

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS**

**ROGER DOS SANTOS NOGUEIRA**

**PRECISÃO E ACURÁCIA DOS ESTIMADORES DE MÁXIMA  
VEROSSIMILHANÇA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO  
GUMBEL NÃO ESTACIONÁRIA**

**ALFENAS/MG  
2016**

**ROGER DOS SANTOS NOGUEIRA**

**PRECISÃO E ACURÁCIA DOS ESTIMADORES DE MÁXIMA  
VEROSSIMILHANÇA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL NÃO  
ESTACIONÁRIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, da Universidade Federal de Alfenas - MG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Linha de Pesquisa: Modelagem Estatística e Estatística Computacional

Orientador: Prof. Dr. Fabricio Goecking Avelar

Coorientador: Prof. Dr. Luiz Alberto Beijo

**ALFENAS/MG  
2016**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Alfenas

Nogueira, Roger dos Santos.

Precisão e acurácia dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Gumbel não estacionária. / Roger dos Santos Nogueira. -- Alfenas/MG, 2017.

90 f.

Orientador: Fabrício Goecking Avelar.

Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) -  
Universidade Federal de Alfenas, 2017.

Bibliografia.

1. Confiabilidade dos Dados. 2. Precipitação Máxima Provável.  
3. Simulação. 4. Tamanho da Amostra. 5. Distribuições Estatísticas.  
I. Avelar, Fabrício Goecking. II. Título.

CDD-519.54



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Alfenas / UNIFAL-MG  
Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria

Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700. Alfenas - MG CEP 37130-000  
Fone: (35) 3299-1392 (Secretaria) (35) 3299-1121 (Coordenação)  
<https://www.unifal-mg.edu.br/ppgeab/>



**ROGER DOS SANTOS NOGUEIRA**

“PRECISÃO E ACURÁCIA DOS ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DOS  
PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL NÃO ESTACIONÁRIA”

A Banca Examinadora, abaixo assinada, aprova a  
Dissertação apresentada como parte dos requisitos para  
a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada  
e Biometria pela Universidade Federal de Alfenas.  
Área de Concentração: Estatística Aplicada e  
Biometria

Aprovado em: 20 de dezembro de 2016.

Prof. Dr. Fabrício Goecking Avelar  
Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura: Fabrício G. Avelar

Prof. Dr. Flávio Bittencourt  
Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura: Flávio Bittencourt

Prof. Dr. Denismar Alves Nogueira  
Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura: Denismar Alves Nogueira

Prof. Dr. Marcelo Ângelo Cirillo  
Instituição: UFLA

Assinatura: Marcelo Ângelo Cirillo

Aos meus pais, Lucimara e Valter.

**DEDICO**

## AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG) pela oportunidade concedida para realização do mestrado.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria pelos ensinamentos que foram de grande valia.

Aos meus colegas do mestrado pelos bons momentos que passamos juntos. Pela amizade, convivência, passeios, etc.

A todos que oraram e que torceram por mim, irmãos de igreja, irmãos de sangue, amigos da faculdade, da escola, familiares, pessoas que de alguma contribuíram para a realização desse trabalho, etc.

Aos meus amigos mais chegados que irmãos, que demonstraram suas amizades sinceras principalmente nos momentos de maior dificuldade, são eles: Carlos José dos Reis, por me incentivar, me ensinar e me acolher em sua casa nos momentos decisivos dessa minha carreira; ao Ricardo Francisco Henrique por sua preocupação com minha pessoa e pelo carinho que você e sua família me proporciona; a Nalva Aparecida Martins por semanalmente me receber em sua casa, cuidando de mim como ninguém. Sem vocês três tudo se tornaria mais difícil. Sucesso em suas vidas.

À banca composta por Flávio Bittencourt, Denismar Alves Nogueira, e Marcelo Ângelo Cirillo, por fazer parte deste momento especial tirando um tempo de seus afazeres para ler e analisar o conteúdo deste trabalho.

Ao meu orientador, Fabricio Goeking Avelar, e coorientador Luiz Alberto Beijo pelo apoio que me deram ao longo desses 2 anos. Vivenciei três situações bem distintas nesse meio tempo. A primeira foi quando tive que passar por uma cirurgia no maxilar, que me impossibilitou de ficar presente nas aulas presenciais por quase dois meses, mas vocês com enorme profissionalismo souberam contornar a situação e "sacrificaram" parte de suas férias para reparar esse intervalo que estive ausente. A segunda situação foi lidar com a falta de emprego e o risco de abandonar o curso, mas não faltaram incentivo e apoio da parte de vocês para que eu prosseguisse. E a terceira foi quando consegui emprego na minha cidade e novamente com a competência de vocês arrumamos horários que se encaixassem na minha folga e no pouco tempo livre de vocês. Foram muitas idas e vindas de uma cidade a outra semanalmente, mas valeu a persistência.

Em especial ao meu orientador Fabricio, sinto-me feliz e honrado em ter sido orientado por você. Deus coloca as pessoas certas no nosso caminho e Ele colocou você para me orientar. Agradeço a Deus pela sua paciência, disposição em me ensinar e o respeito pela minha pessoa. Saio do curso com mais um amigo.

Aos meus pais, Valter Nogueira e Lucimara Aparecida dos Santos Nogueira que são minha base e inspiração.

A Deus, pela oportunidade concedida e por estar sempre do meu lado me dando forças para prosseguir na caminhada. Passei por momentos difíceis nesses últimos dois anos, mas o Senhor esteve presente e sempre vai estar.

*“Quando uma criatura humana desperta  
para um grande sonho e sobre ele lança  
toda a força de sua alma, todo o universo  
conspira a seu favor.”*

*Johann Goethe.*

## RESUMO

A distribuição Gumbel é frequentemente utilizada na modelagem de eventos extremos. O estimador de verossimilhança é o estimador mais usado para obter as estimativas dos parâmetros do modelo Gumbel por apresentar boas propriedades assintóticas. Caso a série de dados possua tendência linear, os estimadores de máxima verossimilhança podem produzir estimativas viesadas para os parâmetros da distribuição Gumbel. Para contornar essa situação, o modelo Gumbel não estacionário pode ser utilizado. Esse modelo é, basicamente, o modelo Gumbel (estacionário) para dados sem tendência, com a inserção da tendência em seu parâmetro posição. Essa inserção é feita substituindo-se o parâmetro posição em dois termos, em que um é o coeficiente linear  $\mu_0$  e o outro é a inclinação da reta  $\mu_1$ . Assim como no modelo Gumbel estacionário, os parâmetros do modelo Gumbel não estacionário com tendência linear no parâmetro posição podem ser estimados por meio dos estimadores de máxima verossimilhança. Dependendo do tamanho da amostra e do quão grande seja a tendência apresentada pelos dados, pode ser que o modelo Gumbel estacionário seja mais adequado do que o modelo Gumbel não estacionário com tendência linear no parâmetro posição, ou vice-versa. Nesse sentido, é importante saber qual modelo deve ser utilizado. O objetivo desse trabalho é avaliar a acurácia e a precisão dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Gumbel não estacionária com tendência linear no parâmetro posição. Foram simuladas 1000 amostras de dados em 240 cenários diferentes e foram calculados os erros quadráticos médios e os vieses médios relativos de cada cenário simulado. Pode-se observar que: se a inclinação da reta for maior que 0,1% do valor do parâmetro posição do modelo Gumbel, deve-se ajustar o modelo Gumbel não estacionário aos dados. Em amostras de tamanho igual ou maior do que 50, se houver suspeita de tendência linear no parâmetro posição, deve-se optar pelo ajuste de um modelo Gumbel não estacionário com tendência linear no parâmetro posição.

**Palavras-chave:** Tendência linear. Erro quadrático médio relativo. Viés médio relativo. Simulação de dados. Tamanho amostral.

## ABSTRACT

The Gumbel distribution is often used in the extreme events modelling. For this purpose it is necessary that its parameters are estimated. The estimator most used for this is the maximum likelihood estimator. The maximum likelihood estimators have good asymptotic properties. In case of linear trend in the data series, the maximum likelihood estimators may produce biased estimates for the parameters of the Gumbel distribution. To overcome this situation, Gumbel model with trend can be used. This model is, basically, the (stationary) Gumbel model to no trend data, with the insertion of the trend in its position parameter. As in the stationary Gumbel model, the parameters of the trend Gumbel model can be estimate by means maximum likelihood estimators. Depending on sample size and on how big is the trend presented by the data, the stationary Gumbel model can be more appropriate than the trend Gumbel model, or vice versa. In this respect, it is important to know how model must be used. The objective of this study is, therefore, to evaluate the accuracy and the precision of the maximum likelihood estimators of the Gumbel model with linear trend's parameters. To do this, have been simulated 1,000 data samples on 240 different scenarios and have been calculated the mean squared errors and the relative mean biases of each simulated scenario. The results lead to the following conclusions: if the trend was bigger than 0.1% of the Gumbel model's position parameter value, the trend Gumbel model must be fitted. In the case of the sample size be equal or bigger than 50 and there is suspect of trend, the trend Gumbel model must be fitted.

**Keywords:** Linear trend. Mean square error. Relative mean bias. Data simulation. Sample size.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Resultados dos testes de independência e de aleatoriedade da série de precipitações pluviiais máximas anuais de Jaboticabal-SP (1963-1996) .	78
Tabela 2	- Estimativas dos parâmetros distribuições Gumbel estacionária (GE) e não estacionária (GNE), obtidas pelo método da máxima verossimilhança, com seus respectivos erros padrão e valor-p do teste de Kolmogorov-Smirnov (KS) . . . . .	79
Tabela 3	- Predições dos níveis máximos de precipitação pluvial (mm) em Jaboticabal-SP, calculadas via distribuição Gumbel estacionária (GE) e não estacionária (GNE) para diferentes tempos de retorno e erro percentual absoluto médio (EPAM) . . . . .	80

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Fotografias da inundação da Holanda pela água do mar que aconteceu na madrugada entre os dias 31 de janeiro e 1º de fevereiro de 1953. . . . .	18
Figura 2	- Viés médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	51
Figura 3	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	51
Figura 4	- Viés médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	52
Figura 5	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	53
Figura 6	- Viés médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	54
Figura 7	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	54
Figura 8	- Viés médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	55
Figura 9	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	56
Figura 10	- Viés médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 2$ , e $\mu = 30$ e $\sigma = 10$ respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de maiores intensidades. . . . .	57

Figura 11	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 2$ , e $\mu = 30$ e $\sigma = 10$ respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de maiores intensidades. . . . .	57
Figura 12	- Viés médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 2$ , e $\mu = 50$ e $\sigma = 10$ respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de maiores intensidades. . . . .	58
Figura 13	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 2$ , e $\mu = 50$ e $\sigma = 10$ respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de maiores intensidades. . . . .	59
Figura 14	- Viés médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	60
Figura 15	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	60
Figura 16	- Viés médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	61
Figura 17	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	62
Figura 18	- Viés médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	63
Figura 19	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	63
Figura 20	- Viés médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 2$ , e $\mu = 30$ e $\sigma = 10$ respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de maiores intensidades. . . . .	64

Figura 21	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 2$ , e $\mu = 30$ e $\sigma = 10$ respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de maiores intensidades.	65
Figura 22	- Viés médio relativo da inclinação considerando $\mu_1 = 0$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	66
Figura 23	- Erro quadrático médio da inclinação considerando $\mu_1 = 0$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	67
Figura 24	- Viés médio relativo da inclinação considerando $\mu_1 = 0,0001\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	68
Figura 25	- Erro quadrático médio da inclinação considerando $\mu_1 = 0,0001\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	68
Figura 26	- Viés médio relativo da inclinação considerando $\mu_1 = 0,0005\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	69
Figura 27	- Erro quadrático médio da inclinação considerando $\mu_1 = 0,0005\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	69
Figura 28	- Viés médio relativo da inclinação considerando $\mu_1 = 0,001\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	70
Figura 29	- Erro quadrático médio da inclinação considerando $\mu_1 = 0,001\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	71
Figura 30	- Viés médio relativo da inclinação considerando $\mu_1 = 0,005\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	72
Figura 31	- Erro quadrático médio da inclinação considerando $\mu_1 = 0,005\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	72
Figura 32	- Viés médio relativo da inclinação considerando $\mu_1 = 0,01\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	73
Figura 33	- Erro quadrático médio da inclinação considerando $\mu_1 = 0,01\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos. . . . .	74
Figura 34	- Porcentagem de rejeição de $H_0$ do parâmetro posição $\mu_0$ considerando diferentes tamanhos amostrais, inclinações e valores paramétricos. . . . .	76
Figura 35	- Precipitações pluviárias máximas anuais de Jaboticabal-SP no período de 1963 a 1996 . . . . .	79

Figura 36	- Viés médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	86
Figura 37	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 30$ e $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de menores intensidades. . . . .	87
Figura 38	- Viés médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 2$ , e $\mu = 50$ e $\sigma = 10$ respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de maiores intensidades. . . . .	88
Figura 39	- Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando $\mu = 50$ e $\sigma = 2$ , e $\mu = 50$ e $\sigma = 10$ respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para $\mu_1$ positivo de maiores intensidades. . . . .	88

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	15
2	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> . . . . .	17
2.1	TEORIA DE VALORES EXTREMOS E DISTRIBUIÇÃO GENERALIZADA DE VALORES EXTREMOS . . . . .	17
2.2	DISTRIBUIÇÃO GUMBEL . . . . .	20
2.3	FUNÇÃO ACUMULADA DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL COM TENDÊNCIA LINEAR NO PARÂMETRO POSIÇÃO . . . . .	21
2.4	MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA . . . . .	23
2.4.1	Estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Gumbel	24
2.4.2	Estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Gumbel não estacionária . . . . .	29
2.5	TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV . . . . .	29
2.6	PROPRIEDADE DOS ESTIMADORES . . . . .	31
2.7	NÍVEL DE RETORNO . . . . .	36
2.8	TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇAS . . . . .	39
3	<b>MATERIAL E MÉTODOS</b> . . . . .	41
3.1	DESENVOLVIMENTO DOS ESTIMADORES . . . . .	41
3.2	APLICAÇÃO A DADOS REAIS . . . . .	42
3.3	CENÁRIOS DE SIMULAÇÃO . . . . .	43
4	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> . . . . .	45
4.1	ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL NÃO ESTACIONÁRIA . . . . .	45
4.2	VIÉS MÉDIO RELATIVO E ERRO QUADRÁTICO MÉDIO RELATIVO . . . . .	50
4.3	TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇAS . . . . .	75
4.4	ANÁLISE DA PRECIPITAÇÃO PLUVIAL MÁXIMA DE JABOTICABAL-SP	78
5	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	81
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	82
	<b>ANEXOS</b> . . . . .	86

## 1 INTRODUÇÃO

Quando se ajusta um modelo a um conjunto de dados, obtém-se uma aproximação da realidade que busca explicar esses dados de forma eficiente. Tal aproximação depende diretamente da acurácia e precisão das estimativas dos parâmetros do modelo adotado, principalmente se considerarmos a predição de eventos extremos de modo que se reduza ao máximo possível as perdas que um evento extremo pode causar, sejam elas pelo lado financeiro, material, etc.

Mediante ao exposto, é fundamental conhecer qual modelo melhor se ajusta ao conjunto de dados. Portanto, é importante saber qual modelo deve ser utilizado, e informar em quais situações, dependendo do tamanho da amostra e do quão grande seja a tendência apresentada pelos dados, o modelo Gumbel estacionário será mais adequado do que o modelo Gumbel não estacionário com tendência linear no parâmetro posição, ou vice-versa.

É importante garantir um ajuste adequado ao modelo, frente aos eventos extremos relacionados à baixa probabilidade, e sendo de elevado impacto devido aos imensos prejuízos que eles podem causar. A manifestação de eventos extremos pode ocasionar prejuízos econômicos em ambientes naturais, tecnológicos e sociais, perdas de vidas humanas, animais, etc. Entre os eventos climáticos podem-se citar fenômenos tais como chuvas e temperaturas extremas, período de estiagem prolongado, vendavais, furacões, ondas muito altas, entre outros.

Particularizando para mudanças climáticas, nota-se que as temperaturas estão subindo, a precipitação pluvial está se intensificando em alguns lugares, e os extremos climáticos mostram uma frequência crescente em algumas regiões. O Painel Intergovernamental da ONU sobre Mudanças Climáticas - IPCC (2001) afirmou em seu documento que “é muito provável que a frequência de chuvas intensas venha a aumentar com o aumento da temperatura média global. Isto implica mudanças nos padrões de precipitação, um fator importante, entre outros, para a intensidade e frequência das inundações” (NEVES, 2010).

No caso de precipitação pluvial máxima, o conhecimento do comportamento desse evento é de grande importância para elaboração de projetos agrícolas e de engenharia hidráulica, tais como, dimensionamento de canais de irrigação e drenagem, vertedouros de barragens, definição de obras de desvios de cursos d'água, entre outros (BEIJO et al., 2003).

Para fazer previsão do nível de retorno de eventos extremos, a distribuição Gumbel estacionária é frequentemente utilizada. Para isso, é necessário que seus parâmetros sejam

conhecidos ou estimados, sendo o estimador de máxima verossimilhança o mais utilizado por possuir boas propriedades assintóticas. Se a série de dados apresentar tendência, o estimador de máxima verossimilhança pode produzir estimativas viesadas para os parâmetros da distribuição Gumbel. Para que se produza previsões melhores para esse tipo de dados, é necessário que o modelo utilizado consiga captar tendência natural dos dados.

Para contornar essa situação, o modelo Gumbel não estacionário pode ser utilizado para produzir previsões melhores. Os parâmetros do modelo Gumbel não estacionário também podem ser estimados por meio do método da máxima verossimilhança. Nesse contexto esse trabalho tem por objetivo obter os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Gumbel não estacionária, avaliar a precisão e a acurácia das estimativas dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Gumbel não estacionária para verificar em quais situações o uso da distribuição Gumbel estacionária é adequada e em quais situações o uso da distribuição Gumbel com tendência é necessária. Verificar o comportamento do Teste da Razão de Verossimilhança (TRV) sobre a significância do parâmetro inclinação do modelo Gumbel não estacionário, e estudar a aplicação do modelo mais adequado em um conjunto de dados reais.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico está dividido nas seguintes subseções: 2.1 Teoria de Valores Extremos e distribuição Generalizada de Valores Extremos, 2.2 Distribuição Gumbel, 2.3 Método da Máxima Verossimilhança, 2.4 Teste de aderência, 2.5 Distribuição Gumbel com tendência linear no parâmetro posição, 2.6 Teste da Razão de Verossimilhanças.

### 2.1 TEORIA DE VALORES EXTREMOS E DISTRIBUIÇÃO GENERALIZADA DE VALORES EXTREMOS

A Teoria de Valores Extremos (TVE) é um importante ramo da estatística matemática que permite o estudo de eventos que possuem baixa probabilidade de ocorrência. Segundo Mendes (2004), um valor extremo pode ser o máximo ou mínimo de uma série de dados num determinado bloco ou aquele valor que excede um limiar suficientemente alto.

O desenvolvimento inicial da TVE se deu principalmente no século XX, devido a tragédia que ocorreu nos dias 31 de janeiro e 1º de fevereiro de 1953, quando 50 diques que protegiam a Holanda do avanço do mar se romperam devido a ventos e ondas gigantes, inundando boa parte do país e provocando a morte de dezenas de milhares de animais, e de mais de 1800 pessoas. Além disso, 72 mil pessoas tiveram que ser retiradas às pressas de seus lares.

Na Figura 1 são apresentadas duas fotografias que mostram a inundação, pela água do mar, em dois pontos diferentes da Holanda.



(a)



(b)

Figura 1 - Fotografias da inundação da Holanda pela água do mar que aconteceu na madrugada entre os dias 31 de janeiro e 1  de fevereiro de 1953.

Fonte: (a) AQUECIMENTO..., 2011. Disponível em: <<http://www.brasil247.com/pt/247/revista-oasis/15607/Aquecimento-global—A-Holanda-toma-suas-providências.htm>>. Acesso em: 15 de out. de 2016.

Fonte: (b) MUSEUMSTIPP..., 2015. Disponível em: <<http://www.swr.de/swr1/bw/programm/museumstipp-watersnoodmuseum/-/id=446250/did=16048920/nid=446250/kwddtp/index.html>>. Acesso em: 15 de out. de 2016.

Após esse desastre, o governo da Holanda criou um comit  para estudar o aquecimento global e suas consequências, e desenvolveu um sistema anti-inundações. Porém, mesmo esse fato sendo considerado o ponto inicial do desenvolvimento da TVE, Gumbel (1958) ressalta que já no século XVIII, em 1709, Nicolas Bernoulli já estudava problemas envolvendo valores extremos.

Em 1927, Fréchet introduziu a distribuição assintótica do máximo de uma amostra aleatória (MENDES, 2004). Fisher e Tippett (1928) expuseram os fundamentos da teoria de valores extremos e demonstraram que a distribuição dos máximos de uma amostra aleatória converge, ou para uma distribuição degenerada\*, ou para uma das três distribuições assintóticas de valores extremos. Essas distribuições assintóticas são conhecidas como Gumbel ou Tipo I, Fréchet ou Tipo II, e Weibull ou Tipo III (BAUTISTA, 2004).

As três formas assintóticas apresentam diferenç as quanto ao comportamento de suas

\*Uma função de distribuição é degenerada se assumir somente os valores 0 ou 1.

caudas. No caso dos máximos, a distribuição Gumbel decai exponencialmente. A distribuição Fréchet tem decaimento polinomial na cauda superior que é infinita e dita “cauda pesada”. Por sua vez, a distribuição Weibull possui cauda superior curta e finita. Logo, a Weibull é dita possuir “cauda leve” (ROSÁRIO, 2013).

Gnedenko (1943) teve grande influência no desenvolvimento da TVE ao introduzir a distribuição Generalizada de Valores Extremos (GEV, do inglês “Generalized Extreme Value”) e demonstrar as condições necessárias e suficientes para a convergência em distribuição do máximo ou do mínimo, caso estes não convirjam a uma distribuição degenerada (MENDES, 2004).

Outra importante contribuição no desenvolvimento inicial da TVE foi fornecida pelo trabalho de Jenkinson (1955), que propôs a Distribuição Generalizada de Valores Extremos. Ele partiu das três formas assintóticas de valores extremos propostas por Fisher e Tippett (1928) e as unificou em uma única forma generalizada (SILVA, 2008).

Com o desenvolvimento teórico inicial da TVE, Gumbel foi o primeiro a propor aplicações utilizando as distribuições de extremos. Gumbel (1941) utilizou a distribuição que receberia posteriormente seu nome para estimar períodos de retorno dos dados de vazão máxima anual dos rios Mississippi nos EUA e Rhône na França.

A distribuição Gumbel é muito utilizada na modelagem de eventos extremos como por exemplo, na modelagem da frequência de variáveis hidrológicas, possuindo vasta aplicação em estudos de precipitações intensas e vazões de enchentes (NAGHETTINI; PINTO, 2007). A distribuição Gumbel é também utilizada no estudo de fenômenos meteorológicos, resistência de materiais, aeronáutica, geologia, engenharia naval, etc (VIVANCO, 1994). Na engenharia, a distribuição Gumbel tem contribuído para a construção de estruturas como barragens, plataformas, diques, torres de alta tensão, quebra-mar, edifícios, etc, onde essas obras são projetadas para suportar o limite máximo ou mínimo esperado dos eventos que possam impactar sobre elas de modo que essas obras são arquitetadas sem subestimar ou superestimar os eventos extremos para que não haja riscos de desmoronamentos, gastos excessivos com materiais de construção ou financeiros, etc.

Vários métodos podem ser utilizados para a obtenção dos estimadores dos parâmetros da distribuição Gumbel, sendo o método dos momentos e o método da máxima verossimilhança os mais utilizados.

A distribuição generalizada de valores extremos proposta por Jenkinson (1955) possui

função de distribuição acumulada de probabilidade que pode ser expressa matematicamente por:

$$F(x) = \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, \quad (2.1)$$

em que  $\xi$ ,  $\sigma$  e  $\mu$  denotam, respectivamente, os parâmetros de forma, de escala e de posição, com  $-\infty < \xi < \infty$ ,  $\sigma > 0$  e  $-\infty < \mu < \infty$ .

O valor de  $\xi$  determina a forma assintótica de valores extremos. Se  $\xi > 0$ , a GEV representa a distribuição Fréchet (Tipo II), definida apenas para  $x > \mu - \sigma/\xi$ . Se  $\xi < 0$ , a GEV representa a distribuição Weibull (Tipo III), definida para  $x < \mu - \sigma/\xi$ . E para o caso em que o limite de  $F(x)$ , com  $\xi$  tendendo à zero, a GEV corresponde à distribuição Gumbel (Tipo I), também conhecida como distribuição Tipo I Fisher-Tippett ou ainda, distribuição dupla exponencial.

## 2.2 DISTRIBUIÇÃO GUMBEL

Derivando-se a expressão (2.1) em relação a  $x$  obtém-se a função densidade de probabilidade (fdp) da GEV, expressa por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \right] \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{-1}{\xi}} \right\}. \quad (2.2)$$

Calculando-se  $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(x)$ , têm-se a função densidade de probabilidade da Gumbel dada por Blain e Moraes (2011):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ \left( -\frac{x - \mu}{\sigma} \right) - \exp \left[ \left( -\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, \quad (2.3)$$

em que,  $-\infty < x < +\infty$ ,  $\sigma > 0$  e  $-\infty < \mu < \infty$ .

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória  $X$  com distribuição Gumbel pode ser expressa por:

$$F(x) = \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad (2.4)$$

definida em  $-\infty < x < +\infty$ ,  $\sigma > 0$  e  $-\infty < \mu < \infty$ .

### 2.3 FUNÇÃO ACUMULADA DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL COM TENDÊNCIA LINEAR NO PARÂMETRO POSIÇÃO

De acordo com Mood (1974):

**Definição 2.1** *A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua  $X$  com função densidade de probabilidade  $f(x)$  é expressa por,*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du, \quad (2.5)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ .

E que a função densidade da distribuição Gumbel não estacionária com tendência linear no parâmetro posição  $f_{NE}(x)$  é obtida acrescentando-se um valor para a inclinação no parâmetro posição na Equação (2.3), obtendo a expressão apresentada por Clarke (2002):

$$f_{NE}(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ - \left( \frac{x - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{x - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) \right] \right\}. \quad (2.6)$$

Sendo  $-\infty < \mu_0 < \infty$ ,  $-\infty < \mu_1 < \infty$ , e  $\sigma > 0$  os parâmetros de posição, inclinação e escala respectivamente,  $-\infty < x < +\infty$  e  $t$  a variável tempo.

A partir desse ponto, a expressão modelo Gumbel não estacionário será referente ao modelo Gumbel não estacionário com tendência linear no parâmetro posição, e a expressão modelo Gumbel será referente ao modelo Gumbel não estacionário. O mesmo vale para a expressão distribuição Gumbel não estacionária, que será referente a distribuição Gumbel não estacionária com tendência linear no parâmetro posição, e a distribuição Gumbel que fica subtendido de se tratar da distribuição Gumbel estacionária.

Para se encontrar a função de distribuição acumulada  $F_{NE}(x)$  da distribuição Gumbel não estacionária, é necessário integrar a expressão (2.6). Utilizando-se o método da substituição

para esse fim, tem-se:

$$v = \exp \left[ -\frac{u - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right] \Rightarrow dv = \exp \left[ -\frac{u - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right] \left( \frac{-1}{\sigma} \right) du \quad (2.7)$$

Utilizando-se a substituição apresentada na expressão (2.7) para o cálculo da integral indefinida, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int f_{NE}(u) du &= \int \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\left( \frac{u - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) - \exp \left[ -\left( \frac{u - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) \right] \right\} du \\ &= \int \exp(-v) (-dv) \\ &= - \int \exp(-v) dv \\ &= \exp(-v) + K \\ &= \exp \left( - \exp \left[ -\frac{u - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right] \right) + K, \end{aligned}$$

em que  $K$  é uma constante real.

Logo, se  $X$  é uma variável aleatória com distribuição Gumbel não estacionária, a função de distribuição acumulada de  $X$  é calculada como:

$$\begin{aligned}
F_{NE}(x) &= \int_{-\infty}^x f_{NE}(u) du \\
&= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ - \left( \frac{u - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{u - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) \right] \right\} du \\
&= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^x \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ - \left( \frac{u - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{u - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) \right] \right\} du \\
&= \exp \left( - \exp \left[ - \frac{x - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right] \right) - \lim_{b \rightarrow -\infty} \exp \left( - \exp \left[ - \frac{b - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right] \right) \\
&= \exp \left( - \exp \left[ - \frac{x - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right] \right),
\end{aligned}$$

pois  $\lim_{b \rightarrow -\infty} \exp \left( - \exp \left[ - \frac{b - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right] \right) = 0$ .

Portanto,

$$F_{NE}(x) = \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) \right].$$

## 2.4 MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Segundo Mood (1974) a função de verossimilhança é definida como

**Definição 2.2** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória independente e identicamente distribuída (i.i.d.) de uma população com função densidade de probabilidade  $f(x|\theta)$  com  $\theta \in \Theta$ , em que  $\Theta$  é o espaço paramétrico. A função de verossimilhança de  $\theta$  é definida por:*

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta). \quad (2.8)$$

Tendo conhecimento da função de verossimilhança que se irá trabalhar, e sabendo que essa função é aplicada em uma amostra conhecida, a função de verossimilhança passa a depender agora somente do vetor de parâmetros  $\theta$ . O objetivo portanto é determinar o(s) valor(es) de  $\theta$  que maximiza(m) essa função, isto é, que maximiza(m) a probabilidade da amostra ter ocorrido da mesma população. Em geral, o processo algébrico para determinar os estimadores de Máxima Verossimilhança é realizado do seguinte modo: Primeiro, é necessário fazer o produtório da função densidade, em seguida aplica-se o logaritmo natural (ln), chamado de função suporte, depois deriva-se parcialmente em relação a cada parâmetro igualando-se a zero, e por fim, resolve-se o sistema encontrado.

Portanto, se a função de verossimilhança for diferenciável em  $\theta$ , os possíveis candidatos para estimador de máxima verossimilhança são os valores que resolvem o seguinte sistema de equação:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(\theta; x) = 0, i = 1, \dots, k \quad (2.9)$$

sendo  $k$  o número de parâmetros que a distribuição adotada possui e  $x$  é o vetor com a amostra observada.

Pela simplicidade algébrica, para obter-se o máximo de  $L(\theta; x)$ , muitas vezes é mais conveniente aplicar o logaritmo natural à função de verossimilhança, pela mudança de produto em somas. Ressalta-se que, como a função  $\ln(x)$  é crescente para todo  $x > 0$ , então o ponto de máximo da função suporte é igual ao ponto de máximo da função de verossimilhança.

#### 2.4.1 Estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Gumbel

Seja  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$ , obtida a partir de uma distribuição Gumbel, cuja função densidade de probabilidade (fdp) é dada pela expressão (2.3). Das expressões (2.3) e (2.8) têm-se a função de verossimilhança da distribuição Gumbel:

$$\begin{aligned}
L(\mu, \sigma; x) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ \left( -\frac{x - \mu}{\sigma} \right) - \exp \left[ \left( -\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma^n} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Aplicando-se o logaritmo natural em ambos os membros da equação (2.10), obtém-se:

$$\underbrace{\ln[L(\mu, \sigma; x)]}_l = \ln \left( \frac{1}{\sigma} \right)^n + \ln \left\{ \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} \right\}.$$

Denotando-se a composição da função  $\ln$  com a função de verossimilhança  $L$  por  $l$  e aplicando-se as propriedades de logaritmo, observa-se que:

$$\begin{aligned}
l(\mu, \sigma; x) &= \ln(\sigma)^{-n} + \ln \left\{ \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} \right\} \\
&= -n \ln(\sigma) + \sum_{i=1}^n \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Derivando-se a expressão (2.11) em relação a  $\mu$  têm-se:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma; x)}{\partial \mu} = \frac{n}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \exp \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]. \quad (2.12)$$

Agora, derivando-se a expressão (2.11) em relação a  $\sigma$ :

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma; x)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \exp \left[ -\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]. \quad (2.13)$$

Igualando-se a zero as expressões (2.12) e (2.13), obtêm-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma; x)}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0. \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma; x)}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) - \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0. \quad (2.15)$$

Aplicando-se operações algébricas na equação (2.14) com o objetivo de se isolar  $\hat{\mu}$ , têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i + \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) = 0 &\Rightarrow \frac{n}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i + \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \\ &\Rightarrow n = \sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i + \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \\ &\Rightarrow n = \exp \left( \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i}{\hat{\sigma}} \right) \\ &\Rightarrow \exp \left( \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i}{\hat{\sigma}} \right)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Aplicando-se a função logaritmo natural nos dois membros da equação (2.16) e utilizando-se as propriedades de logaritmo, obtém-se:

$$\ln \left[ \exp \left( \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] = \ln \left[ \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i}{\hat{\sigma}} \right)} \right] \Rightarrow \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \ln \left[ \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i}{\hat{\sigma}} \right)} \right]$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \hat{\sigma} \ln \left[ \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i}{\hat{\sigma}} \right)} \right].$$

Portanto, o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro posição  $\mu$  da distribuição Gumbel pode ser expresso por:

$$\hat{\mu} = \hat{\sigma} \ln \left[ \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i}{\hat{\sigma}} \right)} \right]. \quad (2.17)$$

Agora tem-se o objetivo de se encontrar um estimador para o parâmetro  $\sigma$ . Pela expressão (2.15), têm-se que:

$$-\frac{n}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) - \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \exp \left( \frac{-x_i + \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Multiplicando-se os dois membros da equação (2.18) por  $\sigma$  e aplicando-se as propriedades de somatório e de exponencial, verifica-se que:

$$-n + \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\hat{\sigma}} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\hat{\sigma}} \right) \exp \left( \frac{-x_i}{\hat{\sigma}} \right) \exp \left( \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \exp \left( \frac{-x_i}{\hat{\sigma}} \right) \exp \left( \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) = 0. \quad (2.19)$$

De (2.16) observa-se que  $\exp \left( \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i}{\hat{\sigma}} \right)}$ . Logo, substituindo-se  $\exp \left( \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)$  por

$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i}{\hat{\sigma}} \right)}$  na equação (2.19), encontra-se:

$$-n + \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} - \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{\sigma}}\right) \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right) \cdot n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right)} + \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right) \cdot n\hat{\mu}}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right)} = 0. \quad (2.20)$$

Simplificando-se a expressão (2.20) obtém-se:

$$-n + \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right) n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right)} = 0. \quad (2.21)$$

Aplicando-se operações algébricas elementares na expressão (2.21), encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{\sigma}} \left[ \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right) \cdot n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right)} \right] - n = 0 &\Rightarrow \frac{1}{\hat{\sigma}} = \frac{n}{\left[ \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right) \cdot n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right)} \right]} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\hat{\sigma}} = n \left[ \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right) \cdot n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right)} \right]^{-1} \\ &\Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right) \cdot n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right)} \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i) \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{\sigma}}\right)} \quad (2.22)$$

é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro escala  $\sigma$  da distribuição Gumbel.

Como  $\hat{\sigma}$  não pode ser obtido analiticamente, é necessário o uso de métodos numéricos

para estimar o seu valor. Dois métodos numéricos bastante utilizados para esse fim são os denominados Gradiente Conjugado (NIEDU, 2012) e o método proposto por Nelder e Mead (NELDER; MEAD, 1965). Nessa pesquisa será utilizado o método numérico Nelder-Mead.

#### 2.4.2 Estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Gumbel não estacionária

Na Estatística existem situações em que o tempo dos dados é crucial, sendo obtidos sucessivamente através do tempo (diário, mensal, anual, etc). Às vezes, eles fazem parte de uma série estacionária, que são dados que estão distribuídos aleatoriamente em torno da média. Porém, em algumas situações, os dados podem apresentar tendência. Fischer (1982) define:

**Definição 2.3** *Tendência é caracterizada como aquele movimento regular e contínuo de longo prazo, refletindo um movimento ascendente ou descendente em longo período de tempo.*

As formas de se modelar tendência podem ser linear, quadrática, exponencial, etc. Neste trabalho será adotado o uso das formas lineares crescente e decrescente. Portanto, conforme já foi dito anteriormente, sempre que for referido distribuição Gumbel não estacionária, ficará subtendido que a referência se faz à distribuição Gumbel não estacionária com tendência linear no parâmetro posição. Suponha que  $X_t = X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  seja uma amostra aleatória de tamanho  $n$ , obtida a partir de uma distribuição Gumbel não estacionária. A função densidade dessa distribuição é apresentada na expressão (2.6).

#### 2.5 TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

O objetivo dos testes de aderência é avaliar a adequabilidade de um modelo probabilístico a um conjunto de dados observados, cujo objetivo é encontrar evidências que possam aceitar ou rejeitar a distribuição testada (NAGHETTINI; PINTO, 2007). Exemplos de testes de aderência: teste Qui-quadrado, Anderson-Darling, Filliben e o teste Kolmogorov-Smirnov. Este último foi o teste adotado nesta pesquisa para checar se a distribuição Gumbel é realmente apropriada para valores de precipitação pluvial máxima observados na cidade de Jaboticabal-SP.

O teste de Kolmogorov-Smirnov (KS) é um teste de aderência não paramétrico, indicado particularmente para distribuições contínuas. Esse teste consiste em rejeitar a hipótese de nulidade, ou seja, consiste em rejeitar a hipótese de que os dados amostrais provêm de uma população com distribuição teórica, se a diferença máxima entre os valores observados (amostrais) e ajustados for superior ao crítico (tabelado), para um nível de significância especificado (NAGHETTINI; PINTO, 2007).

Vale ressaltar que apenas a máxima diferença entre as frequências é considerada neste teste, logo, o teste de Kolmogorov-Smirnov é qualitativo, o que significa que o mesmo permite apenas a conclusão de que a distribuição é adequada ou não, não havendo embasamento suficiente para se concluir a respeito da precisão e comparação entre distribuições distintas. Caso a distribuição não seja adequada, deve-se buscar o ajuste de outra distribuição. A estatística de teste de KS baseia-se na comparação entre as funções de probabilidades acumuladas, empírica (variável em estudo, dados amostrais) e teórica, tendo como base a maior diferença entre essas distribuições. O teste determina quando os valores da amostra podem ser considerados como provenientes de uma população com determinada distribuição teórica.

Siegel e Castellan Júnior (2006) para a realização do teste descrevem que devem ser seguidos os seguintes passos:

- i) colocar a série de dados em ordem ascendente;
- ii) obter os valores de probabilidade da distribuição teórica  $F(x_{(i)})$  e os valores de probabilidade da distribuição empírica  $\hat{F}(x_{(i)})$ ;
- iii) calcular a estatística  $D$  através da seguinte expressão:

$$D = \sup |F(x_{(i)}) - \hat{F}(x_{(i)})|, i = 1, \dots, n.$$

iv) A hipótese de que a distribuição empírica  $\hat{F}(x)$  possui distribuição  $F(x)$  pode ser testada pela comparação do resultado da estatística  $D$  com um valor crítico, para um dado nível de significância, ou pela comparação do valor- $p$  com o nível de significância adotado. Se ao nível de significância estabelecido, o valor observado de  $D$  for maior ou igual ao valor crítico da tabela, rejeita-se a hipótese  $H_0$ , isto é, de que a distribuição testada pode ser utilizada para prever os comportamentos dos dados observados. A hipótese  $H_0$  também é rejeitada quando o valor- $p$  é inferior ao nível de significância estabelecido.

De acordo com Rocha (2004), a utilização do teste kolmogorov-Smirnov apresenta algumas características relevantes: não requer agrupamento de dados, ou seja, nenhuma informação é perdida; possui desempenho satisfatório com qualquer número de informações e é poderoso

para o trabalho com distribuições contínuas.

## 2.6 PROPRIEDADE DOS ESTIMADORES

Neste tópico serão apresentadas e definidas as propriedades que se deseja que um bom estimador pontual possua. Porém, antes de mencionar essas propriedades, é viável definir alguns conceitos básicos da inferência estatística. São eles: espaço paramétrico, parâmetro, estatística, estimador e estimativa.

De acordo com Bolfarine e Sandoval (2001) um espaço paramétrico é:

**Definição 2.4** *O conjunto  $\Theta$  em que  $\theta$  toma valores é denominado espaço paramétrico.*

Parâmetros segundo Magalhães e Lima (2004) são:

**Definição 2.5** *As quantidades da população, em geral desconhecidas, sobre as quais temos interesse, são denominadas parâmetros e, usualmente, representados por letras gregas tais como  $\theta$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ , entre outras.*

Bolfarine e Sandoval (2001) definem estatística do seguinte modo:

**Definição 2.6** *Qualquer função da amostra que não depende de parâmetros desconhecidos é denominada uma estatística.*

Para Meyer (1983), estimador e estimativa são respectivamente:

**Definição 2.7** *Seja  $X$  uma variável aleatória com alguma distribuição de probabilidade que dependa de um parâmetro desconhecido. Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X$ , e sejam  $x_1, \dots, x_n$  os correspondentes valores amostrais. Se  $g(X_1, \dots, X_n)$  for uma função de amostra a ser empregada para estimação de  $\theta$ , nos referimos a  $g$  como um estimador de  $\theta$ .*

**Definição 2.8** *O valor que  $g$  assume, isto é,  $g(x_1, \dots, x_n)$ , será referido como uma estimativa de  $\theta$  e é usualmente escrito assim:  $\hat{\theta} = g(x_1, \dots, x_n)$ .*

A primeira propriedade dos estimadores é a tendência, viés ou vício de um estimador. Essa propriedade é definida por Magalhães e Lima (2004) como:

**Definição 2.9** Um estimador  $\hat{\theta}$  é não viciado ou não viesado para um parâmetro  $\theta$  se  $E(\hat{\theta}) = \theta$ . Em outras palavras, um estimador é não viciado se o seu valor esperado coincide com o parâmetro de interesse.

Portanto, o que se deseja de um estimador não viesado é que a média das estimativas seja igual ou o mais próximo possível do valor do parâmetro. Se porventura, em média, o estimador errar, diz-se que o estimador é viesado, e a diferença entre a média e o valor verdadeiro do parâmetro é chamado de viés. Portanto, a expressão matemática do viés de um estimador pode ser dada por:

$$\text{viés} = E(\hat{\theta}) - \theta. \quad (2.23)$$

Formalmente, segundo Casella e Berger (2010), o viés de um estimador pode ser definido por:

**Definição 2.10** O viés de um estimador pontual  $\hat{\theta}$  de um parâmetro  $\theta$  é a diferença entre o valor esperado de  $\hat{\theta}$  e  $\theta$ , isto é,  $\text{viés}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ . Um estimador cujo viés é identicamente igual a 0, é chamada de não viesado e satisfaz  $E(\hat{\theta}) = \theta$  para todo  $\theta$ .

Observe que para se obter o valor do viés, é necessário saber qual é o valor da esperança do estimador. Como o estimador do parâmetro  $\sigma$  da distribuição Gumbel estacionária, e os estimadores dos parâmetros  $\mu_1$  e  $\sigma$  da distribuição Gumbel não estacionária, não apresentam forma analítica fechada, o cálculo do viés para esses estimadores é feito de forma aproximada. A fórmula do viés médio (VM) dada por Rodrigues et al. (2010) é:

$$VM = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i - \theta}{n}. \quad (2.24)$$

Porém, nesta pesquisa utilizou-se do viés médio relativo (VMR), ou seja, a razão entre o viés médio e parâmetro  $\theta$  para que a amplitude do valor do parâmetro não interfira no cálculo do viés. Além disso, o resultado do somatório será dado em módulo, como apresentado a seguir:

$$VMR = \frac{\sum_{i=1}^n |\hat{\theta}_i - \theta|}{n \times \theta}. \quad (2.25)$$

Uma segunda propriedade desejável dos estimadores, conforme Naghettini e Pinto (2007),

é a consistência (ou coerência). Casella e Berger (2010) definem estimador consistente do seguinte modo:

**Definição 2.11** *Uma sequência de estimadores  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$  é uma sequência consistente de estimadores do parâmetro  $\theta$  se, para cada  $\varepsilon > 0$  e cada  $\theta \in \Theta$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( \left| \hat{\theta}_n - \theta \right| < \varepsilon \right) = 1$ , ou equivalentemente, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( \left| \hat{\theta}_n - \theta \right| \geq \varepsilon \right) = 0$ .*

Logo, um estimador será consistente se conforme o tamanho da amostra  $n$  for aumentando, o estimador convergir em probabilidade para  $\theta$ . isto implica que sendo o estimador consistente, pode-se, com amostras suficientemente grandes, tornar o erro de estimação tão pequeno quanto se queira. Conforme Meyer (1983), a verificação da consistência pela aplicação da Definição 2.11 não é tão simples, logo, o Teorema 2.1 apresentado em Meyer (1983) e Casella e Berger (2010), é bastante útil.

**Teorema 2.1** *Se  $\hat{\theta}_n$  é uma sequência de estimadores de um parâmetro  $\theta$  que satisfaz*

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \hat{\theta}_n \right) = \theta;$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} Var \left( \hat{\theta}_n \right) = 0.$$

*para cada  $\theta \in \Theta$ , então  $\hat{\theta}_n$  é uma sequência consistente de estimadores de  $\theta$ .*

Basicamente, o Teorema 2.1 apresenta que, se o valor esperado de um estimador tender ao valor real do parâmetro e se a variância desse mesmo estimador tender a zero à medida que o tamanho da amostra aumenta, então esse estimador é consistente. Já no caso do viés, conforme o tamanho da amostra vai aumentando, o viés, caso exista, vai diminuindo, se aproximando cada vez mais do verdadeiro valor do parâmetro. Magalhães e Lima (2004) atentam para o fato de que enquanto na Definição (2.9) referente a primeira propriedade de um estimador, o resultado deve valer para qualquer  $n$ , no Teorema (2.1) referente a propriedade da consistência, o estimador necessita ser não viesado apenas para valores grandes de  $n$ .

Silva (2002) diz que a propriedade de consistência é mais desejável do que a ausência de viés. Pois se um estimador possuir viés, porém for consistente, a princípio pode até apresentar estimativas que não seja igual ao verdadeiro valor do parâmetro em média, mas a medida que a amostra aumenta, a estimativa se aproximará desse valor real. Por outro lado, se um estimador for viesado e inconsistente, o estimador vai continuar a apresentar estimativas que vão se desviar substancialmente do verdadeiro parâmetro na medida que a amostra aumenta.

Uma terceira propriedade desejável dos estimadores de acordo com Naghettini e Pinto (2007) é a eficiência. Esse critério permite escolher entre dois estimadores do mesmo parâmetro. De acordo com Morettin e Bussab (2004), a definição de eficiência de um estimador pode ser dada por:

**Definição 2.12** Se  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  são dois estimadores não viesados de um mesmo parâmetro  $\theta$ , e ainda  $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$ , então  $\hat{\theta}_1$  diz-se mais eficiente do que  $\hat{\theta}_2$ .

Portanto, é desejável que o estimador não disperse muito, isto é, que o estimador seja o mais preciso possível.

Para se obter a variância de um estimador, pode-se partir do erro quadrático médio. Segundo Casella e Berger (2010):

**Definição 2.13** O erro quadrático médio (EQM) de um estimador  $\hat{\theta}$  de um parâmetro  $\theta$  é a função de  $\theta$  definida por  $E_{\theta}(\hat{\theta} - \theta)^2$ .

O EQM é uma função que fornece o valor esperado do quadrado da diferença entre o estimador e o valor verdadeiro de  $\theta$ . Porém, assim como acontece com o viés, para se calcular o EQM de um estimador é necessário saber qual é o valor da esperança do estimador. E como já citado, os estimadores de alguns parâmetros das distribuições Gumbel não estacionária e Gumbel estacionária não apresentam forma analítica fechada. Por essa razão, o cálculo do erro quadrático dos estimadores desses parâmetros é feito de forma aproximada. Segundo Duitama et al. (2014), o erro quadrático médio relativo (EQMR) do estimador de um parâmetro pode ser aproximado da seguinte forma:

$$EQMR = \frac{1}{N} \left[ \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \theta)^2}{\theta} \right] \quad (2.26)$$

em que  $N$  é o número de simulações em cada cenário.

Agora, pela Definição (2.13), tem-se que  $EQM(\hat{\theta}) = E \left[ (\hat{\theta} - \theta)^2 \right]$ . Usando-se as propriedades da esperança e realizando operações algébricas simples, obtém-se:

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{\theta}) &= E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] \\
&= E(\hat{\theta}^2 - 2\theta\hat{\theta} + \theta^2) \\
&= E(\hat{\theta}^2) - 2E(\theta\hat{\theta}) + E(\theta^2) \\
&= E(\hat{\theta}^2) - 2\theta E(\hat{\theta}) + (\theta^2) \\
&= E(\hat{\theta}^2) - [E(\hat{\theta})]^2 + [E(\hat{\theta})]^2 - 2\theta E(\hat{\theta}) + (\theta^2) \\
&= \text{Var}(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

A expressão entre colchetes na equação 2.27 é o viés do estimador  $\hat{\theta}$ . Portanto segue-se que:

$$EQM(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + [\text{viés}(\hat{\theta})]^2. \tag{2.28}$$

Então, dado dois estimadores quaisquer não viesados,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Se  $\theta_1$  possuir menor erro quadrático médio do que  $\theta_2$ , então  $\theta_1$  é dito ser relativamente mais eficiente do que  $\theta_2$ .

Observando-se a equação 2.28 é possível perceber que o EQM incorpora dois componentes: a variância, que mede a variabilidade (precisão) do estimador, e o viés, que mede a exatidão do estimador. Daí conclui-se que se o estimador for não viesado, então o EQM é igual à variância:

$$EQM(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}). \tag{2.29}$$

A quarta propriedade desejável dos estimadores, conforme cita Naghettini e Pinto (2007), é a suficiência. A definição de estimador suficiente pode ser encontrada em Casella e Berger (2010):

**Definição 2.14** *Uma estatística  $T(X)$  é uma estatística suficiente para  $\theta$  se a distribuição condicional da amostra  $X$ , dado o valor de  $T(X)$ , não depender de  $\theta$ .*

Isto quer dizer que a probabilidade condicional da amostra, dado a estatística, não pode depender do parâmetro, somente da amostra. Esse resultado consegue garantir que a estatística suficiente afasta qualquer informação desnecessária presente nos dados, além de captar todas as informações sobre  $\theta$  contidas na amostra sem que haja perda de informação.

E por último, tem-se a invariância. Sobre estimador invariante Casella e Berger (2010) citam que:

**Definição 2.15** *Se  $\hat{\theta}$  é o estimador de  $\theta$ , e se  $\tau(\theta)$  é uma função bijetora, então o estimador de  $\tau(\theta)$  é  $\tau(\hat{\theta})$ .*

Essa definição é muito útil caso o interesse esteja em encontrar um estimador para alguma função invertível de  $\theta$ , partindo-se do conhecimento de um estimador invariante de  $\theta$ . Por exemplo, suponha que um pesquisador saiba que  $\hat{\theta}$  é estimador de  $\theta$  e que  $\hat{\theta}$  é invariante. Porém, seu interesse está em encontrar um estimador para  $g(\theta) = \theta^2$ , portanto, pela definição de invariância, o pesquisador concluirá que o estimador desejado é  $g(\hat{\theta}) = (\hat{\theta})^2$ .

Escolher dentre os estimadores qual é considerado o melhor, não é uma decisão simples. Meyer (1983) menciona que para se fazer essa escolha, é necessário que o pesquisador considere duas questões, priorizando as propriedades conforme sua necessidade: Quais as características que se deseja que um bom estimador apresente?; e como decidir qual estimador será “melhor” que o outro? Portanto, cabe ao pesquisador estipular alguns critérios para decidir entre um estimador e outro qual será o adotado.

## 2.7 NÍVEL DE RETORNO

Seja  $E$  um evento extremo e  $T$  o período de tempo médio em que o evento  $E$  é igualado ou superado pelo menos uma vez. O tempo de retorno  $T$  associado ao evento  $E$  é dado por,

segundo Bautista et al. (2004):

$$T = \frac{1}{P(E)} = \frac{1}{1 - F(x)},$$

sendo  $T$  geralmente expresso em anos e  $P(E)$  a probabilidade que ocorra um evento extremo superior a  $x$ , calculada pelo complementar da função de distribuição acumulada.

No caso em estudo, o evento  $E$  é: a precipitação pluvial máxima que excede um determinado valor  $x$ , portanto,  $P(E)$  é a probabilidade de que ocorra uma precipitação pluvial máxima maior que um certo valor  $x$  dada por:

$$P_1(E) = 1 - F(x; \mu, \sigma) = 1 - \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right],$$

para o caso em que a Gumbel é estacionária, e

$$P_2(E) = 1 - F(x; \mu_0, \mu_1, \sigma) = 1 - \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) \right]$$

para o caso em que a Gumbel é não estacionária, em que  $x$  é a precipitação pluvial máxima do período e  $0 < x < \infty$ .

O quantil  $x_p$  chamado de nível de retorno é uma medida de interesse em modelagem de dados de valores extremos, que pode ser obtido a partir da solução da equação citada por Bautista (2004):

$$\int_{-\infty}^{x_p} f(x|\mu, \sigma) dx = 1 - p \quad (2.30)$$

em que  $x_p$  está associado ao tempo de retorno  $T$  e  $p = \frac{1}{T}$ .

De (2.30) segue que:

$$F(x_p|\mu, \sigma) = 1 - p. \quad (2.31)$$

Como o interesse nessa pesquisa é obter as estimativas dos níveis de retorno da distribuição Gumbel estacionária e da Gumbel não estacionária, duas situações devem ser consideradas.

Para a Gumbel estacionária, Lowery e Nash (1970) e Bautista (2004) apresentam que, a precipitação pluvial máxima provável para um determinado tempo de retorno pode ser obtida pela expressão

$$x_p = \mu - \sigma \ln \left[ \ln \left( \frac{T}{T-1} \right) \right]. \quad (2.32)$$

Agora, considerando que as observações máximas seguem uma distribuição Gumbel não estacionária, então:

$$\int_{-\infty}^{x_p} f(x|\mu_0, \mu_1, \sigma) dx = 1 - p \quad (2.33)$$

De (2.33) segue que:

$$F(x_p|\mu_0, \mu_1, \sigma) = 1 - p. \quad (2.34)$$

Portanto, o estimador do quantil  $x_p$  é dado por:

$$x_p = F^{-1}(1 - p|\mu_0, \mu_1, \sigma). \quad (2.35)$$

Note que a equação (2.35) é a inversa da equação (2.34), conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
F(x_p|\mu_0, \mu_1, \sigma) = 1 - p &\Rightarrow \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x_p - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) \right] = 1 - p \\
&\Rightarrow \exp \left( -\frac{x_p - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} \right) = -\ln(1 - p) \\
&\Rightarrow -\frac{x_p - (\mu_0 + \mu_1 t)}{\sigma} = \ln[-\ln(1 - p)] \\
&\Rightarrow x_p - (\mu_0 + \mu_1 t) = -\sigma \ln[-\ln(1 - p)] \\
&\Rightarrow x_p = \mu_0 + \mu_1 t - \sigma \ln[-\ln(1 - p)] \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Da relação  $p = \frac{1}{T}$  observa que a função de quantis da distribuição Gumbel não estacionária pode ser expressa por:

$$x_p = \mu_0 + \mu_1 t - \sigma \ln \left[ \ln \left( \frac{T}{T-1} \right) \right]. \tag{2.37}$$

A estimativa  $\hat{x}_p$  do nível de retorno  $x_p$  é obtida substituindo as estimativas de máxima verossimilhança de  $\mu$  e  $\sigma$  na função (2.32) e  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  e  $\sigma$  na função (2.37).

## 2.8 TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇAS

Se o parâmetro inclinação ( $\mu_1$ ) da distribuição Gumbel não estacionária for igual a zero, então a distribuição Gumbel não estacionária é igual à distribuição Gumbel. Uma das formas de se escolher qual distribuição dentre as duas deve ser utilizada é por meio da verificação da quantidade de informação que cada uma das distribuições fornece para a amostra em questão, ou seja, verificar se a presença do parâmetro  $\mu_1$  acrescenta informações significativas a respeito do comportamento da variável aleatória estudada. Para esse fim, o Teste da Razão de

Verossimilhanças (TRV) pode ser utilizado com o seguinte teste de hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = 0 \\ H_1 : \mu_1 \neq 0 \end{cases}$$

Caso a hipótese nula ( $H_0$ ) seja considerada como verdadeira, rejeita-se a distribuição Gumbel não estacionária, pois o teste está informando que as duas distribuições apresentam a mesma quantidade de informação, embora a Gumbel estacionária possua um parâmetro a menos que a Gumbel não estacionária. Agora, caso a hipótese alternativa ( $H_1$ ) seja considerada como verdadeira, não há motivos para se rejeitar a distribuição Gumbel não estacionária, ou seja, essa distribuição apresenta informações que a Gumbel estacionária não possui, e que não devem ser desconsideradas.

De acordo com Casella e Berger (2010) o TRV pode ser descrito do seguinte modo: Seja  $(x_1, \dots, x_n)$  a série de  $n$  observações,  $l(\hat{\theta}_{NE})$  e  $l(\hat{\theta}_E)$  os máximos do logaritmo da função de máxima verossimilhança das distribuições Gumbel não estacionária e da Gumbel estacionária respectivamente, em que  $\hat{\theta}_{NE} = (\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_1, \hat{\sigma})$  e  $\hat{\theta}_E = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  são os vetores de estimativas de máxima verossimilhança. A estatística do TRV pode ser expressa por:

$$TRV = -2 \left[ l(\hat{\theta}_{NE}) - l(\hat{\theta}_E) \right] = 2 \left[ l(\hat{\theta}_E) - l(\hat{\theta}_{NE}) \right] \quad (2.38)$$

que tem distribuição assintótica  $\chi^2$  com 1 grau de liberdade, pois o modelo completo possui 1 parâmetro a mais que o modelo restrito.

Por fim, para testar a hipótese  $H_0 : \mu_1 = 0$  versus  $H_1 : \mu_1 \neq 0$ , deve-se comparar o valor obtido da estatística de teste  $TRV$  com o valor tabelado de  $\chi_{\alpha,1}^2$  da distribuição  $\chi^2$  com 1 grau de liberdade e com nível de significância  $\alpha$ . Se  $TRV \geq \chi_{\alpha,1}^2$  rejeita-se  $H_0$ , caso contrário  $H_0$  não é rejeitada.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

A seção Material e Métodos está dividido nas seguintes subseções: 3.1 Desenvolvimento dos estimadores, 3.2 Aplicação a dados reais, e 3.3 Cenários de simulação.

#### 3.1 DESENVOLVIMENTO DOS ESTIMADORES

Foram realizadas 1000 simulações de dados das distribuições Gumbel estacionária e não estacionária, considerando diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para os parâmetros de posição, escala e inclinação, sendo este último utilizado para os modelos Gumbel não estacionário. Os tamanhos amostrais e os valores dos parâmetros utilizados na simulação de dados foram baseados na literatura pesquisada. As literaturas utilizadas como referência para decisão dos valores dos parâmetros e das inclinações utilizadas nesta pesquisa foram baseadas nos trabalhos de Smith (1989) e Park et al. (2011). Desse modo, ficou estabelecido que os tamanhos amostrais para a simulação dos dados seriam de  $n = 15, 20, 30, 50, \text{ e } 100$ . Os valores dos parâmetros utilizados para  $\mu$  foram de 30 e 50, os valores dos parâmetros utilizados para  $\sigma$  foram de 2 e 10, e a inclinação  $\mu_1$  adotada foi de -0,01; -0,005; -0,001; -0,0005; -0,0001; 0; 0,0001; 0,0005; 0,001; 0,005; 0,01 em relação a  $\mu$ . Em seguida, ajustou-se a distribuição Gumbel estacionária e a distribuição Gumbel não estacionária ao conjunto de dados.

Definido os valores para  $n$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ , e os valores para a inclinação, foram gerados 240 cenários, sendo que em cada cenário foram realizadas 1000 simulações, totalizando 220 cenários referentes ao modelo Gumbel não estacionário e 20 cenários referentes ao modelo Gumbel estacionário.

Em cada cenário foram calculados o Erro Quadrático Médio Relativo ( $EQMR$ ) e o Viés Médio Relativo ( $VMR$ ) para verificar, respectivamente, a precisão e a acurácia dos estimadores estudados.

$$EQMR(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{1000} (\hat{\theta}_i - \theta)^2}{1000 \times \theta}$$

e

$$VMR = \frac{\sum_{i=1}^{1000} |\hat{\theta}_i - \theta|}{1000 \times \theta},$$

sendo  $\hat{\theta}_i$  cada parâmetro estimado e  $\theta = \{\mu, \sigma^2\}$  o real valor do parâmetro.

Somente para os casos em que a inclinação ( $\mu_1$ ) é igual a zero, é que foi calculado o erro quadrático médio (EQM) para verificar a precisão do estimador  $\hat{\mu}_1$  ao invés do EQMR, pois não é possível fazer uso dessa expressão quando o parâmetro é igual a zero. O EQM pode ser calculado da seguinte forma:

$$EQM(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{1000} (\hat{\theta}_i - \theta)^2}{1000}$$

Para cada simulação realizada, foi também comparado o modelo Gumbel estacionário com o modelo Gumbel não estacionário, por meio do TRV para verificar a significância do parâmetro  $\mu_1$ . O TRV é apresentada na expressão 2.38, sendo que nessa pesquisa, o nível de significância adotado foi de 5%.

### 3.2 APLICAÇÃO A DADOS REAIS

A série histórica de valores precipitação pluviométrica (mm) utilizada, foi obtida junto à Estação Agroclimatológica da UNESP, campus Jaboticabal, estado de São Paulo. As observações referem-se às precipitações pluviais diárias máximas, expressas em altura de lâmina d'água (mm), referentes a 54 anos de observação do período compreendido entre janeiro de 1963 a novembro de 2016.

Os dados foram agrupados em período anual extraíndo-se a máxima precipitação pluvial diária observada de cada ano. As observações de 1963 a 1996 foram utilizadas para estimar os parâmetros e calcular utilizando as expressões (2.32) e (2.37) a precipitação pluvial diária máxima provável, para os tempos de retorno de 4, 8, 12, 16 e 20 anos. Extraíu-se a maior observação, a cada tempo de retorno, da série do período restante (1997 a 2016), para verificar

o erro percentual absoluto médio (*EPAM*) dado por:

$$EPAM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i - \hat{x}_i}{x_i} \right| \times 100\%, \quad (3.1)$$

em que,  $x_i$  é a precipitação pluvial máxima observada e  $\hat{x}_i$  é a precipitação pluvial máxima predita para o  $i$ -ésimo tempo de retorno.

O tamanho das séries máximas utilizadas seguem as recomendações da *World Meteorological Organization*, que preconiza que o número mínimo de anos de dados climáticos para análise é de 30 anos (BADDOUR et al., 2007).

O teste de Ljung-Box (LJUNG; BOX, 1978) e o *Runs Test* (SIEGEL; CASTELLAN JÚNIOR, 2006) foram utilizados, respectivamente, para verificar a independência e a aleatoriedade dos dados. O Teste da Razão de Verossimilhanças foi aplicado para verificar a significância do parâmetro  $\mu_1$ , e o teste de Kolmogorov-Smirnov (KS) para verificar a aderência das distribuições Gumbel estacionária e não estacionária à série de dados. O nível de significância de 5% foi adotado em todos os testes.

### 3.3 CENÁRIOS DE SIMULAÇÃO

O *software R* (R CORE TEAM, 2015) foi utilizado no desenvolvimento de rotinas que verificou a acurácia e a precisão dos estimadores, foi utilizado o pacote *evd* (STEPHENSON, 2002), para simulação dos dados, estimação dos parâmetros e para realizar os testes supracitados.

O procedimento utilizado para gerar números aleatórios para o parâmetro posição  $\mu$  da Gumbel não estacionária será apresentado com um exemplo para melhor compreensão.

Entra-se com a função *rgumbel* no *software R*, em que  $n$  é o tamanho da amostra,  $\sigma$  é o parâmetro escala, e  $\mu$  é o parâmetro posição da Gumbel não estacionária. Ao atribuir os valores para  $n$  e  $\sigma$ , o processo utilizado para introduzir tendência em cada simulação para  $\mu = \mu_0 + \mu_1 t$ , foi:

`rgumbel( $n, \mu, \sigma$ ),`

considerando  $\mu = 30, \mu_1 = 0,001\mu$ ,

$$\text{então } \mu = 30 + 0,001.30.t,$$

$$\mu = 30 + 0,03t.$$

Se  $n = 15$ , então  $t = 0,1,\dots,14$  pois está sendo considerado tendência a partir da 1ª observação.

$$\text{Daí } \mu = 30 + 0,03.14.$$

$$\text{Então } \mu = 30 + 0,42.$$

Portanto para este cenário,  $\mu = 30,42$  seria o valor a ser atribuído na função rgumbel.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados para as inclinações negativas foram similares aos obtidos para as inclinações positivas ao analisar o viés médio relativo e o erro quadrático médio relativo, e por essa razão eles não serão apresentados. Ao analisar também os gráficos referentes ao Teste da Razão de Verossimilhanças, não será incluído todos os gráficos devido as mesmas razões.

### 4.1 ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL NÃO ESTACIONÁRIA

Da expressão (2.6) referente a função densidade da distribuição Gumbel não estacionária com tendência linear no parâmetro posição, e da expressão (2.8) referente a função de verossimilhança, tem-se a função de verossimilhança da distribuição Gumbel não estacionária. Por simplicidade, para o cálculo de verossimilhança, considera-se que há um único comportamento de tendência, embora possa haver vários tipos de comportamentos. Dessa forma, a função de verossimilhança da distribuição Gumbel não estacionária pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} L(\mu_0, \mu_1, \sigma; x) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma^n} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

em que  $x_i$  é o valor observado e  $t_i = i - 1$ .

Aplicando-se o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade tem-se:

$$\underbrace{\ln[L(\mu_0, \mu_1, \sigma; x)]}_l = \ln \left( \frac{1}{\sigma^n} \right) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0 - \mu_1 t_i) - \sum_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) \right].$$

Aplicando-se propriedades do logaritmo, obtém-se:

$$l(\mu_0, \mu_1, \sigma; x) = -(n) \ln(\sigma) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0 - \mu_1 t_i) - \sum_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) \right]. \quad (4.1)$$

Derivando-se a expressão (4.1) em relação a  $\mu_0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu_0} &= -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (-1) - \sum_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) \right] \frac{1}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sigma} (n) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_0} = \frac{n}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) \right]. \quad (4.2)$$

Agora derivando-se a expressão (4.1) em relação a  $\mu_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu_1} &= -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (-t_i) - \sum_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) \right] \frac{t_i}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n t_i \exp \left[ - \left( \frac{x_i - (\mu_0 + \mu_1 t_i)}{\sigma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

E agora derivando-se a expressão (4.1) em relação a  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0 - \mu_1 t_i) - \sum_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{1}{\sigma} (x_i - \mu_0 - \mu_1 t_i) \right] \frac{1}{\sigma^2} \\ &= \frac{-n\sigma + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0 - \mu_1 t_i) - \sum_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{1}{\sigma} (x_i - \mu_0 - \mu_1 t_i) \right]}{\sigma^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Igualando-se a zero as expressões (4.2), (4.3) e (4.4), obtêm-se as seguintes equações:

$$\frac{n}{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n \exp \left[ -\left( \frac{x_i - (\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 t_i)}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0. \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n t_i \exp \left[ -\left( \frac{x_i - (\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 t_i)}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0. \quad (4.6)$$

$$\frac{-n\hat{\sigma} + \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t_i) - \sum_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{1}{\hat{\sigma}} (x_i - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t_i) \right]}{\hat{\sigma}^2} = 0. \quad (4.7)$$

Da Equação (4.5) é obtido:

$$\frac{n}{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n \exp \left( -\frac{x_i - (\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 t_i)}{\hat{\sigma}} \right) = 0$$

$$\frac{n}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i + \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}}\right)$$

$$n = \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i + \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}}\right)$$

$$n = \exp\left(\frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}}\right) \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i + \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}}\right)$$

$$\exp\left(\frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}}\right) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i + \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}}\right)}. \quad (4.8)$$

Aplicando-se o logaritmo natural a ambos os membros e deixando em função de  $\hat{\mu}_0$ :

$$\ln\left[\exp\left(\frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}}\right)\right] = \ln\left[\frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i + \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}}\right)}\right]$$

$$\frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}} = \ln\left[\frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i + \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}}\right)}\right].$$

$$\hat{\mu}_0 = \hat{\sigma} \ln \left[ \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i + \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}} \right)} \right]. \quad (4.9)$$

Observa-se que se  $\mu_1 = 0$ , a expressão (4.9) se torna a mesma do estimador  $\mu$  da Gumbel apresentada na expressão (2.17).

Resolvendo-se a equação (4.6):

$$\frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n t_i \exp \left( -\frac{x_i - (\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 t_i)}{\hat{\sigma}} \right) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n t_i \exp \left( -\frac{x_i - (\hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 t_i)}{\hat{\sigma}} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n t_i \exp \left( \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}} \right) \exp \left( -\frac{x_i - \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n t_i = \exp \left( \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}} \right) \sum_{i=1}^n t_i \exp \left( -\frac{x_i - \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}} \right).$$

Substituindo-se  $\exp \left( \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}} \right)$  pelo valor obtido para  $\mu_0$  na expressão (4.8) e simplificando-se a expressão obtém-se:

$$\sum_{i=1}^n t_i = \left[ \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp \left( \frac{-x_i + \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}} \right)} \right] \sum_{i=1}^n t_i \exp \left( -\frac{x_i - \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n t_i = \left[ \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i \exp\left(-\frac{x_i - \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i + \hat{\mu}_1 t_i}{\hat{\sigma}}\right)} \right].$$

Agora resolvendo-se a equação (4.7), chega-se à expressão de  $\hat{\sigma}$ :

$$\frac{-n\hat{\sigma} + \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t_i) - \sum_{i=1}^n \exp\left[-\frac{1}{\hat{\sigma}}(x_i - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t_i)\right]}{\hat{\sigma}^2} = 0$$

$$n\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t_i) - \sum_{i=1}^n \exp\left[-\frac{1}{\hat{\sigma}}(x_i - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t_i)\right]$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t_i) - \sum_{i=1}^n \exp\left[-\frac{1}{\hat{\sigma}}(x_i - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t_i)\right]}{n}.$$

Como  $\hat{\mu}_1$  e  $\hat{\sigma}$  não podem ser obtidos analiticamente, é necessário o uso de métodos numéricos para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança desses parâmetros. Dois métodos numéricos bastante utilizados para esse fim são os denominados Nelder-Mead e Gradiente Conjugado. Foi utilizado nessa pesquisa o método numérico Nelder-Mead (NELDER; MEAD, 1965).

#### 4.2 VIÉS MÉDIO RELATIVO E ERRO QUADRÁTICO MÉDIO RELATIVO

Neste tópico serão apresentados o viés médio relativo e o erro quadrático médio relativo dos parâmetros das distribuições Gumbel estacionária e da Gumbel não estacionária para os

diversos tamanhos amostrais e diferentes inclinações.

Nas Figuras a seguir serão exibidos o VMR e o EQMR do parâmetro posição ( $\mu$ ).

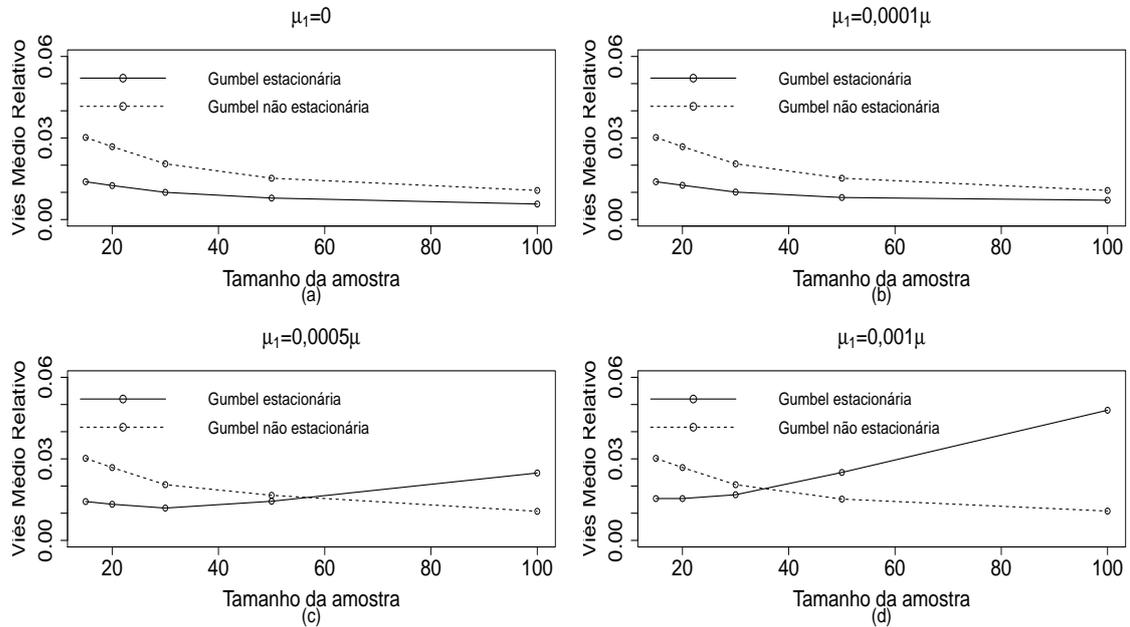


Figura 2 - Viés médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

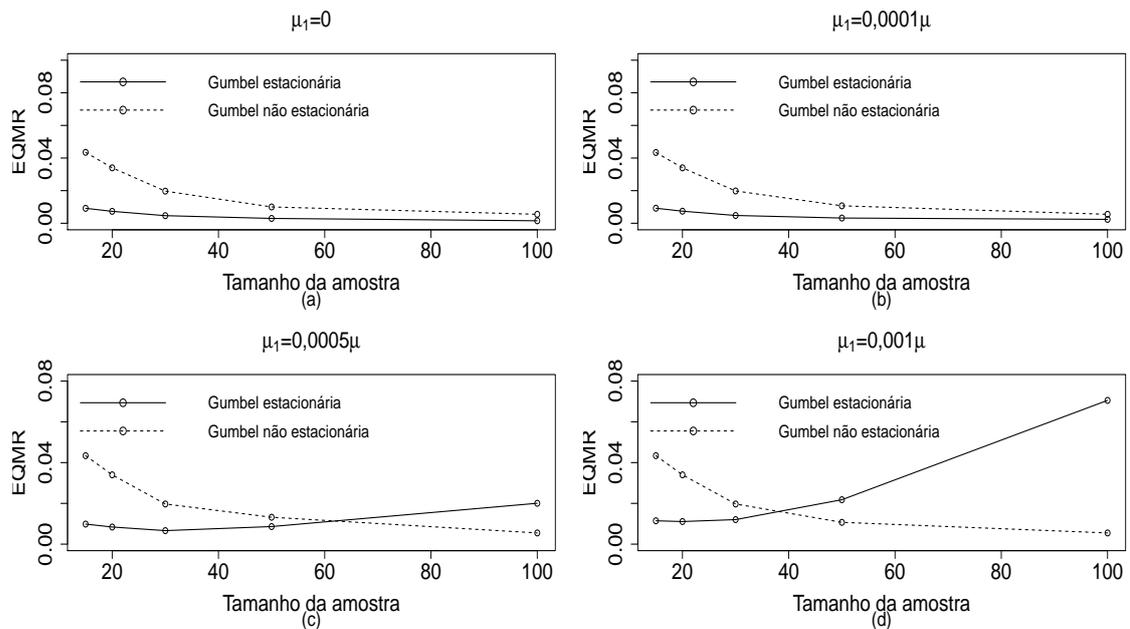


Figura 3 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

Observa-se na Figura 2, que para  $\mu_1 = 0$  e  $\mu_1 = 0,0001\mu$ , a estimativa do parâmetro da Gumbel estacionária apresentou menor viés médio relativo para o parâmetro posição, para todos os tamanhos amostrais adotados. Para  $\mu_1 = 0,0005\mu$ , e  $\mu_1 = 0,001\mu$  as linhas se cruzam para os tamanhos  $n = 60$  aproximadamente e  $n = 40$ , respectivamente.

Conforme pode se observar na Figura 3, a estimativa do parâmetro da distribuição Gumbel estacionária é mais precisa para os casos (a) e (b) para todo tamanho amostral. Já para os casos (c) e (d) a Gumbel estacionária apresenta menor erro quadrático médio relativo para os tamanhos amostrais 60 e 40 respectivamente.

Nota-se nas Figuras 2 e 3 que conforme a inclinação do termo linear  $\mu_1$  vai se intensificando, as estimativas do parâmetro posição da Gumbel estacionária se tornam viesadas e imprecisas para tamanhos amostrais grandes.

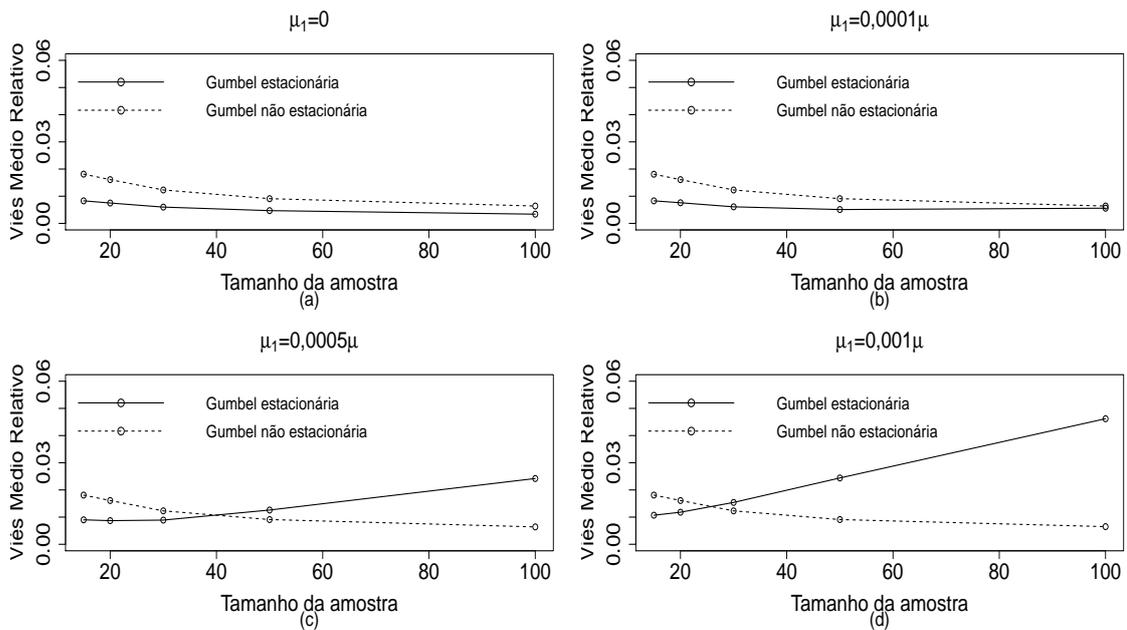


Figura 4 - Viés médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

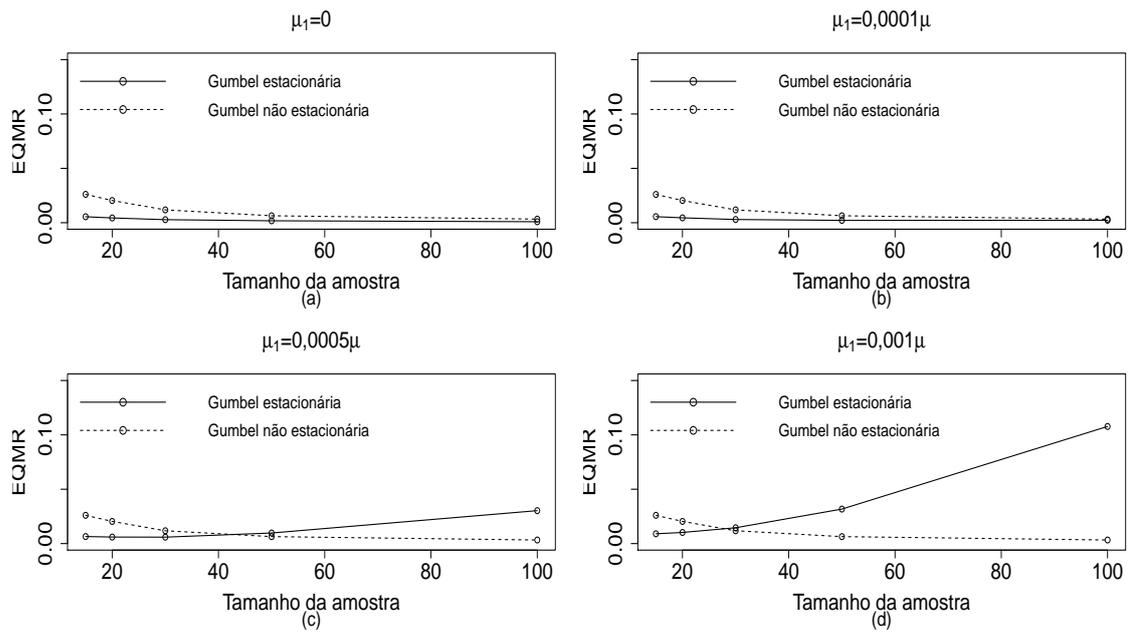


Figura 5 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

Na Figura 4 a estimativa do parâmetro da Gumbel estacionária apresentou ser mais acurada do que a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacionária para os casos em que  $\mu_1 = 0$  e  $\mu_1 = 0,0001\mu$  para todo tamanho amostral adotado.

Nota-se na Figura 5, para os casos (c) e (d), que a Gumbel estacionária apresenta menor erro quadrático médio relativo para os tamanhos amostrais 40 e 25 aproximadamente, e respectivamente.

Observe que nas Figuras 4 e 5, conforme a inclinação do termo linear  $\mu_1$  vai se intensificando, as estimativas do parâmetro posição da Gumbel estacionária se tornam viesadas e imprecisas para tamanhos amostrais grandes.

Ao comparar a Figura 2 com a Figura 4, e a Figura 3 com a Figura 5, observa-se que o valor do parâmetro  $\sigma$  é fixo, sendo  $\sigma = 2$ , e os valores do parâmetro  $\mu$  variam em 30 e 50. Note que quando  $\mu = 30$ , maior será o tamanho da amostra em que as estimativas do parâmetro da Gumbel estacionária irá abranger possuindo menor viés e EQMR em relação aos mesmos cenários em que  $\mu = 50$ . Este resultado é mais evidente ao analisar as Figuras (c) e (d) de cada cenário.

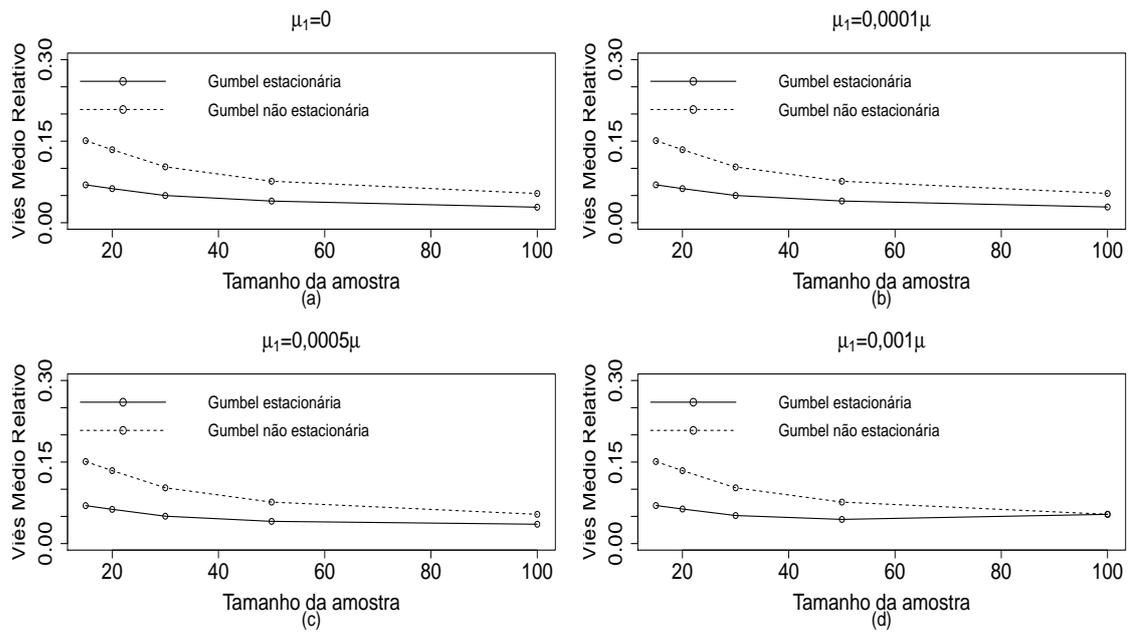


Figura 6 - Viés médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

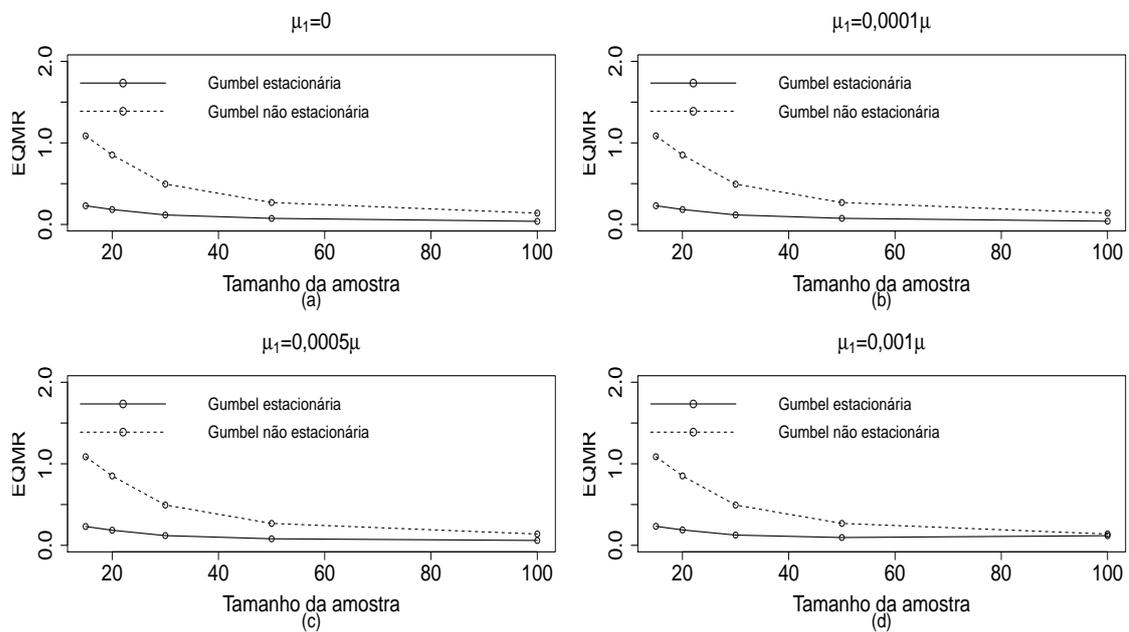


Figura 7 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

No cenário apresentado na Figura 6, pode-se notar que em todas as situações a estimativa do parâmetro da Gumbel estacionária apresentou ser mais acurada para todos os tamanhos

amostrais adotados.

Observa-se na Figura 7 que para todos os casos a estimativa do parâmetro da Gumbel estacionária possui menor EQMR para todo tamanho amostral, sendo portanto a mais adequada pelo Princípio de Parcimônia.

Ao comparar a Figura 2 com a Figura 6, e a Figura 3 com a Figura 7, observa-se que o valor do parâmetro  $\mu$  é fixo, sendo  $\mu = 30$ , e os valores do parâmetro  $\sigma$  variam em 2 e 10. Note que quando  $\sigma = 10$ , maior será o tamanho da amostra em que as estimativas do parâmetro da Gumbel estacionária irá abranger possuindo menor viés e EQMR em relação aos mesmos cenários em que  $\sigma = 2$ . Este resultado é mais evidente ao analisar as Figuras (c) e (d) de cada cenário. Observe, por exemplo o caso (d) das Figuras 2 e 6, em que o estimador do parâmetro da Gumbel na Figura 2 apresentou estimativas mais acuradas até um tamanho amostral de aproximadamente 40, e na Figura 6 o mesmo estimador apresentou estimativas mais acuradas para todo tamanho amostral. O mesmo resultado pode ser observado para o caso (d) das Figuras 3 e 7.

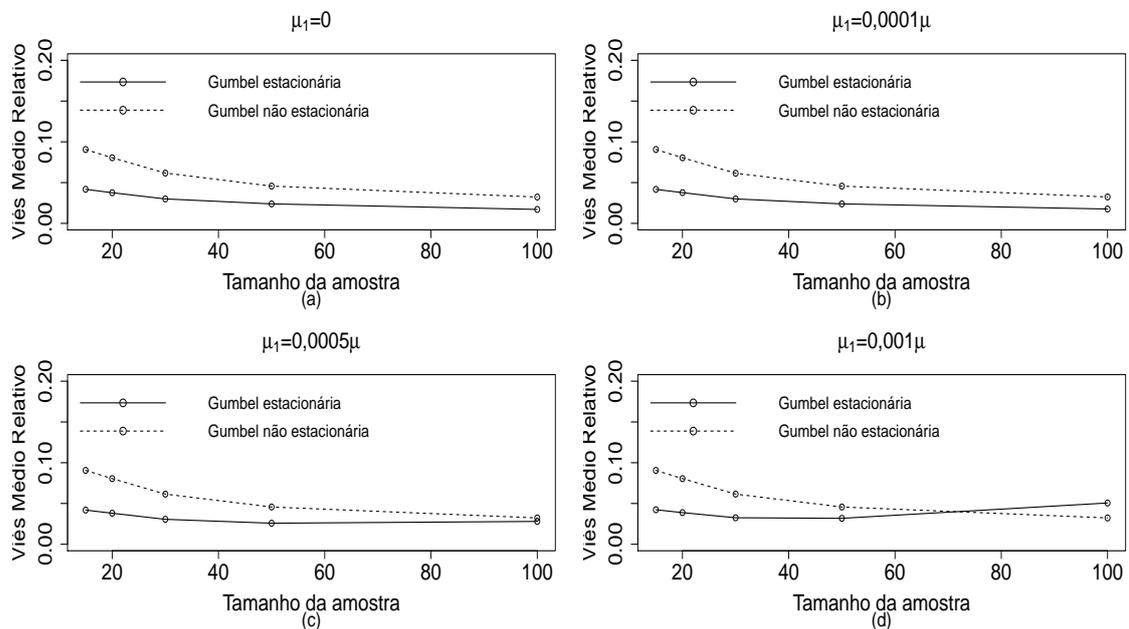


Figura 8 - Viés médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

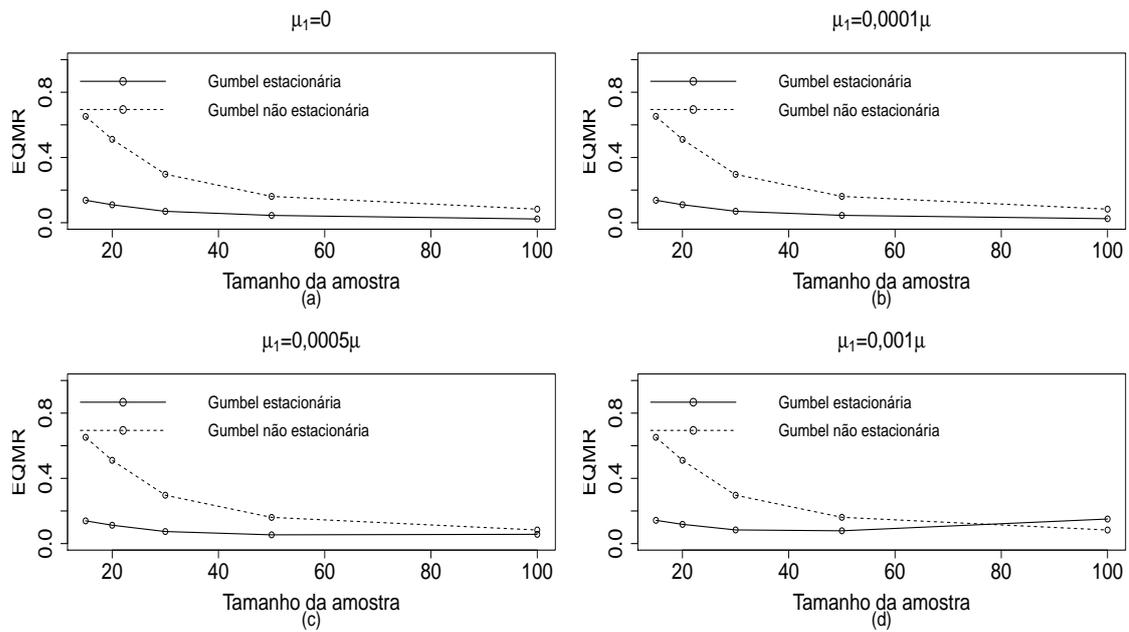


Figura 9 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

Na Figura 8 a estimativa do parâmetro da Gumbel estacionária é mais acurada do que a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacionária para os casos em que  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_1 = 0,0001\mu$ , e  $\mu_1 = 0,0005\mu$  em todo tamanho amostral.

Na Figura 9 (a), (b) e (c) o estimador do parâmetro da Gumbel estacionária apresentou estimativas com menor EQMR para todo tamanho amostral. Já na Figura 9 (d) isso ocorre até o tamanho amostral 80 aproximadamente.

Ao comparar a Figura 4 com a Figura 8, e a Figura 5 com a Figura 9, observa-se que o valor do parâmetro  $\mu$  é fixo, sendo  $\mu = 50$ , e os valores do parâmetro  $\sigma$  variam em 2 e 10. Note que quando  $\sigma = 10$ , maior será o tamanho da amostra em que as estimativas do parâmetro da Gumbel estacionária irá abranger possuindo menor viés e EQMR em relação aos mesmos cenários em que  $\sigma = 2$ .

Agora, ao fixar  $\sigma = 10$  nas Figuras 6 e 8 e nas Figuras 7 e 9, note que os valores do parâmetro  $\mu$  variam em 30 e 50. Daí segue que quando  $\mu = 30$ , maior será o tamanho da amostra em que as estimativas do parâmetro da Gumbel estacionária irá abranger possuindo menor viés e EQMR em relação aos mesmos cenários em que  $\mu = 50$ .

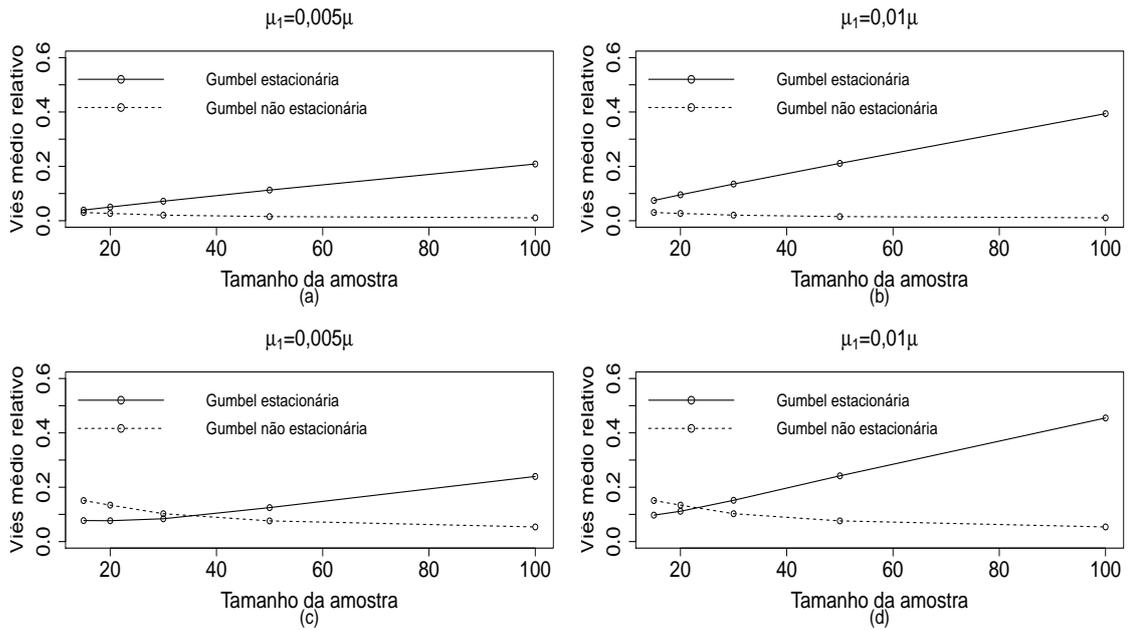


Figura 10 - Viés médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , e  $\mu = 30$  e  $\sigma = 10$  respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de maiores intensidades.

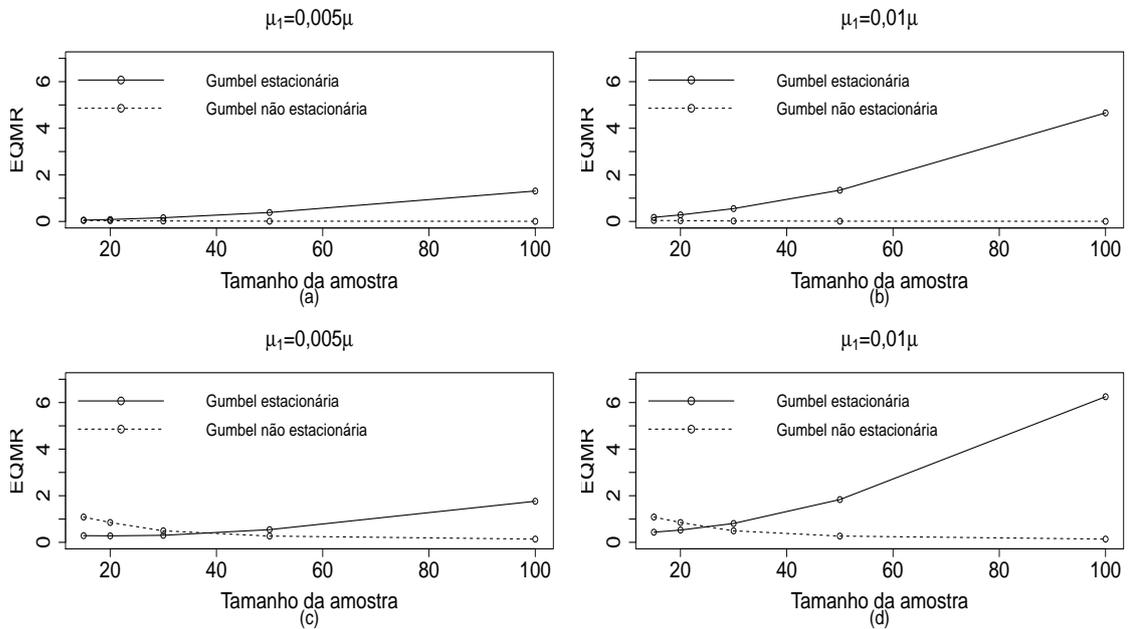


Figura 11 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , e  $\mu = 30$  e  $\sigma = 10$  respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de maiores intensidades.

Os resultados da Figura 10 mostram que para os casos em que  $\mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , as

estimativas do parâmetro da Gumbel não estacionária apresentou menor viés para todo tamanho amostral, o que não acontece para todo tamanho amostral em que  $\mu = 30$  e  $\sigma = 10$ . Note também que quando a intensidade da inclinação aumenta ((b) e (d)), o viés apresenta uma tendência linear acentuada para a Gumbel estacionária.

Nota-se na Figura 11 (a) e (b) que a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacionária apresentou menor EQMR para todo tamanho amostral. Já para os casos (c) e (d) as curvas se cruzam no tamanho amostral 40 e 25 aproximadamente e respectivamente. Note também que assim como ocorreu para o viés, conforme a intensidade da inclinação aumenta ((b) e (d)), o EQMR apresenta uma tendência linear acentuada para a Gumbel estacionária

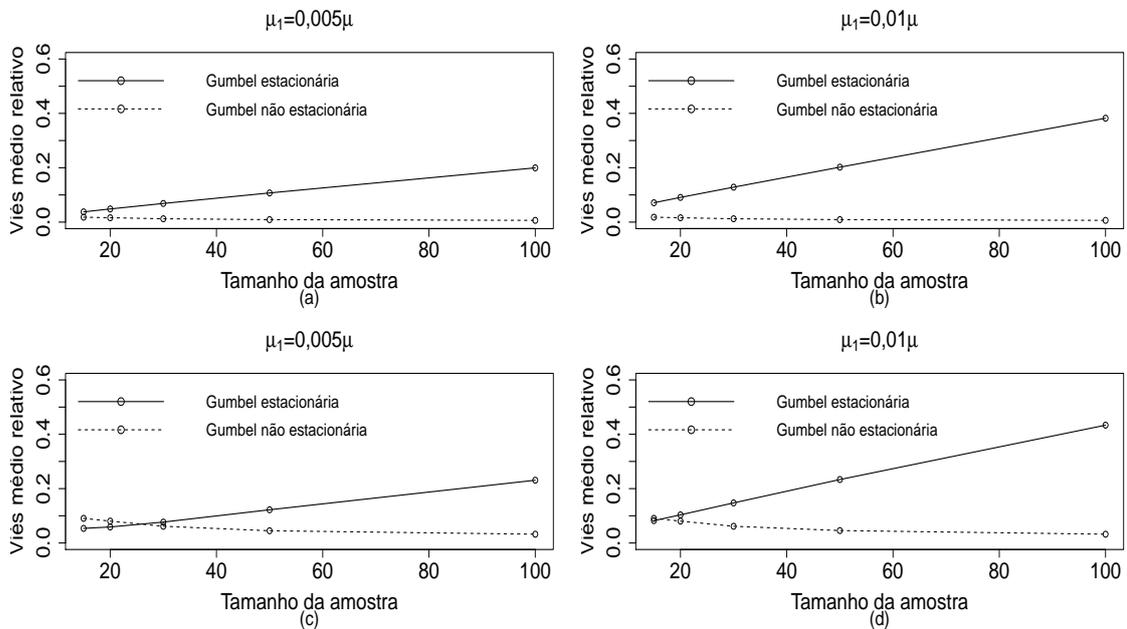


Figura 12 - Viés médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 2$ , e  $\mu = 50$  e  $\sigma = 10$  respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de maiores intensidades.

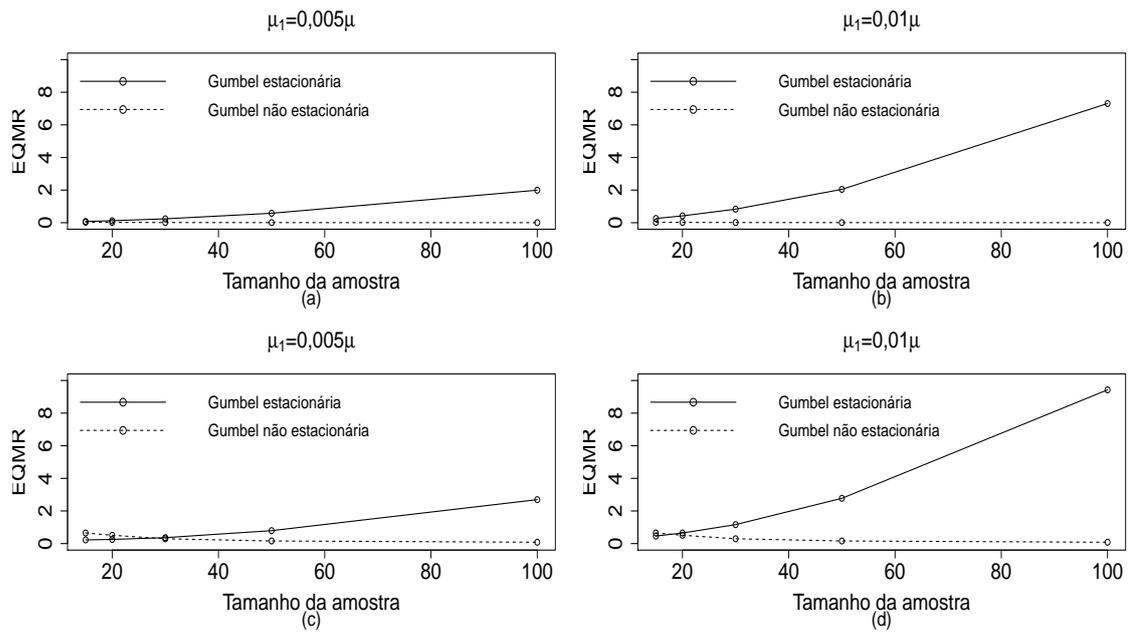


Figura 13 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro posição considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 2$ , e  $\mu = 50$  e  $\sigma = 10$  respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de maiores intensidades.

Na Figura 12 note que para os casos em que  $\mu = 50$  e  $\sigma = 2$ , a Gumbel não estacionária apresentou menor viés para todo tamanho amostral, o que não acontece para amostras pequenas em que  $\mu = 50$  e  $\sigma = 10$ .

Observe a Figura 13 que conforme a intensidade da inclinação aumenta ((b) e (d)), o EQMR apresenta uma tendência linear acentuada para a Gumbel estacionária.

Nas Figuras seguintes serão exibidos o VMR e o EQMR do parâmetro escala ( $\sigma$ ).

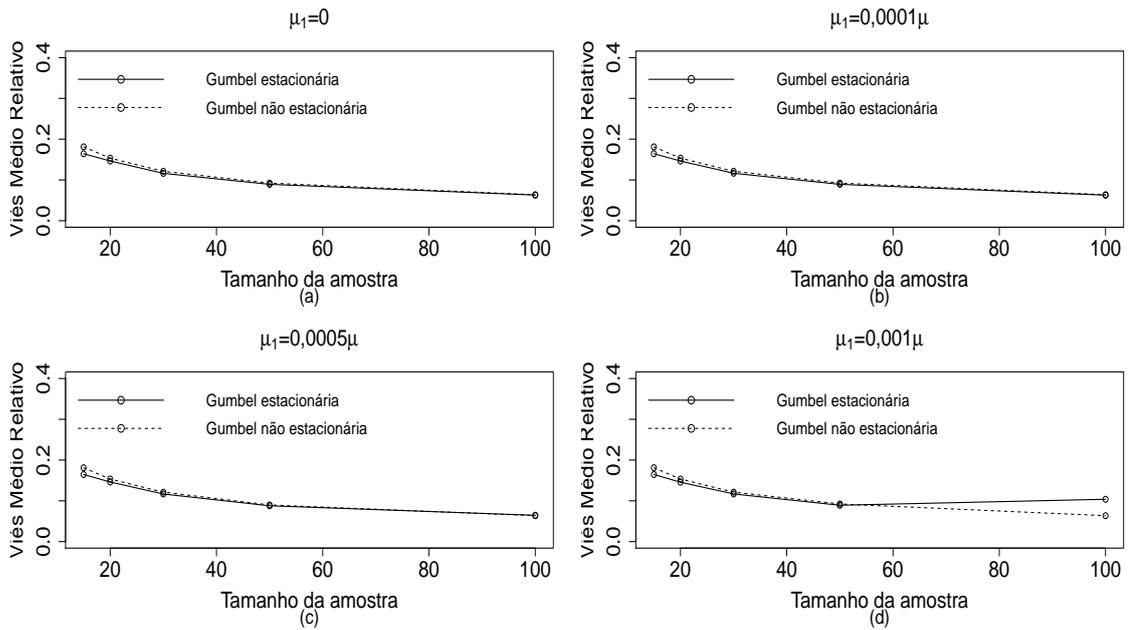


Figura 14 - Viés médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

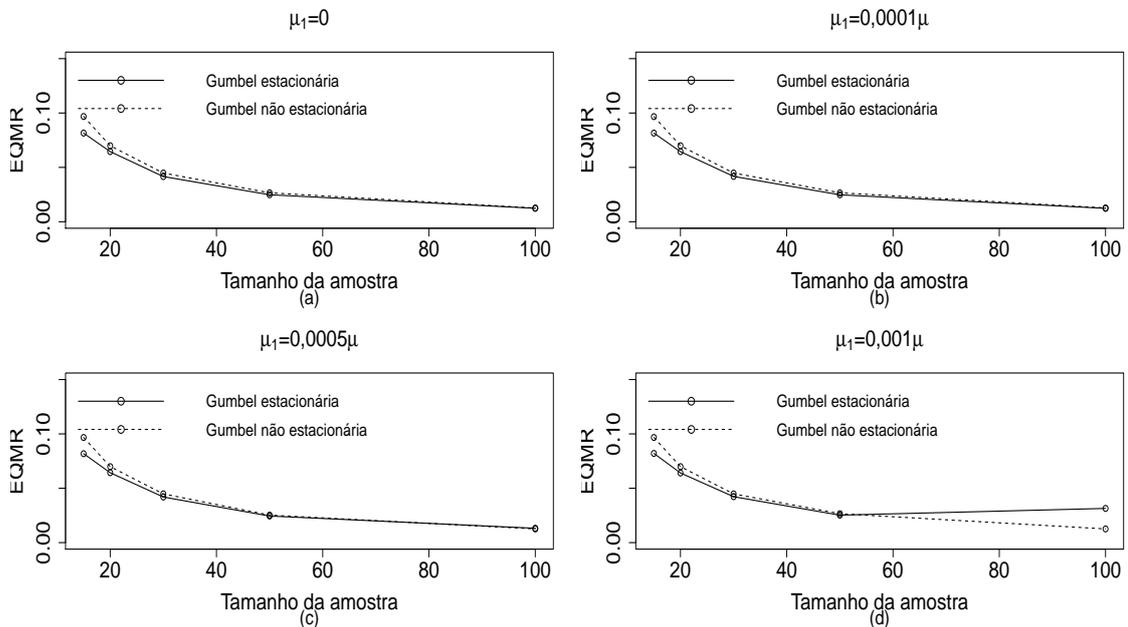


Figura 15 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

Os resultados exibidos na Figura 14 mostram que para  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_1 = 0,0001\mu$  e  $\mu_1 = 0,0005\mu$  a estimativa dos parâmetros das duas distribuições apresentam comportamentos parecidos para o viés do parâmetro escala, sendo a estimativa do parâmetro do modelo Gumbel

estacionário mais acurada que a estimativa do parâmetro do modelo Gumbel não estacionário. Já para  $\mu_1 = 0,001$  a estimativa do modelo Gumbel apresentou ser ligeiramente mais acurada até aproximadamente  $n = 50$ , sendo que após esse tamanho amostral, a estimativa do modelo Gumbel não estacionário apresentou ser ligeiramente mais acurada.

Os resultados da Figura 15 (a), (b) e (c) mostram comportamentos similares entre as estimativas, sendo a estimativa do parâmetro da Gumbel estacionária ligeiramente mais precisa que a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacionária.

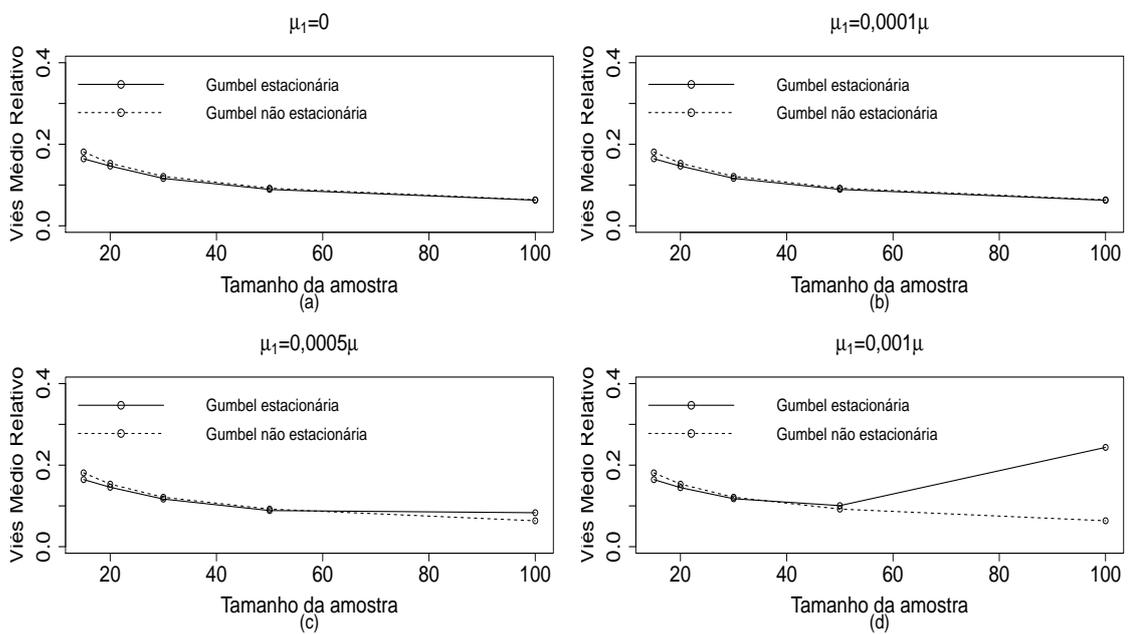


Figura 16 - Viés médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

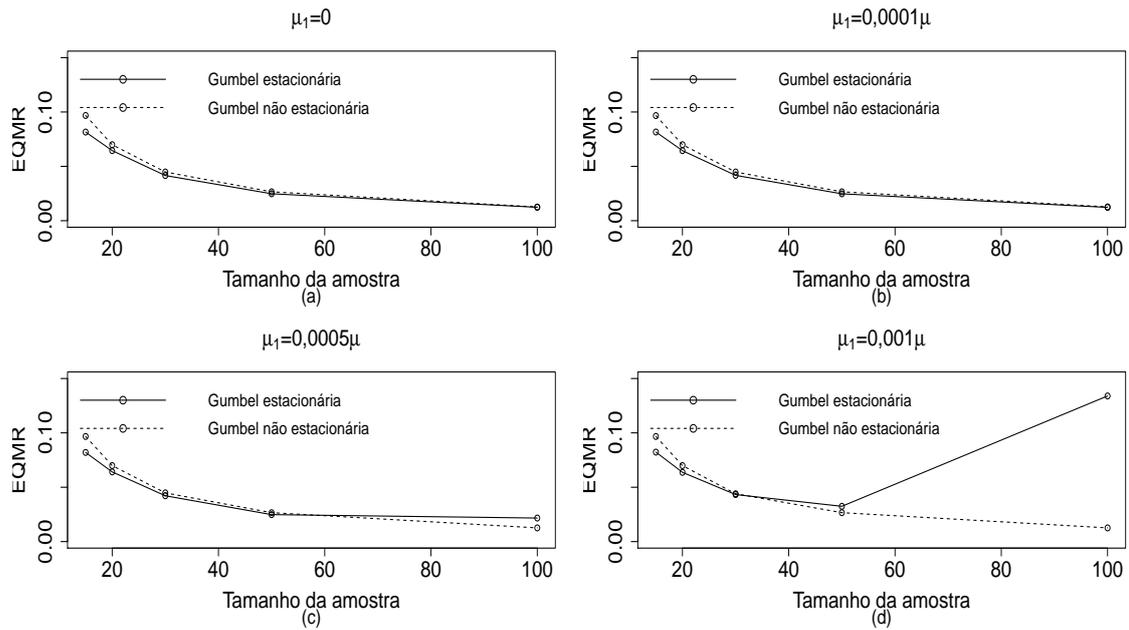


Figura 17 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 2$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

Na Figura 16 a estimativa do parâmetro da Gumbel estacionária apresentou ser mais acurada do que a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacionária para os casos em que  $\mu_1 = 0$  e  $\mu_1 = 0,0001\mu$  para todo tamanho amostral. Comparando a Figura 16 (a) e (b) com a Figura 14 (a) e (b) respectivamente, note que as Figuras são similares. Porém, na Figura 16 (d), a estimativa do parâmetro da Gumbel deixa de ser acurada em relação a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacionária quando as amostras são maiores que 50 aproximadamente.

Os resultados exibidos na Figura 17 (a) e (b) são similares aos da Figura 15 (a) e (b). Porém, na Figura 17 (d), para os tamanhos amostrais maiores que 40, a estimativa do parâmetro da Gumbel deixa de ser precisa em relação a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacionária.

As Figuras 14 (a) e (b) e as Figuras 16 (a) e (b) são parecidas, e as Figuras 15 (a) e (b) e as Figuras 17 (a) e (b) também são parecidas, sendo que a diferença entre as Figuras acontece para o caso em que  $\mu_1 = 0,001\mu$ , em que  $\sigma = 2$  começa a apresentar resultados viesados e imprecisos respectivamente quando  $n = 50$  ou mais, para o estimador da Gumbel estacionária.

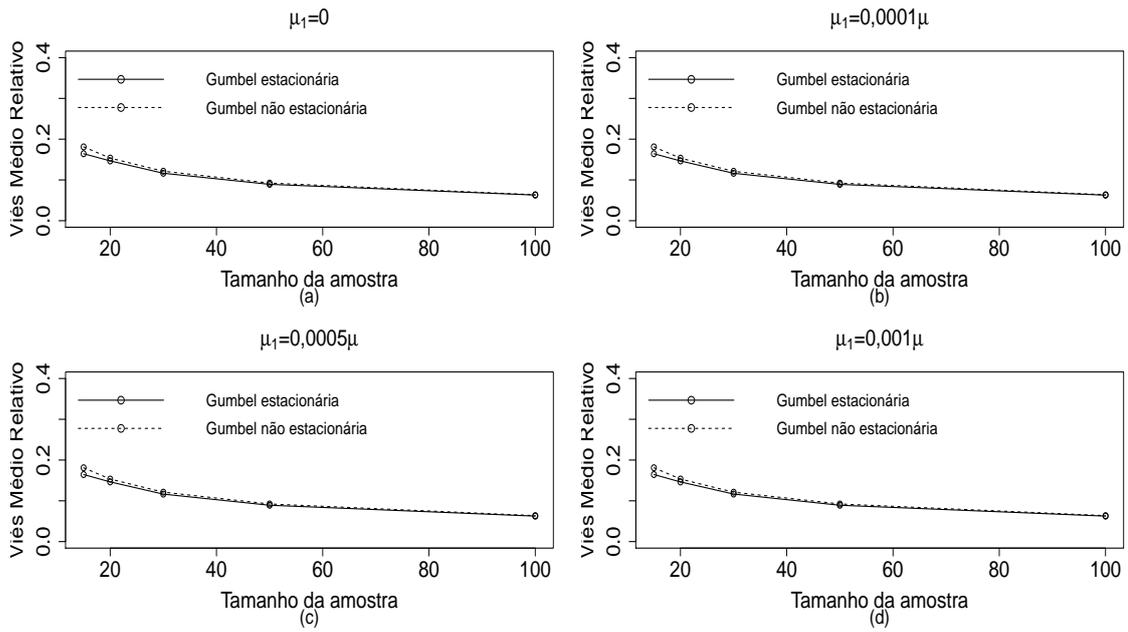


Figura 18 - Viés médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

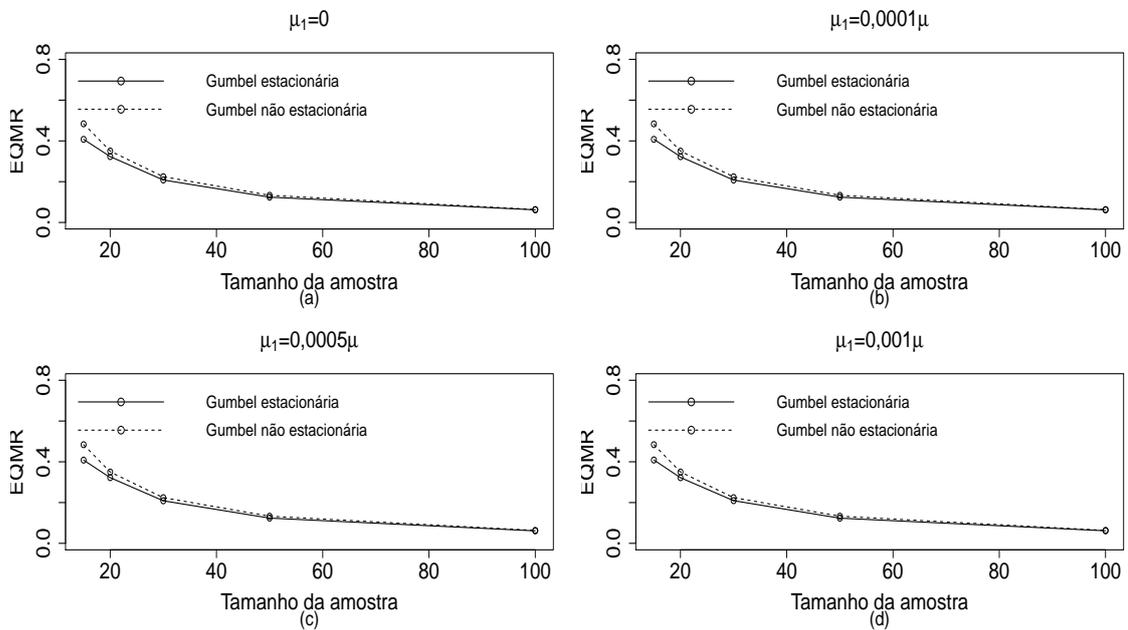


Figura 19 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

Observa-se na Figura 18 e 19 que a estimativa do parâmetro da Gumbel estacionária é ligeiramente mais acurada e precisa do que a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacio-

nária.

Os resultados apresentados nas Figuras 14 e 18, e nas Figuras 15 e 19 referente a  $\mu = 50$  são parecidos nas Figuras (a) e (b). Já nas Figuras (c) e (d), em que  $\sigma = 2$  a estimativa do parâmetro da Gumbel perde um pouco de acurácia e precisão em relação a  $\sigma = 10$ .

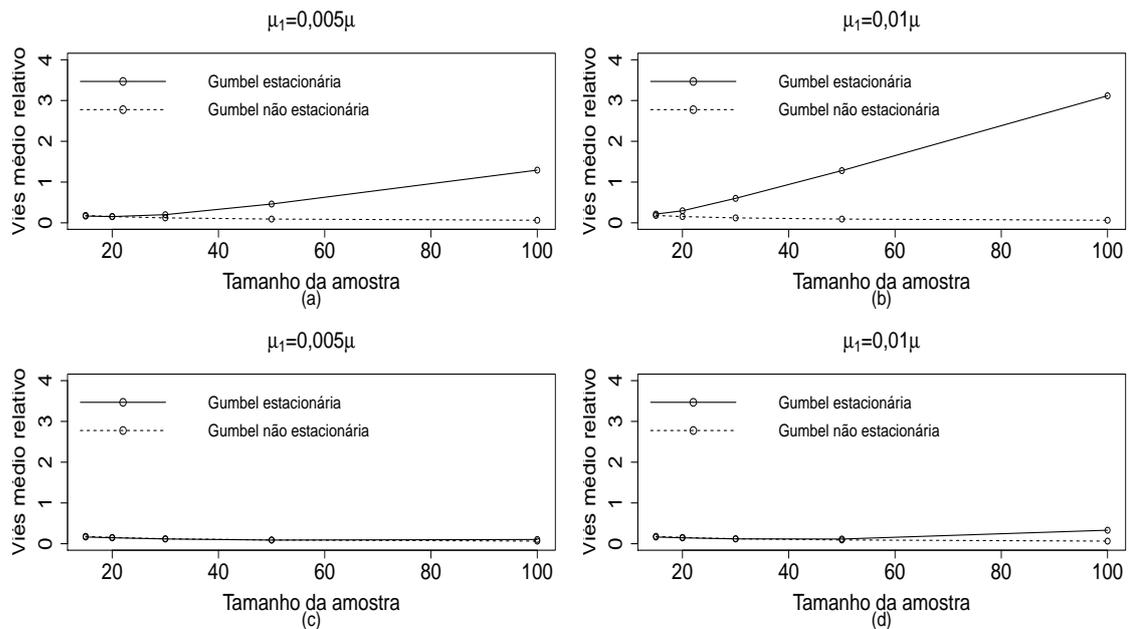


Figura 20 - Viés médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , e  $\mu = 30$  e  $\sigma = 10$  respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de maiores intensidades.

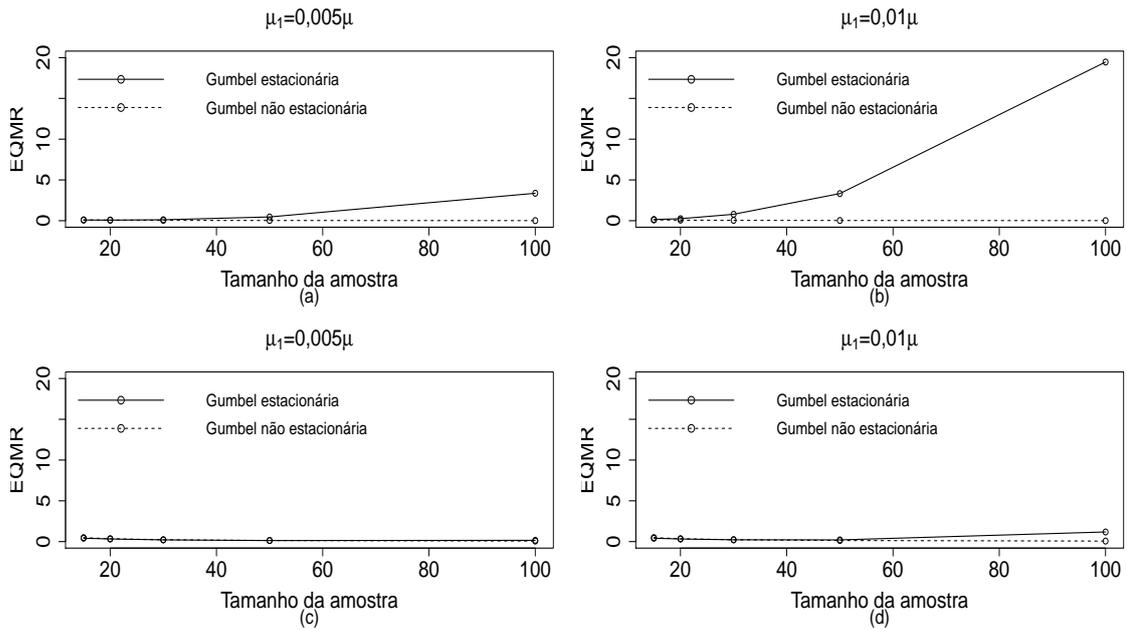


Figura 21 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , e  $\mu = 30$  e  $\sigma = 10$  respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de maiores intensidades.

Os resultados da Figura 20 mostram que a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacionária sempre apresenta resultados satisfatórios, próximo de zero, enquanto que a estimativa do parâmetro da Gumbel estacionária vai se tornando cada vez menos acurada conforme aumenta o tamanho da amostra.

Na Figura 21 (a) e (b) a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacionária apresentou menor EQMR. Já para o caso (d) isso só ocorre para o tamanho amostral igual a 60 aproximadamente.

Note também que a inclinação da curva é mais acentuada para a Gumbel estacionária quando  $\sigma = 2$ , tanto para o VMR quanto para o EQMR.

Em geral os resultados envolvendo o viés médio relativo do parâmetro escala mostram que para as inclinações de menores intensidades, os estimadores dos parâmetros das duas distribuições apresentam estimativas similares. Já para as inclinações de maior intensidade as estimativas do parâmetro da Gumbel não estacionária apresentou ser mais acurada conforme aumenta o tamanho amostral.

Em geral, o que se pode observar nesses cenários envolvendo o EQMR é que quando a inclinação é de menor intensidade, os estimadores dos parâmetros das duas distribuições

apresentam estimativas muito parecidas conforme aumenta o tamanho da amostra, com exceção das Figuras 15 (d), e 17(d).

Nas Figuras a seguir serão apresentados os gráficos do VMR e do EQM da inclinação respectivamente referente a estimativa do parâmetro da Gumbel não estacionária. Cada Figura será referente a uma inclinação  $\mu_1$  fixa, variando os parâmetros em 4 possíveis situações.

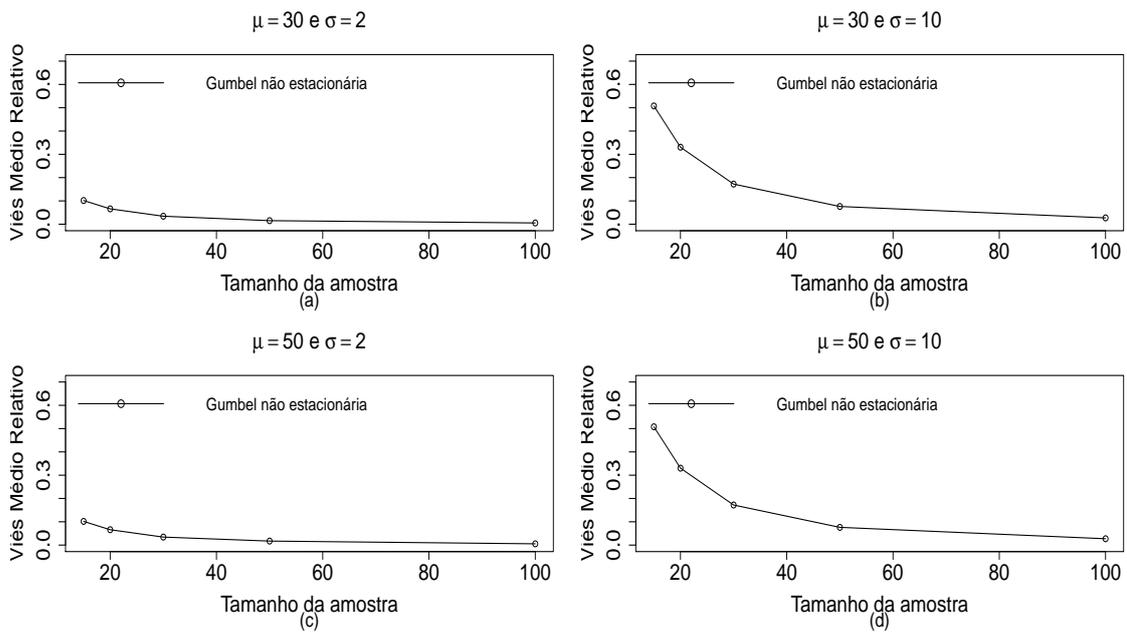


Figura 22 - Viés médio relativo da inclinação considerando  $\mu_1 = 0$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

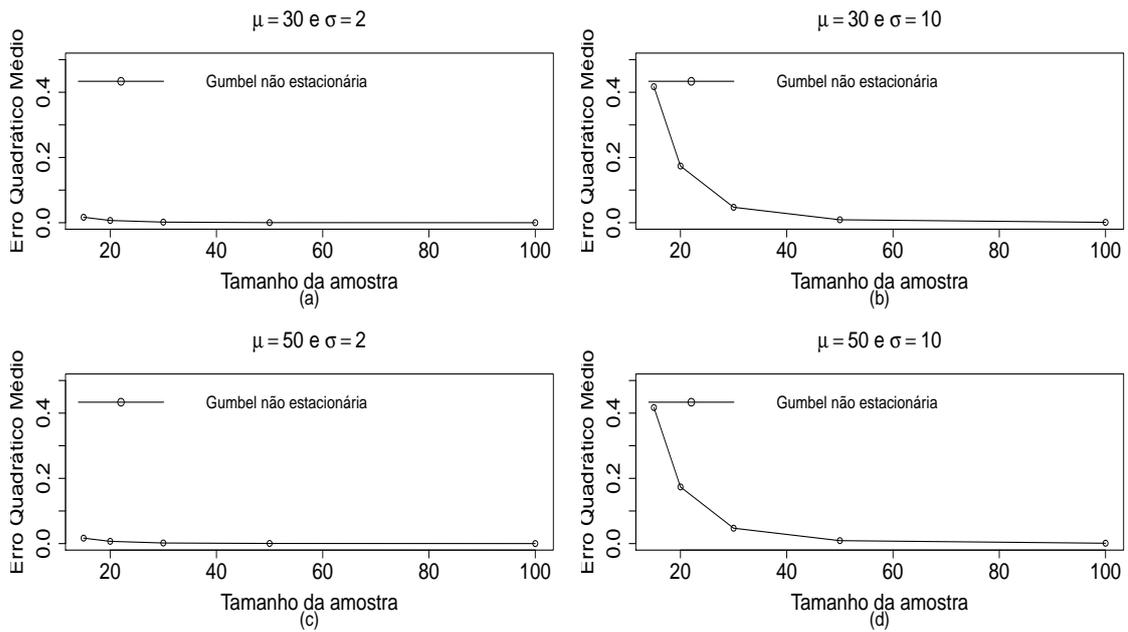


Figura 23 - Erro quadrático médio da inclinação considerando  $\mu_1 = 0$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

Observe nas Figuras 22 e 23 que para diversos cenários fixando  $\mu_1 = 0$  os valores obtidos pelo estimador do parâmetro está próximo de zero conforme aumenta o tamanho amostral. Note também que para tamanhos de amostras pequenas, para  $\sigma = 10$ , o estimador não capta tendência com mesma qualidade que capta para  $\sigma = 2$ .

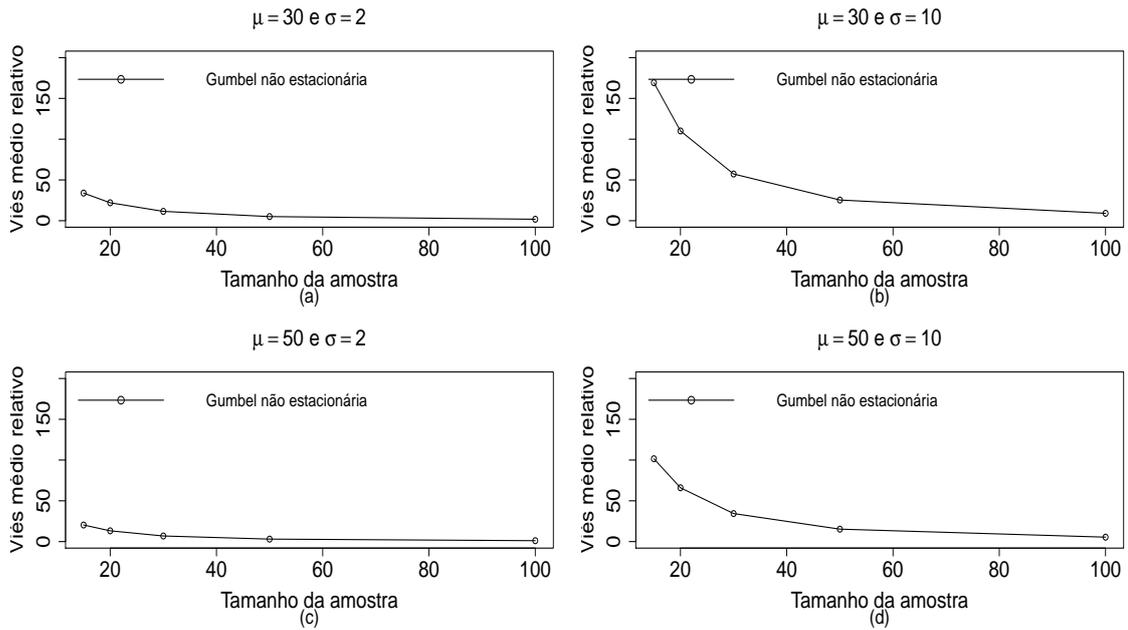


Figura 24 - Viés médio relativo da inclinação considerando  $\mu_1 = 0,0001\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

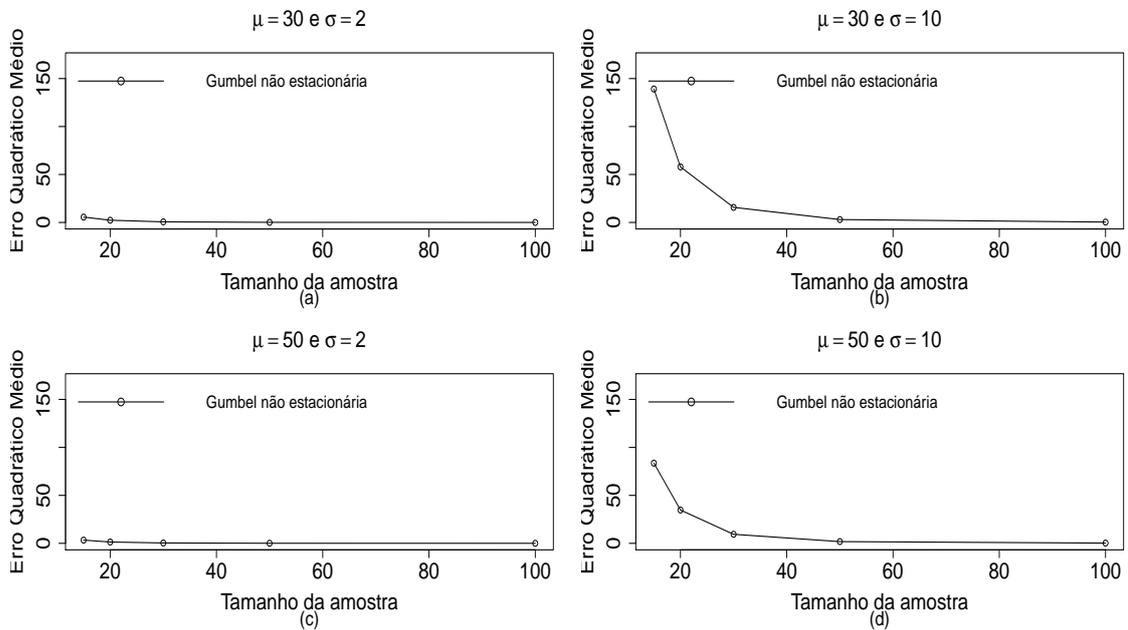


Figura 25 - Erro quadrático médio da inclinação considerando  $\mu_1 = 0,0001\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

Nas Figuras 24 e 25, fixando  $\mu_1 = 0,0001\mu$ , note que para tamanhos de amostras pequenas, com  $\sigma = 10$  o estimador não capta tendência, sendo as estimativas viesadas (Figura

24) e não apresentando precisão (Figura 25) com mesma qualidade que capta para  $\sigma = 2$ , embora para estes casos a estimativa continua apresentando ser viesadas para amostras pequenas mas com menor intensidade.

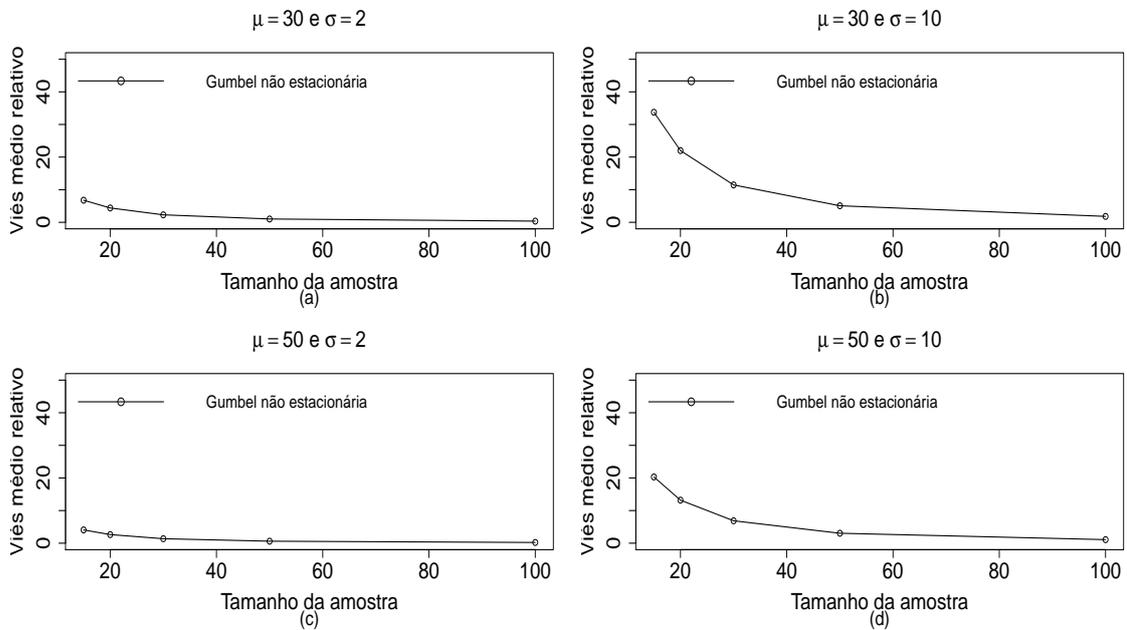


Figura 26 - Viés médio relativo da inclinação considerando  $\mu_1 = 0,0005\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

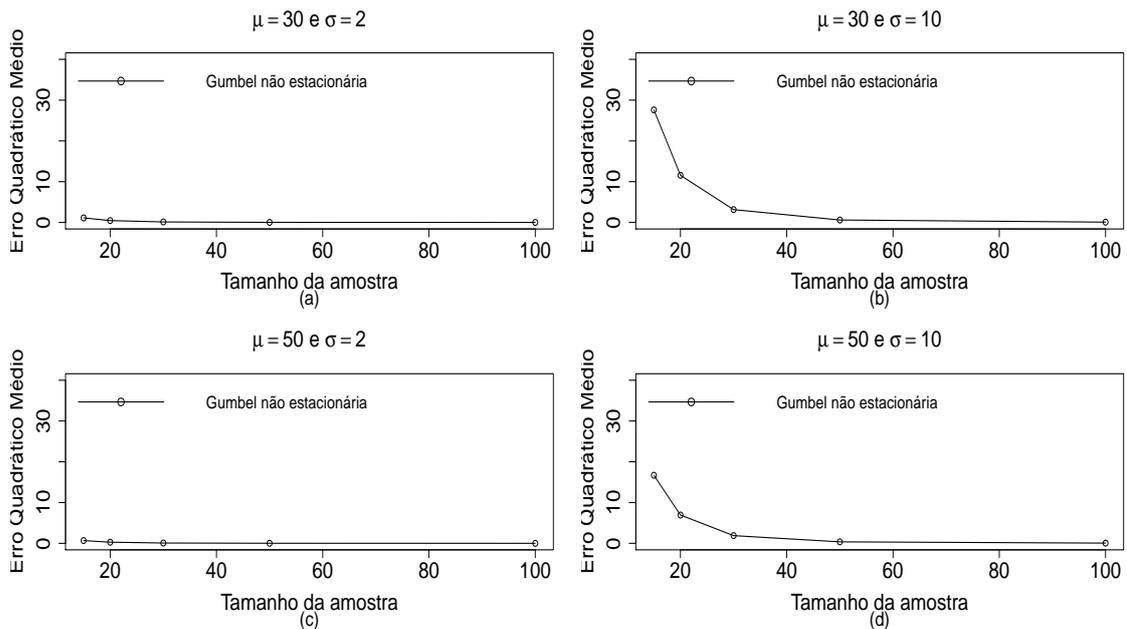


Figura 27 - Erro quadrático médio da inclinação considerando  $\mu_1 = 0,0005\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

Nas Figuras 26 e 27, fixando  $\mu_1 = 0,0005\mu$ , note que para tamanhos de amostras pequenas, com  $\sigma = 10$  o estimador não capta tendência, apresentando ser mais viesada e imprecisa do que para  $\sigma = 2$ . Destaque também para os casos (b) e (d) em que para  $\mu = 30$  o estimador apresenta estimativas mais viesadas e imprecisas do que para  $\mu = 50$  quando as amostras são pequenas.

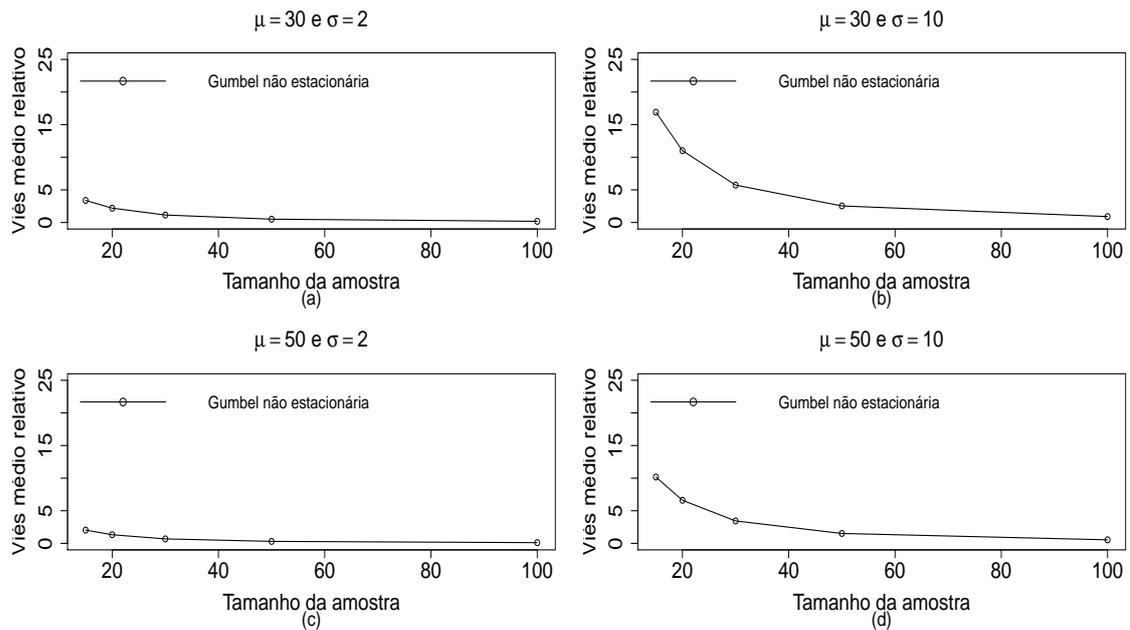


Figura 28 - Viés médio relativo da inclinação considerando  $\mu_1 = 0,001\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

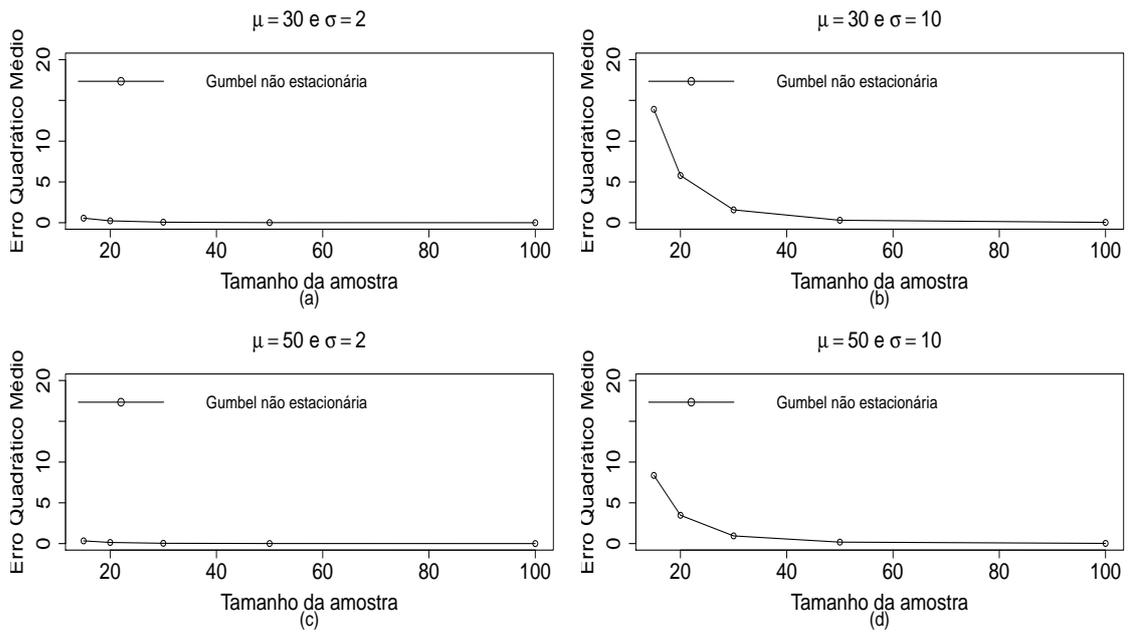


Figura 29 - Erro quadrático médio da inclinação considerando  $\mu_1 = 0,001\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

Nas Figuras 28 e 29, fixando  $\mu_1 = 0,001\mu$ , note que para tamanhos de amostras pequenas, com  $\sigma = 10$  o estimador não capta tendência e não apresenta mesma precisão com mesma qualidade que capta para  $\sigma = 2$ . Destaque também para os casos (b) e (d) em que para  $\mu = 30$  o estimador apresenta estimativas mais viesadas e imprecisas do que para  $\mu = 50$  para amostras pequenas.

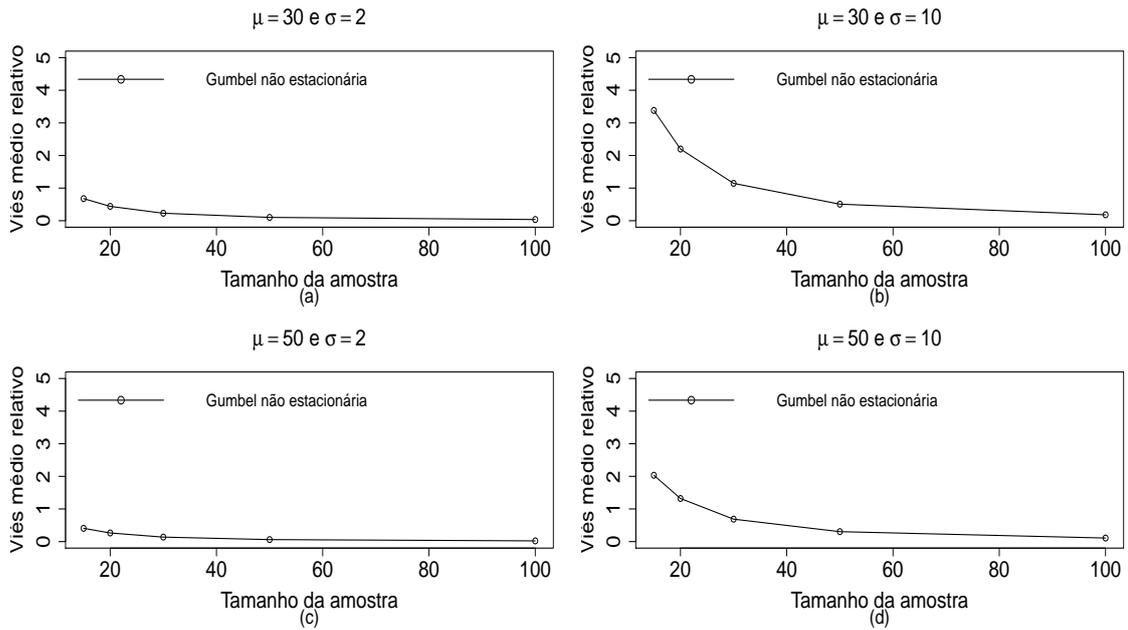


Figura 30 - Viés médio relativo da inclinação considerando  $\mu_1 = 0,005\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

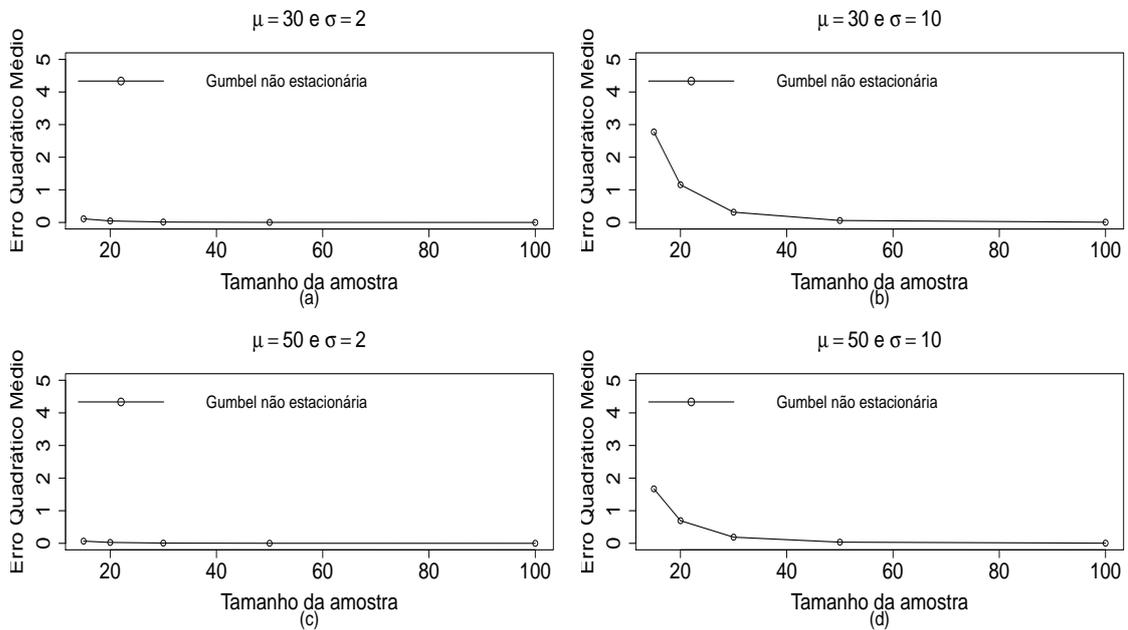


Figura 31 - Erro quadrático médio da inclinação considerando  $\mu_1 = 0,005\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

Observe que na Figura 30 (a) e (c) o estimador apresentou estimativas sempre próximo de zero para todo tamanho amostral. Já para os casos (b) e (d) o estimador não capta tendência

para os primeiros tamanhos amostrais, porém as estimativas também se aproximam de zero conforme aumenta o tamanho da amostra.

Note que na Figura 31 (a) e (c) o estimador apresentou em suas estimativas EQM sempre próximo de zero para todo tamanho amostral. Já para os casos (b) e (d) o estimador não capta tendência para os primeiros tamanhos amostrais porém suas estimativas também se aproxima de zero conforme aumenta o tamanho da amostra.

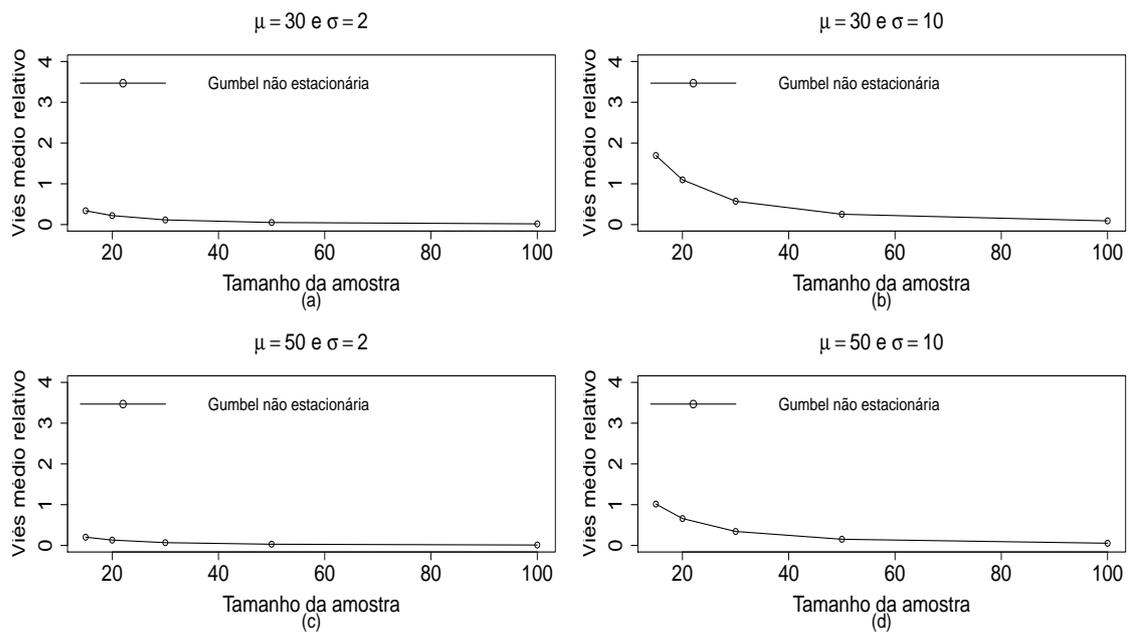


Figura 32 - Viés médio relativo da inclinação considerando  $\mu_1 = 0,01\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

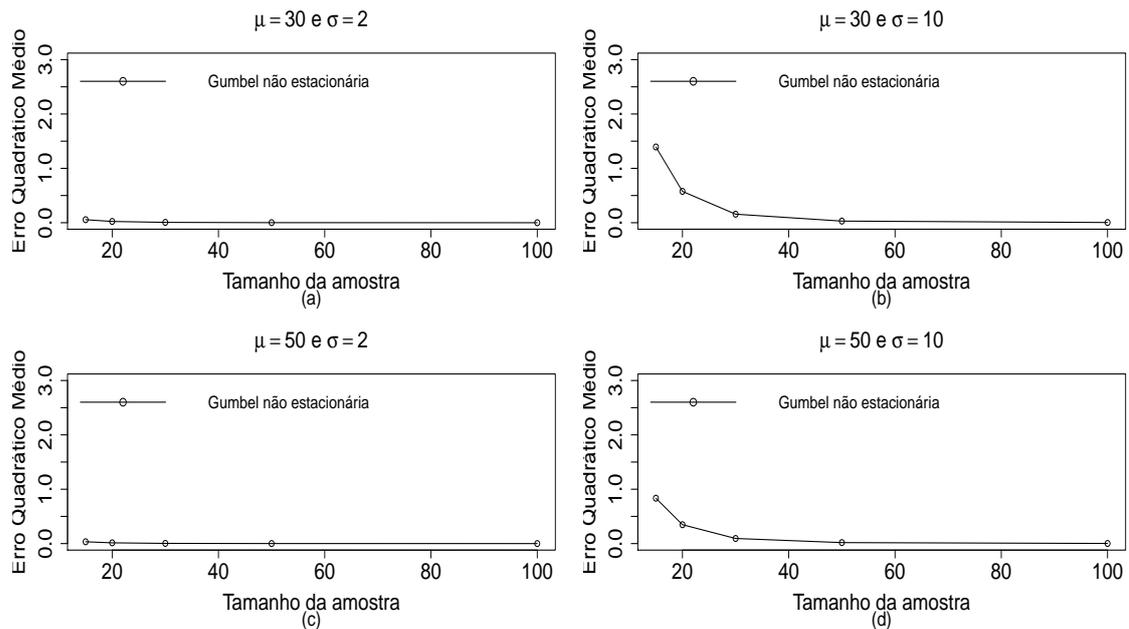


Figura 33 - Erro quadrático médio da inclinação considerando  $\mu_1 = 0,01\mu$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos.

Na Figura 32 (a) e (c) o estimador apresentou possuir estimativas com viés sempre próximo de zero para todo tamanho amostral. Já para os casos (b) e (d) o estimador não capta tendência para os primeiros tamanhos amostrais porém também se aproxima de zero conforme aumenta o tamanho da amostra.

Na Figura 33 (a) e (c) o estimador apresentou estimativas com EQM sempre próximo de zero para todo tamanho amostral. Já para os casos (b) e (d) o estimador apresentou estimativas com EQM próximo de dois e um respectivamente e inicialmente, porém também se aproxima de zero conforme aumenta o tamanho da amostra. Além disso, as estimativas do estimador mostrou ser mais satisfatórias para  $\sigma = 2$  do que para os casos em que  $\sigma = 10$  para amostras pequenas.

Nos resultados apresentados até o momento relacionado com o parâmetro inclinação ( $\mu_1$ ), para  $\sigma = 2$ , o estimador apresentou estimativas mais satisfatórias do que para os casos em que  $\sigma = 10$  para amostras pequenas. Conforme aumenta o tamanho da amostra, o estimador apresenta estimativas com viés próximo de zero e isso se deve pelo fato do estimador de máxima verossimilhança ser assintoticamente não viesado.

Outro fato interessante é que entre os casos (b) e (d) que apresentaram resultados inferiores aos casos (a) e (c), o caso (d) apresentou ser mais acurado e preciso que o caso (b)

para tamanhos amostrais pequenos, isto é, houve uma melhora quando se aumentou o valor do parâmetro  $\mu$ .

Outro ponto interessante que é possível de se observar analisando todas as Figuras - com exceção de  $\mu_1 = 0$  - é que conforme a inclinação vai se intensificando, menor é o viés que a estimativa do estimador apresenta para tamanhos amostrais pequenos, isto é, o estimador consegue captar melhor a tendência conforme aumenta a intensidade da inclinação. Além disso, com exceção de  $\mu_1 = 0$ , conforme a inclinação vai se intensificando, menor é o EQM que a estimativa do estimador apresenta para tamanhos amostrais pequenos, isto é, o estimador consegue captar melhor a tendência conforme aumenta a intensidade da inclinação.

#### 4.3 TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇAS

Na Figura a seguir será apresentado a porcentagem de rejeição de  $H_0$  para os diversos tamanhos amostrais e para algumas inclinações, utilizando o Teste da Razão de Verossimilhança com nível de significância de 5%. Segue abaixo o par de hipóteses em que  $\mu_1$  é o parâmetro inclinação do modelo não estacionário:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = 0 \\ H_1 : \mu_1 \neq 0 \end{cases}$$

Portanto, ao não rejeitar  $H_0$  assume-se que os dois modelos apresentam a mesma quantidade de informação, optando-se então pelo Princípio de Parcimônia pelo modelo Gumbel estacionário. Caso rejeite  $H_0$ , assume-se que os dois modelos apresentam quantidade de informações diferentes, optando-se então pelo modelo Gumbel não estacionário. Vale lembrar que essa comparação não será feita para todos os casos devido a comportamentos similares dos dados.

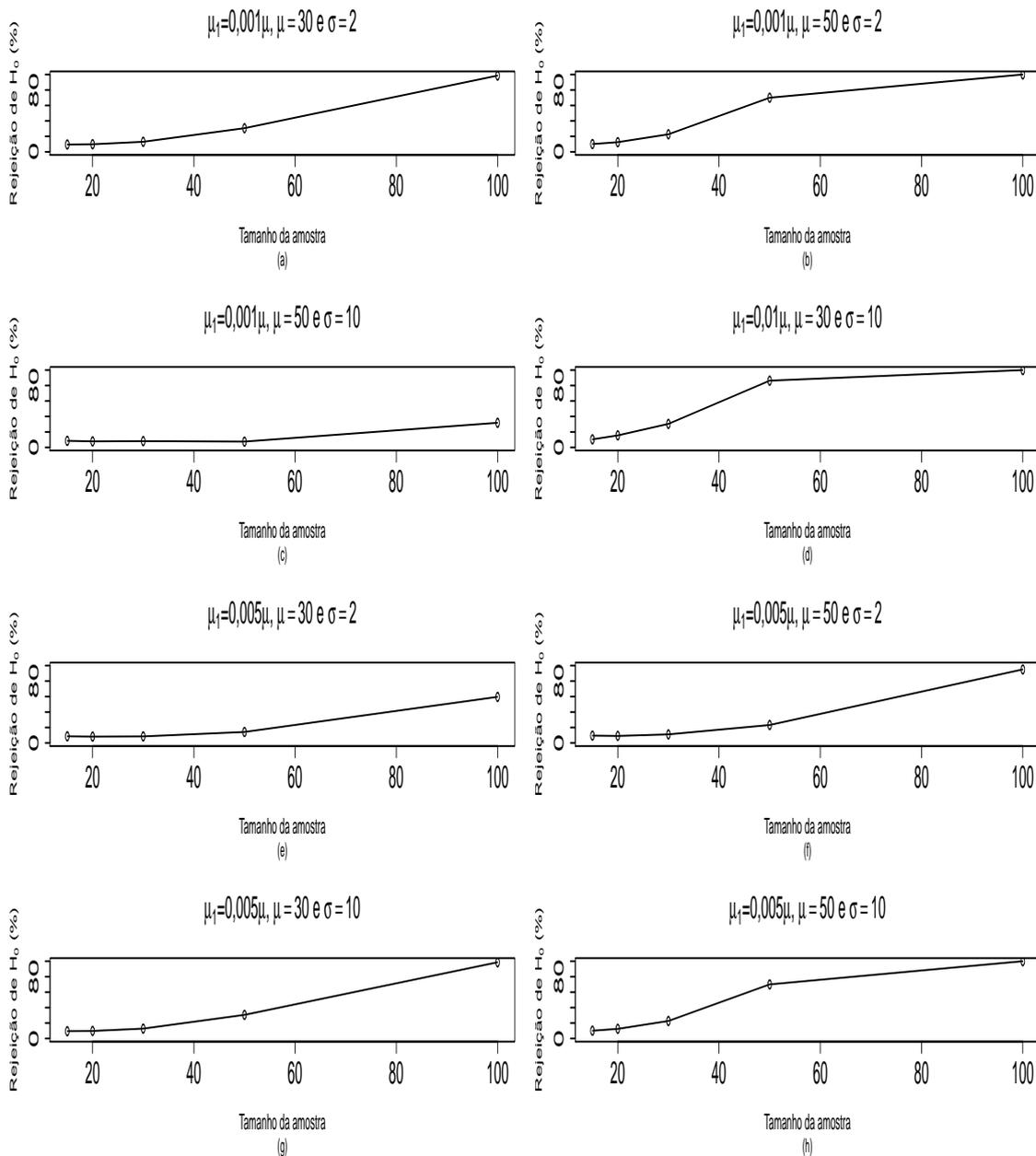


Figura 34 - Porcentagem de rejeição de  $H_0$  do parâmetro posição  $\mu_0$  considerando diferentes tamanhos amostrais, inclinações e valores paramétricos.

Na Figura 38 (a) em que  $\mu_1 = 0,001\mu, \mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , com tamanho amostral menor ou igual a 30, o teste da razão de verossimilhanças mostra que em menos de 20% das amostras que foram simuladas, é aconselhável fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária. E para tamanho amostral igual a 100, 100% das amostras simuladas, o aconselhável é fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária. O mesmo vale para a Figura 38 (g).

Observe que na Figura 38 (b) e (d), com tamanho amostral aproximadamente igual a

20, o teste da razão de verossimilhanças exhibe que em menos de 20% das amostras que foram simuladas, é aconselhável fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária. E para tamanho amostral igual a 100, o teste da razão de verossimilhanças mostra que em 100% das amostras simuladas, o aconselhável é fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária.

Já na Figura 38 (c), observe que com tamanho amostral aproximadamente igual a 70, o teste da razão de verossimilhanças mostra que em menos de 50% das amostras que foram simuladas, é aconselhável fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária. E para tamanho amostral igual a 100, o teste da razão de verossimilhanças mostra que em 30% das amostras simuladas, o aconselhável é fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária.

Agora na Figura 38 (e) com  $\mu_1 = 0,0005\mu$ ,  $\mu = 30$  e  $\sigma = 2$ , com tamanho amostral igual a 20, o teste da razão de verossimilhanças mostra que em 10% das amostras que foram simuladas, é aconselhável fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária. Consequentemente 90% é favorável às estimativas do estimador do parâmetro do modelo Gumbel estacionário. E para tamanho amostral igual a 100, o teste da razão de verossimilhanças mostra que em 60% das amostras simuladas, o aconselhável é fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária. Consequentemente 40% é favorável às estimativas do estimador do parâmetro da Gumbel estacionária.

Observe agora a Figura 38 (f), com tamanho amostral igual a 40, o teste da razão de verossimilhanças exhibe que em aproximadamente 20% das amostras que foram simuladas, é aconselhável o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária. E para tamanho amostral igual a 100, o teste da razão de verossimilhanças exhibe em aproximadamente 80% das amostras simuladas, o aconselhável é fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária.

Observe também que na Figura 38 (h) em que  $\mu_1 = 0,005\mu$ ,  $\mu = 50$  e  $\sigma = 10$ , com tamanho amostral aproximadamente igual a 25, o teste da razão de verossimilhanças exhibe em menos de 20% das amostras que foram simuladas, é aconselhável fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária. E para tamanho amostral igual a 100, o teste da razão de verossimilhanças exhibe que em 100% das amostras simuladas, o aconselhável é fazer o ajuste utilizando a distribuição Gumbel não estacionária.

Estes resultados corroboram com os obtidos por Clarke (2003) que comparou o poder

de três testes de significância da tendência linear no parâmetro posição da distribuição Gumbel (Razão de Máxima Verossimilhança-RMV, Regressão Linear, e o teste não-paramétrico de Mann-Kendall), obtendo que o teste RMV revelou-se sempre mais poderoso do que os outros dois testes, para qualquer valor da tendência (positiva). Porém, para o menor valor do parâmetro de tendência linear estudado ( $\beta = 0,01282$ ), o teste RMV apresentou baixo poder para amostras de tamanho  $n = 30$  e  $n = 50$ , sendo de 25,7% e 35,8%, respectivamente.

#### 4.4 ANÁLISE DA PRECIPITAÇÃO PLUVIAL MÁXIMA DE JABOTICABAL-SP

Verifica-se na Tabela 1 os resultados do teste de Ljung-Box e do *Runs Test*, respectivamente, que a série de dados é independente e aleatória ( $p > 0,05$ ). Esses resultados corroboram com os resultados apresentados por Sansigolo (2008), em um estudo sobre os extremos anuais de precipitação pluvial máxima diária em Piracicaba-SP (1917-2004), e segundo o autor ao se analisar a série temporal de precipitação pluvial máxima anual, não detectou tendências significativas ao nível de 5%, ou seja, não verificou-se variações sistemáticas significativas no período de observação.

Tabela 1 - Resultados dos testes de independência e de aleatoriedade da série de precipitações pluviárias máximas anuais de Jaboticabal-SP (1963-1996)

Teste	Ljung-Box	<i>Runs test</i>
Valor $p$	0,1024	0,7276

Na Figura 35 estão apresentadas as precipitações pluviárias máximas anuais de Jaboticabal-SP no período de 1963 a 1996. Mesmo sendo identificado que a série é aleatória, pode-se observar que a partir do ano de 1974 tem-se um possível comportamento de tendência de aumento dos valores de precipitações pluviárias máximas, sendo este ano considerado como início da tendência estudada.

Uma vez que os dados satisfizeram as pressuposições exigidas, as distribuições Gumbel e Gumbel não estacionária podem ser ajustadas à série histórica estudada. As estimativas pontuais dos parâmetros distribuições Gumbel estacionária e não estacionária, obtidas pelo método da máxima verossimilhança, bem como o resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov (KS) são apresentadas na Tabela 2.

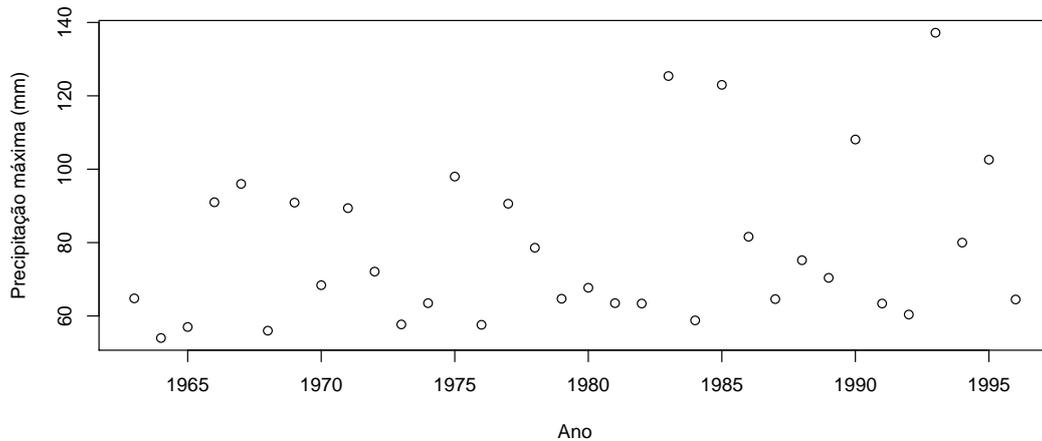


Figura 35 - Precipitações pluviométricas máximas anuais de Jaboticabal-SP no período de 1963 a 1996

Tabela 2 - Estimativas dos parâmetros distribuições Gumbel estacionária (GE) e não estacionária (GNE), obtidas pelo método da máxima verossimilhança, com seus respectivos erros padrão e valor-p do teste de Kolmogorov-Smirnov (KS)

Modelo	Estimativas			Teste KS
	$\hat{\mu}$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\sigma}$	Valor $p$
<i>GNE</i>	67,42 [2,87]	0,30 [0,24]	14,23 [2,09]	0,125
<i>GE</i>	68,89 [2,62]	-	14,60 [2,13]	0,163

Pelos resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov (Tabela 2), verifica-se que, tanto a distribuição Gumbel estacionária, como Gumbel não estacionária, ajustaram-se aos dados. Para avaliar a significância do parâmetro que indica tendência ( $\mu_1$ ) foi realizado o teste da razão de verossimilhança, obtendo que as distribuições Gumbel estacionária (*GE*) e não estacionária (*GNE*) são iguais ( $p = 0,2248$ ). Embora o parâmetro ( $\mu_1$ ) seja indicado não significativo ( $p > 5\%$ ), ambas distribuições foram utilizadas para prever os níveis máximos de precipitação pluvial em Jaboticabal-SP, para diferentes tempos de retorno.

Escolhendo o tempo de retorno de 20 anos (Tabela 3), considerando a distribuição Gumbel não estacionária, uma interpretação das informações pode ser feita do seguinte modo: espera-se que em um tempo médio de 20 anos ocorra pelo menos uma precipitação pluvial diária igual ou superior a 122,29mm em Jaboticabal-SP.

Observa-se na Tabela 3 que, exceto para o tempo de retorno de 8 anos, em todos os demais casos, os níveis máximos de precipitação pluvial (mm) preditos para Jaboticabal-SP utilizando-se a distribuição Gumbel não estacionária estão mais aproximados dos valores observados do que os preditos com a distribuição Gumbel estacionária. Isto é evidenciado analisando-

Tabela 3 - Predições dos níveis máximos de precipitação pluvial (mm) em Jaboticabal-SP, calculadas via distribuição Gumbel estacionária (*GE*) e não estacionária (*GNE*) para diferentes tempos de retorno e erro percentual absoluto médio (EPAM)

Modelo	Tempos de retorno (em anos)					EPAM (em%)
	4	8	12	16	20	
<i>GE</i>	87,08	98,28	104,54	108,90	112,26	13,70
<i>GNE</i>	92,95	105,07	112,36	117,82	122,29	8,74
Valor observado	97,5	101,0	133,0	133,0	133,0	-

se o erro percentual absoluto médio, considerando todos os tempos de retorno estudados, em que a distribuição Gumbel não estacionária apresentou um EPAM de aproximadamente 5 pontos percentuais menor que o cometido pela Gumbel estacionária.

Este resultado corrobora os obtidos no estudo de simulação, pois fazendo-se a relação das estimativas de  $\hat{\mu}_1$  por  $\hat{\mu}$  (0,30/67,4), tem-se que  $\hat{\mu}_1 = 0,0044\hat{\mu}$ , e como observado na Figura 31, quando  $\mu_1 = 0,005\mu$ , se for aplicada a distribuição Gumbel não estacionária leva a um menor viés médio relativo do parâmetro posição, (Figura 7 (c)), e escala (Figura 13 (c)), a um menor erro quadrático médio relativo do parâmetro posição (Figura 25 (c)), e escala (Figura 31 (c)), o que pode influenciar na predição dos níveis de retorno.

## 5 CONCLUSÕES

De posse dos resultados apresentados e da discussão discorrida, pode-se concluir que:

a) Se a inclinação for maior que  $0,001\mu$ ; ou se o tamanho da amostra for maior ou igual a 50, e existir tendência, deve-se optar pelo ajuste da distribuição Gumbel não estacionária;

b) Se a amostra for menor ou igual a 30, o estimador do parâmetro posição da Gumbel não estacionária é viesado para situações sem a presença de tendência, sendo seu efeito amenizado com aumento da amostra;

c) As distribuições Gumbel e Gumbel não estacionária ajustaram à série histórica de precipitações pluviiais máximas anuais de Jaboticabal-SP de 1963 a 1996;

d) Predizer os níveis máximos de precipitação pluvial em Jaboticabal-SP por meio da distribuição Gumbel não estacionária levou a uma menor erro de predição, mesmo com o parâmetro ( $\mu_1$ ) sendo não significativo.

## REFERÊNCIAS

- AQUECIMENTO global - A Holanda toma suas providências. **BRASIL247**, 21 set. 2011. Disponível em: <<http://www.brasil247.com/pt/247/revista-oasis/15607/Aquecimento-global—A-Holanda-toma-suas-providências.htm>>. Acesso em: 15 de out. de 2016.
- BADDOUR, O; KONTONGOMDE, H; TREWIN, B. **The role of climatological normals in a changing climate**. Geneva: World Meteorological Organization. 2007. Disponível em:<<http://www.wmo.int/pages/prog/wc p/wcdmp/documents/WCDMP No61.pdf>>. Acesso em: 30 nov. 2016.
- BAUTISTA, E. A. L.; ZOCCHI, S. S.; ANGELOCCI, L. R. A Distribuição generalizada de valores extremos aplicada ao ajuste de dados de velocidade máxima do vento em Piracicaba, São Paulo, Brasil. **Revista Matemática e Estatística**, São Paulo, v. 22, n. 1, p. 95-111, 2004.
- BEIJO, L. A.; MUNIZ, J. A.; VOLPE, C. A.; PEREIRA, G. T. Estudo da precipitação máxima em Jabotical (SP) pela distribuição de Gumbel utilizando dois métodos de estimação dos parâmetros. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, v. 11, n. 1, p. 141-147, 2003.
- BLAIN, G. C.; MORAES, S. O. Statistical characterization of eight maximum daily precipitation series of the State of São Paulo, Brazil. **Revista Brasileira de Meteorologia**, São Paulo, v.26, n.2, p.225- 234, 2011.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à Inferência Estatística**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 125 p.
- CASELLA, G.; BERGER, R.L. **Inferência Estatística**. Tradução da 2ª Edição Norte-Americana. Editora: Cengage Learning, 2010. 588 p.
- CLARKE, R. T. Estimating time trends in Gumbel-distributed data by means of generalized linear models, **Water Resources Research**, Porto Alegre, v.38, n.6, 2002.
- CLARKE, R. T. O Ajuste e Teste da Significância de Tendências Lineares em Dados com Distribuição Gumbel. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, Porto Alegre, v.8, n.1, p. 695-700, 2003.
- DUITAMA, L.O. ; FARAH, M.M. ; UTSUNOMIYA, A.T.H. ; ONO, R.K. ; PIRES, M.P. ; FONSECA, R. Uso de modelos lineares mistos na avaliação genética de escores visuais: estudo de simulação. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, [S.l.], v. 66, n. 4, p. 1139-1146, 2014.

FISHER, R. A.; TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of largest or smallest member of a sample. **Proceedings of the Cambridge Philosophy Society**, Cambridge, v. 24, p. 180-190, 1928.

FISCHER, S. **Séries univariantes de tempo**: metodologia de Box e Jenkins, Porto Alegre: Fundação de Economia e Estatística, 1982. v. 1, n. 4, 186 p.

GNEDENKO, B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. **Ann. Math.**, [S.I.], v. 44, n. 3, p. 423-453, 1943. GUMBEL, E. J. The return period of flood flows.

**Annals of Mathematical Statistics**, Ann Arbor, v. 12, n. 2, p. 163-190, 1941

GUMBEL, E. J. **Statistics of Extremes**. New York: Columbia University Press, 1958. 375 p.

IPCC. **Climate change 2001: The Scientific Basis**. New York: Cambridge University Press, 2001. 881p.

JENKINSON, A. F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. **Quartely Journal of the Royal Meteorological Society**, [S.I.], v. 81, n. 348, p. 158-171, 1955.

LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. **Biometrika**, [S.I.], v. 65, n. 2, p. 297-303, 1978.

LOWERY, M. D.; NASH, J. E. A Comparison of methods of fitting the double exponential distribution. **Journal of Hydrilogy**, [S.I.], v.10, n. 3, p.259-275, 1970.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. **Noções de Estatística e Probabilidade**. São Paulo: EDUSP, 2004. 361 p.

MENDES, B. V. M. **Introdução à análise de eventos extremos**. São Paulo: E-papers Editora, 2004. 232 p.

MEYER, P. L. **Probabilidade , Aplicações à Estatística**. 2ª Ed. - Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho, Rio de Janeiro: Editora Livros técnicos e científicos, 1983, 434 p.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A., BOES, D. C. **Introduction to the Theory of Statistics**. 3. ed. New York: J. Wiley & Sons, 1974. 564 p.

MORETTIN, P.A.; BUSSAB, W.O. **Estatística Básica**, 5. Ed. SãoPaulo: Editora Saraiva, 2004. 537 p.

NAGHETTINI, M.; PINTO, E. J. A. **Hidrologia Estatística**. Belo Horizonte: CPRM, 2007.

552 p.

NELDER, J. A.; MEAD, R. A simplex algorithm for function minimization. **Computer Journal** 7, [S.l.], v. 7, n. 4, p. 308-313, 1965.

NEVES, P. C. R.; **A Teoria de Valores Extremos na Quantificação de Precipitação Elevada**. 2010. 48f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade de Aveiro, Aveiro, 2010.

NIEDU, G. S. **Um método para a solução de sistemas lineares através do gradiente conjugado cooperativo**. 2012. 117f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

PARK, J. S.; KANG, H. S.; LEE, Y. S.; KIM, M. K. Changes in the extreme daily rainfall in South Korea. **International Journal of Climatology**, [S.l.], v. 31, n. 15, p. 2290-2299, 2011.

R Core Team (2015). **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.

RODRIGUES, P. H. M.; GOMES, R. C.; SIQUEIRA, R. F.; MEYER, P. M.; RODRIGUES, R. R. Accuracy, precision and robustness of in vivo dry matter digestibility estimates by different markers in ovine. **Revista Brasileira de Zootecnia**, [S.l.], v. 39, n. 5, p. 1118-1126, 2010.

ROCHA, A. S. **Mercados de risco e a teoria dos valores extremos: estudo empírico de casos**. Fortaleza, 2004. 80f. Dissertação (mestrado em Economia), CAEN, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2004.

ROSÁRIO, P. A. G. **Análise de valores extremos para níveis pluviométricos em Barcelos**. Lisboa, 2013, 209f. Dissertação (mestrado em Estatística e Investigação Operacional), Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

SANSIGOLO, C. A. Distribuições de extremos de precipitação diária, temperatura máxima e mínima e velocidade do vento em Piracicaba, SP (1917-2006). **Revista Brasileira de Meteorologia**, São José dos Campos, v. 23, n. 3, p. 341-346, 2008.

SCHMIDT, T. Museumstipp Watersnoodmuseum. **swr**, 25 ago. 2015. Disponível em: <<http://www.swr.de/swr1/bw/programm/museumstipp-watersnoodmuseum/-/id=446250/did=16048920/nid=446250/kwddtp/index.html>>. Acesso em: 15 de out. de 2016.

SIEGEL, S.; N. J. CASTELLAN JÚNIOR. **Estatística não-paramétrica para ciências do comportamento**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. 448 p.

SILVA, J. C. **Estimação do valor em risco usando informação intra diária**. 2002. 24f. Dissertação (Mestrado em Economia), Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro, RJ, 2002.

SILVA, R. R. **A distribuição generalizada de Pareto e mistura de distribuições de Gumbel no estudo da vazão e da velocidade máxima do vento em Piracicaba, SP.** 2008. 101f. Dissertação (Mestrado em Agronomia) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2008.

SMITH, R. L. Extreme value analysis of environmental time series: an application to trend detection in ground-level ozone. **Statistical Science**, p. 367-377, 1989.

STEPHENSON, A.G. evd: extreme value distributions. **R News**, [S.l], v.2, n.2, p.31-32, 2002. Disponível em:<<http://CRAN.R-project.org/doc/Rnews/>>

VIVANCO, M. J. F. **Análise de valores extremos no tratamento estatístico da corrosão de equipamentos.** 1994. 107f. Dissertação (Mestrado em Estatística). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1994.

## ANEXOS

## ANEXO A - Gráficos semelhantes aos apresentados

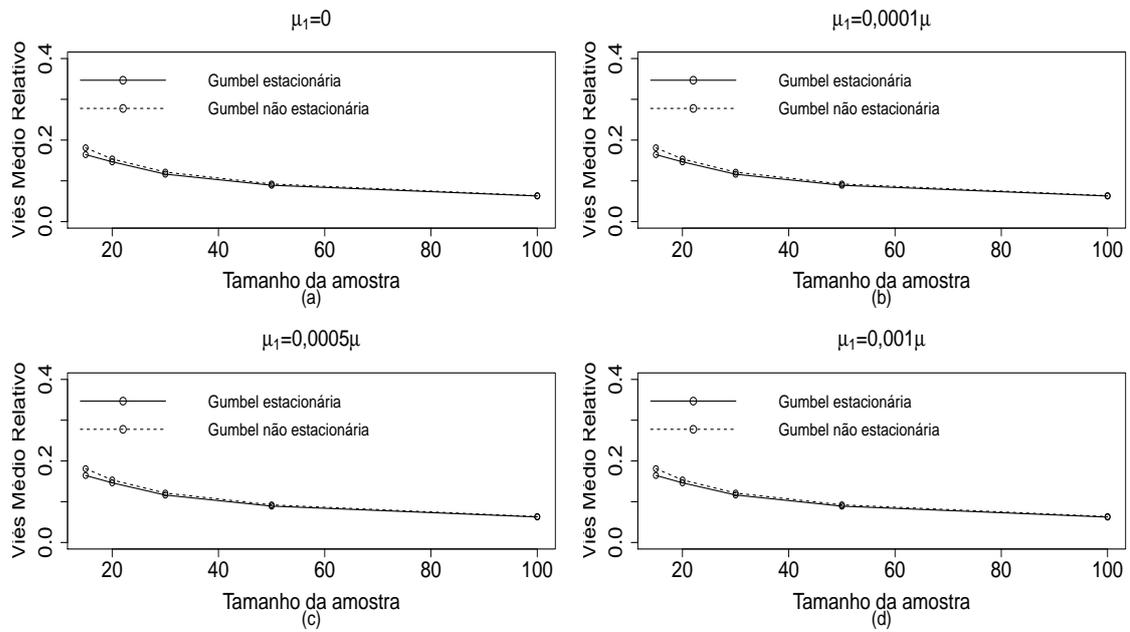


Figura 36 - Viés médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

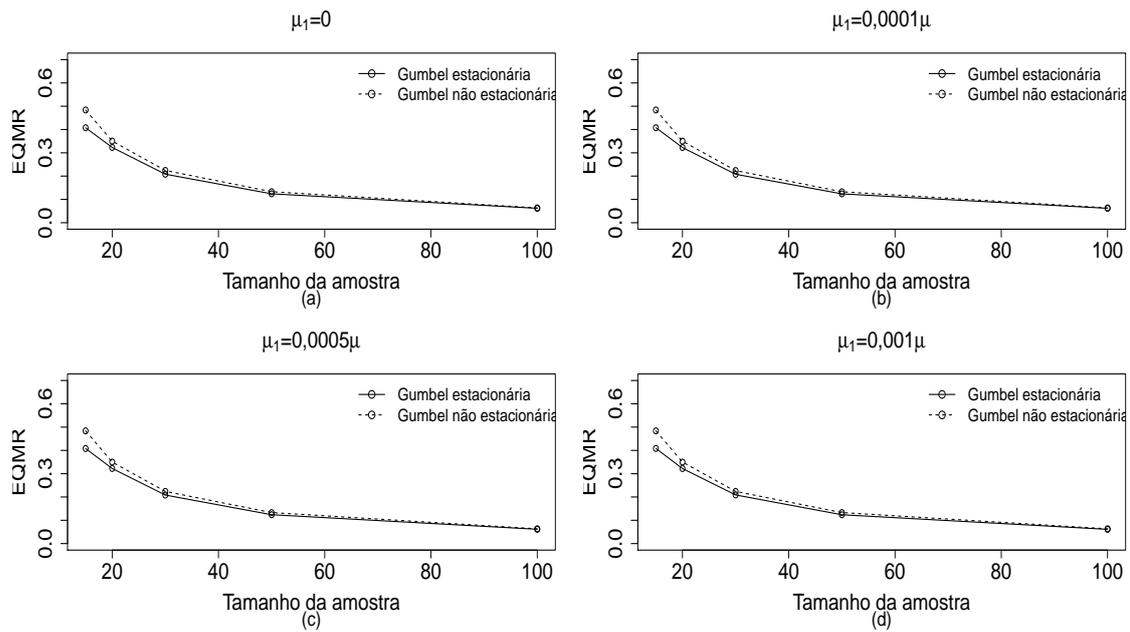


Figura 37 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 30$  e  $\sigma = 10$ , diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de menores intensidades.

Nas Figuras acima sobre o viés e o EQMR respectivamente, os quatro casos são parecidos, sendo a estimativa do parâmetro do modelo Gumbel estacionário ligeiramente mais acurada e precisa que a estimativa do parâmetro do modelo Gumbel não estacionário. Estas Figuras seguem o mesmo comportamento das Figuras 18 e 19.

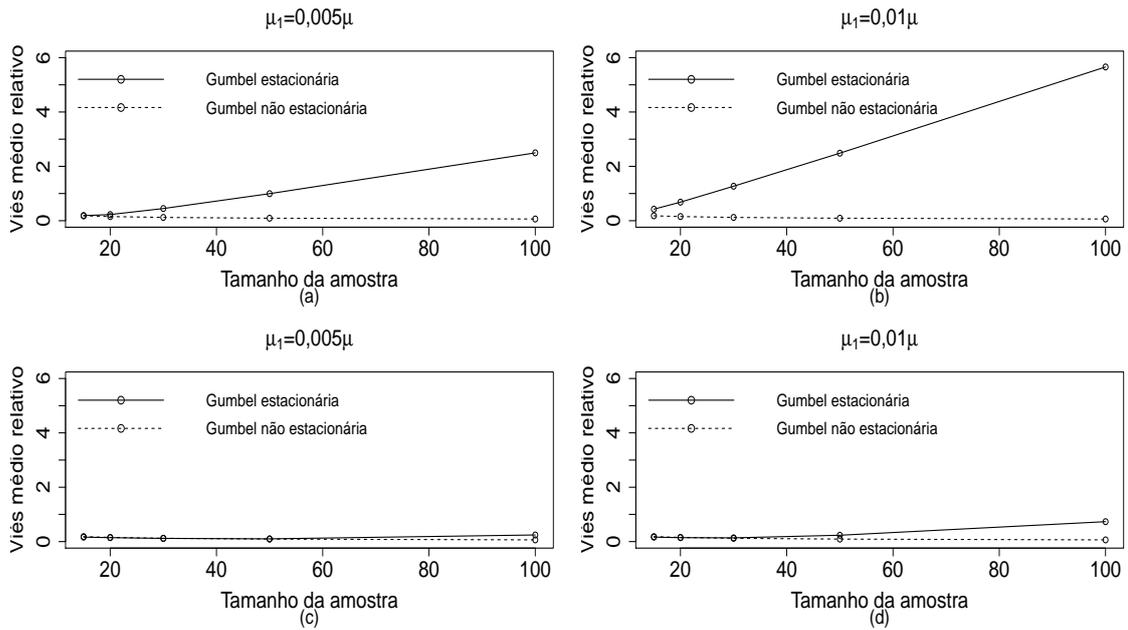


Figura 38 - Viés médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 2$ , e  $\mu = 50$  e  $\sigma = 10$  respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de maiores intensidades.

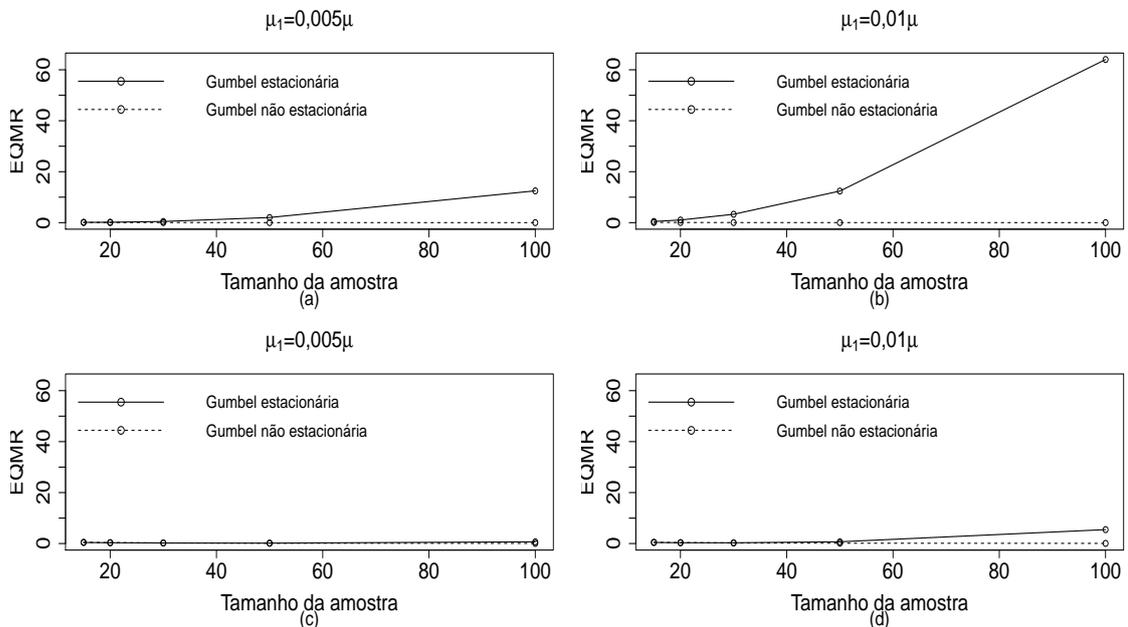


Figura 39 - Erro quadrático médio relativo do parâmetro escala considerando  $\mu = 50$  e  $\sigma = 2$ , e  $\mu = 50$  e  $\sigma = 10$  respectivamente, diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores para  $\mu_1$  positivo de maiores intensidades.

Nas Figuras acima os resultados são muito idênticos aos da Figura 20 e 21 respectivamente.

## ANEXO B - Rotinas

```
#####
##      Carregando os pacotes do R: library      ##
#####
library(evd)

#####
#Gerando amostra aleatórias das distribuições GEV e Gumbel
#####
set.seed(123)
#xgev<-rgev(n=30, loc=20, scale=5, shape=0.2)
#xgev

#Gerando uma amostra aleatória da Gumbel

xgumbel<-rgev(n=10, loc=8, scale=4, shape=0)
xgumbel

#####
# Calculando os estimadores MV das distribuições GEV e Gumbel:
#####

#fgev(xgev)          # Calculando EMV da GEV e Gumbel:

fgev(xgumbel,shape=0)      # Calculando EMV da Gumbel

#####
# Avaliando os estimadores MV das distribuições GEV e Gumbel:
#####

inicio<-proc.time()

NS<-1010  #Número de Simulações dentro de cada cenário
TA=100    #Tamanho Amostral de cada simulação
Mu<-30    #Valor do parâmetro posição que será usado
```

```

#na simulação
PIM<-0.01 #Porcentagem do coeficiente linear em relação ao valor
#de Mu. EX: 0.01=1%
#Xi<-0.2 #Valor do parâmetro forma que será usado na simulação
Sig<-2 #Valor do parâmetro escala que será usado na simulação

AG<-(matrix(0,TA,NS)) #cria a matriz para guardar as amostras
#geradas

for (j in 1:NS)
{
for (i in 1:TA) {
nt= 1 #tamanho da amostra em cada tempo
Mi=Mu+PIM*Mu*i #Inclinação proporcional ao Mu_0?
#Sig=5
#Xi=0.2
xgumbelt<-rgev(n=nt, loc=Mi, scale=Sig, shape=0)
AG[i,j]<-xgumbelt
}
}

#####
#####
#####Ajustando os modelos Gumbel estacionário e não#####
##### estacionario#####
#####
#####

matrizmue<-matrix(c(rep(0,3,NS)),NS,3)
#matrizince<-matrix(c(rep(0,3,NS)),NS,3)
matrizescalae<-matrix(c(rep(0,3,NS)),NS,3)
#matrizformae<-matrix(c(rep(0,3,NS)),NS,3)

matrizmutend<-matrix(c(rep(0,3,NS)),NS,3)
matrizinctend<-matrix(c(rep(0,3,NS)),NS,3)
matrizescalatend<-matrix(c(rep(0,3,NS)),NS,3)
#matrizformatend<-matrix(c(rep(0,3,NS)),NS,3)

vetorP<-c(rep(0,NS))

#Criando os valores para gerar os vieses e os erros
#quadráticos médios
viespose<-c(rep(0,NS))
viesescalae<-c(rep(0,NS))

```

```

#viesformae<-c(rep(0,NS))
EQMpose<-c(rep(0,NS))
EQMescalae<-c(rep(0,NS))
#EQMformae<-c(rep(0,NS))

viespostend<-c(rep(0,NS))
viesinctend<-c(rep(0,NS))
viesescalatend<-c(rep(0,NS))
#viesformatend<-c(rep(0,NS))
EQMpostend<-c(rep(0,NS))
EQMinctend<-c(rep(0,NS))
EQMescalatend<-c(rep(0,NS))
#EQMformatend<-c(rep(0,NS))

##Quando der erro, recomeçar daqui###
###Mudar o valor de i quando der erro

for(i in 1:NS)
{

m1<-fgev(AG[,i],shape=0)#Ajuste do modelo estacionário

#Cálculo do somatório do viés
viespose[i]<-abs(m1$estimate[1]-Mu)
viesescalae[i]<-abs(m1$estimate[2]-Sig)
#viesformae[i]<-abs(m1$estimate[3]-Xi)

#Cálculo do somatório do Erro Quadrático Médio
EQMpose[i]<-(m1$estimate[1]-Mu)^2
EQMescalae[i]<-(m1$estimate[2]-Sig)^2
#EQMformae[i]<-(m1$estimate[3]-Xi)^2

#Armazenar as estimativas dos parâmetros com os intervalos
#de confiança

#Parâmetro posição
matrizmue[i,1]<-m1$estimate[1]
matrizmue[i,2]<-confint(m1)[1,1]
matrizmue[i,3]<-confint(m1)[1,2]

#Parâmetro escala
matrizescalae[i,1]<-m1$estimate[2]
matrizescalae[i,2]<-confint(m1)[2,1]
matrizescalae[i,3]<-confint(m1)[2,2]

#Parâmetro forma
#matrizformae[i,1]<-m1$estimate[3]

```

```

#matrizformae[i,2]<-confint(m1)[3,1]
#matrizformae[i,3]<-confint(m1)[3,2]

#Ajuste do modelo não estacionário
trend <- (1:TA)/1
m2<- fgev(AG[,i], nsloc = trend, control = list(trace = 1),shape=0)
m2

#Cálculo do somatório do viés
viespostend[i]<-abs(m2$estimate[1]-Mu)
viesinctend[i]<-abs(m2$estimate[2]-PIM*Mu)
viesescalatend[i]<-abs(m2$estimate[3]-Sig)
#viesformatend[i]<-abs(m2$estimate[4]-Xi)

#Cálculo do somatório do Erro Quadrático Médio
EQMpostend[i]<-(m2$estimate[1]-Mu)^2
EQMinctend[i]<-(m2$estimate[2]-PIM*Mu)^2
EQMescalatend[i]<-(m2$estimate[3]-Sig)^2
#EQMformatend[i]<-(m2$estimate[4]-Xi)^2

#Armazenar as estimativas dos parâmetros com os intervalos
#de confiança

#Parâmetro posição
matrizmutend[i,1]<-m2$estimate[1]
matrizmutend[i,2]<-confint(m2)[1,1]
matrizmutend[i,3]<-confint(m2)[1,2]

#Parâmetro Inclinação
matrizinctend[i,1]<-m2$estimate[2]
matrizinctend[i,2]<-confint(m2)[2,1]
matrizinctend[i,3]<-confint(m2)[2,2]

#Parâmetro escala
matrizescalatend[i,1]<-m2$estimate[3]
matrizescalatend[i,2]<-confint(m2)[3,1]
matrizescalatend[i,3]<-confint(m2)[3,2]

#Parâmetro forma
#matrizformatend[i,1]<-m2$estimate[4]
#matrizformatend[i,2]<-confint(m2)[4,1]
#matrizformatend[i,3]<-confint(m2)[4,2]

vetorP[i]<-anova(m2,m1)$Pr[2]
}

#Guardando as estimativas e os intervalos de confiança

```

```

parametro_posicao<-data.frame(matrizmue,matrizmutend)
parametro_inclinacao<-data.frame(matrizinctend)
parametro_escala<-data.frame(matrizescalae,matrizescalatend)
#parametro_forma<-data.frame(matrizformae,matrizformatend)

#Cálculo do EQM e do Vies

viesposefin<-viespose/(abs(Mu))
viesescalaeфин<-viesescalae/(abs(Sig))
#viesformaefin<-viesformae/(abs(Xi))
EQMposefin<-EQMpose
EQMescalaeфин<-EQMescalae
#EQMformaefin<-EQMformae

viespostendfin<-viespostend/(abs(Mu))
viesinctendfin<-viesinctend/(abs(PIM*Mu))
viesescalatendfin<-viesescalatend/(abs(Sig))
#viesformatendfin<-viesformatend/(abs(Xi))
EQMpostendfin<-EQMpostend/(abs(Mu))
EQMinctendfin<-EQMinctend/(abs(PIM*Mu))
EQMescalatendfin<-EQMescalatend/(abs(Sig))
#EQMformatendfin<-EQMformatend/(abs(Xi))

#Resultado_precisao_acuracia<-data.frame(cbind(viesposefin,
#viespostendfin,
#viesescalaeфин,viesescalatendfin,viesformaefin,viesformatendfin,
#EQMposefin,
#EQMpostendfin,EQMescalaeфин,EQMescalatendfin,EQMformaefin,
#EQMformatendfin,
#viesinctendfin,EQMinctendfin))

Resultado_precisao_acuracia<-data.frame(cbind(viesposefin,
#viespostendfin,
viesescalaeфин,viesescalatendfin,EQMposefin,EQMpostendfin,
#EQMescalaeфин,
EQMescalatendfin,viesinctendfin,EQMinctendfin))

Resultado_valor_P<-data.frame(vetorP)

write.table(parametro_posicao,
"posicao_ta_100_mu_30_PIM_0005_Sig_2_30012017.xls")
write.table(parametro_inclinacao,
"inclinacao_ta_100_mu_30_PIM_0005_Sig_2_30012017.xls")
write.table(parametro_escala,
"escala_ta_100_mu_30_PIM_0005_Sig_2_30012017.xls")

```

```
write.table(Resultado_precisao_acuracia,  
"precisao_acuracia_ta_100_mu_30_PIM_0005_Sig_2_30012017.xls")
```

```
write.table(Resultado_valor_P,  
"valor_p_ta_100_mu_30_PIM_0005_Sig_2_30012017.xls")
```

```
fim<-proc.time()-inicio
```