

Universidade Federal de Alfenas

THALES RANGEL FERREIRA

**ANÁLISE ESPACIAL DA PRECIPITAÇÃO EXTREMA NO
SUL E SUDOESTE DE MINAS GERAIS**

ALFENAS/MG

2023

THALES RANGEL FERREIRA

**ANÁLISE ESPACIAL DA PRECIPITAÇÃO EXTREMA NO SUL E SUDOESTE DE
MINAS GERAIS**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e Biometria, pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Estatística Aplicada e Biometria. Orientador: Prof. Dr. Gilberto Rodrigues Liska. Coorientador: Prof. Dr. Luiz Alberto Beijo

ALFENAS/MG

2023

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas
Biblioteca Central

Ferreira, Thales Rangel.

Análise espacial da precipitação extrema no sul e sudoeste de Minas Gerais / Thales Rangel Ferreira. - Alfenas, MG, 2023.

81 f. : il. -

Orientador(a): Gilberto Rodrigues Liska.

Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) -
Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, MG, 2023.

Bibliografia.

1. Chuva. 2. Distribuição GEV. 3. Krigagem. 4. Processos máx-estáveis.
5. Semivariograma.. I. Liska, Gilberto Rodrigues, orient. II. Título.

THALES RANGEL FERREIRA

Análise espacial da precipitação extrema no sul e sudoeste de Minas Gerais

O Presidente da banca examinadora abaixo assina a aprovação da Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e Biometria pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Estatística Aplicada e Biometria

Aprovada em: 27 de junho de 2023.

Prof. Dr. Gilberto Rodrigues Liska
Presidente da Banca Examinadora
Instituição: Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Prof. Dr. Enio Júnior Seidel
Instituição: Universidade Federal de Santa Maria - UFSM

Profa. Dr. Fabricio Goecking Avelar
Instituição: Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG



Documento assinado eletronicamente por **Gilberto Rodrigues Liska, Usuário Externo**, em 27/06/2023, às 12:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unifal-mg.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1023323** e o código CRC **826B7828**.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que contribuíram e apoiaram a realização deste trabalho. Sem o auxílio e apoio dessas pessoas, este projeto não teria sido concluído com sucesso.

Agradeço ao meu orientador, Gilberto Rodrigues Liska e ao meu coorientador Luiz Alberto Beijo, pela orientação, apoio e valiosas sugestões e ajudas ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Também gostaria de agradecer aos membros da banca examinadora, Fabricio Goecking Avelar e Enio Júnior Seidel, por dedicarem seu tempo para avaliação e colaboração para a melhoria deste trabalho.

Agradeço à minha família pelo apoio incondicional ao longo de todo o processo, desde a graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

A ocorrência de precipitações extremas pode causar danos significativos à infraestrutura urbana, ao meio ambiente e às atividades humanas em geral. Desta forma, compreender o comportamento desse fenômeno em uma região pode auxiliar no planejamento de atividades sujeitas à tais danos. Portanto, este trabalho teve como objetivo modelar espacialmente a precipitação máxima no sul e sudoeste de Minas Gerais utilizando duas abordagens: Inferência Bayesiana associada a Krigagem e Inverso da Distância Ponderada (IDP) e, processos Máx-estáveis (PME) e modelo Generalizado de Valores Extremos (GEV) espacial. Foram utilizados no estudo, dados diários de precipitação de 29 cidades da região. Para a análise via IDP, Krigagem Ordinária (KO) e Log-Normal (KLN), foram utilizadas predições de precipitação, obtidas via Inferência Bayesiana para cada localidade e tempos de retorno (TR), 2, 5 e 10 anos. As predições foram obtidas utilizando a melhor estrutura de *priori* (não informativa e informativa) para cada município. Para os métodos de Krigagem, foram avaliados o melhor modelo semivariograma dentre o Gaussiano, Esférico, Exponencial e Onda. A avaliação dos modelos deu-se utilizando validação cruzada e o erro médio de predição (EMP). Os resultados da avaliação evidenciaram que para a predição espacial para o tempo de retorno mais alto o modelo mais adequado foi a KO com semivariograma Onda. Desta forma, este foi utilizado para a obtenção dos mapas de predição para os TR de 50 e 100 anos. Para a análise via PME, foram utilizados o modelo de Smith e o modelo de Schlather com função de correlação de Bessel, Cauchy, Powered Exponential e Whittle-Mátern. Nos modelos Máx-estáveis e no modelo GEV espacial foram utilizadas superfícies de tendência para os parâmetros da GEV. A análise da dependência espacial de extremos foi realizada por meio do Coeficiente Extremal, que apresentou evidências de baixa dependência espacial para os dados. Os modelos foram avaliados utilizando o Critério de Informação de Takeuchi e o cálculo do EMP. Os resultados evidenciaram similaridade entre os modelos, porém, o modelo de Smith mostrou-se o mais adequado. Logo, este foi selecionado para a obtenção dos mapas de predição para os TR de 50 e 100 anos.

Palavras-chave: chuva; distribuição GEV; krigagem; processos máx-estáveis; semivariograma.

ABSTRACT

The occurrence of extreme rainfall events can cause significant damage to urban infrastructure, the environment, and human activities in general. Thus, understanding the behavior of this phenomenon in a region can assist in the planning of activities subject to such damages. Therefore, this study aimed to spatially model the maximum rainfall in the southern and southwestern regions of Minas Gerais, Brazil, using two approaches: Bayesian inference combined with Kriging and Inverse Distance Weighting (IDW), and Max-Stable Processes (MSP) and Spatial Generalized Extreme Value (GEV) models. Daily rainfall data from 29 cities in the region were used for the study. For the IDW analysis, Ordinary Kriging (OK) and Log-Normal Kriging (LNK) predictions were employed, obtained through Bayesian inference for each location and return periods (RPs) of 2, 5, and 10 years. The predictions were obtained using the best prior structure (non-informative and informative) for each municipality. For the Kriging methods, the best semivariogram model was evaluated among Gaussian, Spherical, Exponential, and Wave models. Model evaluation was performed using cross-validation and the mean prediction error (MPE). The evaluation results showed that for the spatial prediction at the highest return period, the most suitable model was OK with the Wave semivariogram. Consequently, this model was used to obtain the prediction maps for the 50- and 100-year RPs. For the MSP analysis, the Smith model and the Schlather model with Bessel, Cauchy, Powered Exponential, and Whittle-Matérn correlation functions were employed. In the Max-Stable and GEV spatial models, trend surfaces for the GEV parameters were used. The analysis of the spatial dependence of extremes was conducted using the Extremal Coefficient, which indicated evidence of low spatial dependence for the data. The models were evaluated using the Takeuchi Information Criterion and the calculation of the MPE. The results showed similarity between the models; however, the Smith model proved to be the most suitable. Therefore, this model was selected to obtain the prediction maps for the 50- and 100-year RPs.

Keywords: precipitation; GEV distribution; kriging; max-stable processes; semivariogram.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Dados das estações meteorológicas das 29 cidades do sul e sudoeste de Minas Gerais analisadas, com seus respectivos percentuais de falhas (PF).	39
Tabela 2 –	Estatística descritiva das precipitações máximas anuais (mm) ocorridas no período de 1980 a 2021 em cada localidade.	49
Tabela 3 –	Resultados dos testes (valor p), Ljung-Box (L-B), Mann-Kendall (M-K) e Kolmogorov-Smirnov (K-S) ao nível de significância de 5%, referentes aos dados de precipitação máxima anual (mm).	50
Tabela 4 –	Resultado do Erro Médio de Predição (EMP %) da precipitação máxima anual (mm) predita para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos, para cada localidade, via Inferência Bayesiana utilizando <i>priori</i> não informativa (PNI) e <i>priori</i> informativa (PI).	52
Tabela 5 –	Predições de precipitação máxima (mm) para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos obtidas via Inferência Bayesiana utilizando a melhor estrutura de <i>priori</i> para cada localidade. Além dos valores observados para os mesmos tempos de retorno	53
Tabela 6 –	Estimativa dos melhores modelos de semivariograma para cada tempo de retorno (TR) com seus respectivos valores do critério de Cambardella (CC) e comparativo entre o método do Inverso da Distância Ponderada por meio dos resultados da Validação Cruzada: Erro Quadrático Médio (EQM), Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) e Erro Médio de Predição da Validação Cruzada (EMP-VC) e Erro Médio de Predição (EMP) das 6 localidades não utilizadas para o ajuste dos modelos.	54
Tabela 7 –	Predições de precipitação máxima (mm) para os tempos de retorno (TR) de 50 e 100 anos obtidas via Inferência Bayesiana utilizando a melhor estrutura de <i>priori</i> para cada localidade.	56
Tabela 8 –	Estimativa dos parâmetros dos semivariogramas Onda às predições de precipitação obtidas via Inferência Bayesiana para os tempos de retorno (TR) de 50 e 100 anos.	57

Tabela 9 –	Resultados do ajuste da distribuição GEV via Máxima Verossimilhança aos dados de precipitação máxima referente anos de 1980 a 2011. . . .	59
Tabela 10 –	Resultados do ajuste dos modelos, além do resultado do Critério de Informação de Takeuchi (TIC).	60
Tabela 11 –	Estimativa dos coeficientes das superfícies de tendência (Sup. tend.) para os parâmetros da distribuição GEV.	61
Tabela 12 –	Resultados do Erro Médio de Predição (EMP), dados em %, das predições para as seis localidades que não foram utilizadas no ajuste dos modelos, obtidas a partir dos modelos Máx-estáveis de Smith e de Schlather com função de correlação de Bessel, além do modelo GEV espacial.	64
Tabela 13 –	Resultados do ajuste do modelo Máx-estável de Smith aos dados de precipitação máxima referente ao período de 1980 a 2021.	65
Tabela 14 –	Ajuste dos modelos de semivariograma para cada tempo de retorno (TR) com seus respectivos valores do critério de Cambardella (CC) e comparativo entre o método do Inverso da Distância Ponderada por meio dos resultados da validação cruzada: Erro Quadrático Médio (EQM), Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) e Erro Médio de Predição da validação cruzada (EMP-VC) e Erro Médio de Predição (EMP) das 6 localidades não utilizadas para o ajuste dos modelos. . . .	77
Tabela 15 –	Erros de Predição (EP), dados em %, das predições espaciais obtidas via Inverso da Distância Ponderada (IDP), para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos.	78
Tabela 16 –	Erros de Predição (EP), dados em %, das predições espaciais obtidas via Krigagem Ordinária com semivariograma Gaussiano, Exponencial, Esférico e Onda, para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos. . .	79
Tabela 17 –	Erros de Predição (EP), dados em %, das predições espaciais obtidas via Krigagem Ordinária com semivariograma Gaussiano, Exponencial, Esférico e Onda, para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos. . .	80

Tabela 18 – Erros de Predição (EP), dados em %, das predições espaciais obtidas via modelo Máx-estável de Smith e Schlather com função de correlação de Bessel e via modelo GEV espacial, para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos.	81
---	----

LISTA DE QUADRO

1	Métodos de Krigagem (Krig) analisados para a interpolação espacial das previsões de precipitação máxima para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos obtidos via Inferência Bayesiana.	44
---	--	----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Localização das estações meteorológicas das 29 cidades do sul e sudoeste de Minas Gerais analisadas no estudo numeradas em ordem alfabética.	38
Figura 2 –	Modelos de semivariogramas ajustados via método dos mínimos quadrados ponderados aos semivariogramas empíricos referente aos dados de precipitação máxima para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos, respectivamente.	55
Figura 3 –	Modelos dos semivariogramas de Onda ajustados aos semivariogramas empíricos referente às previsões de precipitação obtidas via Inferência Bayesiana para os tempos de retorno de 50 e 100 anos.	57
Figura 4 –	Mapas de previsão de precipitação máxima (mm) para os tempos de retorno de 50 e 100 anos, obtidos via Krigagem Ordinária com o modelo de semivariograma Onda.	58
Figura 5 –	Evolução espacial dos parâmetros da distribuição GEV, obtidas a partir do ajuste dos modelos Máx-estáveis de Smith e Schlather com função de correlação de Bessel e do modelo GEV espacial.	61
Figura 6 –	Coefficiente Extremal dos modelos Máx-estáveis de Smith e de Schlather com função de correlação de Bessel ajustados ao F-madograma empírico, referente aos dados precipitação máxima de 1980 a 2011. . .	63
Figura 7 –	Mapas de previsão de precipitação máxima (mm) para os tempos de retorno de 50 e 100 anos, obtidos via modelo Máx-estável de Smith. . .	65

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	OBJETIVOS	17
2.1	OBJETIVO GERAL	17
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
3	REVISÃO DE LITERATURA	19
3.1	EVENTOS CLIMÁTICOS EXTREMOS	19
3.2	PRECIPITAÇÃO PLUVIAL E PRECIPITAÇÃO PLUVIAL MÁXIMA	20
3.3	TEORIA DOS VALORES EXTREMOS	20
3.4	INFERÊNCIA BAYESIANA	22
3.4.1	Distribuição a priori	23
3.4.2	Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov	24
3.4.3	Análise de Convergência das cadeias	25
3.5	ESTATÍSTICA ESPACIAL	26
3.5.1	Inverso da Distância Ponderada	26
3.5.2	Geoestatística	27
3.5.2.1	Semivariograma	28
3.5.2.2	Krigagem	29
3.6	ANÁLISE ESPACIAL DE EXTREMOS	30
3.6.1	Processos Máx-estáveis	31
3.6.1.1	Dependência Espacial de Máximos	33
3.6.1.2	Ajuste dos processos Máx-estáveis	34
3.6.2	Modelo GEV espacial	36
4	MATERIAL E MÉTODOS	38
4.1	DADOS E ÁREA DE ESTUDO	38
4.2	IMPUTAÇÃO DOS DADOS	41
4.3	ANÁLISE DESCRITIVA E TESTES PRELIMINARES	41
4.4	INFERÊNCIA BAYESIANA	42
4.4.1	Estimação via Inferência Bayesiana	42
4.4.2	Avaliação das <i>prioris</i>	42
4.5	ANÁLISE ESPACIAL VIA GEOESTATÍSTICA E IDP	43
4.5.1	Ajuste dos semivariogramas	43
4.5.2	Modelos espaciais	43
4.5.3	Avaliação dos modelos espaciais	44
4.6	ANÁLISE ESPACIAL DE EXTREMOS	45
4.6.1	Avaliação dos modelos espaciais de extremos	46
4.7	RECURSOS COMPUTACIONAIS	47
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	49
5.1	ANÁLISE DESCRITIVA DAS PRECIPITAÇÕES MÁXIMAS	49
5.2	TESTES PRELIMINARES E DE CONVERGÊNCIA	50
5.3	INFERÊNCIA BAYESIANA	51
5.3.1	Avaliação das <i>prioris</i>	51
5.4	ANÁLISE ESPACIAL VIA KRIGAGEM E IDP	54
5.4.1	Predição espacial para 50 e 100 anos	56
5.5	ANÁLISE ESPACIAL VIA PROCESSOS MÁX-ESTÁVEIS E GEV ESPACIAL	59

6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
	REFERÊNCIAS	68
	APÊNDICES	77

1 INTRODUÇÃO

A ocorrência de eventos climáticos extremos tem se tornado uma preocupação crescente tanto na sociedade quanto na comunidade científica. A frequência e as consequências desses eventos, como prejuízos econômicos e sociais, têm chamado atenção devido às adversidades decorrentes de desastres naturais. Esses desastres são geralmente causados por fatores climáticos severos, destacando-se as precipitações pluviiais intensas como uma das principais causas.

A precipitação pluvial exerce uma influência significativa nas atividades humanas, podendo apresentar efeitos favoráveis quando ocorre de forma moderada, mas também desfavoráveis quando intensa. Na agricultura, por exemplo, a chuva é fundamental para o desenvolvimento das plantas, desde a germinação até a colheita. No entanto, a ocorrência de precipitações de alta intensidade pode resultar em danos diversos, como erosão do solo, enchentes, alagamentos, deslizamentos de terra e rompimento de barragens.

Os impactos causados por eventos climáticos extremos afetam não apenas a ocorrência de desastres naturais, mas também as atividades agrícolas e pecuárias. Em períodos de chuvas intensas, o plantio de culturas com estruturas mais frágeis pode ser prejudicado devido à diminuição da quantidade de oxigênio no solo, o que afeta a absorção de nutrientes. Além disso, as precipitações intensas podem resultar em efeitos adversos à saúde da população, uma vez que a exposição a áreas de enchentes e alagamentos pode aumentar o risco de contágio de doenças infecciosas, como a leptospirose, transmitida pelo contato com água ou lama contaminada por urina de animais, principalmente roedores (MOURA *et al.*, 2016).

O estudo do comportamento de variáveis extremas, como a precipitação máxima, é realizado por meio de abordagens da Teoria de Valores Extremos. Esta teoria foi impulsionada a partir do trabalho de Fisher e Tippett (1928), que descreveu os três tipos de distribuição assintótica de valores extremos (Tipo I, II e III). Para esta teoria, a análise de conjuntos de dados com tamanho amostral pequeno é comum, devido a natureza das variáveis extremas. Neste cenário, a utilização da Inferência Bayesiana como método para ajuste de modelos de extremos emerge como uma alternativa de abordagem eficaz para análises, pois permite a incorporação de informações *a priori*, o que pode reduzir as incertezas acerca dos parâmetros a serem estudados (STEPHENSON; TAWN, 2004).

A partir de predições pontuais, obtidas via Inferência Bayesiana, para diferentes localidades e tempos de retorno em uma região, pode-se realizar a análise da variável sob uma

perspectiva espacial. Neste trabalho, foram aplicadas diferentes técnicas de estatística espacial, possibilitando investigar o comportamento espacial da precipitação extrema na região sul e sudoeste de Minas Gerais. Essas técnicas se concentram na modelagem de variáveis que apresentam estrutura espacial, o que permite realizar inferências e previsões de atributos para localidades não amostradas no espaço.

A Estatística Espacial utiliza métodos de interpolação, que são baseados em valores de pontos conhecidos para calcular valores para pontos não amostrados (CARMO; RODRIGUES; SANTOS, 2015). Existem diferentes métodos de interpolação espacial, que podem ser classificados em três categorias principais: Determinísticos (ou Geométricos), Estatísticos e Geoestatísticos. A abordagem Geoestatística é particularmente atraente, uma vez que permite o uso de métodos multivariados para incorporar informações complementares de covariáveis espaciais (CERÓN *et al.*, 2021). Neste estudo, foram empregados métodos de interpolação Determinísticos e Geoestatísticos, sendo utilizados, respectivamente, o método do Inverso da Distância Ponderada (IDP) e o método da Krigagem Ordinária (KO) e Krigagem Log-Normal (KLN).

A análise espacial realizada por meio do IDP e Krigagem é comumente utilizada para realizar previsões espaciais a partir de valores de atributos já observados. Entretanto, tendo em vista a fundamentação deste trabalho sob a perspectiva da Teoria de Valores Extremos, que tem como diferencial a capacidade de prever valores máximos para um tempo de retorno futuro, buscou-se unir ferramentas da Teoria de Valores Extremos e da Estatística espacial. Desta forma, a análise espacial deu-se mediante a obtenção dos níveis de retorno para diferentes localidades da região e diferentes tempos de retorno.

Devido à característica extrema do fenômeno em estudo, foram empregadas além dos métodos de Krigagem e IDP, metodologias próprias para análise espacial de variáveis extremas, tais como os processos Máx-estáveis e a distribuição Generalizada de Valores Extremos (GEV) espacial. Por meio dos processos Máx-estáveis e do modelo GEV espacial, é possível integrar covariáveis geográficas e climáticas em superfícies de tendência, permitindo a variação espacial dos parâmetros dos modelos extremos na região analisada e a previsão espacial do atributo (BANERJEE; CARLIN; GELFAND, 2014).

Ao que diz respeito a análise espacial da precipitação pluvial em regiões mineiras, foram encontrados na literatura poucos trabalhos que empregaram métodos Geoestatísticos para a interpolação da variável (DANTAS; OLIVEIRA, 2021; GUIMARÃES; ALVES, 2023; SILVA, 2019). Entretanto, diferenciando do presente estudo, estes trabalhos se concentraram em avaliar

a espacialização da variável observada ou a média pluviométrica, sem abordar a predição para algum tempo de retorno.

Em razão das implicações potenciais das chuvas intensas e sua influência em diversos aspectos socioeconômicos e ambientais em uma determinada região, é fundamental realizar estudos e compreender o comportamento desse fenômeno. Portanto, este trabalho tem como objetivo contribuir para o planejamento e gerenciamento de ações a serem tomadas em relação aos possíveis danos decorrentes da precipitação extrema na região sul e sudoeste de Minas Gerais.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste estudo é modelar a precipitação máxima na região sul e sudoeste de Minas Gerais utilizando diferentes metodologias espaciais.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Este trabalho teve como norteador para o desenvolvimento da pesquisa uma série de objetivos específicos estabelecidos. A seguir, são apresentados os objetivos específicos:

- a) ajustar via Inferência Bayesiana a distribuição GEV aos dados de precipitação máxima das 29 cidades do sul e sudoeste de Minas Gerais;
- b) avaliar a melhor estrutura de *priori* (informativa e não informativa) para cada localidade;
- c) calcular, via Inferência Bayesiana, previsões pontuais de precipitação máxima para diferentes tempos de retorno para cada cidade do sul e sudoeste de Minas Gerais analisadas;
- d) ajustar e avaliar o melhor modelo de semivariograma, dentre o Gaussiano, Esférico, Exponencial e Onda;
- e) comparar as estimativas espaciais para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos obtidas via IDP e Krigagem, avaliando a metodologia mais adequada para aplicação;
- f) produzir mapas de previsões a partir da metodologia mais adequada, dentre os métodos de Krigagem e IDP, para tempos de retorno de 50 e 100 anos;
- g) definir superfícies de tendências a serem utilizadas nos modelos espaciais de extremos;
- h) ajustar os modelos Máx-estáveis e o modelo GEV espacial utilizando, respectivamente, o método da Máxima Verossimilhança Pareada e Máxima Verossimilhança;
- i) comparar as estimativas espaciais para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos obtidas via modelo GEV espacial, modelo Máx-estável de Smith e modelo Máx-estável de Schlatter com funções de correlação de Bessel, Cauchy, Powered Exponential e Whittle-Matérn, avaliando a metodologia mais adequada para aplicação;

- j) produzir mapas de predições a partir da metodologia mais adequada, dentre os modelos Máx-estáveis e o modelo GEV, para tempos de retorno de 50 e 100 anos.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção são apresentados aspectos acerca de eventos climáticos extremos, assim como uma síntese dos principais trabalhos que contribuíram para o avanço da Teoria de Valores Extremos. Apresenta-se também, uma revisão de literatura quanto à Inferência Bayesiana e metodologias da Estatística Espacial (Inverso da Distância Ponderada e Krigagem) e Espacial de Extremos (Processos Máx-estáveis e Modelo GEV espacial).

3.1 EVENTOS CLIMÁTICOS EXTREMOS

A influência de eventos climáticos extremos nas atividades humanas é observada desde tempos antigos. No entanto, após o século XX, com o aumento da população mundial, as consequências da ocorrência desses fenômenos se intensificaram, levando a impactos sem precedentes (DIAS, 2014).

Conforme Albeverio, Jentsch e Kantz (2006), os extremos climáticos podem ser definidos como valores de parâmetros meteorológicos, que excedem ou ficam abaixo de determinados limites, ou representam a quantidade máxima ou mínima em um determinado período. Esses valores são associados a uma probabilidade relativamente baixa de ocorrência, mas com alto impacto nas sociedades e ecossistemas. Portanto, eventos climáticos extremos incluem, por exemplo, precipitação intensa, períodos de seca, máximas e mínimas de temperatura, velocidade do vento e umidade do ar, entre outros (LUBCHENCO; KARL, 2012; ZHANG *et al.*, 2017).

A relação entre a ocorrência de fenômenos climáticos extremos e desastres naturais não é bicondicional, isto é, a ocorrência deste evento não necessariamente implica em desastres. Segundo Xavier, Barcellos e Freitas (2014), fatores sociais, como infraestruturas danificadas e ocupação em áreas de relevo acidentado ou impróprio, podem contribuir para que uma localidade e sua população estejam em uma posição de desfavorecimento em relação ao fenômeno, o que aumenta a probabilidade de ocorrência de um desastre. Portanto, os desastres são geralmente resultado da combinação entre eventos climáticos extremos e fatores sociais.

3.2 PRECIPITAÇÃO PLUVIAL E PRECIPITAÇÃO PLUVIAL MÁXIMA

A precipitação pluvial é um parâmetro meteorológico de grande importância e influência para diversas áreas, incluindo agricultura, hidrologia e planejamento urbano. Desta forma o conhecimento acerca da intensidade, frequência e duração da precipitação é de especial importância para a avaliação e gestão de recursos hídricos (SCHNEIDER *et al.*, 2015).

A precipitação, quando ocorre de forma constante e moderada, pode proporcionar diversos benefícios, como irrigação natural, abastecimento de água e resfriamento do ar. No entanto, quando essa mesma quantidade de precipitação ocorre em um curto espaço de tempo, pode ocasionar inundações e escoamentos locais (TRENBERTH *et al.*, 2003).

Denomina-se a precipitação como máxima, quando esta refere-se ao maior valor registrado de precipitação em um determinado período de tempo em uma determinada região, ou o valor que excede um limiar, assim como abordado na seção 3.1. Desta forma, a precipitação máxima é de particular interesse em estudos de eventos climáticos extremos.

A compreensão do comportamento da precipitação máxima pode ser dada por meio de modelagens estatísticas. Uma possibilidade para tal é ajustar uma distribuição de probabilidade aos valores de uma amostra observada de máximos de precipitação, o que possibilita calcular a probabilidade de ocorrência de valores superiores a limites de interesse ou valores esperados da precipitação extrema para períodos de retorno especificados. Para a análise da precipitação máxima, a distribuição GEV tem sido frequentemente utilizada e apresentado resultados satisfatórios na modelagem desses eventos (SABINO *et al.*, 2021; FERREIRA; BEIJO; AVELAR, 2021; BLAIN; LULU, 2011; CORREIA-FILHO; LUCIO; SPYRIDES, 2016).

3.3 TEORIA DOS VALORES EXTREMOS

A Teoria dos Valores Extremos é uma área fundamental da Estatística Matemática que permite a análise do comportamento estocástico de eventos raros, situados nas caudas das distribuições e afastados do centro da distribuição dos dados, como destacado por Rocco (2014). Assim, considera-se como extremo qualquer evento que corresponde ao conjunto de valores máximos ou mínimos de um determinado bloco temporal, ou que ultrapassa um determinado limiar. Devido a essa restrição de dados, o tamanho da amostra para análise de extremos é geralmente limitado.

Conforme destacado por Mendes (2004), a Teoria de Valores Extremos teve seu início

com a aplicação em questões relacionadas à precipitação máxima e ao nível de inundação nos Estados Unidos. Contudo, sua utilidade se estende para além dessas áreas, podendo ser empregada na análise de diversas variáveis climáticas extremas, resistência de materiais e séries financeiras, com um enfoque particular na gestão de riscos.

A Teoria teve como marco a publicação do artigo de Fisher e Tippett (1928), no qual verificaram que a distribuição dos máximos convergia para uma distribuição degenerada ou para uma das três formas assintóticas de valores extremos, conhecidas respectivamente como Gumbel (tipo I), Fréchet (tipo II) e Weibull (tipo III). Posteriormente, Gnedenko (1943) apresentou uma rigorosa fundamentação teórica das condições necessária e suficiente para a convergência em distribuição do máximo para uma distribuição não degenerada.

Entretanto, mesmo com as grandes contribuições concebidas à Teoria, ainda havia a dificuldade de escolher uma dentre as três distribuições para a análise dos fenômenos de interesse. Este problema foi solucionado apenas com a publicação do trabalho de Jenkinson (1955), no qual foi proposta a distribuição GEV, que incorpora as três formas assintóticas em uma única generalizada.

A função de probabilidade acumulada da distribuição GEV para máximos é dada por:

$$F(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, \quad (3.1)$$

em que, $1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0$ com $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^*$.

Derivando-se 3.1 em relação a x , é possível obter a função densidade da distribuição da distribuição GEV, como representada pela equação (3.2), em que μ , σ e ξ são os parâmetros posição, escala e forma, respectivamente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, \quad (3.2)$$

em que, $1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^*$. A forma que a distribuição GEV assume varia conforme o valor do parâmetro ξ , portanto, para $\xi < 0$ a função é definida em $-\infty < x < \mu - \frac{\sigma}{\xi}$, para $\xi > 0$ a função é definida em $\mu - \frac{\sigma}{\xi} < x < \infty$ e para ξ igual a zero a função é definida para $x \in \mathbb{R}$.

Diversos métodos podem ser utilizados para estimar os parâmetros da distribuição GEV, incluindo a Inferência Bayesiana. Essa metodologia apresenta uma forte relação com a função

de verossimilhança da GEV, que é determinante para o cálculo das estimativas dos parâmetros. Essa relação será discutida com maior profundidade na seção 3.4.

A função de verossimilhança da distribuição GEV é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma^n} \prod_{i=1}^n \left\{ \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \right\} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1}{\xi}\right)} \right\} \right\}, \quad (3.3)$$

em que, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma, \xi)$ e n é o tamanho da amostra.

Uma abordagem amplamente empregada para estimar os parâmetros da distribuição GEV é a da Máxima Verossimilhança. Isso se deve à sua facilidade de compreensão e adaptabilidade a distribuições complexas. Entretanto, a abordagem de Máxima Verossimilhança pode não garantir boas propriedades assintóticas para amostras de tamanho reduzido, conforme apontado por (COLES; DIXON, 1999). Uma alternativa para contornar essa limitação é a Inferência Bayesiana, que permite a incorporação de informações *a priori* sobre a distribuição dos parâmetros, a fim de aprimorar e reduzir as incertezas das estimativas dos parâmetros.

3.4 INFERÊNCIA BAYESIANA

O início do estudo da abordagem Bayesiana de forma aplicada deu-se na primeira metade do século XX, a partir do estudo publicado por Jeffreys (1939). Entretanto, a popularização dessa metodologia foi limitada pela necessidade de calcular integrais de difícil ou sem solução analítica. Somente com o avanço tecnológico na década de 90, foi possível avançar no estudo da abordagem, quando Gelfand *et al.* (1990) propuseram a utilização de simulações dinâmicas através do algoritmo de Gibbs.

A análise de um evento qualquer sob uma concepção Bayesiana tem como diferencial, quando comparada à abordagem clássica, a visão de que os parâmetros da distribuição de interesse são aleatórios e, dessa forma, assumem uma distribuição. Isso difere da abordagem clássica, na qual os parâmetros são constantes.

A abordagem Bayesiana incorpora informações *a priori* sobre o fenômeno de interesse e a informação dos dados para obter a densidade *a posteriori* dos parâmetros. A informação *a priori* é representada por uma distribuição *a priori* dos parâmetros, que reflete o conhecimento prévio sobre eles antes da obtenção ou coleta dos dados. A informação proveniente dos dados é representada pela função de verossimilhança. Em resumo, a distribuição *a posteriori* incorpora

toda a informação disponível sobre os parâmetros, pois contém tanto a informação inicial quanto a informação da amostra (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

Utilizando-se a distribuição *a priori*, $p(\boldsymbol{\theta})$, e a função de verossimilhança, $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$, é possível obter a distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$, $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$:

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \propto L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})p(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.4)$$

em que, \propto representa proporcionalidade, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a amostra de dados e $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma, \xi)$.

O processo de inferência acerca da quantidade de interesse, conforme a abordagem Bayesiana, é baseado nas distribuições marginais *a posteriori*, obtidas através do processo de integração da distribuição conjunta *a posteriori* (SILVA; LEANDRO, 2009).

3.4.1 Distribuição *a priori*

De acordo com Paulino, Turkman e Murteira (2003), a informação *a priori* utilizada na análise Bayesiana é aquela coletada antes do estudo em questão, a qual está relacionada à experiência prévia do especialista no problema em análise e pode conter elementos subjetivos. A inclusão dessa informação é importante para a obtenção da distribuição *a posteriori* dos parâmetros, que incorpora tanto a informação inicial quanto a informação dos dados.

A distribuição *a priori* pode ser classificada em dois tipos, de acordo com o grau de informação disponível sobre os parâmetros $\boldsymbol{\theta}$: distribuição *priori* informativa e distribuição *priori* não informativa. Quando os especialistas possuem informações prévias e dão preferência para um intervalo de um ou mais valores dos parâmetros em um espaço paramétrico, a distribuição *a priori* é definida como distribuição informativa. Por outro lado, quando o pesquisador não prioriza nenhum valor do parâmetro num espaço paramétrico, é definida como distribuição *a priori* não informativa.

Martins *et al.* (2018b) afirmam que a *priori* é a forma de se quantificar a incerteza sobre o experimento, porém a *priori* não informativa não evidencia necessariamente o desconhecimento do pesquisador sobre o experimento. Logo, é necessário utilizá-la de forma a viabilizar a inferência *a posteriori*.

Coles e Powell (1996) formularam uma distribuição *a priori* para os três parâmetros da distribuição GEV, com o objetivo de melhorar a estimativa desses parâmetros, propondo que os

mesmos seguem uma distribuição Normal Trivariada, assim,

$$\boldsymbol{\theta} \sim MVN(\boldsymbol{\Phi}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0), \quad (3.5)$$

em que, MVN é a sigla para Normal Multivariada, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \log(\sigma), \xi)$ é o vetor dos parâmetros, $\boldsymbol{\Phi}_0$ é o vetor de médias dos hiperparâmetros e $\boldsymbol{\Sigma}_0$ é a matriz de variâncias e covariâncias dos hiperparâmetros, dadas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_0 &= (\mu_0, \log(\sigma_0), \xi_0); \\ \boldsymbol{\Sigma}_0 &= \begin{pmatrix} VAR(\mu_0) & cov(\log(\sigma_0), \mu_0) & cov(\xi_0, \mu_0) \\ cov(\mu_0, \log(\sigma_0)) & VAR(\log(\sigma_0)) & cov(\xi_0, \log(\sigma_0)) \\ cov(\mu_0, \xi_0) & cov(\log(\sigma_0), \xi_0) & VAR(\xi_0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ainda conforme Coles e Powell (1996), a distribuição Normal Trivariada é dada por:

$$p(\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{1/2} |\boldsymbol{\Sigma}_0|^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\Phi}_0)^t \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\Phi}_0) \right\}. \quad (3.7)$$

3.4.2 Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov

De acordo com Oliveira *et al.* (2018), as distribuições marginais dos parâmetros da GEV não podem ser obtidas analiticamente, exigindo o uso de técnicas de simulação baseadas em distribuições de probabilidade. Uma dessas técnicas é a simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), que emprega algoritmos iterativos, como o Metropolis-Hastings e o Amostrador de Gibbs, para gerar variáveis com densidades desconhecidas. Esse método busca construir uma densidade para cada parâmetro, porém é importante verificar a convergência das cadeias geradas.

O algoritmo de Metropolis-Hastings é uma técnica utilizada para obter uma amostra da distribuição marginal *a posteriori* quando o Amostrador de Gibbs não é eficiente, ou seja, quando a distribuição condicional dos parâmetros não é conhecida. Nesse caso, são gerados valores para o parâmetro a partir de uma distribuição proposta e, em seguida, esses valores são aceitos ou rejeitados com uma certa probabilidade de aceitação (MIAO *et al.*, 2019).

Esses algoritmos podem obter amostras da distribuição *a posteriori* executando uma Cadeia de Markov construída, e o algoritmo simula cadeias de Markov em uma integração de

Monte Carlo para gerar um conjunto de pontos cuja distribuição converge para a distribuição a *posteriori* (CHUNG; KIM, 2013).

3.4.3 Análise de Convergência das cadeias

Diversos critérios têm sido propostos para avaliar a convergência das cadeias a *posteriori* dos parâmetros. Entre esses métodos, Nogueira, Safadi e Ferreira (2004) recomendam a aplicação dos critérios de Raftery-Lewis, Geweke e Heidelberg e Welch. Desta forma, neste trabalho foram utilizados estes critérios para a avaliação da convergência das cadeias obtidas.

O critério de Raftery-Lewis permite obter estimativas do número de iterações iniciais que devem ser descartadas (*burn-in*) e da distância mínima de uma iteração à outra para se obter a subamostra aproximadamente independente (*thin*). Além disso, o critério fornece o fator de dependência, que mediante o valor obtido para este, pode-se avaliar a convergência das cadeias. Conforme Raftery e Lewis (1992), se o fator de dependência for maior que 5, conclui-se que não há evidências de convergência da cadeia.

O fator de dependência é obtido pela divisão do número total de iterações pelo número de amostras independentes necessárias para estimar a probabilidade posterior dentro da precisão desejada e da probabilidade de cobertura especificada (SMITH, 2007).

O critério de Geweke, proposto por Geweke (1992), é baseado em um teste de igualdade de médias entre segmentos da cadeia de Markov, sendo comparado a média da parte inicial com a final. Desta forma, seja $\{x_{1,i} : i = 1, \dots, n_1\}$ o segmento inicial da cadeia e $\{x_{2,i} : i = n - n_2 + 1, \dots, n\}$ o segmento final, com n sendo o número de iterações, $n_1 = \frac{n}{10}$ e $n_2 = \frac{n}{2}$, então os seguimentos possuem média \bar{x}_1 e \bar{x}_2 e variância assintótica $\hat{S}_1^2(0)$ e $\hat{S}_2^2(0)$ calculada como a densidade espectral na frequência zero.

A estatística do teste para o critério de convergência de Geweke é dada por:

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\hat{S}_1^2(0)/n_1 + \hat{S}_2^2(0)/n_2}} \sim N(0, 1). \quad (3.8)$$

Desta forma, quando o valor da estatística Z é inferior ao quantil superior da distribuição Normal Padrão, respectivo ao nível de significância adotado, não há evidências para rejeitar a hipótese de igualdade entre as médias do início e do final da cadeia, o que indica que as cadeias convergiram. Portanto, ao nível de significância de 5% a estatística do teste deve ser inferior a 1,96.

O critério de convergência de Heidelberg e Welch, proposto por Heidelberg e Welch (1983), emprega testes estatísticos para avaliar a hipótese nula de estacionariedade da amostra gerada pelas cadeias. Se a hipótese nula de convergência for rejeitada, os primeiros $\frac{n}{10}$ da amostra são descartados e o teste é reaplicado. Esse processo é repetido até que o teste não seja significativo ou 50% das amostras tenham sido descartadas, o que torna a cadeia não estacionária. Se a convergência não for rejeitada, um teste *half-width* é realizado para determinar se a média estimada está sendo calculada com uma acurácia especificada (SMITH, 2007). O teste é aprovado se a razão entre (limite superior – limite inferior)/2 e a média estimada for menor do que a acurácia especificada (NOGUEIRA; SAFADI; FERREIRA, 2004).

Portanto, se no critério de Heidelberg e Welch o valor p do teste for maior do que o nível de significância, indica-se que não há evidências para se rejeitar a hipótese nula de estacionariedade da amostra gerada pelas cadeias.

3.5 ESTATÍSTICA ESPACIAL

A Estatística Espacial permite o estudo do comportamento de um evento no espaço. Assim como as diversas áreas da estatística, a espacial é composta por diferentes metodologias, sendo que para este trabalho foram utilizados métodos determinísticos e geoestatísticos, além de pretender-se utilizar métodos espaciais de valores extremos.

3.5.1 Inverso da Distância Ponderada

O Inverso da Distância Ponderada (IDP) é um interpolador univariado clássico que utiliza a distância entre os pontos amostrados e os de interesse para a interpolação de um atributo em uma determinada área. Este método pode ser associado a primeira lei da Geografia de Tobler (TOBLER, 1970), em que se afirma que todas as coisas são parecidas, mas coisas mais próximas se parecem mais do que as mais distantes.

Para uma localização não observada, o cálculo da estimativa do atributo via IDP é dado por:

$$\widehat{Z}(u_j) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_{ij}^p} Z(u_i)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_{ij}^p}}, \quad (3.9)$$

em que, $\widehat{Z}(u_j)$ é a estimativa do atributo para uma localidade u_j não amostrada, $Z(u_i)$ é o valor

observado de precipitação máxima para um ponto observado, d_{ij} é a distância euclidiana entre o i -ésimo vizinho e o ponto u_j , $1/d_{ij}^p$ representa o peso e p é o parâmetro de potência e n é o número de pontos amostrados utilizados para a estimação.

O método de interpolação espacial IDP é amplamente utilizado na análise de dados geoespaciais devido à sua simplicidade e dependência exclusiva dos valores observados e das distâncias entre os pontos. Devido à facilidade de compreensão e aplicação, o IDP é frequentemente empregado para espacialização de variáveis em locais não amostrados, sendo um dos métodos mais utilizados, juntamente com a Krigagem (MARTINS; ALVES; DAMASCENO, 2019).

Por meio do IDP realiza-se a interpolação dos valores no espaço a partir da média ponderada de valores observados dentro de um raio de busca. A importância de cada valor observado é determinada por um peso que é inversamente proporcional à distância ponderada entre o ponto de interesse e o ponto observado.

3.5.2 Geoestatística

Segundo Nogueira (2013), na década de 1950 foi observado pelo engenheiro de minas Daniel Krige, que ao se considerar a dependência espacial obtinha-se métodos mais eficientes de estimação da concentração de ouro. Esses estudos influenciaram o francês George Matheron, que formalizou tais teorias e as denominou como Teoria das Variáveis Regionalizadas.

Conforme Yamamoto e Landim (2013), a partir de 1980 os métodos Geoestatísticos passaram a ser utilizados em diferentes áreas de estudo, como na Agricultura, Cartografia, Engenharia Florestal, Geologia, Hidrologia e Climatologia, tendo como objetivo o estudo e a representação estrutural das variáveis afim de solucionar problemas de estimativas, baseando-se em dados observados. Desta forma, qualquer variável aleatória dependente do espaço e que possui caráter estrutural, pode ser denominada como variável regionalizada e submeter-se à análise Geoestatística. Ainda conforme os autores, a variável regionalizada pode ser definida como uma função numérica com variação espacial e continuidade aparente, cuja a variação é explicada por modelos de semivariograma.

De forma sintetizada, pode-se definir a Geoestatística como um conjunto de métodos para análise espacial que permite utilizar da dependência espacial inerente às observações para calcular valores em locais não amostrados. Para isto, utiliza-se modelos probabilísticos associados à localização dos pontos, o que possibilita analisar a variabilidade entre os valores

observados (ANDRADE *et al.*, 2018).

De acordo com Cressie (1993), a Geoestatística baseia-se, fundamentalmente, em dois conceitos: a Krigagem, que tem o objetivo de predizer, de forma não tendenciosa e com variância mínima, os valores de um determinado atributo em pontos não amostrados; e o semivariograma, cujo papel é descrever a estrutura da variabilidade espacial.

3.5.2.1 Semivariograma

O semivariograma desempenha um papel fundamental na aplicação dos métodos Geoestatísticos, pois expressa o grau de dependência espacial dos dados e permite a estimativa dos parâmetros com os quais os valores não amostrados são preditos por meio da técnica de interpolação conhecida como Krigagem, que possibilita a construção de mapas de predição espacial (BRUBACHER; OLIVEIRA; GUASSELLI, 2020).

Ao que diz respeito aos estimadores de semivariograma, tem-se o estimador clássico de Matheron como o mais utilizado (MATHERON, 1962), dado por:

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2, \quad (3.10)$$

em que, \mathbf{h} é a distância vetorial entre pares de observações, $N(\mathbf{h})$ é o número de pares ordenados e $z(\mathbf{u}_i)$ e $z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})$ são valores observados nas respectivas localizações \mathbf{u}_i e $\mathbf{u}_i + \mathbf{h}$.

Entretanto, este estimador é sensível a presença de *outliers* e assimetria da variável aleatória. Diante deste problema, uma abordagem que pode ser adotada é o uso do estimador robusto de Cressie-Hawkins. Conforme Barbosa *et al.* (2019), este estimador apresenta-se como uma alternativa para problemas em que os dados se distanciam da normalidade, já que não é sensível a presença de valores discrepantes. O estimador robusto de Cressie-Hawkins (CRESSIE; HAWKINS, 1980) é dado por:

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \left\{ [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^{\frac{1}{2}} \right\}^4 / \left[0,914 + \frac{0,988}{N(\mathbf{h})} \right]. \quad (3.11)$$

Neste trabalho, foram utilizados os modelos de semivariograma Gaussiano, Esférico, Exponencial e Onda, a fim de avaliá-los e verificar o modelo mais adequado para o estudo do fenômeno. Conforme Xavier *et al.* (2010) e Neto *et al.* (2018), os modelos são expressos por:

$$\gamma_{\text{gaus}}(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{|\mathbf{h}|}{a} \right)^2 \right) \right], |\mathbf{h}| < a, \quad (3.12)$$

$$\gamma_{\text{exp}}(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 \left[1 - \exp \left(- \frac{|\mathbf{h}|}{a} \right) \right], |\mathbf{h}| < a, \quad (3.13)$$

$$\gamma_{\text{esf}}(\mathbf{h}) = \begin{cases} C_0 + C_1 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{|\mathbf{h}|}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{h}|}{a} \right)^3 \right], & |\mathbf{h}| < a \\ C_0 + C_1, & |\mathbf{h}| \geq a \end{cases}, \quad (3.14)$$

$$\gamma_{\text{onda}}(\mathbf{h}) = \begin{cases} C_0 + C_1 \left[1 - \frac{\text{sen} \left(\pi \frac{|\mathbf{h}|}{a} \right)}{\pi \frac{|\mathbf{h}|}{a}} \right], & |\mathbf{h}| < a \\ C_0 + C_1, & |\mathbf{h}| \geq a \end{cases}, \quad (3.15)$$

em que, C_0 é o efeito pepita, sendo o valor do semivariograma para distância igual a zero, C_1 a contribuição, que conforme Pereira *et al.* (2018), indica as diferenças espaciais da variável em dois pontos com distâncias cada vez mais altas. O alcance a , especifica a distância até a qual as amostras se correlacionam espacialmente e \mathbf{h} é a distância vetorial entre os pares de observações.

3.5.2.2 Krigagem

A Krigagem é uma técnica Geoestatística utilizada para interpolação de valores não amostrados em uma determinada área, permitindo o conhecimento acerca da distribuição e variabilidade espacial de um fenômeno (ACHOURI; GIFFORD, 1984). Ela se baseia nas premissas de não-tendenciosidade do estimador e variância mínima das estimativas, e utiliza funções de semivariogramas para detectar a estrutura da variabilidade espacial da variável de interesse (THOMPSON, 1992; TOBIN *et al.*, 2011).

Neste trabalho, foram utilizados o método de Krigagem Ordinária e Krigagem Log-Normal. A Krigagem Log-Normal é a aplicação de outro método de Krigagem porém, com a transformação da escala da variável em análise. Desta forma, pode-se utilizar a Krigagem Log-Normal como uma variação, por exemplo, da Krigagem Ordinária, o que poderia ser denominado como Krigagem Ordinária Log-Normal.

O cálculo do atributo para um local não amostrado sob a perspectiva da Krigagem Ordi-

nária é dado por:

$$\hat{z}(u_i) = \sum_{i=1}^n \lambda^{KO} z(u_i), \quad (3.16)$$

em que, $\hat{z}(u_i)$ é o valor calculado para a localização u_i , $z(u_i)$ é o valor observado, λ^{KO} se refere aos pesos calculados com base em n dados.

O método de Krigagem Log-Normal baseia-se na transformação dos dados para a escala logarítmica, com o objetivo de se obter uma distribuição simétrica dos dados (WEBSTER; OLIVER, 2007). Os dados transformados são utilizados para o cálculo do semivariograma e desta forma, utiliza-se para interpolação do atributo em áreas não amostradas a Krigagem Ordinária. Entretanto, os valores obtidos estão no domínio logarítmico, havendo portando a necessidade da transformação para a escala original, dada por (YAMAMOTO; FURUIE, 2010):

$$\hat{z}_{KLN}(u_i) = \exp \left[\frac{\hat{y}_{KLN}(u_i) + \sigma_{KLN}^2(u_i)}{2 - \mu(u_i)} \right], \quad (3.17)$$

em que, $\hat{z}_{KLN}(u_i)$ são as estimativas em escala original e $\hat{y}_{KLN}(u_i)$ as estimativas em escala logarítmica, σ_{KLN}^2 é a variância da Krigagem Log-Normal e μ é o parâmetro de Lagrange.

3.6 ANÁLISE ESPACIAL DE EXTREMOS

Ao decorrer das seções 3.5.1 e 3.5.2, foram apresentadas metodologias para a análise de eventos espaciais, como o interpolador determinístico do IDP e também métodos geoestatísticos de Krigagem. Entretanto, tais metodologias são fundamentadas em processos gaussianos, o que pode gerar resultados não tão satisfatórios na análise espacial de eventos extremos, uma vez que os dados extremos estão localizados nas caudas das distribuições e, portanto, possuem características distantes da normalidade.

Considerando que métodos Geoestatísticos convencionais não são recomendados para a análise de eventos extremos, surge a necessidade de outra metodologia para realizar a modelagem espacial. No trabalho publicado por Ribatet (2009), é proposta a utilização de processos Máx-estáveis para a modelagem de máximos sob domínio espacial. Conforme Olinda (2012), trata-se de uma extensão da Teoria de Valores Extremos multivariados, capaz de incorporar aspectos existentes na Geoestatística, permitindo avaliar a dependência espacial de máximos.

Outra metodologia que pode ser utilizada para a análise espacial de extremos é a abordagem via GEV espacial. O modelo GEV espacial utiliza unicamente de superfícies de tendência

que representam a variação dos parâmetros da GEV no espaço, o que possibilita o cálculo de níveis de retorno para locais não amostrados.

3.6.1 Processos Máx-estáveis

O processo Máx-estável foi proposto por Hann (HAAN, 1984) e conforme Dombry, Engelke e Oesting (2016) é uma classe de campos aleatórios de grande interesse para a Teoria de Valores Extremos, por ser adequada para variáveis extremas. Um processo Máx-estável $Z(\cdot)$ é o processo limite de máximos de campos aleatórios independentes e identicamente distribuídos, com um conjunto de índices S no domínio espacial, $Y_i(x)_{x \in S}$ com $i = 1, \dots, n$, repetições de um processo aleatório contínuo. Para duas sequências numéricas adequadas $a_n(x) > 0$ e $b_n(x) \in \mathbb{R}$ (KOCH, 2017), tem-se que

$$Z(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\max_{i=1}^n Y_i(x) - b_n(x)}{a_n(x)}, \quad x \in S. \quad (3.18)$$

Desta forma, se o limite de $Z(x)$ existe, então o processo limite $Z(x)$ é um processo Máx-estável (YASIN *et al.*, 2019). De acordo com Thibaud, Mutzner e Davison (2013), é conveniente transformar o processo Máx-estável para unidades marginais de Fréchet, isto é, $\Pr\{Z(x) \leq z\} = \exp(-1/z)$ para $x \in S$ e $z > 0$. Desta forma, o processo Máx-estável é chamado de Máx-estável simples, sendo representado por:

$$Z(x) = \max_{i \geq 1} W_i(x)/T_i, \quad x \in S, \quad (3.19)$$

em que, $0 < T_1 < T_2 < \dots$ representam os pontos de um processo de Poisson de taxa unitária e os $W_i(x)$ são replicatas independentes de um processo aleatório não negativo $W(x)$, que satisfaz $E\{W(x)\} = 1$ para cada $x \in S$ (THIBAUD; MUTZNER; DAVISON, 2013).

A partir deste modelo geral, desenvolveu-se diferentes caracterizações de modelos de processos Máx-estáveis para análise de eventos espaciais extremos (DIRIBA; DEBUSHO, 2021), como o modelo de Smith e o modelo de Schlatter.

Para modelo de Smith, considera-se $W_i(x)$ uma função densidade de probabilidade e assume-se que $W(x - s)$ é uma densidade normal multivariada com matriz de covariância Σ e média s uniformemente escolhida em S (THIBAUD; MUTZNER; DAVISON, 2013). Desta forma, o processo $Z(x)$ em localidades x_1 e x_2 para o modelo de Smith, é dado pela função de

distribuição acumulada bivariada do modelo:

$$\Pr [Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2] = \exp \left[-\frac{1}{z_1} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_2}{z_1} \right) - \frac{1}{z_2} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_1}{z_2} \right) \right], \quad (3.20)$$

em que, $\Pr [Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2]$ representa a função de distribuição acumulada bivariada para as variáveis aleatórias $Z(x_1)$ e $Z(x_2)$ no modelo de Smith. Essa função descreve a probabilidade conjunta de que os valores Z em x_1 e x_2 sejam menores ou iguais a z_1 e z_2 . Φ é a função de distribuição acumulada normal padrão, isto é, $\Phi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^u \exp(-x^2/2) dx$, a é a distância de Mahalanobis definida por: $a = \sqrt{(x_1 - x_2)^T \Sigma^{-1} (x_1 - x_2)}$ em que Σ é a matriz de covariâncias. Conforme Olinda (2012), a matriz de covariâncias Σ , de parâmetros $\Sigma = \sigma_{11}, \sigma_{12}$ e σ_{22} , define diretamente a dependência extrema.

Para o modelo de Schlather, implementado por Schlather (2002), $W(x)$ é proporcional à parte positiva de um processo gaussiano centrado estacionário, com variância unitária e função de correlação $\rho(\mathbf{h})$. A função de distribuição acumulada bivariada para localizações x_1 e x_2 no modelo de Schlatter, é dada por:

$$\Pr [Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2] = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left(1 + \sqrt{1 - 2(\rho(\mathbf{h}) + 1) \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}} \right) \right], \quad (3.21)$$

em que, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^+$ é o vetor de distâncias Euclidianas entre duas localizações.

Existem diferentes funções de correlação, dentre estas à de Whittle-Matérn, Cauchy, Powered Exponential e Bessel, apresentadas em 3.22, dadas conforme apresentado no trabalho de Ribatet (2009):

$$\begin{array}{ll} \text{Whittle-Matérn} & \rho(\mathbf{h}) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\mathbf{h}}{c_2} \right)^\nu K_\nu \left(\frac{\mathbf{h}}{c_2} \right), \quad c_2 > 0, \quad \nu > 0, \\ \text{Cauchy} & \rho(\mathbf{h}) = \left[1 + \left(\frac{\mathbf{h}}{c_2} \right)^2 \right]^{-\nu}, \quad c_2 > 0, \quad \nu > 0, \\ \text{Powered Exponential} & \rho(\mathbf{h}) = \exp \left[- \left(\frac{\mathbf{h}}{c_2} \right)^\nu \right], \quad c_2 > 0, \quad 0 < \nu \leq 2, \\ \text{Bessel} & \rho(\mathbf{h}) = \left(\frac{2c_2}{\mathbf{h}} \right)^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu \left(\frac{\mathbf{h}}{c_2} \right), \quad c_2 > 0, \quad \nu \geq \frac{d-2}{2}, \end{array} \quad (3.22)$$

em que, c_2 e ν são o alcance e o parâmetro de suavização da função de correlação, Γ é a função gama e J_ν e K_ν são a função de Bessel e a função Bessel modificada de terceiro grau com ordem ν e d é a dimensão dos campos aleatórios.

3.6.1.1 Dependência Espacial de Máximos

Para uma análise espacial de extremos, é útil o conhecimento de medidas de dependência espacial. Uma forma de se avaliar o grau de dependência espacial é por meio de variogramas, entretanto, estes podem não existir quando utilizados para dados extremos (RIBATET, 2013). Desta forma, abordagens voltadas para extremos, como o Coeficiente Extremal e F-madograma, foram propostas como alternativas para contornar essa limitação.

A função do Coeficiente Extremal, proposta por Schlather e Tawn (2003), tem como objetivo avaliar a dependência extremal em processos Máx-estáveis, quantificando a dependência entre pares de locais separados por uma distância h (AZIZAH; SUTIKNO; PURHADI, 2017).

As funções do Coeficiente Extremal $\theta(x_1, x_2)$ para o modelo de Smith (3.20) e de Schlather (3.21) são dadas por:

$$\text{Smith: } \theta(x_1, x_2) = 2\Phi(a/2), \quad (3.23)$$

$$\text{Schlather: } \theta(x_1, x_2) = 1 + \sqrt{\frac{1 - \rho(\|x_1 - x_2\|)}{2}}, \quad (3.24)$$

em que, $1 \leq \theta(x_1, x_2) \leq 2$ com $\theta(x_1, x_2) = 1$ indicando a dependência completa entre duas observações e $\theta(x_1, x_2) = 2$ a independência completa, x_1 e x_2 são localizações, Φ é a função de distribuição acumulada normal padrão, a é a distância de Mahalanobis definida por: $a = \sqrt{(x_1 - x_2)^T \Sigma^{-1} (x_1 - x_2)}$ e $\rho(\|x_1 - x_2\|)$ é a função de correlação para duas localizações.

Conforme Chailan *et al.* (2014), um método de estimação para o Coeficiente Extremal é o F-madograma, proposto por Cooley, Naveau e Poncet (2006). O F-madograma é um estimador semelhante ao semivariograma empírico, mas adaptado para processos Máx-estáveis (RIBATET, 2017). O F-madograma, dado por 3.25, possui uma forte relação com o Coeficiente Extremal:

$$\nu_F(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \mathbb{E}[|F(Z(x)) - F(Z(x + \mathbf{h}))|] = \frac{1}{2} \frac{\theta(\mathbf{h}) - 1}{\theta(\mathbf{h}) + 1}, \quad (3.25)$$

em que, F é a função de distribuição acumulada de $Z(x)$, $\nu_F(\mathbf{h})$ é o valor do F-madograma para uma distância h e $Z(x) - Z(x + \mathbf{h})$ é a diferença entre o valor da variável de dois locais dentro de uma distância h .

De acordo com Schlather e Tawn (2003), as funções do Coeficiente Extremal em 3.23 e

3.24 são associados ao F-madograma, o que leva ao estimador:

$$\hat{\theta}(\mathbf{h}) = \frac{1 + 2\nu_F(\mathbf{h})}{1 - 2\nu_F(\mathbf{h})}, \quad (3.26)$$

em que, $\hat{\theta}(\mathbf{h})$ é o estimador para o Coeficiente Extremal e $\nu_F(\mathbf{h})$ é a função do F-madograma dada em 3.25.

3.6.1.2 Ajuste dos processos Máx-estáveis

O ajuste dos processos Máx-estáveis aos dados é fundamental para sua aplicabilidade. Existem diferentes métodos utilizados para realizar o ajuste dos modelos, entretanto, conforme Davison, Padoan e Ribatet (2012), os mais amplamente utilizados baseiam-se na função de verossimilhança.

Para este trabalho utilizou-se o método da Máxima Verossimilhança Pareada, assim como utilizado e recomendado por Ribatet (2013), Thibaud, Mutzner e Davison (2013), Diriba e Debusho (2021). O ajuste dos modelos é obtido maximizando o logaritmo da função de verossimilhança pareada (DIRIBA; DEBUSHO, 2021), dada por:

$$l_p(z|\boldsymbol{\psi}) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{s=j+1}^d \log f_{j,s}(z_{k,j}, z_{k,s}|\boldsymbol{\psi}), \quad (3.27)$$

em que, $f_{j,s}(z_{k,j}, z_{k,s}|\boldsymbol{\psi})$ é a função de densidade bivariada do processo Máx-estável, d é número de estações meteorológicas, com $z \in \mathbb{R}^d$, $z_{k,j}$ e $z_{k,s}$ é o k -ésimo máximo anual observado para as estações j e s , respectivamente; e $\boldsymbol{\psi}$ é o vetor de parâmetros do modelo.

Em 3.27, pressupõe-se que as observações são amostradas de uma distribuição Fréchet unitária, o que somente é possível em teoria. Para contornar essa limitação, é possível ajustar a distribuição GEV, via Máxima Verossimilhança, aos dados de cada localidade e transformá-los para a escala unitária de Fréchet. Conforme Hakim, Warsito e Yasin (2020), a transformação (t) para a unidade de Fréchet, do valor $z(x)$ associado a uma localidade x , é dada por:

$$t : z(x) \mapsto \left(1 + \hat{\xi} \frac{z(x) - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\hat{\xi}}}, \quad (3.28)$$

em que, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ e $\hat{\xi}$ são estimativas para os parâmetros da GEV.

Embora para fins teóricos possa se concentrar apenas em modelos Máx-estáveis sim-

ples com margens unitárias de Fréchet, em aplicações práticas é interessante acrescentar outras propostas (RIBATET, 2013).

Para uma localidade x com observações disponíveis, pode-se ajustar a distribuição GEV aos dados e obter estimativas para os parâmetros da distribuição. Entretanto, para x ausente de observações, os parâmetros devem ser inferidos a partir de dados em localizações próximas, isso pode ser feito modelando a evolução espacial dos parâmetros a partir de superfícies de tendência (GAUME *et al.*, 2013).

As superfícies de tendência podem ser incorporadas diretamente no processo Máx-estável. Entretanto, podem introduzir viés na estrutura de dependência se as superfícies de tendência forem inadequadas (RIBATET, 2017). Seja η um parâmetro qualquer da distribuição GEV, uma superfície de tendência genérica para o mesmo parâmetro é dada por:

$$\eta(x) = \beta_{0,\eta} + \beta_{1,\eta}g_1(x) + \cdots + \beta_{k,\eta}g_k(x), \quad (3.29)$$

em que, $g_k(x)$ é uma função qualquer dependente da latitude e/ou longitude do local x e $\beta_{\cdot,\eta}$ são coeficientes a serem estimados para cada superfície (HAKIM; WARSITO; YASIN, 2020).

A complexidade das superfícies de tendência para o parâmetro de forma pode ser alta devido às grandes incertezas associadas a esse parâmetro. Desta forma, não é restritivo que este seja constante (DIRIBA; DEBUSHO, 2021), isto é, $\xi(x) = \beta_{0,\xi}$.

É possível escrever a equação 3.29 de forma matricial, tal que η seja um vetor de dimensão $n \times 1$, as funções $g(x)$ sejam dadas por uma matriz \mathbf{X} de dimensão $n \times k$ e β um vetor de dimensão $k \times 1$. Desta forma, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \eta_1(x) \\ \vdots \\ \eta_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & g_{1,1}(x) & \cdots & g_{k,1}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & g_{1,n}(x) & \cdots & g_{k,n}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Um interesse para o ajuste do processo Máx-estável é o cálculo dos coeficientes β . Os coeficientes podem ser estimados utilizando o método de Mínimos Quadrados, desta forma, conforme Ribatet (2009), a estimativa de Mínimos Quadrados para β é dada por:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \eta. \quad (3.31)$$

Com o acréscimo das superfícies de tendência, a função do logaritmo da verossimi-

lhança pareada (3.27) deve ser modificada, adicionando-se termos extras para seja incorporada a evolução espacial dos parâmetros da GEV (RIBATET, 2017; RIBATET, 2009):

$$l_p(z|\boldsymbol{\psi}) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{s=j+1}^d \log f_{j,s}(t(z_{k,j}), t(z_{k,s})|\boldsymbol{\psi}) + \log |J(z_{k,j}) + J(z_{k,s})|, \quad (3.32)$$

em que, $\boldsymbol{\psi}$ é o vetor de parâmetros do modelo, $f_{j,s}(t(z_{k,j}), t(z_{k,s})|\boldsymbol{\psi})$ é a função de densidade bivariada do processo Máx-estável, $t(z_{k,j})$ e $t(z_{k,s})$ é o k -ésimo máximo anual observado transformado para unidades de Fréchet para as estações j e s , respectivamente, $J(z_{k,j})$ e $J(z_{k,s})$ são termos Jacobiano da forma: $J(z_{k,j}) = \frac{1}{\sigma(x)} \left(1 + \xi(x) \frac{z_{k,j} - \mu(x)}{\sigma(x)}\right)^{\frac{1}{\xi(x)}}$.

Conforme Padoan, Ribatet e Sisson (2010) e Ribatet (2009), com a mudança de variável dos dados para unidades de Fréchet e adicionando superfícies de tendência no modelo, pode-se ajustar mutuamente os parâmetros da GEV e os parâmetros de dependência dos modelos em (3.20, 3.22) do processo Máx-estável, maximizando o logaritmo da função de verossimilhança pareada (3.32).

De acordo com Ribatet (2013), uma vez que utilizam-se superfícies de tendência, é mais conveniente omitir a dependência espacial para o cálculo da predição do nível de retorno para um local não observado. Desta forma, assume-se que as estações meteorológicas são mutuamente independentes.

Apesar de que esta estratégia não leve em consideração todas as incertezas dos parâmetros do processo Máx-estável, espera-se que seja eficaz, visto que os parâmetros de dependência espacial e os parâmetros das superfícies de tendência são aproximadamente ortogonais (RIBATET, 2009).

3.6.2 Modelo GEV espacial

Para a análise espacial da precipitação máxima na região, será utilizada além da abordagem via processos Máx-estáveis, o modelo GEV espacial. Este modelo é relativamente mais simples quando comparado aos processos Máx-estáveis, uma vez que não há possibilidade de considerar a dependência espacial e utilização de diferentes modelos ou funções de correlação.

No modelo GEV espacial, assume-se que as observações em diferentes localidades são mutuamente independentes (CAO; LI, 2019). Desta forma, o modelo GEV espacial é dado por:

$$Z(x) \sim GEV(\mu(x), \sigma(x), \xi(x)), \quad (3.33)$$

em que, $\mu(x)$, $\sigma(x)$ e $\xi(x)$ são superfícies de tendências da forma apresentada em 3.29.

A estimação dos parâmetros do modelo GEV espacial pode ser realizada por meio da técnica da Máxima Verossimilhança (YOON; KUMPHON; PARK, 2015). Logo, para o ajuste do modelo, maximiza-se o logaritmo da função de verossimilhança do modelo GEV espacial. Conforme Ribatet (2009), a log-verossimilhança do modelo GEV espacial é dada por:

$$l(z_j(x_i); \beta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ -\log(\sigma(x_i)) - \left(1 + \xi(x_i) \frac{z_j(x_i) - \mu(x_i)}{\sigma(x_i)} \right)^{-\frac{1}{\xi(x_i)}} - \left(1 + \frac{1}{\xi(x_i)} \right) \log \left(1 + \xi(x_i) \frac{z_j(x_i) - \mu(x_i)}{\sigma(x_i)} \right) \right\}, \quad (3.34)$$

em que, β , $\mu(x_i)$, $\sigma(x_i)$ e $\xi(x_i)$ são os parâmetros da GEV espacial, com x_i sendo a i -ésima localidade para $i = 1, 2, \dots, m$ e $z_j(x_i)$ a j -ésima observação para a i -ésima localidade, com $j = 1, 2, \dots, n$.

A função log-verossimilhança $l(\beta; z_j(x_i))$, é obtida substituindo 3.29 em 3.34. Devido à sua simplicidade, o modelo GEV espacial apresenta eficiência computacional superior em relação a outros modelos de extremos espaciais (CAO; LI, 2019).

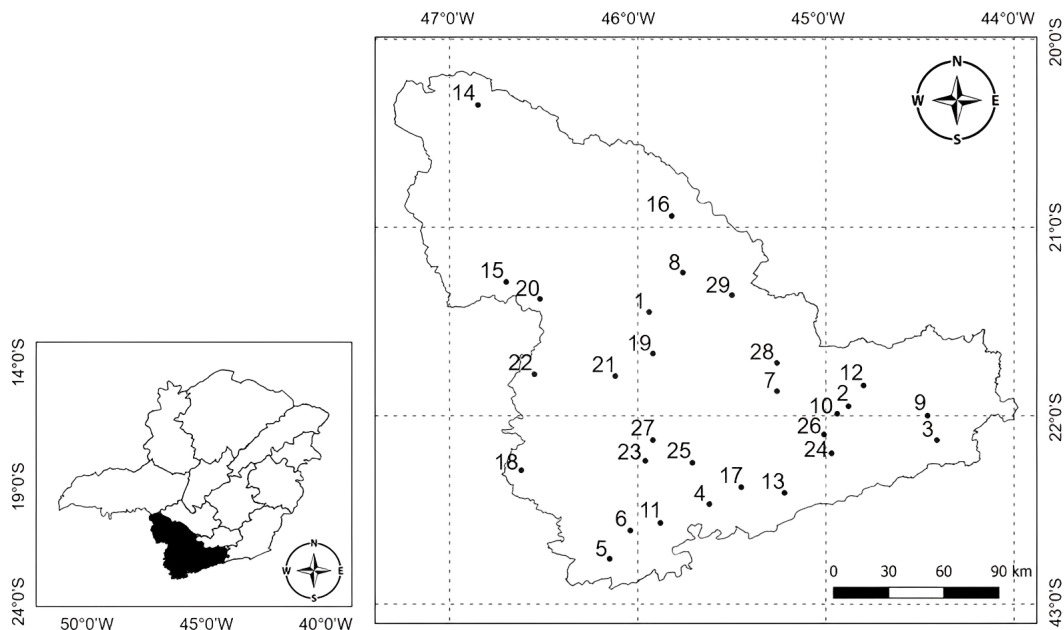
4 MATERIAL E MÉTODOS

Nesta seção, serão abordadas as características da área de estudo, os detalhes sobre a obtenção dos dados utilizados e as metodologias utilizadas como base para o desenvolvimento deste trabalho.

4.1 DADOS E ÁREA DE ESTUDO

A região sul e sudoeste de Minas Gerais é uma das 12 mesorregiões do estado e possui área de 49.524 km². Conforme Reboita *et al.* (2015), os climas presentes na região, de acordo com a classificação de Köppen, são: Aw; Cwa e Cwb. O clima Aw é caracterizado por apresentar inverno com baixa pluviosidade e verão chuvoso, sendo característico principalmente na porção norte da região. Os climas Cwa e Cwb apresentam temperaturas mais amenas em comparação ao clima Aw e são influenciados pelas elevadas altitudes da região sul mineira. O clima Cwa encontra-se presente em áreas com altitudes mais elevadas, como a Serra da Mantiqueira e regiões próximas, e o clima Cwb é observado na porção sul da região, próximo à divisa com o estado de São Paulo (MARTINS *et al.*, 2018a).

Figura 1 – Localização das estações meteorológicas das 29 cidades do sul e sudoeste de Minas Gerais analisadas no estudo numeradas em ordem alfabética.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Neste estudo foram empregados dados diários de precipitação pluvial, expressos em altura de lâmina d'água (mm), obtidos para 29 cidades da região sul e sudoeste de Minas Gerais, conforme destacado na Figura 1. Os registros diários foram obtidos através do Portal HidroWeb do Sistema Nacional de Informações sobre Recursos Hídricos (SNIRH), gerenciado pela Agência Nacional de Águas (ANA), e junto ao Banco de Dados Meteorológico para Ensino e Pesquisa (BDMEP) do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET). Os dados diários de precipitação pluvial referem-se ao período de 1980 a 2021.

Tabela 1 – Dados das estações meteorológicas das 29 cidades do sul e sudoeste de Minas Gerais analisadas, com seus respectivos percentuais de falhas (PF).

Número	Ordem	Cidades	Latitude	Longitude	Altitude	PF (%)
2145042	1	Alfenas	-21,45	-45,94	888	7,14
2144004	2	Baependi	-21,95	-44,88	906	0,00
2244057	3	Bocaina de Minas	-22,13	-44,41	1180	0,00
2245070	4	Brazópolis	-22,47	-45,62	870	0,00
2246057	5	Camanducaia	-22,76	-46,15	1006	0,00
2246050	6	Cambuí	-22,61	-46,04	868	7,14
2145008	7	Cambuquira	-21,87	-45,26	863	0,00
2145041	8	Campos Gerais	-21,24	-45,76	883	7,14
2144025	9	Carvalhos	-22,00	-44,46	1306	4,76
2144003	10	Caxambu	-21,99	-44,94	958	2,38
2245084	11	Consolação	-22,57	-45,88	979	0,00
2144037	12	Cruzília	-21,84	-44,80	1088	4,76
2245087	13	Delfim Moreira	-22,41	-45,22	1405	0,00
2046009	14	Delfinópolis	-20,35	-46,85	687	35,71
2146026	15	Guaxupé	-21,29	-46,70	837	0,00
2045026	16	Ilicínea	-20,94	-45,82	900	7,14
2245083	17	Itajubá	-22,38	-45,45	851	0,00
2246052	18	Jacutinga	-22,29	-46,62	865	0,00
2145002*	19	Machado	-21,67	-45,92	818	11,9
2146030	20	Muzambinho	-21,38	-46,52	1064	0,00
2146029	21	Poço Fundo	-21,79	-46,12	944	0,00
2146048*	22	Poços de Caldas	-21,78	-46,55	1339	14,29
2245077	23	Pouso Alegre	-22,24	-45,96	891	14,29
2244071*	24	Pouso Alto	-22,20	-44,97	940	2,38
2245000	25	Santa Rita do Sapucaí	-22,25	-45,71	824	7,14
2245081*	26	São Lourenço	-22,10	-45,01	1014	7,14
2245085*	27	Silvianópolis	-22,13	-45,92	851	4,76
2145003	28	Três Corações	-21,72	-45,26	847	0,00
2145043	29	Três Pontas	-21,36	-45,50	903	9,52

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Nota: * - Cidades em que foram utilizados registros de mais de uma estação meteorológica.

Na Tabela 1 são apresentados dados das estações meteorológicas utilizadas no trabalho. É importante ressaltar que algumas das estações apresentaram falhas nos registros, o que levou à utilização de dados de outras estações localizadas na mesma cidade, visando a completude das séries. As cidades nas quais foram identificadas falhas nos registros e as estações alternativas utilizadas para complementar as séries são: Machado (2145002-ANA, 2145033-ANA e 83683-INMET); Poços de Caldas (2146048-ANA, 2146074-ANA e 83681-INMET); Pouso Alto (2244071-ANA e 2244063-ANA); São Lourenço (83736-INMET, 2245081-ANA e 2245107-ANA) e Silvianópolis (2245085-ANA e 2245075-ANA).

Os dados de precipitações diárias para cada cidade foram agrupados em séries anuais e a partir dessas séries foram selecionados os valores máximos correspondentes a cada ano. Dessa forma, foram obtidas 29 séries de máximos, cada uma contendo 42 dados, que representam os valores das precipitações máximas diárias anuais de cada cidade em estudo.

Com o objetivo de avaliar os modelos utilizados neste estudo, as séries de máximos foram separadas em dois blocos distintos. O primeiro bloco, composto pelos dados dos anos de 1980 a 2011, foi utilizado para ajustar os modelos. Isto é, foi ajustada a distribuição GEV via Inferência Bayesiana e obtidas previsões de precipitação para tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos para cada cidade. A partir destas previsões, foi realizada a modelagem espacial via IDP, Krigagem, processos Máx-estáveis e modelo GEV espacial, obtendo assim previsões espaciais.

Já o segundo bloco, com registros do período de 2012 a 2021, foi utilizado para avaliar a eficácia de cada modelo. Para isso, foram utilizados métodos de Validação Cruzada e cálculo do Erro Médio de Predição (EMP) para localidades não utilizadas no ajuste dos modelos.

Para avaliação por meio do EMP, foram obtidos dados de precipitação máxima junto à ANA de seis localidades do sul e sudoeste de Minas Gerais. Buscou-se selecionar cidades em que estavam disponíveis conjuntos completos de dados de precipitação diária referente aos anos de 2012 a 2021, já que o intuito é a comparação das precipitações observadas com as previstas para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos.

Os seis municípios cujos dados foram empregados na análise dos modelos, juntamente com o respectivo código de identificação de cada estação meteorológica, são: Andrelândia (02144019), Bom Jesus da Penha (02146078), Carmo da Cachoeira (02145044), Extrema (02246167), Maria da Fé (02245088) e Santa Rita de Caldas (02246047).

4.2 IMPUTAÇÃO DOS DADOS

Devido às falhas nos registros em alguns conjuntos de dados obtidos junto ao INMET e à ANA, mesmo com a junção de dados de mais de uma estação, algumas falhas persistiram. Portanto, para cobrir as falhas restantes, foi aplicado o método de imputação dos k -vizinhos mais próximos (KNN), do inglês *k-Nearest Neighbour*, que consiste em preencher os valores ausentes a partir da média ponderada dos k -vizinhos mais próximos daquele valor faltante. Dessa forma, foi possível obter conjuntos de dados completos para todas as localidades analisadas.

Métodos de imputação consistem na substituição de valores ausentes por valores estimados com base em informações contidas no conjunto de dados originais. Essas informações podem ser atribuídas a pesos, que em diversos casos são atrelados à distância entre as observações. O método KNN baseia-se em uma extensão da distância de Gower, que pode utilizar variáveis de distância do tipo binário, categórico, ordenado, contínuo e semi-contínuo. A distância entre a i -ésima e a j -ésima observação é dada por (KOWARIK; TEMPL, 2016):

$$d_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^p w_k \delta_{i,j,k}}{\sum_{k=1}^p w_k}, \quad (4.1)$$

em que, w_k é o peso e $\delta_{i,j,k}$ é a contribuição da k -ésima variável, esta, dada pela distância absoluta dividida pelo alcance total: $\delta_{i,j,k} = |x_{i,k} - x_{j,k}| / r_k$, em que $x_{i,k}$ é o valor da k -ésima variável da i -ésima observação e r_k é o intervalo da k -ésima variável.

4.3 ANÁLISE DESCRITIVA E TESTES PRELIMINARES

A fim de realizar uma análise descritiva dos dados de precipitação máxima para cada uma das 29 localidades em estudo, foram estimadas as medidas de posição das séries (média, mediana, máximo) e dispersão (coeficiente de variação).

Para verificar a pressuposição de independência e presença de tendência das séries de máximos construídas, foram utilizados, respectivamente, os testes de Ljung-Box (LJUNG; BOX, 1978) e Mann-Kendall (MANN, 1945; KENDALL, 1975), ao nível de significância de 5%. Quanto a análise da aderência da distribuição GEV às séries de máximos, foi utilizado o teste de Komolgorov-Smirnov, ao nível de significância de 5%.

4.4 INFERÊNCIA BAYESIANA

4.4.1 Estimação via Inferência Bayesiana

Como distribuição a *priori*, adotou-se a Normal Trivariada, proposta por Coles e Powell (1996) e apresentada na seção 3.4.1. Para a obtenção das informações para os hiperparâmetros da distribuição a *priori* referente a cada localidade, foi ajustada, via Máxima Verossimilhança, a distribuição GEV aos dados do município mais próximo dentre os 28 disponíveis. Para o caso da *priori* não informativa, foram adotados os respectivos valores para os hiperparâmetros: $\Phi_0 = (0; 0; 0)$ e $\Sigma_0 = (10000; 10000; 100)$.

As distribuições conjuntas a *posteriori* para a distribuição GEV foram obtidas numericamente utilizando-se o método MCMC. Neste método, para cada estrutura de *priori* utilizada, foram realizadas simulações com 120.000 iterações, fazendo a queima (*burn-in*) das primeiras 20.000 iterações e adotando um salto (*thin*) a cada 20 iterações.

4.4.2 Avaliação das *prioris*

Para avaliar o desempenho das diferentes distribuições a *priori*, foram analisados os níveis de retorno da precipitação máxima, para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos. O nível de retorno T , conforme Naghettini e Pinto (2007), representa o inverso da probabilidade com que um dado evento tenha ocorrido. Dada a ocorrência de um evento, o tempo de retorno T é o tempo médio necessário (em anos) para que esse evento recorra, em um ano qualquer. Isto é, se ocorrer um evento de intensidade x , deseja-se obter qual o tempo médio esperado para que o evento de intensidade x ocorra novamente. Para este trabalho, os níveis de retorno são as predições de precipitação máxima para um tempo de retorno, e são calculados por:

$$\hat{x}(T) = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left\{ 1 - \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\hat{\xi}} \right\}. \quad (4.2)$$

A predição $\hat{x}(T)$, em que T é o tempo de retorno, é calculada a partir das estimativas dos parâmetros da distribuição GEV, obtidas via Inferência Bayesiana. Ou seja, as estimativas para μ , σ e ξ utilizadas na expressão 4.2, são as médias a *posteriori* dos parâmetros.

Para avaliar o desempenho dos modelos utilizando-se as duas estruturas de *priori*, foram utilizados os resultados do EMP, dado por:

$$EMP = \frac{1}{m} \sum_i^m \left| \frac{(o_i - \hat{o}_i)}{o_i} \right| \times 100, \quad (4.3)$$

em que, \hat{o}_i é a estimativa de precipitação máxima para o i -ésimo tempo de retorno, o_i é a precipitação máxima observada da série histórica e m é o número de predições.

4.5 ANÁLISE ESPACIAL VIA GEOESTATÍSTICA E IDP

4.5.1 Ajuste dos semivariogramas

O ajuste dos modelos de semivariogramas teóricos foi obtido via método Mínimos Quadrados Ponderados (MQP), que, conforme Carvalho, Vieira e Grego (2009), tem como vantagem a capacidade de trabalhar com conjuntos de dados pequenos. Por meio desse método, os estimadores dos parâmetros são obtidos de modo que a soma de quadrados da diferença entre os valores do variograma empírico e teórico, dividido pelos valores do variograma teórico, seja mínima. O método MQP é dado por:

$$Q_1 = \sum_h W_h [\hat{\gamma}(\mathbf{h}) - \gamma(\mathbf{h}, \theta)]^2, \quad (4.4)$$

em que, W_h é o vetor de peso utilizado, $\hat{\gamma}(\mathbf{h})$ é o semivariograma empírico, $\gamma(\mathbf{h}, \theta)$ é o semivariograma ajustado e θ o vetor de parâmetros.

A fim de avaliar o modelo de semivariograma mais adequado para a análise dos dados, foram utilizados os seguintes modelos: Gaussiano, Exponencial, Esférico e Onda.

4.5.2 Modelos espaciais

Um dos métodos utilizados para a análise espacial da precipitação máxima no sul e sudoeste de Minas Gerais é o interpolador IDP.

Para a aplicação do método IDP, além das localizações associadas ao valores do atributo (predição da precipitação), deve-se informar o valor que o parâmetro de potência p assumirá no modelo. Neste trabalho, o parâmetro p foi fixado em 2, tendo em vista que para valores mais baixos do parâmetro, os mapas produzidos apresentam curvas suaves, uma vez que os pontos mais distantes são enfatizados de maneira mais significativa do que para valores p mais altos (SILVA *et al.*, 2012).

Outro método utilizado para a interpolação espacial das predições obtidas via Inferência Bayesiana para diferentes tempos de retorno foi a Krigagem. Para aplicação dessa metodologia, foram utilizados os métodos de Krigagem Ordinária e Log-Normal, ambos baseando-se em todos os modelos de semivariograma utilizados no trabalho. Desta forma, foram avaliados ao todo, 24 métodos de Krigagem, como apresentado na Quadro 1.

Quadro 1 – Métodos de Krigagem (Krig) analisados para a interpolação espacial das predições de precipitação máxima para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos obtidos via Inferência Bayesiana.

TR	Krig	Semivariog	TR	Krig	Semivariog	TR	Krig	Semivariog
2	KO	Gaussiano	5	KO	Gaussiano	10	KO	Gaussiano
		Exponencial			Exponencial			Exponencial
		Esférico			Esférico			Esférico
	KLN	Onda		KLN	Onda		KLN	Onda
		Gaussiano			Gaussiano			Gaussiano
		Exponencial			Exponencial			Exponencial
		Esférico			Esférico			
		Onda			Onda			

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Nota: KO - Krigagem Ordinária; KLN - Krigagem Log-Normal.

4.5.3 Avaliação dos modelos espaciais

Com o objetivo de avaliar o grau de dependência espacial entre as precipitações máximas, foi utilizado o critério de Cambardella (CC) (CAMBARDELLA *et al.*, 1994), que quantifica o grau de dependência espacial. O cálculo do CC é dado por:

$$CC = \frac{C_0}{C_0 + C_1} \times 100, \quad (4.5)$$

em que, C_0 é o efeito pepita e $C_0 + C_1$ é o patamar, sendo C_1 a contribuição.

O resultado deste critério é avaliado da seguinte maneira: quando $CC > 75\%$, pode-se afirmar que a variável apresenta fraca dependência espacial, para $25\% < CC \leq 75\%$, afirma-se que a variável apresenta dependência espacial moderada e para $CC \leq 25\%$, a variável apresenta forte dependência espacial.

Visando avaliar os interpoladores espaciais do IDP e Krigagem, foram utilizados métodos de Validação Cruzada. A Validação Cruzada consiste em tomar um ponto de amostra do conjunto de dados e calcular a estimativa para esse mesmo ponto, comparando-os, ao final. Para

avaliar os modelos, foram utilizadas três métricas de Validação Cruzada: Erro Quadrático Médio (EQM), Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) e Erro Médio de Predição da Validação Cruzada (EMP-VC). As métricas são definidas pelas seguintes expressões:

$$\text{EQM} = \frac{\sum_{i=1}^n (Z(u_i) - \widehat{Z}(u_i))^2}{n}, \quad (4.6)$$

$$\text{REQM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Z(u_i) - \widehat{Z}(u_i))^2}{n}}, \quad (4.7)$$

$$\text{EMP-VC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{Z(u_i) - \widehat{Z}(u_i)}{Z(u_i)} \right| \times 100, \quad (4.8)$$

em que, $Z(u_i)$ são os valores observados, $\widehat{Z}(u_i)$ os valores preditos e n o número de observações.

Além das métricas de Validação Cruzada, foi utilizado também para a avaliação dos modelos espaciais, o cálculo do EMP, apresentado em 4.3. O EMP, para esta situação, foi calculado a partir dos valores observados e preditos da precipitação máxima das seis localidades não utilizadas para o ajuste dos modelos.

Após identificar o modelo espacial mais apropriado para avaliar a precipitação máxima na região, procedeu-se ao ajuste do modelo às séries completas de máximos. O objetivo foi realizar a predição espacial para os períodos de retorno de 50 e 100 anos na região sul e sudoeste de Minas Gerais.

4.6 ANÁLISE ESPACIAL DE EXTREMOS

Uma das metodologias utilizadas para a análise espacial de extremos, foi a de processos Máx-estáveis. Para a análise, foram utilizados dois modelos Máx-estáveis, o modelo de Smith (3.20) e o modelo de Schlatter (3.21). Para o modelo Schlatter, foram adotadas as funções de correlação de Bessel, Cauchy, Powered Exponential e Whittle-Mátern (3.22). Os modelos foram ajustados maximizando o logaritmo da verossimilhança pareada, apresentada em 3.32.

Para avaliar a dependência espacial dos extremos dos modelos Máx-estáveis, foi utilizado o Coeficiente Extremal, o qual é ajustado a partir do F-madograma.

Foi utilizado neste estudo uma outra abordagem para a análise de extremos espaciais,

denominada de modelo GEV espacial, representado pela equação 3.33. Nesse método, o modelo é ajustado por meio do logaritmo da verossimilhança da função de distribuição da GEV, conforme apresentado em 3.34.

Tanto para os modelos Máx-estáveis quanto para o modelo GEV espacial, foram utilizadas superfícies de tendência para representar a variação espacial dos parâmetros na região. Entretanto, enquanto nos processos Máx-estáveis incorporam-se as superfícies de tendência diretamente na verossimilhança do processo, no modelo GEV espacial ajusta-se a distribuição GEV assumindo os parâmetros da distribuição como superfícies de tendência, o que resulta no modelo GEV espacial.

Para uma especificação adequada das superfícies de tendência para cada parâmetro da distribuição GEV, foram adotadas superfícies baseadas nas utilizadas nos trabalhos de Senapeng *et al.* (2022), Ribatet (2015) e Yoon, Kumphon e Park (2015). Desta forma, foram definidas as seguintes superfícies de tendência para os parâmetros da GEV:

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \beta_{0,\mu} + \beta_{1,\mu} \text{lon}(x) + \beta_{2,\mu} \text{lat}(x) + \beta_{3,\mu} \text{lon}(x) \text{lat}(x) \\ \sigma(x) &= \beta_{0,\sigma} + \beta_{1,\sigma} \text{lon}(x) + \beta_{2,\sigma} \text{lat}(x) + \beta_{3,\sigma} \text{lon}(x) \text{lat}(x) \quad , \\ \xi(x) &= \beta_{0,\xi}\end{aligned}\quad (4.9)$$

em que, $\text{lon}(x)$ e $\text{lat}(x)$ são a longitude e a latitude das localizações e $\beta_{i,\mu}$, $\beta_{i,\sigma}$ e $\beta_{i,\xi}$ são os coeficientes das superfícies de tendência, com $i = 0, 1, 2, 3$.

Conforme Gaume *et al.* (2013), a partir do ajuste do processo Máx-estável e do modelo GEV espacial, pode-se calcular o nível de retorno ($z_T(x)$), para uma localidade não amostrada x e um tempo de retorno T , utilizando a expressão:

$$z_T(x) = \hat{\mu}(x) - \frac{\hat{\sigma}(x)}{\hat{\xi}(x)} \left\{ 1 - \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\hat{\xi}(x)} \right\}, \quad (4.10)$$

na qual são inserida as estimativas $\hat{\mu}(x)$, $\hat{\sigma}(x)$ e $\hat{\xi}(x)$, para a localidade x , obtidas via modelo Máx-estável ou GEV espacial.

4.6.1 Avaliação dos modelos espaciais de extremos

Para comparação dos modelos Máx-estáveis, foi utilizado o Critério de Informação de Takeuchi (TIC), proposto por Takeuchi (1976), sendo uma generalização do critério de informa-

ção de Akaike. Para este critério, considera-se que o melhor modelo analisado é o que obtiver o menor valor de TIC.

A função TIC é dada por (SENAPENG *et al.*, 2022):

$$\text{TIC} = -2l_p(\hat{\psi}) + 2\text{tr} \left\{ H(\hat{\psi})^{-1} J(\hat{\psi}) \right\}, \quad (4.11)$$

em que, $\hat{\psi}$ é o vetor de parâmetros do modelo ajustado a ser avaliado, *tr* é a abreviação de "trace"(traço), que se refere à soma dos elementos diagonais de uma matriz, l_p é a função log-verossimilhança pareada, $H(\hat{\psi})$ e $J(\hat{\psi})$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{\partial^2 \log f(t(z_{k,j}), t(z_{k,s}); \psi)}{\partial \psi \partial \psi^T} \text{ e } - \sum_{k=1}^K \frac{\partial \log f(t(z_{k,j}), t(z_{k,s}); \psi)}{\partial \psi} \frac{\partial \log f(t(z_{k,j}), t(z_{k,s}); \psi)}{\partial \psi^T},$$

com $f(t(z_{k,j}), t(z_{k,s}); \psi)$ sendo a função de densidade bivariada do processo Máx-estável e $t(z_{k,j})$ e $t(z_{k,s})$ é o k -ésimo máximo anual observado, transformado para unidades de Fréchet, para as estações j e s .

Após selecionar os modelos mais adequados com base nos resultados do TIC, foram avaliadas as previsões espaciais desses modelos, por meio do cálculo do EMP (4.3) da precipitação máxima para as localidades das estações meteorológicas dos municípios de Andrelândia, Bom Jesus da Penha, Carmo da Cachoeira, Extrema, Maria da Fé e Santa Rita de Caldas, para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos.

Desta forma, após obter o modelo espacial de extremos mais adequado para a avaliação da precipitação máxima na região, o modelo foi ajustado às séries completas de máximos, com o objetivo de realizar a previsão espacial para os tempos de retorno de 50 e 100 anos na região sul e sudoeste de Minas Gerais.

4.7 RECURSOS COMPUTACIONAIS

As análises estatísticas foram realizadas utilizando o software R (R Core Team, 2021). Para as análises preliminares, foram utilizados os pacotes: *stats* (R Core Team, 2021), para realizar os testes de Kolmogorov-Smirnov e Ljung-Box; *Kendall* (MCLEOD, 2011), para o teste de Mann-Kendall e *VIM* (KOWARIK; TEMPL, 2016), para imputação dos dados.

Para a análise Bayesiana, os seguintes pacotes foram utilizados: *evd* (STEPHENSON, 2002), para ajustar a GEV via Máxima Verossimilhança; *evdbayes* (STEPHENSON; RIBATET,

2014), para ajustar a GEV via Inferência Bayesiana; *coda* (PLUMMER *et al.*, 2006), para a análise da convergência das cadeias a *posteriri* dos parâmetros.

Para o tratamento dos dados espaciais foram utilizados os seguintes pacotes: *rgdal* (BIVAND; KEITT; ROWLINGSON, 2019), para leitura dos dados geoespaciais; *sf* (PEBESMA, 2018), utilizada para extrair a geometria do objeto geoespacial; *sp* (BIVAND; PEBESMA; GOMEZ-RUBIO, 2013) e *splancs* (ROWLINGSON; DIGGLE, 2021), para atribuir coordenadas aos valores de precipitação e para a criação do grid.

As análises espaciais via IDP e Krigagem foram realizadas utilizando os pacotes: *gst* (GRALER; PEBESMA; HEUVELINK, 2016), para as análises geoestatísticas e do IDP e *MLmetrics* (YAN, 2016), para avaliação dos modelos. Para a análise espacial de extremos, foi utilizado o pacote *SpatialExtremes* (RIBATET, 2020).

Para a construção dos mapas, foram utilizados os pacotes: *ggplot2* (WICKHAM, 2016); *ggsn* (BAQUERO, 2019); *ggspatial* (DUNNINGTON, 2021); *maptools* (BIVAND; LEWINKOH, 2021) e *sp*;

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, serão apresentados os resultados das análises realizadas no presente estudo. Os resultados referem-se à análise descritiva dos dados, aos testes preliminares e de convergência, à análise Bayesiana, à análise espacial por meio do método do IDP e Krigagem, bem como à análise espacial via processos Máx-estáveis e GEV espacial.

5.1 ANÁLISE DESCRITIVA DAS PRECIPITAÇÕES MÁXIMAS

As estatísticas descritivas dos dados de precipitação máxima, referente aos anos de 1980 a 2021, das 29 cidades do sul e sudoeste de Minas Gerais analisadas neste estudo, estão apresentadas na Tabela 2. Os resultados evidenciaram que a cidade de Silvianópolis registrou a maior precipitação máxima, com um valor de 226,3 mm. O município de Caxambu apresentou a maior variabilidade nos dados, com coeficiente de variação igual a 48,23%.

Tabela 2 – Estatística descritiva das precipitações máximas anuais (mm) ocorridas no período de 1980 a 2021 em cada localidade.

Cidades	\bar{X}	M_d	Max	CV	Cidades	\bar{X}	M_d	Max	CV
Alfenas	80,4	79,9	127,9	29,88	Baependi	71,1	69,3	123,0	26,84
Bocainade M.	87,6	83,5	150,7	29,72	Brazópolis	72,1	68,1	146,5	32,30
Camanducaia	72,8	68,9	200,6	43,32	Cambuí	69,9	65,6	121,6	33,98
Cambuquira	78,8	73,1	161,0	38,01	Campos G.	81,3	78,0	143,0	26,12
Carvalhos	81,1	79,3	167,3	38,79	Caxambu	71,2	70,0	226,0	48,23
Consolação	71,4	67,6	137,8	33,52	Cruzília	68,7	68,2	130,2	28,91
Delfim M.	69,5	60,5	219,3	46,05	Delfinópolis	75,5	68,6	197,2	31,28
Guaxupé	73,4	68,9	120,2	28,28	Ilicínea	76,3	71,8	135,4	28,94
Itajubá	69,2	68,6	141,3	28,59	Jacutinga	76,6	72,7	166,9	30,44
Machado	79,6	79,0	126,5	24,02	Muzambinho	74,5	71,5	149,0	29,33
Poço Fundo	79,6	75,9	135,4	25,74	Poços de C.	72,4	71,3	166,6	34,22
Pouso Alegre	66,6	62,1	104,3	28,06	Pouso Alto	74,9	71,0	160,8	33,61
Santa Rita do S.	73,4	68,0	185,2	40,26	São Lourenço	79,1	78,4	171,0	31,25
Silvianópolis	75,5	63,7	226,3	40,45	Três Corações	80,1	78,2	128,0	27,66
Três Pontas	78,9	76,3	131,3	25,03	-	-	-	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Nota: CV - Coeficiente de variação (%); \bar{X} - Média; M_d - Mediana; Max - Máximo.

Em Bocaina de Minas os dados de precipitação máxima apresentaram as médias e medianas mais altas de precipitação máxima, com valores de 87,6 mm e 83,5 mm, respectivamente. Esses valores contrastam com os observados em Pouso Alegre, que registrou as menores médias

(66,6 mm) e medianas (62,1 mm) de precipitação máxima.

Referente aos valores das médias e medianas das precipitações máximas, pode-se observar para todas as localidades que o valor médio da precipitação foi superior ao mediano, o que sugere que as distribuições empíricas do conjunto de dados de todos os municípios são assimétricas à direita.

5.2 TESTES PRELIMINARES E DE CONVERGÊNCIA

A Tabela 3 apresenta os resultados dos testes de Ljung-Box, Mann-Kendall e Kolmogorov-Smirnov realizados nos conjuntos de dados analisados. Observa-se que os resultados do teste de independência de Ljung-Box indicam que todas as séries de máximos são independentes ao nível de significância de 5%, uma vez que os valores p para todos os casos foram superiores do que o nível de significância de 5%. Analisando os resultados do teste de Mann-Kendall, não foram encontradas evidências de tendência nas séries ao nível de significância de 5%. Quanto aos resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov, verificou-se que a distribuição GEV se ajustou aos dados das séries de precipitação máxima das cidades em análise.

Tabela 3 – Resultados dos testes (valor p), Ljung-Box (L-B), Mann-Kendall (M-K) e Kolmogorov-Smirnov (K-S) ao nível de significância de 5%, referentes aos dados de precipitação máxima anual (mm).

Cidades	L-B	M-K	K-S	Cidades	L-B	M-K	K-S
Alfenas	0,2711	0,2083	0,0603	Baependi	0,5859	0,0564	0,0630
Bocainade M.	0,7018	0,3918	0,0573	Brazópolis	0,6845	0,2207	0,0835
Camanducaia	0,9969	0,2551	0,1148	Cambuí	0,7568	0,9421	0,1010
Cambuquira	0,6511	0,3392	0,0699	Campos G.	0,6511	0,3392	0,0699
Carvalhos	0,5007	0,0530	0,0783	Caxambu	0,3029	0,2962	0,1374
Consolação	0,1345	0,0548	0,1067	Cruzília	0,2466	0,0545	0,0660
Delfim M.	0,1067	0,0603	0,0717	Delfinópolis	0,4421	1,0000	0,0746
Guaxupé	0,8015	0,2418	0,0593	Ilicínea	0,6511	0,3392	0,0699
Itajubá	0,2143	1,0000	0,0739	Jacutinga	0,4233	0,3626	0,0538
Machado	0,2546	0,9479	0,0751	Muzambinho	0,5670	0,7615	0,0747
Poço Fundo	0,9568	0,5225	0,0726	Poços de C.	0,4518	0,4873	0,0949
Pouso Alegre	0,9204	0,3615	0,1284	Pouso Alto	0,7701	0,2962	0,0531
Santa Rita do S.	0,6854	0,1500	0,0512	São Loureço	0,0923	0,1997	0,0687
Silvanópolis	0,5662	0,4350	0,1725	Três Corações	0,4817	0,0596	0,0790
Três Pontas	0,5110	0,0770	0,8485	-	-	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Satisfeitas as pressuposições de que os dados para cada série de máximos em análise

são independentes e que não há evidência de presença de tendências nas séries, torna-se possível realizar o ajuste da distribuição GEV aos dados de precipitação máxima de cada série dos municípios por meio da Inferência Bayesiana.

Afim de verificar a convergência das cadeias *a posteriori* dos parâmetros da distribuição GEV, os critérios de Geweke, Raftert-Lewis e Heidelberger-Welch foram utilizados.

Os resultados obtidos evidenciaram que, para todas as estruturas de *priori* e todos os parâmetros (μ, σ, ξ) , não há evidências de não convergência das cadeias *a posteriori*. Isso foi verificado analisando-se o fator de dependência do critério de Raftery-Lewis, verificou-se que os valores estão próximos de 1, o qual indicou valores próximos de 1, sugerindo independência entre as iterações. A partir dos resultados do critério de Geweke, verificou-se que o módulo dos valores obtidos foram inferiores a 1,96, indicando que não há indícios de ausência de convergência. Por meio dos resultados do critério de Heidelberger e Welch, foi constatado que os valores p obtidos, foram superiores ao nível de significância (5%), o que indica estacionariedade das cadeias *a posteriori* para os parâmetros.

Os resultados dos critérios de convergência das cadeias *a posteriori* não estão apresentados no texto devido à grande quantidade de informação que seria necessária apresentar, uma vez que, cada um dos três critérios foram aplicados para avaliar as cadeias *a posteriori* dos três parâmetros da GEV, sendo que foram utilizados duas estruturas de *priori* (não informativa e informativa) para cada uma das 29 localidades.

5.3 INFERÊNCIA BAYESIANA

5.3.1 Avaliação das *prioris*

Verificado que não há evidências de não convergência das cadeias *a posteriori*, pôde-se calcular, via Inferência Bayesiana, os níveis de retorno de precipitação máxima para as 29 localidades, considerando os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos. Mediante a obtenção das previsões de precipitação, foi possível avaliar a melhor estrutura de *priori* para cada cidade, por meio do cálculo do EMP. Os resultados dessas análises estão apresentados na Tabela 4.

Com base nos resultados do EMP apresentados na Tabela 4, é possível observar que, ao utilizar *priori* informativa fundamentada nos dados da cidade vizinha mais próxima de cada localidade, foram obtidas melhores previsões de precipitação máxima em 12 das 29 cidades. Entretanto, ao utilizar estrutura de *priori* não informativa, foram obtidas previsões mais precisas

Tabela 4 – Resultado do Erro Médio de Predição (EMP %) da precipitação máxima anual (mm) predita para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos, para cada localidade, via Inferência Bayesiana utilizando *priori* não informativa (PNI) e *priori* informativa (PI).

Cidades	PNI	PI	Cidades	PNI	PI
Alfenas	11,40	10,08*	Baependi	6,68*	9,37
Bocaina de M.	28,22*	30,07	Brazópolis	12,98*	14,38
Camanducaia	19,35	14,39*	Cambuí	9,46*	19,23
Cambuquira	17,19*	23,31	Campos G.	22,43*	23,01
Carvalhos	39,60*	41,16	Caxambu	33,04*	38,91
Consolação	48,60	43,79*	Cruzília	13,23*	14,17
Delfim M.	45,29	33,17*	Delfinópolis	12,07	11,29*
Guaxupé	21,43*	23,41	Ilicínea	8,75*	8,87
Itajubá	17,65	14,07*	Jacutinga	9,46	3,80*
Machado	12,07*	16,42	Muzambinho	9,14*	9,51
Poço Fundo	4,20*	6,35	Poços de C.	28,19	26,17*
Pouso Alegre	13,86	10,13*	Pouso Alto	6,55*	7,80
Santa Rita do S.	13,77	11,28*	São Lourenço	16,19*	20,45
Silvianópolis	18,48	8,95*	Três Corações	14,67*	20,47
Três Pontas	14,42	10,00*	-	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Nota: * - Menor EMP para cada localidade.

em 17 cidades. Desta forma, foram utilizadas as predições de precipitação máxima obtidas via Inferência Bayesiana para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos, considerando a estrutura de *priori* mais adequada para cada localidade.

Observa-se na Tabela 4 que, dentre todos os valores de EMP apresentados, o menor foi obtido para as predições de precipitação máxima na cidade de Poço Fundo, com EMP de 4,20%. Esse erro é considerado baixo quando comparado a outros trabalhos que avaliaram predições de precipitação para diferentes tempos de retorno. Por exemplo, Martins *et al.* (2018b) analisaram a precipitação máxima diária anual na cidade de Silvianópolis-MG, utilizando a distribuição GEV ajustada por meio da Inferência Bayesiana com diferentes estruturas de *priori* e via Máxima Verossimilhança, e obtiveram EMP mínimo de 21,53%. Já Ferreira, Beijo e Avelar (2021), encontraram o menor EMP de precipitação máxima por período seco e chuvoso igual a 16,44%, ao analisarem a precipitação das cidades de Machado, São Lourenço e Juiz de Fora utilizando as distribuições GEV, Gumbel e Log-Normal.

Entretanto, verificou-se também neste estudo, valores de EMP elevados, como em Carvalhos (39,60%), Caxambu (33,04%), Consolação (43,79%) e Delfim Moreira (33,17%), sendo estes, valores acima de 30%. Isso pode ser explicado devido às baixas precipitações observadas

para estas cidades nos anos de 2012 a 2021, como pode-se observar na Tabela 5.

Tabela 5 – Predições de precipitação máxima (mm) para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos obtidas via Inferência Bayesiana utilizando a melhor estrutura de *priori* para cada localidade. Além dos valores observados para os mesmos tempos de retorno

Cidades	Predições			Observadas		
	2	5	10	2	5	10
Alfenas	77,3	97,7	105,3	97,7	125,9	127,9
Baependi	73,2	89,9	100,6	80,2	94,6	94,6
Bocaina de M.	85,0	110,5	129,0	150,7	150,7	150,7
Brazópolis	71,4	93,2	109,2	77,3	77,3	122,3
Camanducaia	66,9	89,7	107,7	90,9	90,9	163,8
Cambuí	69,6	93,7	106,8	60,5	98,0	98,0
Cambuquira	76,6	105,9	128,6	111,2	111,2	111,2
Campos G.	81,0	98,8	109,2	115,0	115,0	143,0
Carvalhos	84,9	115,1	134,7	79,0	79,0	81,3
Caxambu	70,4	103,1	126,6	79,0	79,7	79,7
Consolação	70,4	94,7	112,7	58,7	66,6	66,6
Cruzília	70,2	88,3	100,5	55,5	92,5	92,5
Delfim M.	62,3	87,2	110,4	55,0	69,0	69,0
Delfinópolis	69,5	88,7	104,8	84,3	98,8	98,8
Guaxupé	72,0	91,2	103,9	113,3	113,3	113,3
Ilicínea	75,4	97,0	111,7	86,1	106,5	106,5
Itajubá	64,5	82,5	97,8	73,9	74,6	82,3
Jacutinga	70,5	91,1	105,3	67,3	86,0	104,5
Machado	79,2	98,5	109,5	106,8	106,8	106,8
Muzambinho	71,6	92,3	107,1	82,0	84,6	113,5
Poço Fundo	79,6	100,2	112,0	72,3	101,8	113,0
Poços de C.	69,3	97,3	116,6	58,5	73,2	91,4
Pouso Alegre	67,6	91,7	108,0	59,0	102,9	102,9
Pouso Alto	73,7	99,0	115,9	77,4	116,1	116,1
Santa Rita do S.	68,7	101,0	125,5	64,3	131,0	131,0
São Lourenço	77,2	100,9	117,4	107,4	121,6	121,6
Silvianópolis	68,2	83,8	96,4	65,3	8,5	83,4
Três Corações	82,9	101,8	113,8	116,6	116,6	116,6
Três Pontas	77,9	99,5	115,3	93,0	101,1	131,3

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Analisando os resultados apresentados na Tabela 5, pode-se observar que os níveis de retorno obtidos para as cidades de Bocaina de Minas e Carvalhos são os mais elevados dentre todas as localidades para os três tempos de retorno. Ressalta-se a localização destes municípios, que além de serem os mais próximos entre si, são os que estão localizadas mais a leste da região em estudo.

Pode-se observar também que, para as oito localidades onde foram preditas as menores precipitações máximas para o tempo de retorno de 2 anos (Delfim Moreira, Itajubá, Camanducaia, Pouso Alegre, Silvianópolis, Santa Rita do Sapucaí, Poços de Caldas e Delfinópolis), foi utilizada *a priori* informativa.

5.4 ANÁLISE ESPACIAL VIA KRIGAGEM E IDP

Tendo posse dos valores das precipitações preditas para cada tempo de retorno e cada localidade, bem como das coordenadas geográficas de cada estação meteorológica, é possível espacializar o atributo de interesse sob a área de estudo. Para a espacialização via Krigagem, é necessário realizar o ajuste dos semivariogramas.

Ressalta-se que neste trabalho foram utilizados 24 métodos diferentes de Krigagem, já que foram empregados os métodos de Krigagem Ordinária e Log-Normal, associados a quatro modelos de semivariograma (Gaussiano, Exponencial, Esférico e Onda), os quais foram ajustados às predições obtidas via Inferência Bayesiana para três tempos de retorno. Dessa forma, nesta seção foram apresentados apenas aqueles que demonstraram melhores resultados para cada tempo de retorno.

Tabela 6 – Estimativa dos melhores modelos de semivariograma para cada tempo de retorno (TR) com seus respectivos valores do critério de Cambardella (CC) e comparativo entre o método do Inverso da Distância Ponderada por meio dos resultados da Validação Cruzada: Erro Quadrático Médio (EQM), Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) e Erro Médio de Predição da Validação Cruzada (EMP-VC) e Erro Médio de Predição (EMP) das 6 localidades não utilizadas para o ajuste dos modelos.

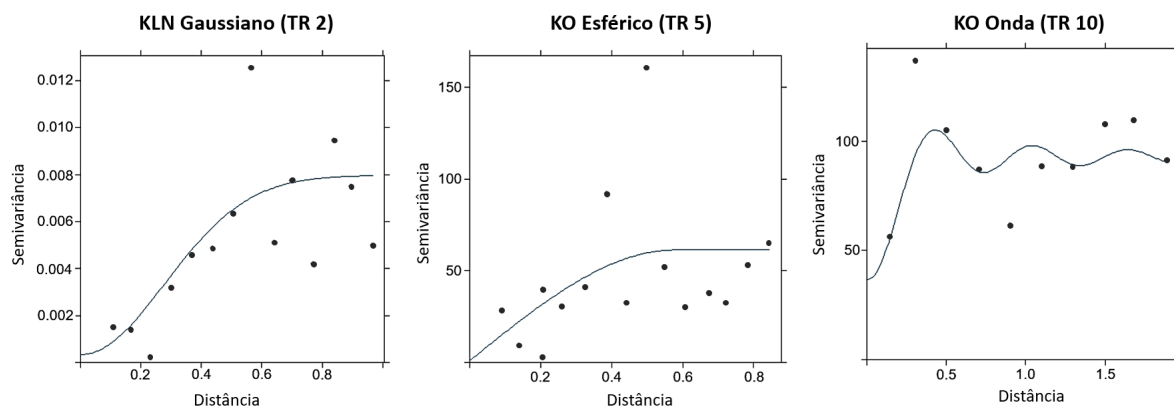
TR	Krig	Modelo	C_0	C_1	a	CC	Validação Cruzada			EMP
							EQM	REQM	EMP-VC	
2	-	IDP	-	-	-	-	14,71	3,83	4,18	15,29
	KLN	Gau	0,0003	0,0076	0,3925	4,16	12,45	3,52	3,95	14,86
5	-	IDP	-	-	-	-	36,06	6,01	4,90	13,19
	KO	Esf	0,9557	60,3665	0,5785	1,55	32,76	5,72	4,57	13,09
10	-	IDP	-	-	-	-	91,82	9,58	6,39	10,90
	KO	Onda	36,4053	56,4113	0,3001	39,22	78,50	8,86	6,16	9,24

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Os resultados dos ajustes dos métodos de Krigagem associados aos respectivos semivariogramas, que apresentaram os melhores ajustes para cada tempo de retorno, juntamente com os resultados obtidos via IDP, são apresentados na Tabela 6 e na Figura 2. A avaliação dos

modelos foi realizada por meio da Validação Cruzada e do cálculo do EMP.

Figura 2 – Modelos de semivariogramas ajustados via método dos mínimos quadrados ponderados aos semivariogramas empíricos referente aos dados de precipitação máxima para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

A Krigagem que propiciou as melhores previsões espaciais para o tempo de retorno de 2 anos foi a Krigagem Log-Normal, com modelo de semivariograma Gaussiano. Já para o tempo de retorno de 5 e 10 anos a Krigagem Ordinária foi a mais adequada para a previsão, utilizando, respectivamente, os modelos de semivariograma Esférico e Onda.

Analisando os resultados do grau de dependência espacial, verificou-se que os semivariogramas Gaussiano e Esférico ajustados, respectivamente, às previsões dos tempos de retorno de 5 e 10 anos, apresentaram forte dependência espacial, visto que os resultados do CC são inferiores a 25%. Já o semivariograma Onda ajustado aos dados de precipitação máxima preditas para o tempo de retorno de 10 anos, apresentou dependência espacial moderada ($25\% < CC \leq 75\%$).

Pode-se observar na Tabela 6 que os resultados da Validação Cruzada e do EMP calculados a partir das previsões obtidas via IDP, foram inferiores aos resultados obtidos via Krigagem para o três tempos de retorno analisados. Este resultado corrobora com os obtidos por Delbari, Afrasiab e Jahani (2013), que verificaram que os métodos Geoestatísticos apresentaram melhores resultados quando comparados ao IDP para a análise da precipitação máxima mensal e anual do nordeste do Iran.

Entretanto, ressalta-se que, com exceção do EQM relativo ao níveis de retorno para 10 anos, todos os outros critérios de avaliação apresentaram resultados relativamente próximos. Essa similaridade nos resultados dos critérios de avaliação de métodos de interpolação tam-

bém foi observada por Borges *et al.* (2016), que analisaram a precipitação no Distrito Federal utilizando diferentes métodos de interpolação, incluindo a Krigagem Ordinária e o IDP.

5.4.1 Predição espacial para 50 e 100 anos

Com base nos resultados que evidenciaram uma melhor performance da Krigagem em relação ao IDP para a predição espacial das precipitações máximas, optou-se por realizar a interpolação espacial das predições Bayesianas para os tempos de retorno de 50 e 100 anos, apresentadas em 7, utilizando a Krigagem Ordinária com modelo de semivariograma Onda. A escolha deste modelo, se baseou no fato de que os melhores resultados obtidos para o maior tempo de retorno avaliado (10 anos), deu-se utilizando a Krigagem Ordinária com modelo de semivariograma Onda.

Tabela 7 – Predições de precipitação máxima (mm) para os tempos de retorno (TR) de 50 e 100 anos obtidas via Inferência Bayesiana utilizando a melhor estrutura de *priori* para cada localidade.

Cidades	TR 50	TR 100	Cidades	TR 50	TR 100
Alfenas	163,8	184,6	Baependi	117,9	124,7
Bocaina de M.	181,3	212,0	Brazópolis	142,3	159,1
Camanducaia	166,2	191,9	Cambuí	124,9	132,3
Cambuquira	172,2	195,8	Campos G.	145,2	158,9
Carvalhos	167,9	185,8	Caxambu	165,8	187,6
Consolação	152,8	176,1	Cruzília	123,8	135,5
Delfim M.	143,5	163,0	Delfinópolis	153,9	182,5
Guaxupé	133,2	146,3	Ilicínea	140,5	155,2
Itajubá	145,9	174,2	Jacutinga	133,9	148,4
Machado	157,9	179,6	Muzambinho	136,5	149,3
Poço Fundo	131,1	139,2	Poços de C.	155,8	175,0
Pouso Alegre	124,8	135,8	Pouso Alto	149,2	166,1
Santa Rita do S.	175,9	205,9	São Lourenço	156,6	175,4
Silvianópolis	147,3	168,9	Três Corações	128,2	133,8
Três Pontas	136,3	148,5	-	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Desta forma, foram ajustados os semivariogramas de Onda às predições de precipitação máxima de cada localidade referente aos tempos de retorno de 50 e 100 anos, obtidas via Inferência Bayesiana. Os resultados dos ajustes são apresentados na Tabela 8 e na Figura 3.

Ressalta-se que os ajustes dos semivariogramas pelo método MQP para as predições Bayesianas referentes aos tempos de retorno de 50 e 100 anos, forneceram estimativas para

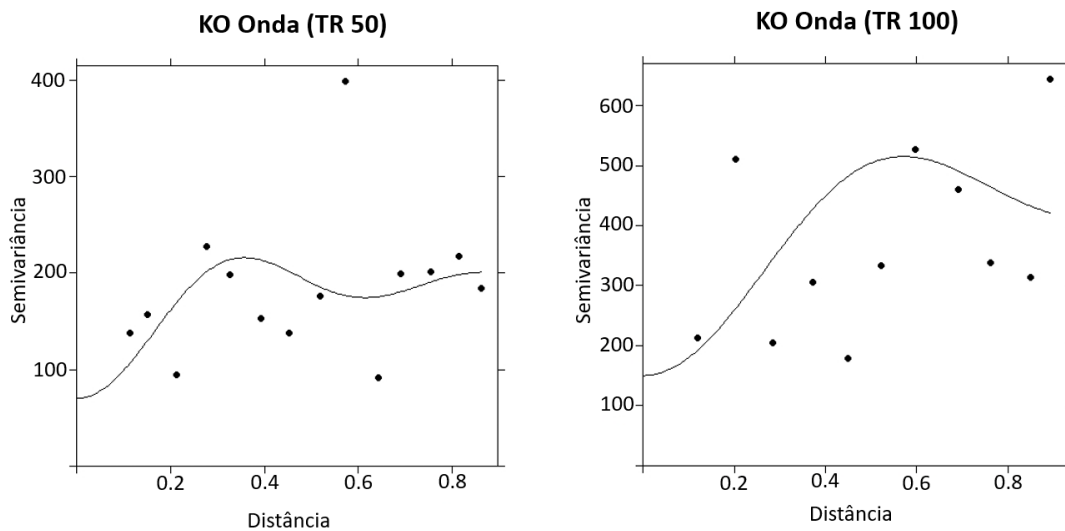
Tabela 8 – Estimativa dos parâmetros dos semivariogramas Onda às previsões de precipitação obtidas via Inferência Bayesiana para os tempos de retorno (TR) de 50 e 100 anos.

TR	Krigagem	Modelo	C_0	C_1	a
50	KO	Onda	70,0	120,0	0,25
100	KO	Onda	150,0	300,0	0,40

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

os parâmetros dos modelos de semivariograma não condizentes com o semivariograma empírico. Para contornar este problema, foi realizado o ajuste do semivariograma de forma visual, especificando e fixando os valores dos parâmetros dos modelos de forma manual.

Figura 3 – Modelos dos semivariogramas de Onda ajustados aos semivariogramas empíricos referente às previsões de precipitação obtidas via Inferência Bayesiana para os tempos de retorno de 50 e 100 anos.



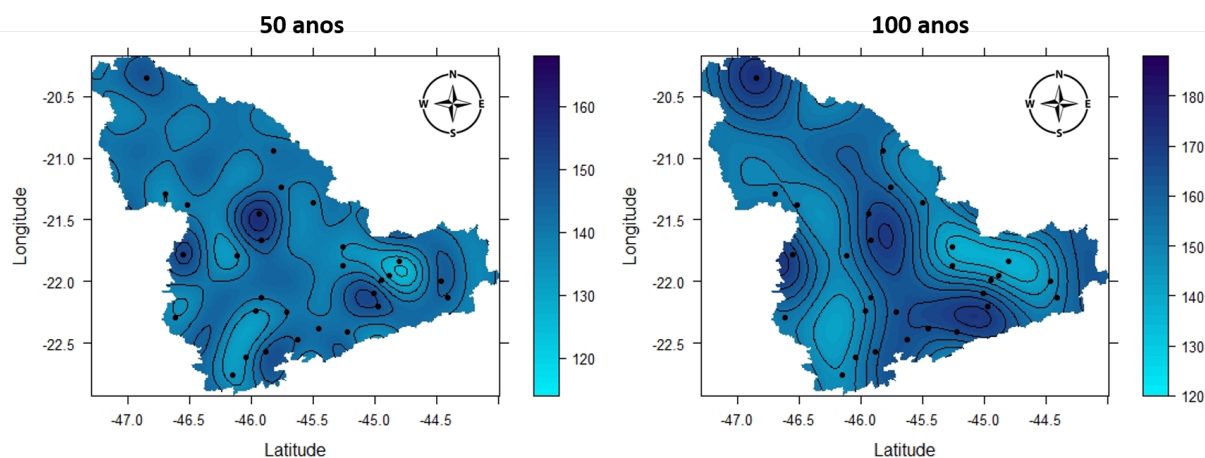
Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Os mapas de previsões para os tempos de retorno de 50 e 100 anos, obtidos por meio da Krigagem Ordinária com modelo de semivariograma Onda, são apresentados na Figura 4.

Verifica-se no mapa de previsão para o tempo de retorno de 100 anos que espera-se que ocorram precipitações mais intensas ao extremo norte, centro e sudeste da região de estudo. Espera-se também que nas proximidades do município de Poços de Caldas, ocorram precipitações mais elevadas.

Observa-se no mapa de previsão para o tempo de retorno de 50 anos, valores mínimos de precipitação máxima esperada próximos a 115 mm, enquanto os valores mais altos observados no mapa são próximos a 165 mm. Já para o mapa de previsão referente ao tempo de retorno de

Figura 4 – Mapas de predição de precipitação máxima (mm) para os tempos de retorno de 50 e 100 anos, obtidos via Krigagem Ordinária com o modelo de semivariograma Onda.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

100 anos, os valores mais baixos de precipitação máxima esperada são próximos a 120 mm e os mais elevados a 180 mm.

Embora as técnicas de Krigagem sejam frequentemente recomendadas para interpolação espacial, é importante destacar que nem sempre apresentam os melhores resultados (PEREIRA; OLIVA; BALTRENAITE, 2010). De fato, estudos comparativos que utilizaram diferentes métodos de interpolação, dentre eles a Krigagem, para análise espacial da precipitação, apresentaram diferentes modelos como o mais adequado para diferentes áreas de estudo.

Antal, Guerreiro e Cheval (2021), por exemplo, ao compararem o desempenho de sete modelos de interpolação na análise da precipitação média anual em Portugal, verificaram que o modelo de Krigagem Bayesiana Empírica com Regressão mostrou-se o mais adequado para a análise. Os demais modelos utilizados no estudo foram a Interpolação Polinomial Local, Interpolação Polinomial Global, Função de Base Radial, IDP, Cokrigagem Ordinária e Cokrigagem Universal.

No trabalho de Wang *et al.* (2014), foram avaliados seis modelos de interpolação para a análise espacial da precipitação média anual em Ontário, Canadá. Os métodos analisados foram o IDP, Interpolação Polinomial Global, Interpolação Polinomial Local, Função de Base Radial, KO e Krigagem Universal. Como resultado, obtiveram que o modelo mais adequado para as análises da precipitação média na região foi a Interpolação Polinomial Local.

Zou, Yin e Wang (2021) analisaram a precipitação máxima anual na bacia do rio Haihe, localizado no norte da China, utilizando diferentes métodos de interpolação, visando avaliá-

los. Os métodos utilizados para a análise foram o IDP, KO, Krigagem com Deriva Externa com diferentes covariáveis e Krigagem Bayesiana Empírica. Como resultado, obtiveram que o método de Krigagem com Deriva Externa, incorporando a média anual de precipitação como covariável, apresentou os melhores resultados dentre os métodos de interpolação avaliados.

5.5 ANÁLISE ESPACIAL VIA PROCESSOS MÁX-ESTÁVEIS E GEV ESPACIAL

Ao contrário da abordagem via Krigagem e IDP empregadas neste trabalho, que utilizam apenas uma observação para cada localidade para realizar a interpolação espacial, na análise espacial de extremos via processos Máx-estáveis e GEV espacial, cada localidade na região está associada a uma série de máximos anuais de precipitação.

Para realizar o ajuste dos modelos Máx-estáveis via Máxima Verossimilhança Pareada e avaliar a dependência espacial, deve-se primeiramente transformar os dados das séries de máximos para unidades de Fréchet. Para isso, foi ajustada a distribuição GEV aos dados de precipitação de cada localidade, utilizando o método da Máxima Verossimilhança, com o objetivo de obter as estimativas para cada parâmetro e, assim, transformar os dados para a nova escala. As estimativas dos parâmetros da distribuição GEV para cada localidade são apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9 – Resultados do ajuste da distribuição GEV via Máxima Verossimilhança aos dados de precipitação máxima referente anos de 1980 a 2011.

Cidades	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$	Cidades	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$
Alfenas	68,4462	20,8438	-0,1078	Baependi	68,0276	14,3308	-0,0833
Bocaina de M.	77,4765	19,6299	0,0241	Brazópolis	65,0697	16,7446	0,0160
Camanducaia	61,4051	15,9493	0,1760	Cambuí	60,6293	24,2315	-0,2348
Cambuquira	68,1013	20,8105	0,1104	Campos G.	75,0410	16,9717	-0,1917
Carvalhos	75,3880	26,1981	-0,1067	Caxambu	60,6240	24,7465	0,0390
Consolação	67,3726	19,2457	-0,0402	Cruzília	64,7186	14,8863	-0,0456
Delfim M.	63,1245	15,9280	0,2300	Delfinópolis	67,2380	12,7624	0,3068
Guaxupé	65,9551	16,0108	-0,0467	Ilicínea	68,4691	17,5457	-0,0136
Itajubá	60,5801	11,5941	0,2949	Jacutinga	66,6306	15,6737	0,1348
Machado	72,4805	18,8374	-0,2043	Muzambinho	65,3047	16,0011	0,0234
Poço Fundo	62,1198	19,8246	-0,3918	Poços de C.	66,0107	20,9578	-0,0487
Pouso Alegre	64,7105	21,7722	-0,0773	Pouso Alto	72,6167	20,0069	-0,2116
Santa Rita do S.	62,8938	23,5706	-0,0064	São Loureço	70,1374	19,0184	-0,0201
Silvanópolis	63,7521	10,2439	0,4703	Três Corações	76,9617	17,4152	-0,1727
Três Pontas	70,6792	15,6253	-0,0847	-	-	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Tendo posse dos valores em unidades de Fréchet e definidas as funções para as super-

fícies de tendência dos parâmetros da distribuição GEV, pôde-se então realizar o ajuste dos modelos Máx-estáveis e, dessa forma, obter as estimativas dos parâmetros de dependência dos modelos de Smith e de Schlather com diferentes funções de correlação. Além dos resultados dos ajustes, foi aplicado o critério TIC para comparar a qualidade de ajuste dos modelos Máx-estáveis. Os resultados são apresentados na Tabela 10.

Tabela 10 – Resultados do ajuste dos modelos, além do resultado do Critério de Informação de Takeuchi (TIC).

Modelo	$\rho(h)$	Par. de Dependência			TIC
		σ_{11}	σ_{12}	σ_{22}	
Smith	-	0,0469	-0,0590	0,0756	113042,1
		c_2	ν	-	-
	Bessel	0,2673	0,0122	-	112985,9
Schlather	Cauchy	<0,0001	0,4678	-	NA
	Power. Exp.	0,6592	0,5819	-	NA
	Whittle-M.	0,1354	<0,0001	-	NA

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Nota: NA - Falha no TIC.

Conforme os resultados apresentados na Tabela 10, pode-se observar que, para o modelo de Schlather com função de correlação de Cauchy, Powerd Exponential e Whittle-Mátern, o cálculo do TIC apresentou falhas, não obtendo assim valores para esses modelos ajustados. As falhas apresentadas no cálculo do TIC foram observadas também no estudo de Senapeng *et al.* (2022) e conforme os autores, a falha indica uma instabilidade no procedimento.

Por meio do ajuste dos modelos Máx-estáveis, além de obter as estimativas dos parâmetros de dependência, é possível estimar os coeficientes β das superfícies de tendência. Os valores estimados dos coeficientes são apresentados na Tabela 11.

Quanto ao modelo GEV espacial, a partir do seu ajuste é possível obter as estimativas dos parâmetros do modelo, o β e os parâmetros da GEV (neste caso as superfícies de tendência), que são apresentados, respectivamente, na Tabela 11 e na Figura 5.

Uma vez que não foi possível obter os valores do TIC para os modelos Máx-estáveis de Schlather com função de correlação de Cauchy, Powered Exponential e Whittle-Mátern, as análises prosseguiram utilizando apenas o modelo de Smith, o modelo de Schlather com função de correlação Bessel e o modelo GEV espacial.

Mediante a obtenção dos coeficientes β associados às respectivas funções da latitude e longitude para cada local, foi possível obter a evolução espacial dos parâmetros da GEV a partir

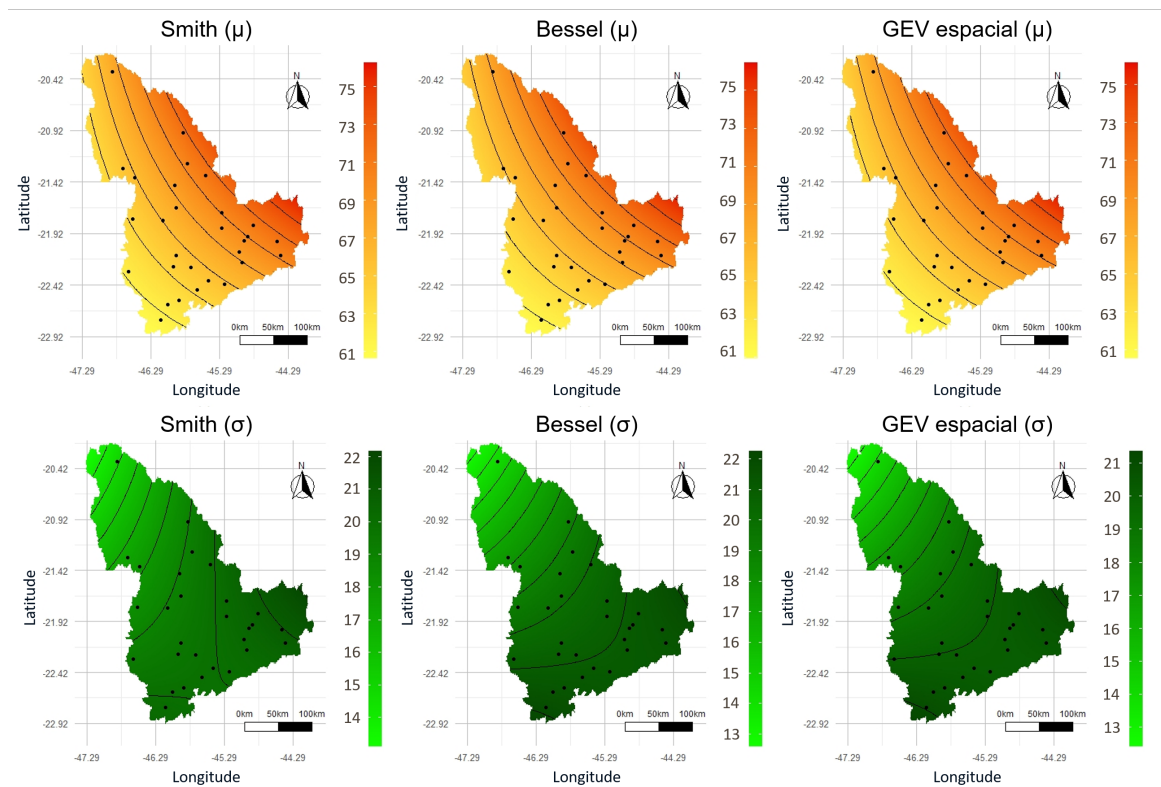
Tabela 11 – Estimativa dos coeficientes das superfícies de tendência (Sup. tend.) para os parâmetros da distribuição GEV.

Modelo	Sup. tend.	β_0	β_1	β_2	β_3
Smith	$\mu(x)$	2547,19	105,11	51,66	2,18
	$\sigma(x)$	1652,62	72,14	35,92	1,58
	$\xi(x)$	-0,02	-	-	-
Schlather (Bessel)	$\mu(x)$	2547,20	104,81	51,74	2,17
	$\sigma(x)$	1652,69	72,07	35,89	1,58
	$\xi(x)$	-0,01	-	-	-
GEV espacial	$\mu(x)$	2547,19	105,22	51,62	2,18
	$\sigma(x)$	1632,23	72,07	35,84	1,60
	$\xi(x)$	-0,01	-	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

das superfícies de tendência, utilizando os modelos Máx-estáveis de Smith e Schlather com função de correlação de Bessel, além do modelo GEV espacial. Os mapas contendo a variação dos parâmetros na região são apresentados na Figura 5.

Figura 5 – Evolução espacial dos parâmetros da distribuição GEV, obtidas a partir do ajuste dos modelos Máx-estáveis de Smith e Schlather com função de correlação de Bessel e do modelo GEV espacial.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Na Figura 5, são apresentadas somente a variação dos parâmetros μ e σ , uma vez que o parâmetro ξ é constante em toda a região. Desta forma, verificou-se que as estimativas para o parâmetro de forma utilizando os modelos de Smith, Schlather (Bessel) e GEV espacial são, respectivamente, $-0,0167$, $-0,0088$ e $-0,0153$.

Nos mapas da evolução espacial dos parâmetros da GEV na região, observa-se que em relação ao parâmetro de posição, para todos os modelos, as estimativas mais elevadas ocorrem ao nordeste da região. Verifica-se que as estimativas mais baixas para $\mu(x)$ ocorrem no sentido sudoeste e sul, desta forma, observa-se que conforme a latitude e longitude diminuem, o valor da estimativa do parâmetro para a localidade diminui.

Na Figura 5, verifica-se que para todos os modelos de predição espacial de extremos, a evolução do parâmetro de escala na região apresentou estimativas mais elevadas ao sul e sudeste da região, diminuindo os valores das estimativas conforme a localidade avança no sentido noroeste.

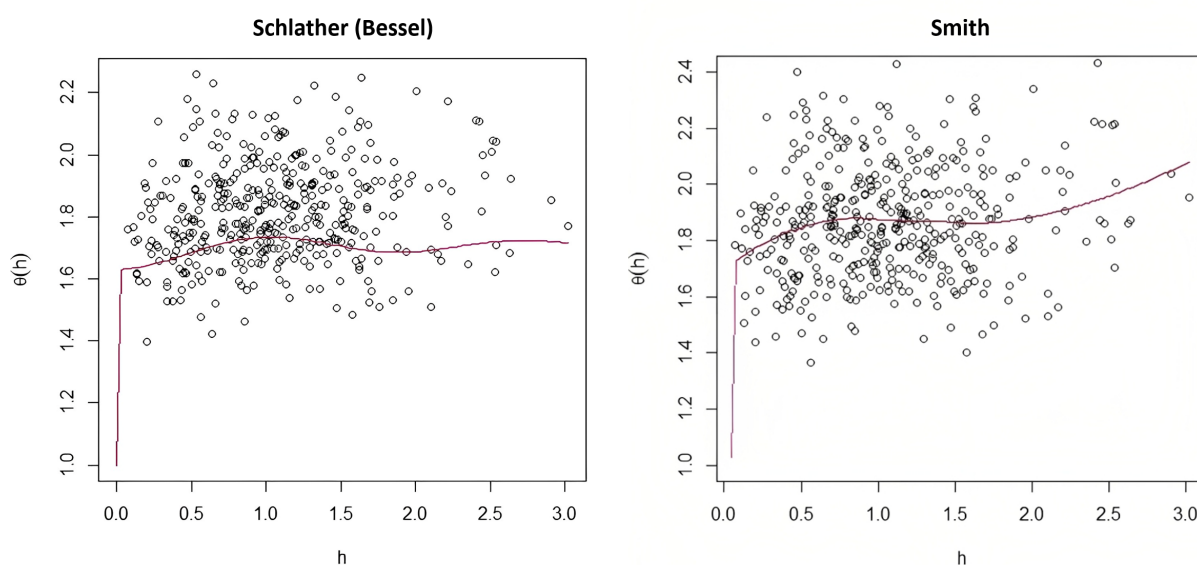
Para avaliar a estrutura de dependência espacial de extremos a partir dos modelos Máx-estáveis, foi utilizado o Coeficiente Extremal. O Coeficiente Extremal é ajustado ao F-madograma empírico, sendo a avaliação da dependência espacial de extremos feita visualmente, por meio do gráfico do Coeficiente Extremal em função da distância entre os pares de observação.

O gráfico do Coeficiente Extremal ajustado ao F-madograma empírico, para os modelos Máx-estáveis de Smith e Schlather (Bessel), em relação aos pares de estações meteorológicas são apresentados na Figura 6.

Analisando os gráficos do Coeficiente Extremal apresentado na Figura 6, observa-se que, para o modelo de Smith, a dependência espacial diminui à medida que a distância entre as estações aumenta. Isso ocorre porque quanto mais próximo $\theta(h)$ estiver de 2, mais fraca é a dependência entre as localidades. Além disso, para ambos os modelos, o Coeficiente Extremal apresenta valores superiores a 1,4 independentemente da distância h . De acordo com Diriba e Debusho (2021), que obtiveram resultados semelhantes na análise da dependência espacial, o Coeficiente Extremal apresentar valores superiores a 1,4 sugere que a dependência entre os pares de observações é baixa, indicando que há baixa evidência de dependência para os dados de máximos anuais de precipitação.

Conforme Diriba e Debusho (2021), uma forma de aprimorar a avaliação da dependência espacial seria utilizar a abordagem de seleção de máximos acima de um limiar, já que essa abordagem permitiria um maior aproveitamento dos dados disponíveis, aumentando assim a

Figura 6 – Coeficiente Extremal dos modelos Máx-estáveis de Smith e de Schlather com função de correlação de Bessel ajustados ao F-madograma empírico, referente aos dados precipitação máxima de 1980 a 2011.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

quantidade de dados a serem utilizados para o ajuste do modelo.

Mediante os resultados acerca da dependência espacial dos máximos, omitir a dependência para o cálculo da predição espacial para diferentes tempos de retorno, como visto na seção 3.6.2, torna-se uma estratégia plausível. Dessa forma, foram calculadas, para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos, as predições espaciais de precipitação para a região sul e sudoeste de Minas Gerais.

As predições obtidas permitiram avaliar os modelos por meio do cálculo do EMP da precipitação para as seis localidades que não foram utilizadas no ajuste dos modelos. Os resultados do EMP são apresentados na Tabela 12.

Ao analisar os resultados apresentados na Tabela 12, é possível observar que os três modelos demonstraram desempenhos semelhantes nas predições espaciais dos tempos de retorno de 2 e 5 anos, com diferenças sutis nos valores do EMP. Os desempenhos semelhantes são especialmente evidentes quando analisados em milímetros. Por exemplo, uma diferença de 0,47% no erro corresponderia a apenas 0,47 mm de erro para uma precipitação de 100 mm. Essa diferença é considerada irrisória do ponto de vista prático, indicando que, para esses tempos de retorno e as localidades avaliadas, os modelos têm capacidade comparável na predição da precipitação máxima.

Quanto aos resultados do EMP para o tempo de retorno de 10 anos, constata-se que

Tabela 12 – Resultados do Erro Médio de Predição (EMP), dados em %, das pre-dições para as seis localidades que não foram utilizadas no ajuste dos modelos, obtidas a partir dos modelos Máx-estáveis de Smith e de Schlather com função de correlação de Bessel, além do modelo GEV espacial.

Modelo	Erro médio de Predição			$\bar{X}(\text{EMP})$
	TR 2	TR 5	TR 10	
Smith	15,17	13,72	10,98	13,29
Schlather (Bessel)	15,64	14,03	14,12	14,60
GEV espacial	15,41	13,75	11,90	13,69

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Nota: $\bar{X}(\text{EMP})$ - Média do Erro Médio de Predição.

a diferença entre o modelo que apresentou o menor e o maior EMP (3,14%) foi superior em comparação com a diferença para os tempos de retorno de 2 e 5 anos. No entanto, mesmo com a diferença um pouco mais acentuada, as disparidades continuam baixas do ponto de vista prático. A título de comparação, estudos como o de Menezes *et al.* (2008) e Menezes, Brito e Lima (2010) assumiram que um dia é considerado como seco quando a precipitação diária acumulada não excede 4 mm. Essa escolha de limiar foi estabelecida com o objetivo de distinguir os períodos de veranicos, dos períodos de ocorrência de chuva.

Apesar da proximidade entre os resultados do EMP obtidos a partir dos modelos, verificou-se que utilizando o modelo de Smith foram obtidos os menores valores de EMP para todos os tempos de retorno considerados. Dessa forma, optou-se por realizar as predições espaciais para os tempos de retorno de 50 e 100 anos na região sul e sudoeste de Minas Gerais utilizando o modelo Máx-estável de Smith.

O resultado do ajuste do modelo de Smith, agora considerando as séries de precipitações máximas completas de 1980 a 2021, é apresentado na Tabela 13.

Mediante o ajuste do modelo Máx-estável de Smith e, conseqüentemente, a obtenção dos coeficientes das superfícies de tendência, foram calculadas as predições espaciais e obtidos os mapas de predição da precipitação máxima da região sul e sudoeste de Minas Gerais para os tempos de retorno de 50 e 100 anos, apresentados na Figura 7.

Ao analisar os mapas de predição para os tempos de retorno de 50 e 100 anos, pode-se observar que esperam-se ocorrências de precipitações mais intensas na porção leste da região analisada, enquanto nas áreas localizadas ao norte são esperadas ocorrências de precipitações

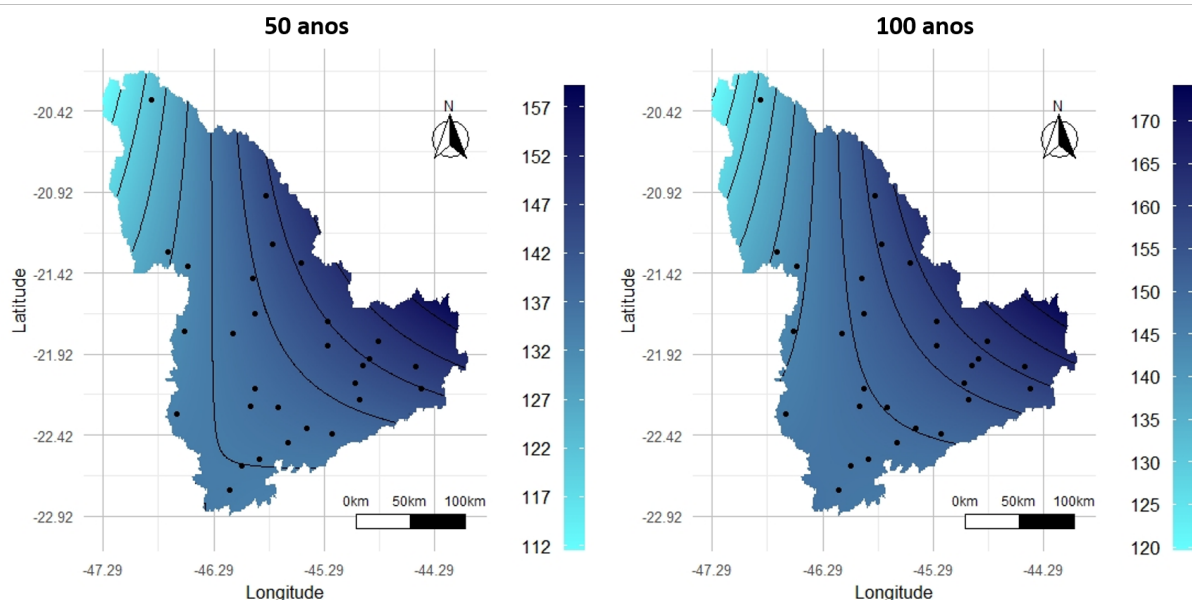
Tabela 13 – Resultados do ajuste do modelo Máx-estável de Smith aos dados de precipitação máxima referente ao período de 1980 a 2021.

Sup. tend.	β_0	β_1	β_2
$\mu(x)$	3468,7	150,8	71,2
$\sigma(x)$	2004,3	87,5	43,4
$\xi(x)$	-0,03	-	-
Par. Dep.	σ_{11}	σ_{12}	σ_2
-	0,2386	-0,4277	0,7669

Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Nota: Par. dep. - Parâmetros de dependência; Sup. tend. - Superfície de tendência.

Figura 7 – Mapas de previsão de precipitação máxima (mm) para os tempos de retorno de 50 e 100 anos, obtidos via modelo Máx-estável de Smith.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

máximas diária com volumes mais baixos.

Entretanto, pode-se observar que a distribuição espacial da precipitação máxima esperada para os dois tempos de retorno é semelhante, apresentando maiores diferenças apenas na escala da precipitação esperada. Além disso, verifica-se nos mapas que a espacialização da precipitação ocorre de forma contínua e suave na região, sem a formação de ilhas de contornos.

Esta característica também foi observada no trabalho de Davison, Padoan e Ribattet (2012), que analisaram a precipitação máxima na Suíça por meio de modelos de Cópula e processos Máx-estáveis. Segundo os autores, os processos Máx-estáveis têm como desvantagem a dificuldade de encontrar superfícies de tendência adequadas, o que pode resultar em mapas de

predição irrealisticamente suaves.

Neste estudo buscou-se apenas avaliar o melhor modelo de processos Máx-estáveis. Entretanto, uma estratégia que poderia ser adotada visando obter melhores resultados para a predição espacial seria a avaliação de diferentes funções para as superfícies de tendência, uma vez que as predições dependem diretamente destas.

Essa estratégia pode ser adotada como trabalho futuro, assim como a utilização de diferentes métodos para a obtenção das predições espaciais. Ribatet (2017), por exemplo, apresenta um método que incorpora a dependência espacial de extremos para o cálculo das predições espaciais. Esse método baseia-se em simulações de Monte Carlo a partir do modelo Máx-estável ajustado.

Outra estratégia baseada em processos Máx-estáveis que pode ser adotada é o cálculo de quantis condicionais para a obtenção de mapas de predição, conhecidos como mapas de nível de retorno condicional. Essa abordagem foi aplicada no estudo de Gaume *et al.* (2013), que analisaram as nevascas extremas nos Alpes Franceses utilizando processos Máx-estáveis.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As séries de precipitações máximas das 29 cidades analisadas são independentes e não apresentaram indícios de tendência. A distribuição Generalizada de Valores Extremos ajustou-se às séries de máximos das 29 localidades analisadas.

Os resultados do Erro Médio de Predição das precipitações máximas obtidas por meio da Inferência Bayesiana, demonstraram que a utilização da *priori* não informativa resultou em melhores resultados de predições para 17 municípios. Por outro lado, a utilização da *priori* informativa, fundamentada nos dados da localidade mais próxima, proporcionou melhores resultados para 12 localidades.

Os semivariogramas Guassiano e Esférico apresentaram forte grau de dependência espacial para os dados referentes ao tempo de retorno de 2 e 5 anos, respectivamente. Enquanto o semivariograma Onda, ajustado aos dados de precipitação referente ao tempo de retorno de 10 anos, apresentou dependência espacial moderada.

Os modelos que propiciaram as melhores predições espaciais para os tempos de retorno de 2, 5 e 10 anos, dentre os métodos de Krigagem e Inverso da Distância Ponderada, foram, respectivamente, a Krigagem Log-Normal com modelo de semivariograma Gaussiano, Krigagem Ordinária com modelo de semivariograma Esférico e Krigagem Ordinária com modelo de semivariograma Onda.

Para a avaliação dos modelos de extremos espaciais, verificou-se que apenas os modelos Máx-estáveis de Smith e de Schlather com função de correlação de Bessel não apresentaram falhas no cálculo do Critério de Informação de Takeuchi. A partir do cálculo de Erro Médio de Predição, verificou-se que os modelos apresentaram resultados semelhantes, entretanto, o modelo de Smith mostrou-se mais adequado para a análise de precipitação máxima na região sul e sudoeste de Minas Gerais.

O Coeficiente Extremal ajustado para os modelos Máx-estáveis de Smith e Schlather com função de correlação de Bessel evidenciaram baixas evidências de dependência espacial nos dados de precipitação máxima.

Os mapas de predição para os tempos de retorno de 50 e 100 anos obtidos a partir do modelo Máx-estável de Smith apresentaram estrutura de variabilidade espacial da precipitação semelhantes. Além disso, a variação espacial ocorreu de forma contínua e suave em toda a região analisada.

REFERÊNCIAS

- ACHOURI, M.; GIFFORD, G. F. Spatial and seasonal variability of field measured infiltration rates on a rangeland site in Utah. **Rangeland Ecology & Management/Journal of Range Management Archives**, Denver, v. 37, n. 5, p. 451–455, 1984.
- ALBEVERIO, S.; JENTSCH, V.; KANTZ, H. **Extreme events in nature and society**. Berlin: Springer, 2006. 349 p.
- ANDRADE, A. R. S. *et al.* Geoestatística aplicada à variabilidade espacial e padrões nas séries temporais da precipitação no agreste pernambucano. **Journal of Environmental Analysis and Progress**, Pernambuco, v. 3, n. 1, p. 126–145, 2018.
- ANTAL, A.; GUERREIRO, P. M.; CHEVAL, S. Comparison of spatial interpolation methods for estimating the precipitation distribution in Portugal. **Theoretical and Applied Climatology**, Berlim, v. 145, p. 1193–1206, 2021.
- AZIZAH, S.; SUTIKNO, S.; PURHADI, P. Parameter Estimation of Smith Model Max-Stable Process Spatial Extreme Value (Case-Study: Extreme Rainfall Modelling in Ngawi Regency). **IPTEK Journal of Science**, Surabaya, v. 2, n. 1, p. 16–20, 2017.
- BANERJEE, S.; CARLIN, B. P.; GELFAND, A. E. **Hierarchical modeling and analysis for spatial data**. 2nd ed. New York: Chapman and Hall/CRC, 2014. 584 p.
- BAQUERO, O. S. **ggsn: North Symbols and Scale Bars for Maps Created with 'ggplot2' or 'ggmap'**. [S.l.], 2019. R package version 0.5.0. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=ggsn>. Acesso em: 02 jan. 2023.
- BARBOSA, D. P. *et al.* Delineamento de zonas homogêneas por geoestatística baseada em modelos robusta à outliers. **Revista Caatinga**, Mossoró, v. 32, n. 2, p. 472–481, 2019.
- BIVAND, R.; KEITT, T.; ROWLINGSON, B. **rgdal: Bindings for the 'Geospatial' Data Abstraction Library**. [S.l.], 2019. R package version 1.4-8. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=rgdal>. Acesso em: 15 fev. 2023.
- BIVAND, R.; LEWIN-KOH, N. **mapproj: Tools for Handling Spatial Objects**. [S.l.], 2021. R package version 1.1-2. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=mapproj>. Acesso em: 24 jan. 2023.
- BIVAND, R. S.; PEBESMA, E.; GOMEZ-RUBIO, V. **Applied spatial data analysis with R**. 2nd ed. New York: Springer, 2013. 405 p.
- BLAIN, G. C.; LULU, J. Valores anuais absolutos de séries diárias de temperatura máxima e mínima do ar no estado de São Paulo: tendências, periodicidades e probabilidades associadas. **Revista Brasileira de Meteorologia**, Rio de Janeiro, v. 26, n. 1, p. 29–40, 2011.

- BORGES, P. d. A. *et al.* Comparison of spatial interpolation methods for the estimation of precipitation distribution in Distrito Federal, Brazil. **Theoretical and applied climatology**, Berlin, v. 123, p. 335–348, 2016.
- BRUBACHER, J. P.; OLIVEIRA, G. G.; GUASSELLI, L. A. Preenchimento de falhas e espacialização de dados pluviométricos: desafios e perspectivas. **Revista Brasileira de Meteorologia**, Rio de Janeiro, v. 35, p. 615–629, 2020.
- CAMBARDELLA, C. A. *et al.* Field-Scale Variability of Soil Properties in Central Iowa Soils. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 58, n. 5, p. 1501–1511, 1994.
- CAO, Y.; LI, B. Assessing models for estimation and methods for uncertainty quantification for spatial return levels. **Environmetrics**, Hoboken, v. 30, n. 2, p. e2508, 2019.
- CARMO, E. J. d.; RODRIGUES, D. D.; SANTOS, G. R. D. Avaliação dos interpoladores krigagem e topo to raster para geração de modelos digitais de elevação a partir de um "as built". **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, v. 21, n. 4, p. 674–690, 2015.
- CARVALHO, J. R. P.; VIEIRA, S. R.; GREGO, C. R. Comparação de métodos para ajuste de modelos de semivariograma da precipitação pluvial anual. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 13, n. 4, p. 443–448, 2009.
- CERÓN, W. L. *et al.* Comparison of spatial interpolation methods for annual and seasonal rainfall in two hotspots of biodiversity in South America. **Academia Brasileira de Ciências**, Rio de Janeiro, v. 93, n. 1, p. 1–22, 2021.
- CHAILAN, R. *et al.* Spatial assessment of extreme significant waves heights in the Gulf of Lions. **Coastal Engineering Proceedings**, Seoul, v. 1, n. 34, p. 1–14, 2014.
- CHUNG, E.-S.; KIM, S. U. Bayesian rainfall frequency analysis with extreme value using the informative prior distribution. **KSCE Journal of Civil Engineering**, Seoul, v. 17, n. 6, p. 1502–1514, 2013.
- COLES, S. G.; DIXON, M. J. Likelihood-Based Inference for Extreme Value Models. **Extremes**, Dordrecht, v. 2, n. 1, p. 5–23, 1999.
- COLES, S. G.; POWELL, E. A. Bayesian Methods in Extreme Value Modelling: A Review and New Developments. **International Statistical Review**, [S. I.], v. 64, n. 1, p. 119–136, 1996.
- COOLEY, D.; NAVEAU, P.; PONCET, P. **Dependence in probability and statistics**. New York: Springer, 2006. 390 p.
- CORREIA-FILHO, W. L. F.; LUCIO, P. S.; SPYRIDES, M. H. C. Caracterização dos extremos de precipitação diária no nordeste do Brasil. **Boletim Goiano de Geografia**, Goiânia, v. 36, n. 3, p. 539–554, 2016.
- CRESSIE, N. **Statistics for spatial data**. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1993. 900 p.

CRESSIE, N.; HAWKINS, D. M. Robust estimation of the variogram: I. **Mathematical Geology**, Berlin, v. 12, n. 2, p. 115–125, 1980.

DANTAS, G. D.; OLIVEIRA, L. A. Análise da continuidade espacial da precipitação na bacia hidrográfica do rio São Francisco em sua área de ocorrência no estado de Minas Gerais-Brasil, série histórica 2004 a 2017. **Brazilian Journal of Development**, Curitiba, v. 7, n. 3, p. 23585–23595, 2021.

DAVISON, A. C.; PADOAN, S. A.; RIBATET, M. Statistical modeling of spatial extremes. **Statistical Science**, Durham, v. 27, n. 2, p. 161–186, 2012.

DELBARI, M.; AFRASIAB, P.; JAHANI, S. Spatial interpolation of monthly and annual rainfall in northeast of Iran. **Meteorology and Atmospheric Physics**, Wien, v. 122, p. 103–113, 2013.

DIAS, M. A. F. S. Eventos climáticos extremos. **Revista USP**, São Paulo, v. 1, n. 103, p. 33–40, 2014.

DIRIBA, T. A.; DEBUSHO, L. K. Statistical modeling of spatial extremes through max-stable process models: Application to extreme rainfall events in South Africa. **Journal of Hydrologic Engineering**, Reston, v. 26, n. 10, p. 05021028–1, 2021.

DOMBRY, C.; ENGELKE, S.; OESTING, M. Exact simulation of max-stable processes. **Biometrika**, Oxford, v. 103, n. 2, p. 303–317, 2016.

DUNNINGTON, D. **ggspatial: Spatial Data Framework for ggplot2**. [S.l.], 2021. R package version 1.1.5. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=ggspatial>. Acesso em: 25 jan. 2023.

FERREIRA, T. R.; BEIJO, L. A.; AVELAR, F. G. Avaliação de distribuições de probabilidades no estudo de precipitação pluvial máxima de três cidades de Minas Gerais. **Revista Brasileira de Climatologia**, Dourados, v. 29, p. 526–544, 2021.

FISHER, R. A.; TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. **Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society**, Cambridge, v. 24, n. 2, p. 180–190, 1928.

GAUME, J. *et al.* Mapping extreme snowfalls in the French Alps using max-stable processes. **Water Resources Research**, Washington, v. 49, n. 2, p. 1079–1098, 2013.

GELFAND, A. E. *et al.* Illustration of Bayesian Inference in Normal Data Models Using Gibbs Sampling. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v. 85, n. 412, p. 972–985, 1990.

GEWEKE, J. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculations of posterior moments. **Bayesian statistics**, [S. I.], v. 4, p. 641–649, 1992.

GNEDENKO, B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. **Annales des Mathématiques**, Princeton, v. 12, p. 423–453, 1943.

GRALER, B.; PEBESMA, E.; HEUVELINK, G. Spatio-temporal interpolation using gstat. **The R Journal**, Wien, v. 8, p. 204–218, 2016.

GUIMARÃES, V. L.; ALVES, R. C. Comparação de modelos geoestatísticos para estimativa de precipitação em Minas Gerais, Brasil, entre os anos hidrológicos de 2000 e 2021. **Revista Brasileira de Geografia Física**, Recife, v. 16, n. 1, p. 528–541, 2023.

HAAN, L. D. A Spectral Representation for Max-stable Processes. **The Annals of Probability**, Durham, v. 12, n. 4, p. 1194–1204, 1984.

HAKIM, A. R.; WARSITO, B.; YASIN, H. Max-stable processes with geometric Gaussian model on ocean wave height data. **J. Math. Comput. Sci.**, [S. I.], v. 11, n. 1, p. 577–584, 2020.

HEIDELBERGER, P.; WELCH, P. D. Simulation run length control in the presence of an initial transient. **Operations Research**, Catonsville, v. 31, n. 6, p. 1109–1144, 1983.

JEFFREYS, H. **Theory of probability**. Clarendon: Oxford University Press, 1939.

JENKINSON, A. F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, Reading, v. 81, n. 348, p. 158–171, 1955.

KENDALL, M. G. **Rank correlation measures**. 15th ed. London: Charles Griffin Book Series, 1975. 202 p.

KOCH, E. Spatial risk measures and applications to max-stable processes. **Extremes**, Dordrecht, v. 20, n. 3, p. 635–670, 2017.

KOWARIK, A.; TEMPL, M. Imputation with the R package VIM. **Journal of Statistical Software**, Hoboken, v. 74, n. 7, p. 1–16, 2016.

LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. **Biometrika**, Oxford, v. 65, n. 2, p. 297–303, 1978.

LUBCHENCO, J.; KARL, T. R. Predicting and managing extreme weather events. **Physics Today**, College Park, v. 65, n. 3, p. 31–37, 2012.

MANN, H. B. Nonparametric Tests Against Trend. **Econometrica**, New York, v. 13, n. 3, p. 245, 1945.

MARTINS, A. P.; ALVES, W. dos S.; DAMASCENO, C. E. Avaliação de métodos de interpolação para espacialização de dados de temperatura do ar na bacia do Rio Paranaíba–Brasil. **Revista Brasileira de Climatologia**, Dourados, v. 25, p. 444–463, 2019.

MARTINS, F. B. *et al.* Classificação climática de köppen e de thornthwaite para minas gerais: cenário atual e projeções futuras. **Revista Brasileira de Climatologia**, Dourados, v. 14, p. 129–156, 2018.

MARTINS, T. B. *et al.* Predição da precipitação máxima no município de Silvianópolis-MG: Abordagens clássica e bayesiana. **IRRIGA**, Botucatu, v. 23, n. 3, p. 467–479, 2018.

MATHERON, G. **Traité de géostatistique appliquée**. Paris: Editions Technip, 1962. 333 p.

MCLEOD, A. **Kendall**: Kendall rank correlation and mann-kendall trend test. [S.l.], 2011. R package version 2.2. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=Kendall>. Acesso em: 09 out. 2022.

MENDES, B. V. M. **Introdução à análise de eventos extremos**. Rio de Janeiro: E-Papers Serviços Editoriais, 2004. 232 p.

MENEZES, H. E.; BRITO, J. I. de; LIMA, R. A. d. A. Veranico e a produção agrícola no Estado da Paraíba, Brasil. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 14, n. 2, p. 181–186, 2010.

MENEZES, H. E. A. *et al.* A relação entre a temperatura da superfície dos oceanos tropicais e a duração dos veranicos no estado da Paraíba. **Revista Brasileira de Meteorologia**, Rio de Janeiro, v. 23, n. 2, p. 152–161, 2008.

MIAO, N. *et al.* Cgmh: Constrained sentence generation by metropolis-hastings sampling. **Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence**, Palo Alto, v. 33, n. 1, p. 6834–6842, 2019.

MOURA, H. L. *et al.* Incidências de Leptospirose pós enchente no município de Rio Branco-Acre no período de 2010 a 2015. **Journal of Amazon Health Science**, Rio Branco, v. 2, n. 4, 2016.

NAGHETTINI, M.; PINTO, J. A. **Hidrologia estatística**. Belo Horizonte: CPRM, 2007. 552 p.

NETO, E. A. *et al.* Spatial dependence index for cubic, pentaspherical and wave semivariogram models. **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, v. 24, n. 1, p. 142–151, 2018.

NOGUEIRA, C. H. **Análise de variância com dependência espacial sob uma abordagem geoestatística**. 2013. 123 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) — Universidade Federal de Lavras, Lavras-MG, 2013.

NOGUEIRA, D. A.; SAFADI, T.; FERREIRA, D. F. Avaliação de critérios de convergência univariados para o método de monte carlo via cadeias de markov. **Revista Brasileira de Estatística**, Rio de Janeiro, v. 65, n. 224, p. 59–88, 2004.

OLINDA, R. A. **Modelagem estatística de extremos espaciais com base em processos max-stable aplicados a dados meteorológicos no estado do Paraná**. 2012. 163 f. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agrônômica) — Universidade de São Paulo - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba-SP, 2012.

OLIVEIRA, C. *et al.* Estimation of kinetic parameters in a chromatographic separation model via Bayesian inference. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y**

Diseño en Ingeniería, Barcelona, v. 34, n. 1, p. 1–26, 2018.

PADOAN, S. A.; RIBATET, M.; SISSON, S. A. Likelihood-based inference for max-stable processes. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v. 105, n. 489, p. 263–277, 2010.

PAULINO, C. D. M.; TURKMAN, M. A. A.; MURTEIRA, B. **Estatística bayesiana**. Lisboa: FCG, 2003. 446 p.

PEBESMA, E. Simple Features for R: Standardized Support for Spatial Vector Data. **The R Journal**, Wien, v. 10, n. 1, p. 439–446, 2018.

PEREIRA, P.; OLIVA, M.; BALTRENAITE, E. Modelling extreme precipitation in hazardous mountainous areas: Contribution to landscape planning and environmental management. **Journal of Environmental Engineering and Landscape Management**, Vilnius, v. 18, n. 4, p. 329–342, 2010.

PEREIRA, V. A. S. *et al.* Krigagem ordinária e visualização de incertezas aplicadas no monitoramento de irregularidades ionosféricas no Brasil. **Revista Brasileira de Cartografia**, Rio de Janeiro, v. 70, n. 3, p. 967–996, 2018.

PLUMMER, M. *et al.* CODA: Convergence Diagnosis and Output Analysis for MCMC. **R News**, Wien, v. 6, n. 1, p. 7–11, 2006.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, 2021. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 03 maio 2023.

RAFTERY, A. E.; LEWIS, S. Comment: One long run with diagnostics: Implementation strategies for markov chain. **Statistical Science**, Durham, v. 7, n. 4, p. 493–497, 1992.

REBOITA, M. S. *et al.* Aspectos climáticos do estado de Minas Gerais. **Revista Brasileira de Climatologia**, Dourados, v. 17, p. 206–226, 2015.

RIBATET, M. A user's guide to the SpatialExtremes package. **EPFL, Lausanne, Switzerland**, 2009.

_____. Spatial extremes: Max-stable processes at work. **Journal de la Société Française de Statistique**, Paris, v. 154, n. 2, p. 156–177, 2013.

_____. Modelling spatial extremes with the spatial extremes package. *In: Proceedings of the 9th International Conference on Extreme Value Analysis: EVA*. Ann Arbor-MI: Pan-American Advanced Study Institute on Spatio-Temporal Statistics, 2015. p. 1–36.

_____. **Nonlinear and stochastic climate dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 391 p.

_____. **SpatialExtremes**: Modelling Spatial Extremes. [S.l.], 2020. R package version 2.0-8. Disponível em: <https://CRAN.Rproject.org/package=SpatialExtremes>. Acesso em: 11 fev 2023.

ROCCO, M. Extreme value theory in finance: A survey. **Journal of Economic Surveys**, Oxford, v. 28, n. 1, p. 82–108, 2014.

ROWLINGSON, B.; DIGGLE, P. **splancs: Spatial and Space-Time Point Pattern Analysis**. [S.l.], 2021. R package version 2.01-42. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=splancs>. Acesso em: 14 fev. 2023.

SABINO, M. *et al.* Distribuições de probabilidade para intensidade de precipitação máxima no estado de mato grosso. **Revista Brasileira de Climatologia**, Dourados, v. 29, p. 321–340, 2021.

SCHLATHER, M. Models for Stationary Max-Stable Random Fields. **Extremes**, Dordrecht, v. 5, n. 1, p. 33–44, 2002.

SCHLATHER, M.; TAWN, J. A. A dependence measure for multivariate and spatial extreme values: Properties and inference. **Biometrika**, Oxford, v. 90, n. 1, p. 139–156, 2003.

SCHNEIDER, U. *et al.* Global Precipitation Analysis Products of the GPCC. **Global Precipitation Climatology Centre/DWD Rep**, Offenbach am Main, v. 1, p. 1–14, 2015.

SENAPEENG, P. *et al.* Spatial modeling of extreme temperature in northeast Thailand. **Atmosphere**, Basel, v. 13, n. 4, p. 589, 2022.

SILVA, J. P.; LEANDRO, R. A. Uma abordagem bayesiana para o mapeamento de QTLS utilizando o método MCMC com saltos reversíveis. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 33, n. 4, p. 1061–1070, 2009.

SILVA, L. R. T. **Análise da continuidade espacial do comportamento da precipitação em área que engloba as mesorregiões do Triângulo Mineiro/Alto Paranaíba-Minas Gerais e Sul Goiano-Goiás**. 2019. 108 f. Dissertação (Mestrado em Geografia) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

SILVA, R. M. *et al.* Modelagem geoespacial e temporal da hanseníase entre 2001 e 2011 no município de Bayeux, Paraíba. **Revista Brasileira de Geografia Médica e da Saúde**, Uberlândia, v. 8, n. 15, p. 89–103, 2012.

SMITH, B. J. boa: An r package for mcmc output convergence assessment and posterior inference. **Journal of Statistical Software**, Los Angeles, v. 21, n. 11, p. 1–37, 2007.

STEPHENSON, A.; RIBATET, M. **evdbayes: Bayesian analysis in extreme value theory**. [S.l.], 2014. R package version 1.1-1. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=evdbayes>. Acesso em: 14 fev. 2023.

STEPHENSON, A.; TAWN, J. Bayesian inference for extremes: accounting for the three extremal types. **Extremes**, Clermont Ferrand, v. 7, n. 4, p. 291–307, 2004.

STEPHENSON, A. G. evd: Extreme value distributions. **R News**, v. 2, n. 2, p. 31–32, 2002.

TAKEUCHI, K. Distribution of an information statistic and the criterion for the optimal model. **Mathematical Science**, [S. I.], v. 153, p. 12–18, 1976.

THIBAUD, E.; MUTZNER, R.; DAVISON, A. C. Threshold modeling of extreme spatial rainfall. **Water resources research**, Washington, v. 49, n. 8, p. 4633–4644, 2013.

THOMPSON, S. K. **Sampling**. New York: Wiley-Interscience Publication, 1992. 343 p.

TOBIN, C. *et al.* Improved interpolation of meteorological forcings for hydrologic applications in a Swiss Alpine region. **Journal of Hydrology**, [S. I.], v. 401, n. 1, p. 77–89, 2011.

TOBLER, W. R. A computer movie simulating urban growth in the Detroit region. **Economic geography**, Worcester, v. 46, n. 2, p. 234–240, 1970.

TRENBERTH, K. E. *et al.* The changing character of precipitation. **Bulletin of the American Meteorological Society**, Boston, v. 84, n. 9, p. 1205–1218, 2003.

WANG, S. *et al.* Comparison of interpolation methods for estimating spatial distribution of precipitation in Ontario, Canada. **International Journal of Climatology**, Reading, v. 34, n. 14, p. 3745–3751, 2014.

WEBSTER, R.; OLIVER, M. A. **Geostatistics for environmental scientists**. 2nd ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2007. 330 p.

WICKHAM, H. **ggplot2: elegant graphics for data analysis**. New York: Springer-Verlag, 2016. 212 p.

XAVIER, A. C. *et al.* Módulos em matlab para interpolação espacial pelo método de krigagem ordinária e do inverso da distância. **Revista Brasileira de Cartografia**, Rio de Janeiro, v. 62, n. 1, p. 67–76, 2010.

XAVIER, D. R.; BARCELLOS, C.; FREITAS, C. M. Eventos climáticos extremos e consequências sobre a saúde: o desastre de 2008 em Santa Catarina segundo diferentes fontes de informação. **Ambiente & Sociedade**, São Paulo, v. 17, p. 273–294, 2014.

YAMAMOTO, J. K.; FURUIE, R. A. A survey into estimation of lognormal data. **Geociências**, São Paulo, v. 29, n. 1, p. 5–19, 2010.

YAMAMOTO, J. K.; LANDIM, P. M. B. **Geoestatística: Conceitos e aplicações**. São Paulo: Oficina de Textos, 2013. 215 p.

YAN, Y. **MLmetrics: Machine Learning Evaluation Metrics**. [S.I.], 2016. R package version 1.1.1. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=MLmetrics>. Acesso em: 20 jan. 2023.

YASIN, H. *et al.* Extreme rainfall prediction using spatial extreme value by Max Stable Process (MSP) Smith model approach. **Journal of Physics: Conference Series**, Bristol, v. 1217,

p. 1–8, 2019.

YOON, S.; KUMPHON, B.; PARK, J.-S. Spatial modeling of extreme rainfall in northeast Thailand. **Journal of Applied Statistics**, London, v. 42, n. 8, p. 1813–1828, 2015.

ZHANG, H. *et al.* Quantifying the relationship between extreme air pollution events and extreme weather events. **Atmospheric Research**, [S. I.], v. 188, p. 64–79, 2017.

ZOU, W.; YIN, S.; WANG, W. Spatial interpolation of the extreme hourly precipitation at different return levels in the Haihe River basin. **Journal of Hydrology**, [S. I.], v. 598, p. 126273, 2021.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Ajuste e avaliação dos modelos de Krigagem com diferentes semivariogramas, além da avaliação do IDP

Tabela 14 – Ajuste dos modelos de semivariograma para cada tempo de retorno (TR) com seus respectivos valores do critério de Cambardella (CC) e comparativo entre o método do Inverso da Distância Ponderada por meio dos resultados da validação cruzada: Erro Quadrático Médio (EQM), Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) e Erro Médio de Predição da validação cruzada (EMP-VC) e Erro Médio de Predição (EMP) das 6 localidades não utilizadas para o ajuste dos modelos.

TR	Krig	modelo	C_0	C_1	a	CC	EQM	REQM	EMP-VC	
2	-	IDP	-	-	-	-	14,71	3,83	4,18	
	KO	Gaussiano	2,6617	43,6377	0,5241	5,74	16,58	4,07	4,59	
		Exponencial	2,1938	592,9745	8,6189	0,36	13,25	3,64	4,59	
		Esférico	0,9954	214,6025	4,6347	0,46	13,17	3,62	4,24	
		Onda	2,7365	32,7359	0,5565	7,71	22,65	4,75	5,19	
	KLN	Gaussiano	0,0003	0,0076	0,3925	4,16	12,45	3,52	3,95	
		Exponencial	0	0,0134	1,007	0	12,89	3,59	4,11	
		Esférico	0	0,0071	0,8517	0	13,69	3,70	4,05	
		Onda	0,0004	0,0064	0,5627	6,24	23,99	4,89	5,12	
	5	-	IDP	-	-	-	-	36,08	6,01	4,90
		KO	Gaussiano	29,2242	47,3518	0,5183	38,16	44,93	6,7	5,59
			Exponencial	13,8599	54,9448	0,2653	20,14	39,43	6,27	5,13
Esférico			0,9557	60,3665	0,5785	1,55	32,76	5,72	4,57	
Onda			14,323	43,2997	0,2721	24,85	32,01	5,65	4,88	
KLN		Gaussiano	0,002	0,0043	0,2305	31,83	35,04	5,91	4,84	
		Exponencial	0,0017	0,0044	0,206	27,79	42,4	6,51	5,26	
		Esférico	0,0028	0,0032	0,6534	46,39	43,51	6,59	5,36	
		Onda	0,0025	0,0031	0,3379	45,12	38,98	6,24	5,20	
10		-	IDP	-	-	-	-	91,82	9,58	6,39
		KO	Gaussiano	113,6013	188,6786	9,8434	37,58	94,61	9,72	6,72
			Exponencial	70,2518	717,3	17,352	8,92	94,98	9,74	6,49
	Esférico		80,7517	107,664	8,9747	42,85	94,20	9,7	6,56	
	Onda		36,4053	56,4113	0,3001	39,22	78,5	8,86	6,16	
	KLN	Gaussiano	0,0042	0,003	0,1481	58,01	91,95	9,58	6,54	
		Exponencial	0	0,0073	0,0769	0	95,54	9,77	6,66	
		Esférico	0,0031	0,0045	0,3603	41,18	89,01	9,43	6,38	
		Onda	0,0032	0,0038	0,2983	45,53	78,72	8,87	6,15	

APÊNDICE B - Erros de predição das precipitações obtidas via Inverso da Distância Ponderada

Tabela 15 – Erros de Predição (EP), dados em %, das predições espaciais obtidas via Inverso da Distância Ponderada (IDP), para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos.

Cidade	TR	Observada	Predita	EP
Carmo da Cachoeira	2	110,0	76,7	30,26
	5	110,0	99,0	9,97
	10	110,0	114,6	4,19
Santa Rita de Caldas	2	70,6	72,6	2,86
	5	74,1	95,1	28,34
	10	97,5	110,5	13,30
Bom Jesus da Penha	2	116,7	73,1	37,34
	5	116,7	94,4	19,08
	10	116,7	109,2	6,40
Maria da Fé	2	67,0	67,3	0,45
	5	83,5	88,8	6,31
	10	85,2	106,1	24,53
Andrelândia	2	94,2	78,1	17,12
	5	105,0	103,1	1,78
	10	105,0	120,4	14,67
Extrema	2	66,2	68,6	3,69
	5	106,2	91,7	13,66
	10	106,2	108,7	2,33

**APÊNDICE C - Erros de predição das precipitações obtidas via Krigagem Ordinária
com diferentes semivariogramas**

Tabela 16 – Erros de Predição (EP), dados em %, das predições espaciais obtidas via Krigagem Ordinária com semivariograma Gaussiano, Exponencial, Esférico e Onda, para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos.

Cidade	TR	Obs	Gaussiano		Exponencial		Esférico		Onda	
			Pred	EP	Pred	EP	Pred	EP	Pred	EP
Carmo da C.	2	110	78,20	28,91	79,49	27,74	79,58	27,65	75,93	30,97
	5	110	98,18	10,75	98,16	10,76	97,76	11,13	96,38	12,38
	10	110	113,40	3,09	115,25	4,77	114,79	4,35	111,26	1,15
Santa R. de C.	2	70,6	72,39	2,54	72,21	2,28	72,24	2,32	71,71	1,57
	5	74,1	93,67	26,41	94,94	28,12	95,20	28,48	99,11	33,75
	10	97,5	111,29	14,14	109,39	12,19	109,81	12,63	117,11	20,11
Bom J. da P.	2	116,7	72,59	37,80	72,43	37,93	72,39	37,97	73,61	36,92
	5	116,7	93,00	20,31	94,57	18,96	94,55	18,98	96,41	17,39
	10	116,7	110,97	4,91	108,8	6,77	109,65	6,04	113,05	3,13
Maria da Fé	2	67	65,68	1,97	65,74	1,88	65,51	2,22	66,22	1,16
	5	83,5	91,93	10,10	89,38	7,04	86,40	3,47	82,65	1,02
	10	85,2	113,03	32,66	111,74	31,15	112,48	32,02	101,24	18,83
Andrelândia	2	94,2	79,77	15,32	82,33	12,60	82,43	12,49	74,09	21,35
	5	105	102,17	2,70	100,19	4,58	101,46	3,37	93,28	11,16
	10	105	115,08	9,60	120,59	14,85	118,43	12,79	113,15	7,76
Extrema	2	66,2	67,19	1,50	67,25	1,59	67,11	1,37	66,93	1,10
	5	106,2	92,67	12,74	93,04	12,39	92,26	13,13	93,11	12,33
	10	106,2	111,33	4,83	108,37	2,04	109,27	2,89	110,94	4,46

Nota: Obs - Valor observado; Pred - Valor Predito.

**APÊNDICE D - Erros de predição das precipitações obtidas via Krigagem Log-Normal
com diferentes semivariogramas**

Tabela 17 – Erros de Predição (EP), dados em %, das predições espaciais obtidas via Krigagem Ordinária com semivariograma Gaussiano, Exponencial, Esférico e Onda, para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos.

Cidade	TR	Obs	Gaussiano		Exponencial		Esférico		Onda	
			Pred	EP	Pred	EP	Pred	EP	Pred	EP
Carmo da C.	2	110	80,80	26,55	79,68	27,56	78,89	28,28	77,74	29,33
	5	110	98,84	10,15	98,89	10,10	98,77	10,21	98,33	10,61
	10	110	113,26	2,96	113,32	3,02	113,45	3,14	113,02	2,75
Santa R. de C.	2	70,6	73,48	4,08	72,59	2,82	73,25	3,75	73,72	4,42
	5	74,1	97,90	32,12	96,51	30,24	95,94	29,47	96,35	30,03
	10	97,5	113,25	16,15	113,11	16,01	113,50	16,41	117,97	20,99
Bom J. da P.	2	116,7	73,41	37,10	72,99	37,46	73,88	36,69	76,03	34,85
	5	116,7	97,27	16,65	96,27	17,51	95,88	17,84	99,06	15,12
	10	116,7	113,21	2,99	113,03	3,14	113,42	2,81	114,27	2,08
Maria da Fé	2	67	64,80	3,28	65,64	2,03	66,16	1,25	68,19	1,78
	5	83,5	88,87	6,43	91,05	9,04	91,88	10,04	89,83	7,58
	10	85,2	109,34	28,33	109,42	28,43	108,27	27,08	103,37	21,33
Andrelândia	2	94,2	79,55	15,55	80,90	14,12	78,45	16,72	75,72	19,62
	5	105	99,67	5,08	99,93	4,83	100,37	4,41	99,01	5,70
	10	105	113,35	7,95	113,58	8,17	113,80	8,38	114,02	8,59
Extrema	2	66,2	67,94	2,63	68,18	2,99	69,36	4,77	68,57	3,58
	5	106,2	95,04	10,51	94,93	10,61	94,74	10,79	95,01	10,54
	10	106,2	112,68	6,10	112,61	6,04	112,64	6,06	112,43	5,87

Nota: Obs - Valor observado; Pred - Valor Predito.

APÊNDICE E - Erros de predição das precipitações obtidas via metodologias de extremos espaciais

Tabela 18 – Erros de Predição (EP), dados em %, das predições espaciais obtidas via modelo Máx-estável de Smith e Schlather com função de correlação de Bessel e via modelo GEV espacial, para os tempos de retorno (TR) de 2, 5 e 10 anos.

Cidade	TR	Obs	Smith		Schlather (Bessel)		GEV espacial	
			Pred	EP	Pred	EP	Pred	EP
Carmo da C.	2	110	79,10	28,09	79,80	27,45	79,10	28,09
	5	110	100,50	8,64	103,10	6,27	101,30	7,91
	10	110	114,60	4,18	118,60	7,82	115,80	5,27
Santa R. de C.	2	70,6	71,10	0,71	72,20	2,27	69,90	0,99
	5	74,1	91,00	22,81	95,10	28,34	93,20	25,78
	10	97,5	104,10	6,77	110,20	13,03	107,40	10,15
Bom J. da P.	2	116,7	73,20	37,28	74,20	36,42	73,40	37,10
	5	116,7	91,10	21,94	93,90	19,54	92,30	20,91
	10	116,7	102,80	11,91	106,70	8,57	104,60	10,37
Maria da Fé	2	67	73,00	8,96	73,90	10,30	73,20	9,25
	5	83,5	93,90	12,46	97,80	17,13	95,80	14,73
	10	85,2	107,70	26,41	113,60	33,33	110,50	29,69
Andrelândia	2	94,2	81,70	13,27	82,20	12,74	81,60	13,38
	5	105	104,50	0,48	106,90	1,81	104,90	0,10
	10	105	119,40	13,71	123,20	17,33	120,10	14,38
Extrema	2	66,2	68,00	2,72	69,30	4,68	68,60	3,63
	5	106,2	89,20	16,01	94,40	11,11	92,30	13,09
	10	106,2	103,10	2,92	111,10	4,61	107,80	1,51

Nota: Obs - Valor observado; Pred - Valor Predito.