2}; \\
s_{27} &= 4(a-1) \left[\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^3} - \frac{1}{\sigma_2} \right] [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]; \\
s_{28} &= -\frac{4(a-1)(x_2 - \mu_2) [\phi_2^2(x_2)\Phi_2(x_2)] \phi_1(x_1)}{\sigma_2^2}; \\
s_{29} &= -\frac{4(a-1)(x_2 - \mu_2) [\phi_2^2(x_2)] [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)]}{\sigma_2^2} + [\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \phi_{(x_1, x_2)}^2; \\
s_{210} &= -\frac{4\sigma_1^2\sigma_2 \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\sigma_{12}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}; \\
s_{211} &= -\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \left[\frac{2(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^3} + \frac{4\sigma_{12}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^3\sigma_2^2} \right]}{(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2}; \\
s_{212} &= -\frac{\phi_{(x_1, x_2)}\sigma_1\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}; \\
s_{213} &= \frac{4\sigma_1^4\sigma_2^3 \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\sigma_{12}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}{(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2}; \\
s_{214} &= -\frac{4a(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)} [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}}; \\
s_{215} &= 4(a-1) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] + \phi_{(x_1, x_2)}\Phi_{(x_1, x_2)}; \\
s_{216} &= \frac{a(1-b)[\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \phi_{(x_1, x_2)} \Phi^a_{(x_1, x_2)}}{\Phi_{(x_1, x_2)} [1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}]}.
\end{aligned}$$

A derivada de l em relação ao parâmetro (σ_{12})

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma_{12}} = s_{121} + \frac{(s_{122} + s_{123} + s_{124})}{s_{214} + s_{215}} + \frac{\Phi_{(x_1, x_2)} \{s_{125} + \phi_{(x_1, x_2)} [s_{126} + s_{127} + s_{213}]\}}{s_{128} + s_{129}} + s_{1210}$$

em que,

$$s_{121} = \frac{(a-2)[\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1, x_2)}}{\Phi_{(x_1, x_2)}};$$

$$s_{122} = -\frac{4a^2(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)}[\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1, x_2)}[\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{\Phi_{(x_1, x_2)}[1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}}];$$

$$s_{123} = -\frac{4a^2(b-1)[\Phi^a_{(x_1, x_2)}]^2[\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)][\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1, x_2)}}{\Phi_{(x_1, x_2)}[1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}]^2};$$

$$s_{124} = [\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi^2_{(x_1, x_2)};$$

$$s_{125} = -\frac{\phi_{(x_1, x_2)}\sigma_1\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2};$$

$$s_{126} = \frac{4(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2};$$

$$s_{127} = -\frac{4\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_{12}\left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\sigma_{12}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}{(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2};$$

$$s_{128} = -\frac{4a(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)}[\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}};$$

$$s_{129} = 4(a-1)[\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)][\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] + \phi_{(x_1, x_2)}\Phi_{(x_1, x_2)};$$

$$s_{1210} = \frac{a(1-b)[\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\phi_{(x_1, x_2)}\Phi^a_{(x_1, x_2)}}{\Phi_{(x_1, x_2)}[1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}}].$$

A derivada de l em relação ao parâmetro (a)

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{n}{a} + \ln(\Phi_{(x_1, x_2)}) + \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}{a_5 + a_6} + a_7$$

em que,

$$a_1 = -\frac{4(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)} [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}};$$

$$a_2 = -\frac{4a(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)} \ln(\Phi_{(x_1, x_2)}) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}};$$

$$a_3 = -\frac{4a(b-1)(\Phi^a_{(x_1, x_2)})^2 \ln(\Phi_{(x_1, x_2)}) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{(1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)})^2};$$

$$a_4 = 4 [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)];$$

$$a_5 = -\frac{4a(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)} [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}};$$

$$a_6 = 4(a-1) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] + \phi_{(x_1, x_2)} \Phi_{(x_1, x_2)};$$

$$a_7 = \frac{(1-b)\Phi^a_{(x_1, x_2)} \ln(\Phi_{(x_1, x_2)})}{1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}}.$$

A derivada de l em relação ao parâmetro (b)

$$\frac{\partial l}{\partial b} = \frac{n}{b} - \frac{b_1}{b_2(b_3 + b_4)} + \ln(b_2)$$

em que,

$$b_1 = 4a\Phi^a_{(x_1, x_2)} [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)];$$

$$b_2 = 1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)};$$

$$b_3 = -\frac{4a(b-1)\Phi^a_{(x_1, x_2)} [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)]}{1 - \Phi^a_{(x_1, x_2)}};$$

$$b_4 = 4(a-1) [\phi_1(x_1)\Phi_1(x_1)] [\phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)] + \phi_{(x_1, x_2)} \Phi_{(x_1, x_2)}.$$

4.4 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS COM DADOS SIMULADOS

Esta seção apresenta os resultados das estimativas dos parâmetros da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, para as variáveis simuladas independentes e dependentes.

Estimar sete parâmetros de uma distribuição com funções escores complexas é um processo complicado, este fato ocorre devido ao espaço paramétrico ter muitos parâmetros com muitas restrições, dificultando o processo de estimação. Um dos desafios do processo refere-se a escolha dos valores arbitrários iniciais. Caso estes estiverem muito distantes dos valores paramétricos, podem ocorrer problemas como por exemplo a inversão da matriz hessiana.

4.4.1 Estimação dos parâmetros com variáveis independentes

Para caracterizar uma situação com duas variáveis independentes, foram simuladas cada uma a partir de uma distribuição normal de Kumaraswamy univariada com os seguintes valores paramétricos $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0$; $\sigma_1 = 1$; $\sigma_2 = 1$; $a = 2$ e $b = 1$. O resultado das médias das estimações dos parâmetros é apresentado na Tabela 3.

A Tabela 1 apresenta os valores das estimativas dos parâmetros e o REQM para cada tamanho amostral. Considerando os resultados da Tabela 1, os valores de REQM dos estimadores de μ_2 ; σ_1 ; σ_2 ; σ_{12} ; a e b diminuem à medida que o tamanho amostral aumenta, como era esperado para um estimador consistente. As estimativas estão próximas aos valores paramétricos, assim, não foi necessário ter uma amostra grande para obter uma estimativas confiáveis. O estimador de σ_{12} destacou-se, ser o mais preciso, para amostras maiores que 500 por apresentar o menor valor de REQM. Os resultados mostram comportamento que pode indicar uma consistência nos estimadores, pois à medida que o tamanho amostral aumenta, diminui-se o valor de REQM. Estes também podem caracterizar não tendenciosidade, ou seja, o valor médio dos estimadores são próximos aos valores paramétricos.

As Figuras 6 e 7 apresentam os histogramas para os 500 valores simulados das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros, para valores de amostras de $n = 100$ e $n = 1000$, respectivamente. Verificou-se comportamento assimétrico para a distribuição dos estimadores dos parâmetros a e b .

Tabela 1 – Média e a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) das estimativas dos parâmetros da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada independente de acordo com o tamanho amostral e 500 simulações (Valores simulados $\hat{\mu}_1 = 0$; $\hat{\mu}_2 = 0$; $\hat{\sigma}_1 = 1$; $\hat{\sigma}_2 = 1$; $\hat{\sigma}_{12} = 0$; $\hat{a} = 2$; $\hat{b} = 1$).

n	Estimador	Média	REQM
$n = 100$	$\hat{\mu}_1$	0,093	0,095
	$\hat{\mu}_2$	0,110	0,113
	$\hat{\sigma}_1$	1,112	0,203
	$\hat{\sigma}_2$	0,903	0,098
	$\hat{\sigma}_{12}$	0,574	0,623
	\hat{a}	2,05	0,221
	\hat{b}	1,129	0,198
$n = 500$	$\hat{\mu}_1$	0,099	0,098
	$\hat{\mu}_2$	0,102	0,102
	$\hat{\sigma}_1$	0,948	0,066
	$\hat{\sigma}_2$	0,901	0,098
	$\hat{\sigma}_{12}$	0,027	0,028
	\hat{a}	1,812	0,188
	\hat{b}	0,907	0,093
$n = 1000$	$\hat{\mu}_1$	0,099	0,098
	$\hat{\mu}_2$	0,102	0,101
	$\hat{\sigma}_1$	0,948	0,043
	$\hat{\sigma}_2$	0,901	0,061
	$\hat{\sigma}_{12}$	0,027	0,027
	\hat{a}	1,813	0,186
	\hat{b}	0,907	0,092

Fonte: DA AUTORA.

Nota: Valores iniciais usados para a estimação: $\hat{\mu}_1 = 0,1$; $\hat{\mu}_2 = 0,1$; $\hat{\sigma}_1 = 0,9$; $\hat{\sigma}_2 = 0,9$; $\hat{\sigma}_{12} = 0,39$; $\hat{a} = 1,8$; $\hat{b} = 0,9$.

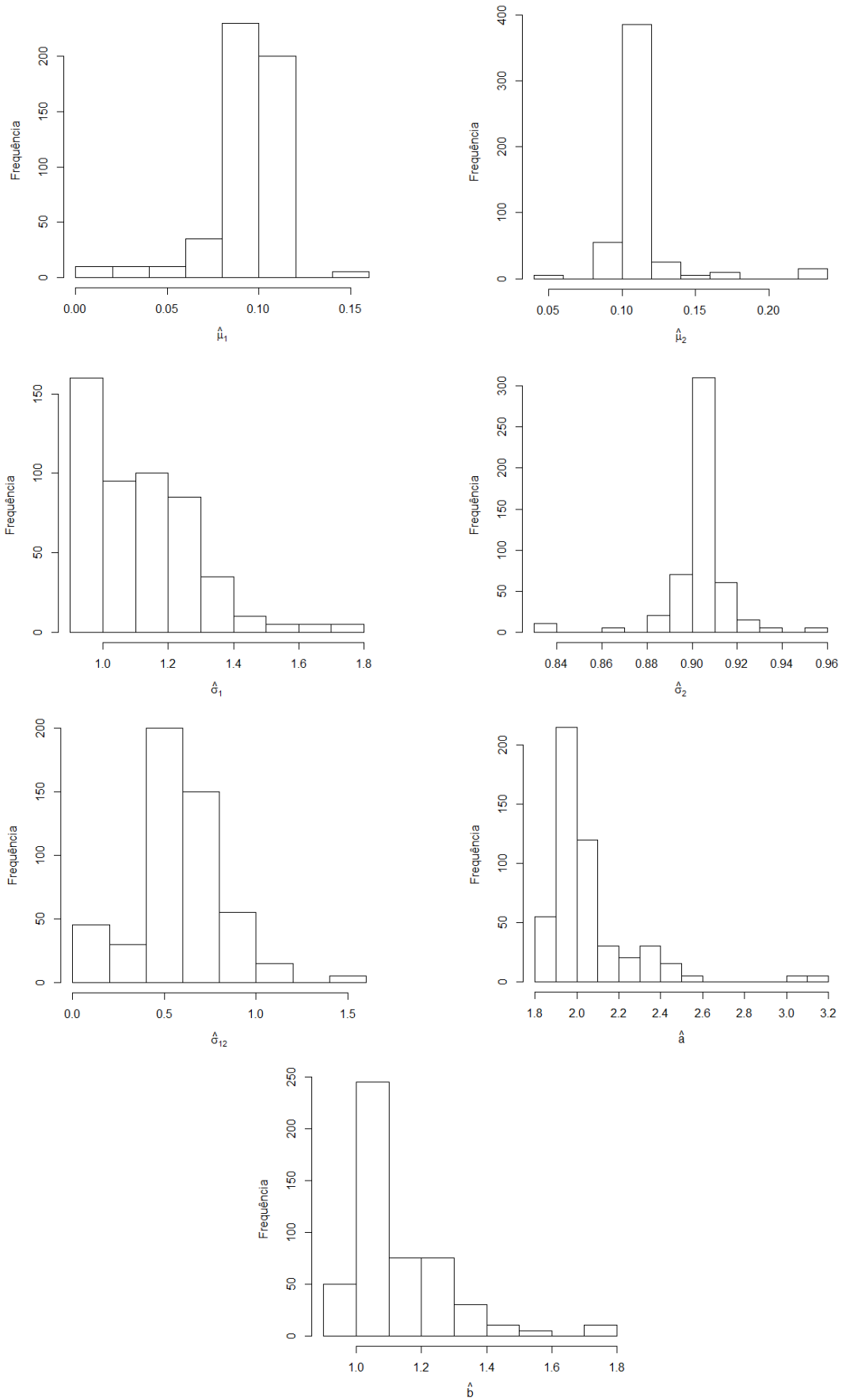


Figura 6 – Histogramas dos 500 valores simulados das estimativas de máxima verossimilhança com tamanho amostral de $n = 100$.

Fonte: DA AUTORA.

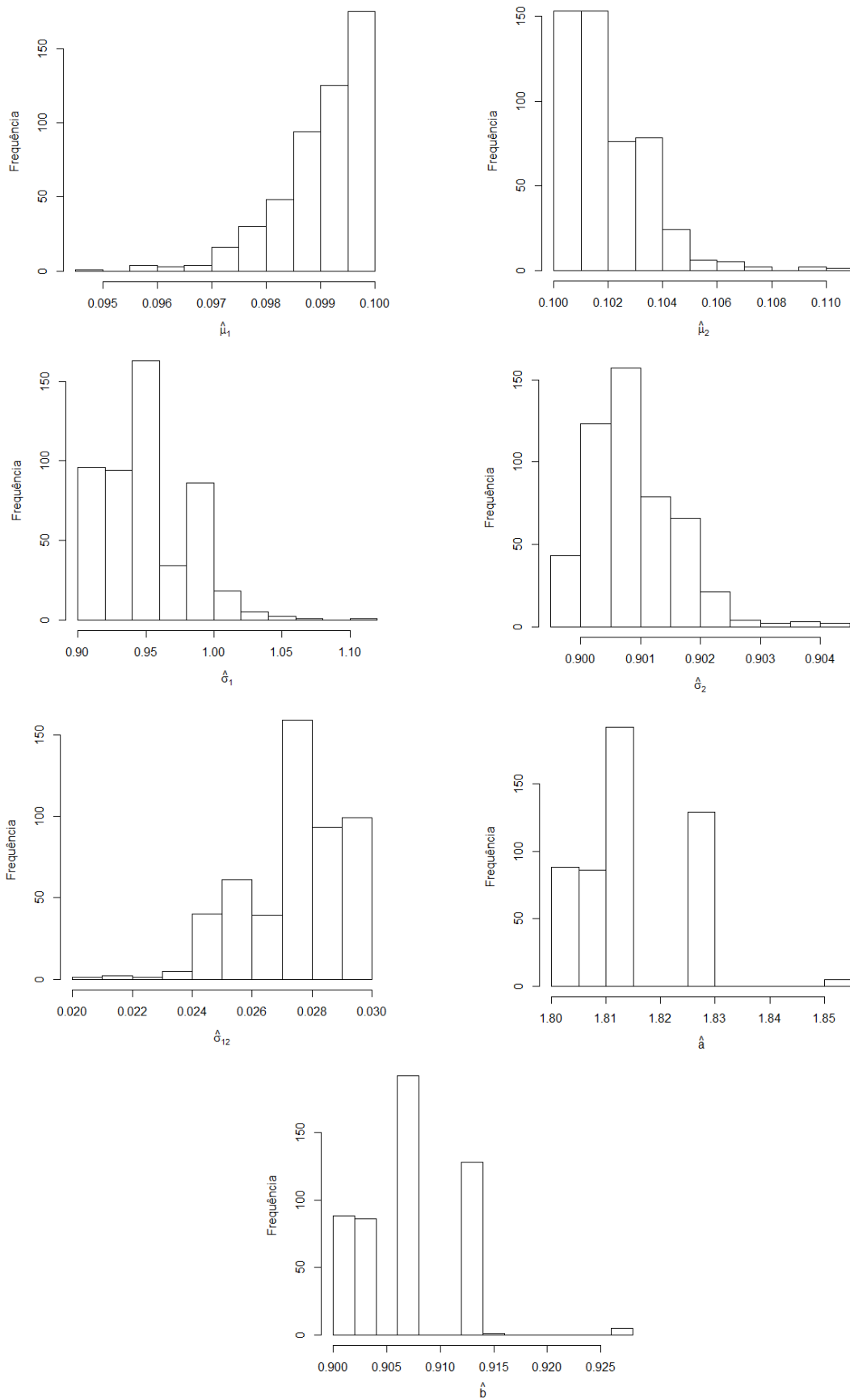


Figura 7 – Histogramas dos 500 valores simulados das estimativas de máxima verossimilhança com tamanho amostral de $n = 1000$.
 Fonte: DA AUTORA.

4.4.2 Estimação dos parâmetros com variáveis dependentes

As variáveis correlacionadas foram simuladas a partir da distribuição normal de Kumaraswamy univariada e do algoritmo de Graybill (1976) que insere a correlação entre as variáveis assumindo uma relação linear entre elas. Os valores paramétricos simulados para o processo de estimação foram $\mu_1 = 20,00$; $\mu_2 = 2,5$; $\sigma_1 = 1,4$; $\sigma_2 = 1,8$; $\sigma_{12} = -0,75$; $a = 2$; $b = 1$ com correlação positiva ($\rho = -0,5$), e os resultados das 500 simulações é apresentado na Tabela 2.

Os valores das estimativas dos parâmetros e o REQM para cada tamanho amostral estão demonstrados na Tabela 2. Observa-se que os valores de REQM dos estimadores de μ_1 , σ_1 , a , b diminuíram à medida que o tamanho amostral aumenta, com isso os estimadores apresentar comportamento de estimadores consistentes. Os valores médios do estimadores estão próximos aos valores paramétricos, logo estes podem caracterizar a não tendenciosidade.

Tabela 2 – Média e a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) das estimativas dos parâmetros da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, para variáveis dependentes com correlação ($\rho = -0,5$) (Valores simulados: $\hat{\mu}_1 = 20,0$; $\hat{\mu}_2 = 2,5$; $\hat{\sigma}_1 = 1,4$; $\hat{\sigma}_2 = 1,8$; $\hat{\sigma}_{12} = -1,26$; $\hat{a} = 2,0$; $\hat{b} = 1,0$).

n	Estimador	Média	REQM
$n = 100$	$\hat{\mu}_1$	19,465	0,537
	$\hat{\mu}_2$	2,100	0,399
	$\hat{\sigma}_1$	1,989	0,915
	$\hat{\sigma}_2$	1,225	0,575
	$\hat{\sigma}_{12}$	-0,927	0,459
	\hat{a}	2,088	0,213
	\hat{b}	1,114	0,204
$n = 500$	$\hat{\mu}_1$	19,489	0,510
	$\hat{\mu}_2$	2,099	0,399
	$\hat{\sigma}_1$	1,338	0,475
	$\hat{\sigma}_2$	1,213	0,585
	$\hat{\sigma}_{12}$	-0,842	0,457
	\hat{a}	1,978	0,142
	\hat{b}	0,99	0,083
$n = 1000$	$\hat{\mu}_1$	19,497	0,503
	$\hat{\mu}_2$	2,099	0,400
	$\hat{\sigma}_1$	1,190	0,335
	$\hat{\sigma}_2$	1,211	0,588
	$\hat{\sigma}_{12}$	-0,792	0,483
	\hat{a}	1,939	0,102
	\hat{b}	0,964	0,059

Fonte: DA AUTORA.

Valores iniciais usados para a estimativa: $\hat{\mu}_1 = 19,5$; $\hat{\mu}_2 = 2,1$; $\hat{\sigma}_1 = 1,12$; $\hat{\sigma}_2 = 1,21$; $\hat{\sigma}_{12} = -0,75$; $\hat{a} = 1,90$; $\hat{b} = 0,94$.

A Figuras 8 e 9 apresentam os histogramas para os 500 valores simulados das EMV dos parâmetros.

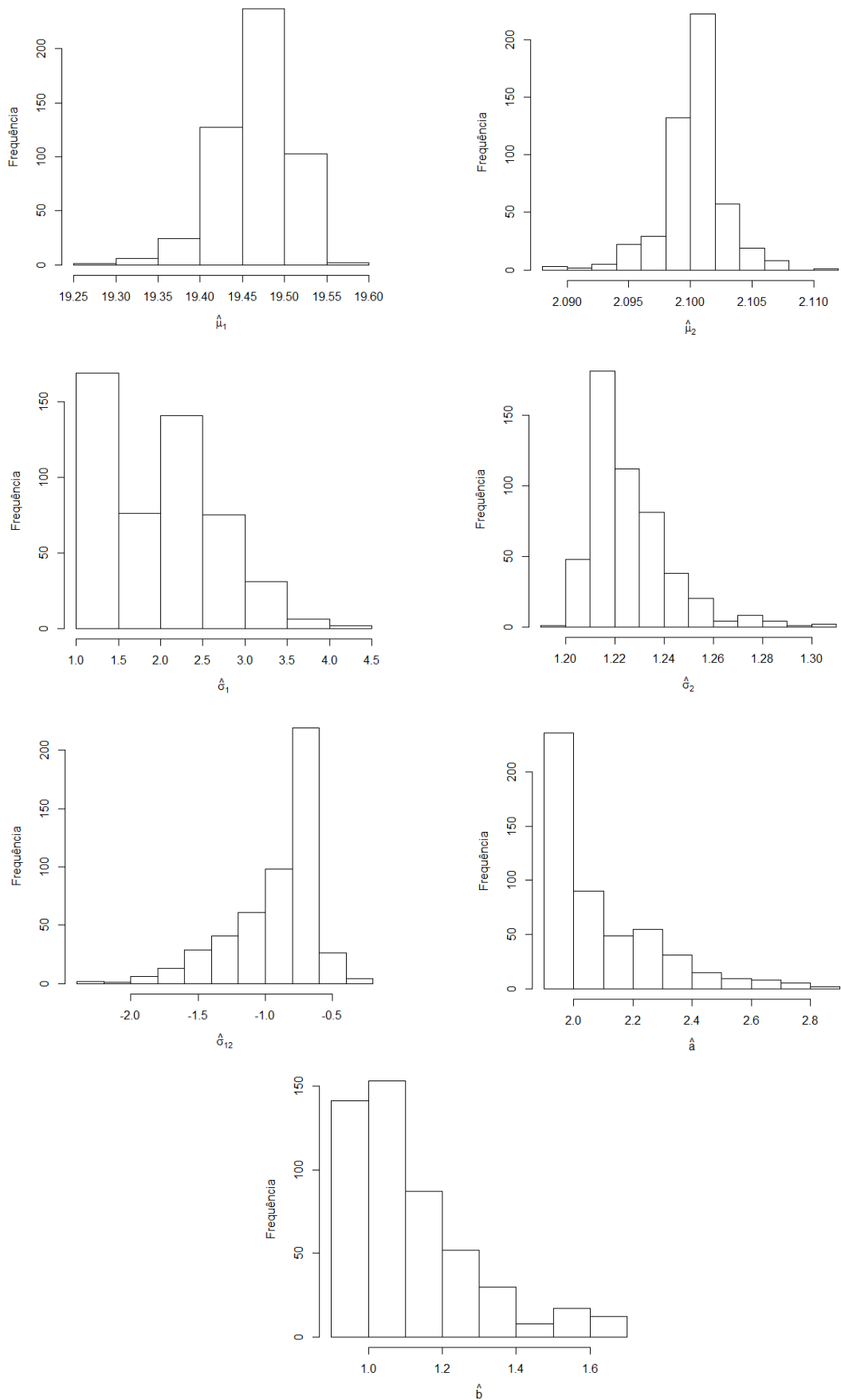


Figura 8 – Histogramas dos 500 valores simulados das estimativas de máxima verossimilhança com tamanho de amostra $n = 100$.

Fonte: DA AUTORA.

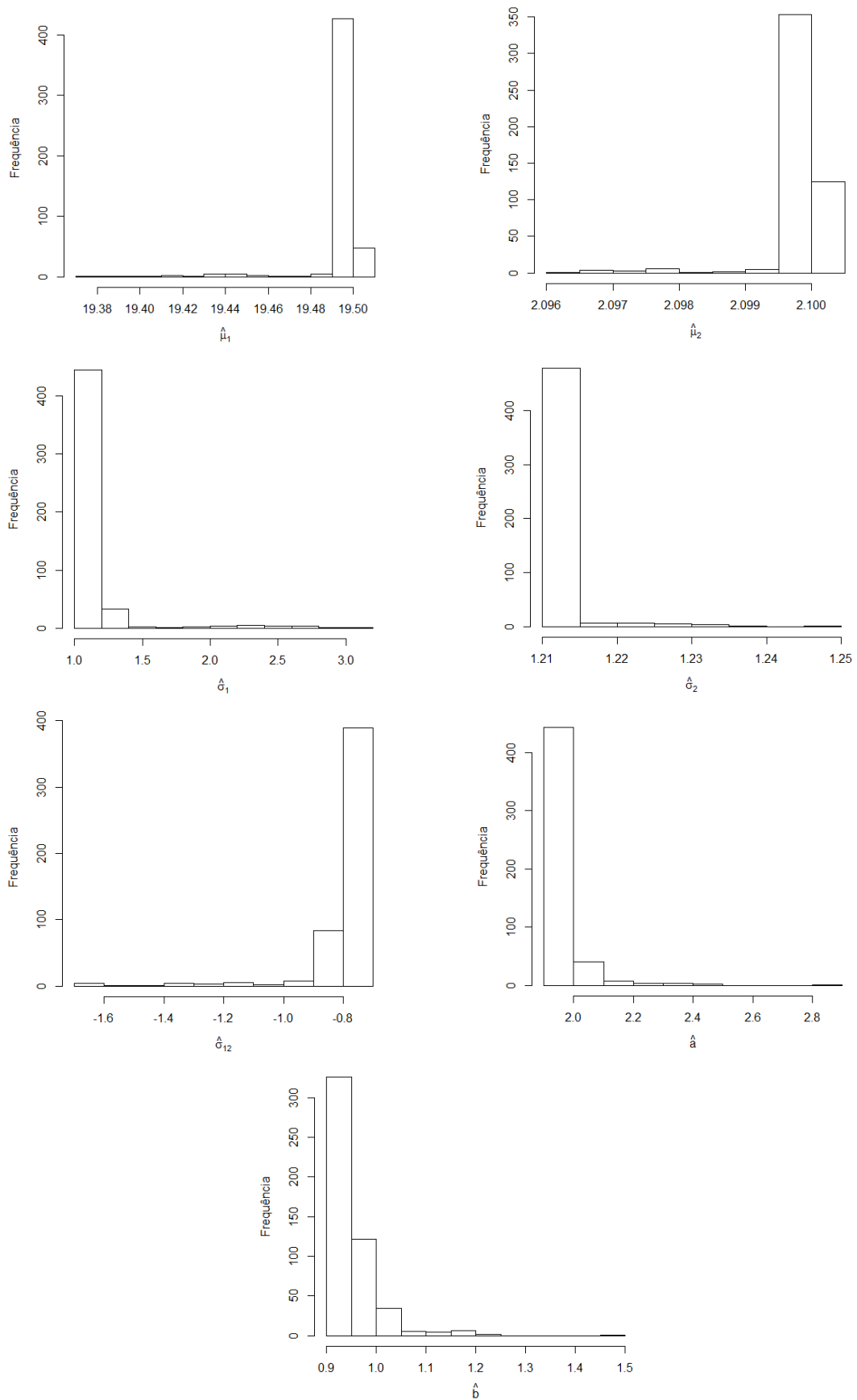


Figura 9 – Histogramas dos 500 valores simulados das estimativas de máxima verossimilhança com tamanho de amostra $n = 1000$.
 Fonte: DA AUTORA.

No processo de estimação das variáveis dependentes o estimador de (σ_{12}) apresentou o maior valor de REQM. Isto ocorre pelo fato de que as funções de verossimilhança e escores da distribuição normal de Kumaraswamy são dependentes de ρ e a presença deste pode dificultar o processo de estimação. Pelas representações gráficas, percebe-se comportamentos assimétricos para as distribuições dos estimadores dos desvios padrões, de a e b . Simetria da distribuição foram verificadas para os estimadores das médias e da covariância como era esperado. Com o aumento da amostra a variação dos estimadores foi menor (FIGURA 9).

4.5 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS COM DADOS REAIS

A estimação dos parâmetros da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada para uma série de dados reais foi realizada envolvendo as variáveis temperatura média e precipitação total do mês de outubro, ao longo dos anos de 1917 à 2008 no posto agro meteorológico da escola superior de Agricultura Luiz de Queiroz (Esalq/Usp). Para o processo de estimação foram necessárias as funções de log-verossimilhança, as funções escores e o método de otimização de Newton-Raphson.

Os resultados obtidos dos testes de Shapiro-Wilk multivariado e do teste Ks, mostraram que os dados não se ajustam a distribuição normal bivariada (*valor - p* < 0,0001) e que se aderem a distribuição normal de Kumaraswamy bivariada (*valor - p* = 0,284).

A Figura 10 apresenta os valores dos dados no mês de outubro para as variáveis temperatura média e precipitação total. Pode-se observar a presença de assimetria positiva nas variáveis.

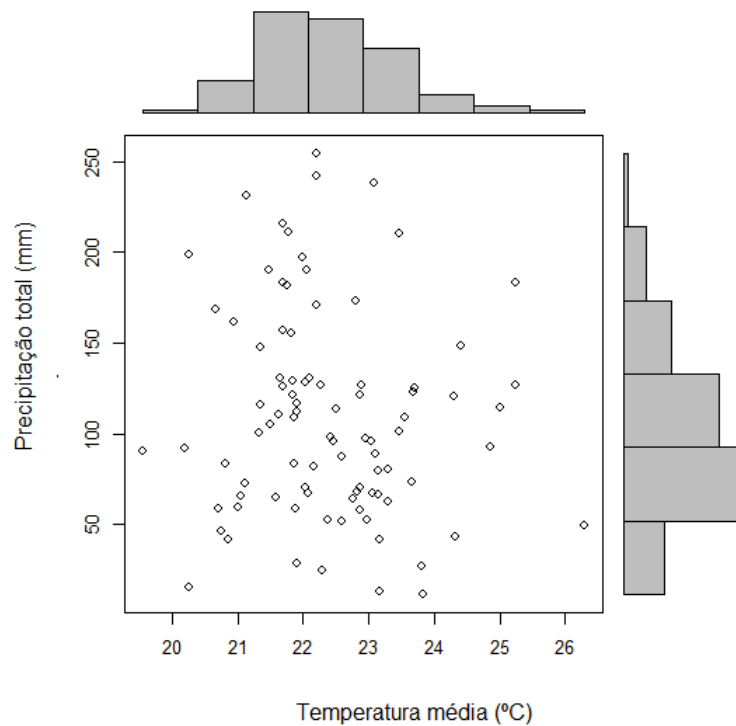


Figura 10 – Representação da dispersão entre as variáveis temperatura média e precipitação total no mês de outubro e respectivos histogramas.

Fonte: DA AUTORA.

Observa-se na Tabela 3 os valores das estimativas das variáveis temperatura média e precipitação total para o mês de outubro.

Tabela 3 – Resultado da estimação dos parâmetros da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada para dados reais referentes ao mês de outubro. (Valores iniciais usados para as estimativas $\hat{\mu}_1 = 20,1$; $\hat{\mu}_2 = 115,5$; $\hat{\sigma}_1 = 2,3$; $\hat{\sigma}_2 = 51,5$; $\hat{\sigma}_{12} = 0,01$; $\hat{a} = 0,99$; $\hat{b} = 0,65$)

Estimadores	Valores Estimados
$\hat{\mu}_1$	21,79
$\hat{\mu}_2$	108,00
$\hat{\sigma}_1$	1,39
$\hat{\sigma}_2$	58,92
$\hat{\sigma}_{12}$	0,02
\hat{a}	1,59
\hat{b}	0,86

Fonte: DA AUTORA.

A Tabela 4 apresenta as probabilidades conjuntas, de ocorrência abaixo dos valores de

temperatura média e precipitação total para o mês de outubro. Independente da temperatura, a probabilidade de ocorrer chuvas no mês de outubro com valores de precipitação abaixo de 110 mm é de aproximadamente 40%.

Tabela 4 – Probabilidade de ocorrência abaixo (p), para valores conjuntos de temperatura média (TM) e precipitação total (PT), segundo a distribuição normal de Kumaraswamy bivariada.

PT (mm)	TM(°C)	p (%)
90	26	0,0006
	24	0,0005
	22	0,0006
110	26	0,4010
	24	0,4320
	22	0,4520

Fonte: DA AUTORA.

Na Tabela 5 observa-se as probabilidades conjuntas, de superar os valores de temperatura média e precipitação total para o mês de outubro. A probabilidade de ocorrer chuvas com quantidades maiores de 100 mm independente da temperatura maior que 95%. O que já é esperado, pois outubro é um mês que pode ocorrer temperaturas altas e chances maiores de ocorrer chuvas.

Tabela 5 – Probabilidade de superar (p), valores conjuntos de temperatura média (TM) e precipitação total (PT), segundo a distribuição normal de Kumaraswamy bivariada.

PT (mm)	TM(°C)	p (%)
100	23	0,951
	25	0,957
	27	0,958
120	23	0,0223
	25	0,1079
	27	0,1282

Fonte: DA AUTORA.

5 CONCLUSÕES

A distribuição normal de kumaraswamy bivariada foi deduzida, a partir da extensão sugerida por Nadarajah, Cordeiro e Ortega (2012);

Com a função densidade conjunta da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada, foi possível calcular a função de log-verossimilhança e as funções escores, para obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição;

Diante das simulações estudadas é possível verificar numericamente que os estimadores se comportaram de maneira precisa, consistente e não tendenciosa. A distribuição normal de kumaraswamy bivariada ajustou satisfatoriamente os dados meteorológicos de precipitação pluviométrica total (mm) e temperatura média ($^{\circ}C$).

REFERÊNCIAS

- BITTENCOURT, H. B.; VIALI, L. Contribuições para o ensino da distribuição normal ou curva de gauss em cursos de graduação. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, III., 2006, Rio de Janeiro. **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Águas de Lindóia: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2006. p. 16.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. **Introdução à Inferência Estatística**. 2. ed. [S.l.]: SBM, 2010. 159p. ISBN 8585818131.
- CIRILLO, M. A.; FERREIRA, D. F. Extensão do teste normalidade univariado baseado no coeficiente de correlação quantil-quantil para o caso multivariado. **Revista Matemática Estatística**, v. 21, n. 3, p. 67–84, 2003.
- CORDEIRO, G.; CASTRO, M. de. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 81, p. 883–898, july. 2011.
- CORREA, M. A.; NOGUEIRA, D. A.; FERREIRA, E. B. Kumaraswamy normal and azzalini's skew normal modeling asymmetry. **Sigmae**, v. 1, n. 1, p. 65–83, 2012.
- DAW, R. H.; PEARSON, E. S. Studies in the history of probability and statistics. abraham de moivre's 1733 derivation of the normal curve: A bibliographical note. **Biometrika**, v. 59, p. 677–680, 1972.
- DUONG, T. ks: Kernel density estimation and kernel discriminant analysis for multivariate data in r. **Journal of Statistical Software**, v. 21, n. 7, p. 1–16, 10 2007. ISSN 1548-7660.
- FERREIRA, D. F. **Estatística Multivariada**. 2. ed. [S.l.]: Editora UFLA, 2011. ISBN 9788587692528.
- GARG, M. On distribution of order statistics from kumaraswamy distribution. **Mathematical Journal**, n. 48, p. 411–417, 2008.
- GENZ, A. et al. **mvtnorm: Multivariate Normal and t Distributions**. [S.l.], 2014. R package version 1.0-2. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=mvtnorm>>.
- Graybill, F. A. **Theory and application of the linear model**. 1976. North Scituate / Massachusetts: Duxbury Press. XIV, 704 p. (1976).
- HENNINGSEN, A.; TOOMET, O. maxlik: A package for maximum likelihood estimation in R. **Computational Statistics**, v. 26, n. 3, p. 443–458, 2011.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 6. ed. [S.l.: s.n.], 2007. 772p. ISBN 0131877151.
- JONES, M. C. Kumaraswamy's distribution: A a beta-type distribution with some tractability advantages. statistical methodology. **Statistical Methodology**, v. 1, n. 6, p. 70–81, 2009.
- KUMARASWAMY, P. Sine power probability density function. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 31, p. 181–184, May. 1976.

- KUMARASWAMY, P. Extended sine power probability density function. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 37, p. 81–89, July. 1978.
- KUMARASWAMY, P. A generalized probability density functions for double-bounded random processes. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 46, p. 79–88, 1980.
- MARSAGLIA, G. Evaluating the normal distribution. **Journal of Statistical Software**, v. 11, n. 5, p. 1–11, 7 2004.
- MEYER, C. Recursive numerical evaluation of the cumulative bivariate normal distribution. **Journal of Statistical Software**, v. 52, n. 10, p. 1–14, 3 2013.
- MITNIK, P. A.; BAEK, S. The kumaraswamy distribution: A median-dispersion re-parametrization for regression modeling and simulation-based estimation. **Statistical Papers**, 2011. Disponível em: <<http://ssrn.com/abstract=1231587>>.
- NADARAJAH, S. On the distribution de kumaraswamy. **Journal de Hydrology**, n. 348, p. 568–568, 2008.
- NADARAJAH, S.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. General results for the kumaraswamy-g distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 82, n. 7, p. 951–979, 2012.
- NADARAJAH, S. C. S.; AFUECHETA, E. An r package for value at risk and expected shortfall. **Journal of Statistical Software**, v. 11, n. 5, p. 1–11, 7 2014.
- NOVA, N. A. V. **Dados meteorológicos do município de Piracicaba**. Piracicaba, SP, 2003. 2 p.
- R CORE TEAM. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2014. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>.

APÊNDICE

APÊNDICE A - Função de verossimilhança da distribuição normal de Kumaraswamy bivariada

```

library(mvtnorm)
logLikFun <- function(param) {
  mu1 <- param[1]
  mu2 <- param[2]
  s1 <- param[3]
  s2 <- param[4]
  s12 <- param[5]
  a <- param[6]
  b <- param[7]
  rho<- s12/(s1*s2)
  lambda<- sqrt((1-rho)/(1+rho))
  sigma<-matrix(c(s1^2,s12,s12,s2^2),2,2)
  mu<-c(mu1,mu2)
  d<- dmvnorm(x, mu, sigma)# equação (1.11)
  p1<-pnorm(lambda*x[,1], mu1, s1)#equação (1.2)
  d1<-dnorm(x[,1], mu1, s1)#equação(1.1)
  p2<-pnorm(lambda*x[,2], mu2, s2)
  d2<-dnorm(x[,2], mu2, s2)
  A1<-d1*p1
  A2<-d2*p2
  B<- (a-1)*A1*A2
  log.p<-0;phi<-0;n<-length(x[,1]);ABC<-0 #;p<-0;
  for (i in 1:n){
    ppp<-pmvnorm(lower=c(-Inf,-Inf), upper=c(x[i,1],x[i,2]),
    pp <- log(ppp[1])
    Phi<- log(1-(ppp[1]^a))
    log.p<-log.p+pp[1]
    phi<-phi+Phi[1]
    Aa <- -((a*(b-1)*(ppp[1])^a)/(1-(ppp[1])^a))*A1[i]*A2[i]
    Cc<- ppp[1]*d[i]
    ABC1 <- log(Aa + B[i] + Cc)
    ABC <- ABC + ABC1 #ABC <- sum(log(A + B + C))}
  vero<-(n*log(a))+(n*log(b))+((a-2)*log.p)-((1-b)*phi) + ABC
  return(vero) }

```

B - Códigos da simulação dos dados para as variáveis independentes

```

n=100 #tamanho da amostra
iii= 500 # número de simulação Monte Carlo
r<-matrix(0,iii,7)
for(ii in 1:iii){
  x1 <-rKumN(n,0,1,2,1)
  x2 <-rKumN(n,0,1,2,1)
  x <-matrix(c(x1,x2),n,2) #matriz de variáveis independentes
  param<-c(0.1,0.1,0.9,0.9,0,39,1.8,0.9) #valores arbitrários
  iniciais
  mleGrad <- maxLik(logLik = logLikFun, grad=grad,start = param)#
  código que faz a estimação dos parâmetros
  r[ii,]<- mleGrad\$estimate
}
media<-numeric(7) #média das estimativas
media[1] <- mean(r[,1])### media de mu_1
media[2] <- mean(r[,2])### media de mu_2
media[3] <- mean(r[,3])### media de sigma_1
media[4] <- mean(r[,4])### media de sigma_2
media[5] <- mean(r[,5])### media de sigma_12
media[6] <- mean(r[,6])### media de a
media[7] <- mean(r[,7])### media de b
REQM <- numeric(7) #raíz quadrada do erro quadrático médio
REQM[1] <- sqrt(sum((r[,1]-0)^2)/500) ###REQM de mu_1
REQM[2] <- sqrt(sum((r[,2]-0)^2)/500) ###REQM de mu_2
REQM[3] <- sqrt(sum((r[,3]-1)^2)/500) ###REQM de sigma_1
REQM[4] <- sqrt(sum((r[,4]-1)^2)/500) ###REQM de sigma_2
REQM[5] <- sqrt(sum((r[,5]-0)^2)/500) ###REQM de sigma_12
REQM[6] <- sqrt(sum((r[,6]-2)^2)/500) ###REQM de a
REQM[7] <- sqrt(sum((r[,7]-1)^2)/500) ###REQM de b
media
REQM

```

APÊNDICE C - Códigos da simulação dos dados para as variáveis dependentes

```

nn=100 #tamanho da amostra
iii=500 #número de simulações Monte Carlo
r<-matrix(0,iii,7)
for(ii in 1:iii){
  x<-matrix(0,nn,2)
  mx=20.00;mz=2.5;sx=1.4;sz=1.8;a=2;b=1
  rho=-0.5
  sxz=rho*sx*sz
  vzx<-(sz^2)*(1-rho^2)  for (i in 1:nn) {
    x[i,1]<-rKumN(1,mx,sx,a,b)
    mz<-mz+(sxz/(sx^2))*(x[i,1]-mx)
    x[i,2]<-mzx+rKumN(1,0,sqrt(vzx),a,b)
  }# gerando variáveis dependentes
  param<-c(19.5,2.1,1.12,1.21,-0,75,1.90,0.94)#valores
  iniciais arbitrários
  mleGrad <- maxLik(logLik = logLikFun, grad=grad,start =
  param)#código que faz a estimação dos parâmetros
  r[ii,]<- mleGrad$estimate
}
media<-numeric(7)
media[1] <- mean(r[,1])### media de mu_1
media[2] <- mean(r[,2])### media de mu_2
media[3] <- mean(r[,3])### media de sigma_1
media[4] <- mean(r[,4])### media de sigma_2
media[5] <- mean(r[,5])### media de sigma_12
media[6] <- mean(r[,6])### media de a
media[7] <- mean(r[,7])### media de b
REQM <- numeric(7)
REQM[1] <- sqrt(sum((r[,1]-20)^2)/500) ###REQM de mu_1
REQM[2] <- sqrt(sum((r[,2]-2.5)^2)/500) ###REQM de mu_2
REQM[3] <- sqrt(sum((r[,3]-1.4)^2)/500) ###REQM de sigma_1
REQM[4] <- sqrt(sum((r[,4]-1.8)^2)/500) ###REQM de sigma_2
REQM[5] <- sqrt(sum((r[,5]-(-1.26))^2)/500) ###REQM de sigma_12
REQM[6] <- sqrt(sum((r[,6]-2)^2)/500) ###REQM de a
REQM[7] <- sqrt(sum((r[,7]-1)^2)/500) ###REQM de b
media
REQM

```

ANEXO

ANEXO A - Código para gerar uma variável da distribuição normal de Kumaraswamy

```

library("gamlss")
KumN = function (mu.link="identity", sigma.link="log",
nu.link = "log", tau.link="log"){
  mstats = checklink("mu.link", "kumaraswamy-Normal",
substitute(mu.link),c("$1/mu^2$", "log", "identity"))
  dstats = checklink("sigma.link", "kumaraswamy-Normal",
substitute(sigma.link), c("inverse", "log", "identity"))
  vstats = checklink("nu.link", "kumaraswamy-Normal",
substitute(nu.link), c("$1/nu^2$", "log", "identity"))
  tstats = checklink("tau.link", "kumaraswamy-Normal",
substitute(tau.link),c("$1/tau^2$", "log", "identity"))
  structure (
    list(family = c("KumN", "kumaraswamy-Normal"),
parameters = list(mu=TRUE, sigma=TRUE, nu=TRUE, tau=TRUE),
noper = 4,
type = "Continuous",
mu.link = as.character(substitute(mu.link)),
sigma.link = as.character(substitute(sigma.link)),
nu.link = as.character(substitute(nu.link)),
tau.link = as.character(substitute(tau.link)),
mu.linkfun = mstats$linkfun,
sigma.linkfun = dstats$linkfun
nu.linkfun = vstats$linkfun,
tau.linkfun = tstats$linkfun,
mu.linkinv = mstats$linkinv,
sigma.linkinv = dstats$linkinv,
nu.linkinv = vstats$linkinv,
tau.linkinv = tstats$linkinv,
mu.dr = mstats$mu.eta,
sigma.dr = dstats$mu.eta,
nu.dr = vstats$mu.eta,
tau.dr = tstats$mu.eta,

# As derivadas segundas e parciais da distribuição kum-normal
# dldm derivada primeira em relação ao parâmetro ( $\mu$ )
dldm = function(y, mu, sigma, nu, tau) {
d = dnorm(y, mu, sigma) # fdp (1.1)
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
n = (nu*tau-nu)
dfdm = (d*(y-mu)/sigma^2)
dpdm = (-d/sigma)
dldm = ((1/d)*( dfdm)+(1/p)*(dpdm)*(1-(n/((p^(-nu))-1))))
},

```

```

# d2ldm2 derivada segunda em relação ao parâmetro ( $\mu$ )
d2ldm2 = function(y, mu, sigma, nu, tau){
d = dnorm(y, mu, sigma) # fdp (1.1)
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
n = (nu*tau-nu)
C = ((p*sigma*((p^(-nu))-1))^2)
A = ((sigma*p*((p^(-nu))-1)*n*(d*(y-mu)/(sigma^2)))/ C )
B = ((d*n*(d-d*(p^(-nu)))-sigma*nu*(p^(-nu))))/ C )
d2ldm2 = (-1/sigma^2) - ((p*d*((y-mu)/sigma)+d^2)/
((p*sigma)^2))+ A - B },

# dlld primeira derivada em relação ao parâmetro ( $\sigma$ )
dlld = function(y, mu, sigma, nu, tau) {
d = dnorm(y, mu, sigma) # fdp (1.1)
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
n = (nu*tau-nu)
dpdd = ((-(y-mu)*d)/(sigma^2))
dfdd = (d*((((y-mu)^2)/sigma^3)-(1/sigma)))
dlld = (1/d)*(dfdd)+((1/p)*dpdd*(1-(n/((p^(-nu))-1))))
} ,

# d2ldd2 derivada segunda em relação ao parâmetro ( $\sigma$ )
d2ldd2 = function(y, mu, sigma, nu, tau) {
p = pnorm(y, mu, sigma) # fdp (1.1)
d = dnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
n = ( nu*tau - nu)
G = (((y-mu)^2)/sigma^3)
E = ((p*(sigma^2)*((p^(-nu))-1)*n*(y-mu)*d*( G -(1/sigma)))
A = E/(((p*(sigma^2))*((p^(-nu))-1))^2)
H = ((p^(-nu))*d*(y-mu))
B = (d*n*(y-mu)*((2*sigma*(p^(1-nu)))- H
-(nu*(sigma^2)*(p^{(-nu)}))))- F)
F = ((2*sigma*p)+((y-mu)*d))
C = (((p*(sigma^2))*((p^(-nu))-1))^2)
I = (2*d*(y-mu)*sigma*p)
D = ((I -((d^2)*(y-mu)^2)))/((p*(sigma^2))^2)
X= (((y-mu)^2)/sigma^2)-1)
G = ((p*sigma*(y-mu)*d*(X)/(p*(sigma^2))^2)
d2ldd2 = (-3*((y-mu)^2)/sigma^4) + (1/sigma^2) - G + D + A - B/C
},

# dlldv derivada primeira em relação ao parâmetro ( $a$ )
dlldv = function(y, mu, sigma, nu, tau) {
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
dlldv = (1/nu)+(\log(p))*(1-(((tau-1)*(p^nu))/(1-(p^nu))))
},

# d2ldv2 derivada segunda em relação ao parâmetro ( $a$ )

```

```

    d2ldv2 = function(y, mu, sigma, nu, tau) {
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
A = (((tau-1)*\log(p)*(p^nu))/(1-(p^nu)))
B = (((tau-1)*\log(p)*(p^(2*nu)))/(1-(p^nu))^2)
d2ldv2 = (-1/(nu^2))-(\log(p))*( A + B)
},

    # dldt derivada primeira em relação ao parâmetro (b)
    dldt = function(y, mu, sigma, nu, tau) {
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)}
dldt = (1/tau)+\log(1-(p^nu))
},

    # d2ldt derivada segunda em relação ao parâmetro (b)
    d2ldt2 = function(y, mu, sigma, nu, tau) {
d2ldt2 = -(1/(tau^2))
},

    # d2ldmdd derivada mista de ( $\mu$ ) em relação ao parâmetro ( $\sigma$ )
    d2ldmdd = function(y, mu, sigma, nu, tau){
d = dnorm(y, mu, sigma) # fdp (1.1)
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
n = (nu*tau-nu)
E = (d*n*(p^(-nu))
A = E*(p-((y-mu)/sigma)*d -((p^(-nu))*sigma*nu) -
p +((y-mu)/sigma)*d))
F = ((p*sigma*(p^(-nu))-1))^2)
H = ((y-mu)^2)/(sigma^3)
B = ((p*sigma*(p^(-nu))-1)*n*d*((H - (1/sigma)))/F)
C = (A/(((p*sigma)*(p^(-nu))-1))^2)
D = (-2*(y-mu)/sigma^3)
G = (((y-mu)^2)/sigma^2)-1)
J = ((y-mu)/sigma)/(p*sigma)^2)
d2ldmdd = D - ((p*d*G - (d*p) + (d^2)*J + B - C
},

    # d2ldmdv derivada mista de ( $\mu$ ) em relação ao parâmetro (a)
    d2ldmdv = function(y, mu, sigma, nu, tau){
d = dnorm(y, mu, sigma) # fdp (1.1)
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
n = (nu*tau-nu)
A = (p*sigma*(p^(-nu))-1)*d*(tau-1))
I = (p*sigma*(p^{(-nu)}))-1))^2)
d2ldmdv = (A +(d*n*sigma*\log(p)*(p^(1-nu))))/I },

    # d2ldmdt derivada mista de ( $\mu$ ) em relação ao parâmetro (b)
    d2ldmdt = function(y, mu, sigma, nu, tau){
d = dnorm(y, mu, sigma) # fdp (1.1)

```

```

p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
d2ldmtdt = (nu*d)/(p*sigma*((p^(-nu))-1))
},

# d2ldddv derivada mista de ( $\sigma$ ) em relação ao parâmetro ( $a$ )
d2ldddv = function(y, mu, sigma, nu, tau) {
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
n = (nu*tau-nu)
d = dnorm(y, mu, sigma) # fdp (1.1)
A = (p*(sigma^2)*((p^(-nu))-1)*d*(y-mu)*(tau-1))
B = ((p*(sigma^2)*((p^(-nu))-1))^2)
d2ldddv = ( A +(d*(y-mu)*n*(p^(1-nu))*\log(p)*(sigma^2)))/ B
},

# d2ldddtd derivada mista de ( $\sigma$ ) em relação ao parâmetro ( $b$ )
d2ldddtd = function(y, mu, sigma, nu, tau) {
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
d = dnorm(y, mu, sigma) # fdp (1.1)
n = (nu*tau-nu)
d2ldddtd = (d*(y-mu)*nu)/(p*(sigma^2)*((p^(-nu))-1))
},

# d2ldvdt derivada mista de ( $a$ ) em relação ao parâmetro ( $b$ )
d2ldvdt = function(y, mu, sigma, nu, tau){
p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
d2ldvdt = (-(\log(p)*(p^(nu)))/(1-(p^(nu))))
},

G.dev.incr = function(y, mu, sigma, nu, tau,...)
-2*dKumN(y, mu, sigma, nu, tau, \log=TRUE),
rqres = expression (
rqres(pfun = "pKumN", type="Continuous", y=y, mu=mu,
sigma=sigma, nu=nu, tau=tau) ),
mu.initial = expression(mu = (y+mean(y))/2),
rep(mean(y),length(y)),
sigma.initial = expression(sigma = rep(sd(y), length(y))),
nu.initial = expression(nu = rep(1, length(y))) ,
tau.initial = expression(tau = rep(0.5, length(y))),

mu.valid = function(mu) TRUE,
sigma.valid = function(sigma) all(sigma > 0),
nu.valid = function(nu) all(nu > 0),
tau.valid = function(tau) all(tau > 0),
y.valid = function(y) TRUE),
class = c("gamlss.family", "family")) }

# Função densidade de probabilidade da distribuição kum-normal
dKumN = function(y, mu = 0, sigma = 1, nu = 2, tau = 1,

```



```

\log = FALSE) {
  if (any(sigma < 0)) stop(paste("sigma must be positive",
"\ n", ""))
  if (any(tau < 0)) stop(paste("tau must be positive",
"\ n", ""))
  if (any(nu < 0)) stop(paste("nu must be positive",
"\ n", ""))
  p = pnorm(y, mu, sigma) # fda (1.2)
  f = (1/(sqrt(2*pi*sigma^2)))*exp(-0.5*((y-mu)/sigma)^2)#(1.1)
  loglik = \log(nu)+\log(tau)+\log(f)+(nu-1)*\log(p)+
  + (tau-1)*\log(1-(p^(nu)))
  if(log==FALSE) ft = exp(loglik) else ft = loglik
  ft
}

```

Função de distribuição acumulada da distribuição kum-normal

```

pKumN = function(q, mu = 0, sigma = 1, nu = 2, tau = 1,
lower.tail = TRUE, \log.p = FALSE) {
  if (any(sigma < 0)) stop(paste("sigma must be positive",
"\ n", ""))
  if (any(tau < 0)) stop(paste("tau must be positive",
"\ n", ""))
  if (any(nu < 0)) stop(paste("nu must be positive", "\ n", ""))
  p = 1-(1-(pnorm(q, mu, sigma))^nu)^tau
  if(lower.tail==TRUE) p = p else p = 1-p
  if(log.p==FALSE) p = p else p=- \log(p)
  p
}

```

Função de quantil da distribuição kum-normal

```

qKumN = function (p, mu = 0, sigma = 1, nu = 2, tau = 1,
lower.tail = TRUE, log.p = FALSE,
lower.limit = mu-10*(sigma/(nu*tau)),
upper.limit = mu+10*(sigma/(nu*tau)) ){
  h1 = function(q) {
    pKumN(q, mu = mu[i], sigma = sigma[i], nu = nu[i],
tau = tau[i]) - p[i] }
  h = function(q) {
    pkumN(q, mu = mu[i], sigma = sigma[i], nu = nu[i],
tau = tau[i])}
  if (any(sigma leq 0))
stop(paste("sigma must be positive", "\ n", ""))
  if (\log.p == TRUE)
p = exp(p)
  else p = p
  if (lower.tail == TRUE)
p = p
  else p = 1 - p
}

```

```

if (any(p < 0) | any(p > 1))
stop(paste("p must be between 0 and 1", "\ n", ""))
lp = max(length(p), length(mu), length(sigma), length(nu),
length(tau))
p = rep(p, length = lp)
sigma = rep(sigma, length = lp)
mu = rep(mu, length = lp)
nu = rep(nu, length = lp)
tau = rep(tau, length = lp)
q = rep(0, lp)
for (i in seq(along = p)) {
if (h(mu[i]) < p[i]) {
interval = c(mu[i], mu[i] + sigma[i])
j = 2
while (h(interval[2]) < p[i]) {
interval[2] = mu[i] + j * sigma[i]
j = j + 1 }
}
else {
interval = c(mu[i] - sigma[i], mu[i])
j = 2
while (h(interval[1]) > p[i]) {
interval[1] = mu[i] - j * sigma[i]
j = j + 1$ } }
q[i] = uniroot(h1, interval) \ root
} q }

```

Função de geração de valores aleatórios da distribuição kum-normal

```

rKumN = function(n, mu = 0, sigma = 1, nu = 2, tau = 1) {
if (any(sigma \leq 0)) stop(paste("sigma must be positive",
"\ n", ""))
if (any(tau < 0)) stop(paste("tau must be positive", "\ n",
""))
if (any(nu < 0)) stop(paste("nu must be positive", "\ n",
""))
n = ceiling(n)
p = runif(n)
r = qKumN(p, mu=mu, sigma=sigma, nu=nu, tau=tau)
}

```