

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria-PPGEAB**  
 Prova de Conhecimentos Específicos

Número de inscrição: \_\_\_\_\_ Data: 16/11/2016

- A prova deverá ser respondida com caneta de tinta azul ou preta. Em hipótese alguma será corrigida a prova resolvida a lápis.
- A duração da prova será de, no máximo, 4 (quatro) horas. Será permitido o uso de calculadora (não sendo permitido o empréstimo).
- Leia atentamente os exercícios antes de começar. Coloque todos os detalhes necessários para justificar sua resposta.

Dados que podem ser necessários na resolução de algumas questões:

• **Quantis de distribuições**

	$P(t > t_\alpha) = \alpha$		$P(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha$		
$\nu$	0,025	0,05	$\nu$	0,025	0,975
7	2,36	1,89	7	1,69	16,01
8	2,31	1,86	8	2,18	17,53
15	2,13	1,75	15	6,26	27,49
16	2,12	1,75	16	6,91	28,85

- Quantis da Distribuição Normal Padrão:

$$z_{0,10} = 1,28; z_{0,05} = 1,64; z_{0,025} = 1,96; z_{0,01} = 2,32 \text{ e } z_{0,005} = 2,58$$

• **Fórmulas**

$$z_c = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}; t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}; S^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right]$$

Intervalos de confiança:

$$IC_{(1-\alpha)}(P) = \left[ \hat{p} - z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right].$$

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = [\bar{X} - t_{\alpha/2;\nu} \cdot S/\sqrt{n}; \bar{X} + t_{\alpha/2;\nu} \cdot S/\sqrt{n}]; \text{ sendo } t_{\alpha/2;\nu} \text{ o quantil superior da distribuição } t \text{ com } \nu = n - 1 \text{ G.L.}$$

$$IC_{1-\alpha}(\sigma) = \left[ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2;\nu}^2}}; \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2;\nu}^2}} \right]; \text{ sendo}$$

$\chi_{\alpha/2;\nu}^2$  e  $\chi_{1-\alpha/2;\nu}^2$ : quantis superiores da distribuição  $\chi^2$  com  $\nu = n - 1$  G.L.;  
 e  $S^2$ : variância amostral.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, \text{ se } X \text{ for uma variável aleatória contínua.}$$

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria**  
Prova de Conhecimentos Específicos

Número de inscrição: \_\_\_\_\_ Data: 16/11/2016

(Valor: 2,0) **Questão 1.**

$$\text{Seja } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x \geq 8 \\ k, & \text{se } 0 \leq x < 4 \\ \frac{3x}{320}, & \text{se } 4 \leq x < 8 \end{cases} .$$

- (a) Encontre o valor de  $k$  para que a função  $f$  seja uma função densidade de probabilidade.
- (b) Seja  $X$  a variável aleatória cuja função densidade de probabilidade é a função  $f$ . Calcule  $P(X \geq 5)$ .
- (c) Seja  $Y$  a variável aleatória contínua que possui função densidade de probabilidade  $g$  expressa

$$\text{por: } g(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 1 \\ \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-1} + e^{-2}}, & \text{se } 1 \leq y < 2 \\ \frac{2 \cdot e^{-2(y-1)}}{1 - e^{-1} + e^{-2}}, & \text{se } y \geq 2 \end{cases} .$$

Encontre  $E[Y]$ .

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria**  
Prova de Conhecimentos Específicos

**Número de inscrição:** \_\_\_\_\_ **Data:** 16/11/2016

(Valor: 2,0) **Questão 1.**

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria**  
Prova de Conhecimentos Específicos

Número de inscrição: \_\_\_\_\_ Data: 16/11/2016

(Valor: 2,0) **Questão 2.**

Um químico dispõe de uma chapa quadrada cuja medida dos lados é 3,2 metros. Deseja-se construir uma caixa (sem tampa) retirando-se 4 quadrados iguais (um de cada canto, esses quadrados são descartados para a construção da caixa). Devido a fermentação do líquido que será armazenado, o volume útil da caixa é diminuído da seguinte forma: se  $x$  é a altura (em centímetros) da caixa, então para o cálculo do volume útil é considerada a altura  $x - 10$  centímetros, a base é a mesma para o cálculo dos dois volumes.

- (a) Faça um esboço da caixa e do volume útil da caixa com suas respectivas dimensões (comprimento x largura x altura).
- (b) Encontre a expressão que determina o volume útil dessa caixa em função da altura  $x$  e a variação possível de  $x$  (tudo em centímetros)?
- (c) Encontre o valor de  $x$  para que o volume útil da caixa seja máximo. Qual é o volume útil máximo?

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria**  
Prova de Conhecimentos Específicos

Número de inscrição: \_\_\_\_\_ Data: 16/11/2016

(Valor: 2,0) **Questão 2.**

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria**  
Prova de Conhecimentos Específicos

**Número de inscrição:** \_\_\_\_\_ **Data:** 16/11/2016

(Valor: 2,0) **Questão 3.**

O prefeito de uma cidade deseja saber o percentual de aprovação da sua administração. Caso esse percentual seja, no mínimo, de 45%, ele irá se candidatar à reeleição. Para descobrir se deve ou não se candidatar à reeleição, o prefeito realizou uma pesquisa na qual 166 dos 400 eleitores escolhidos aleatoriamente informaram que aprovavam a sua administração.

Pede-se:

- (a) Calcule a estimativa pontual para a proporção de pessoas que a aprovam a administração e elabore a hipótese estatística a ser testada.
- (b) Com base no resultado da pesquisa, pode-se dizer que o prefeito será candidato à reeleição? Faça o teste de hipóteses e conclua usando  $\alpha = 0,05$ .
- (c) Um instituto deseja fazer uma pesquisa para saber, de forma mais precisa, a proporção de pessoas que a aprovam a administração do prefeito. Sabendo que cidade possui 20 mil residências, distribuídas em cinco regiões sócio-econômicas diferentes, com a seguinte estrutura: Região A com 10000 residências; Região B com 2500 residências; Região C com 4000 residências; Região D com 1500 residências e Região E com 2000 residências, indique, com justificativas, qual a melhor técnica de amostragem a ser aplicada neste caso e descreva os passos para selecionar uma amostra de tamanho 1000.

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria**  
Prova de Conhecimentos Específicos

Número de inscrição: \_\_\_\_\_ Data: 16/11/2016

(Valor: 2,0) **Questão 3.**

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria**  
Prova de Conhecimentos Específicos

Número de inscrição: \_\_\_\_\_ Data: 16/11/2016

(Valor: 2,0) **Questão 4.**

(a) Resolva a equação

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

onde  $B$  é uma matriz.

(b) Seja  $V = M_2$  o conjunto das matrizes  $2 \times 2$  com coeficientes reais. Encontre os números reais  $\lambda$  e as matrizes  $A \in M_2$  não nulas que satisfazem a equação

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} A = \lambda A, .$$

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria**  
Prova de Conhecimentos Específicos

Número de inscrição: \_\_\_\_\_ Data: 16/11/2016

(Valor: 2,0) **Questão 4.**

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria**  
Prova de Conhecimentos Específicos

Número de inscrição: \_\_\_\_\_ Data: 16/11/2016

(Valor: 2,0) **Questão 5.**

As especificações de uma determinada máquina de venda automática exigem que esse tipo de máquina prepare quantidades de café com uma média de 355ml. Máquinas selecionadas aleatoriamente prepararam as diferentes quantidades de café (em ml) listadas abaixo (assuma que esses valores seguem uma distribuição normal):

292	328	282	392	335	283	342	353
346	306	388	338	292	220	371	318

- (a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a quantidade média de café servida por esse tipo de máquina. O resultado obtido sugere que as máquinas estejam dentro das especificações?
- (b) Construa um intervalo de confiança a 95% para o desvio padrão da quantidade de café servida. Como novas especificações estão sendo consideradas para controlar a variação na quantidade de café, responda: com base no intervalo de confiança obtido, 15ml é um valor praticável para o desvio padrão populacional? A máquina exige algum tipo de modificação para reduzir a variação?
- (c) Outra pesquisa será realizada para estimar a quantidade média de café servida por esse tipo de máquina. Quantas máquinas devem ser amostradas para se obter 95% de confiança e que o erro de estimação não seja superior a 20ml? Utilize os dados fornecidos na questão como amostra piloto.

**Universidade Federal de Alfenas**  
**Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria**  
Prova de Conhecimentos Específicos

**Número de inscrição:** \_\_\_\_\_ **Data:** 16/11/2016

(Valor: 2,0) **Questão 5.**