

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

MARIANA GABRIELA GUSMÃO

CONEXÕES EXISTENTES ENTRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
FUCHSIANAS, GEOMETRIA HIPERBÓLICA E CÓDIGOS CORRETORES
DE ERROS, APLICADAS EM CANAIS DISCRETOS SEM MEMÓRIA

ALFENAS/MG

2023

MARIANA GABRIELA GUSMÃO

**CONEXÕES EXISTENTES ENTRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
FUCHSIANAS, GEOMETRIA HIPERBÓLICA E CÓDIGOS CORRETORES
DE ERROS, APLICADAS EM CANAIS DISCRETOS SEM MEMÓRIA**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e Biometria, pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Estatística Aplicada e Biometria.

Linha de Pesquisa: Matemática Aplicada e Modelagem Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson José de Oliveira.

ALFENAS/MG

2023

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas
Biblioteca Central

Gusmão, Mariana Gabriela.

Conexões existentes entre equações diferenciais fuchsianas, geometria hiperbólica e códigos corretores de erros, aplicadas em canais discretos sem memória / Mariana Gabriela Gusmão. - Alfenas, MG, 2023.

78 f. : il. -

Orientador(a): Anderson José de Oliveira.

Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) -
Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, MG, 2023.

Bibliografia.

1. Códigos Geometricamente Uniformes. 2. Triângulos Hiperbólicos. 3. Singularidades. 4. Constelação de Sinais. 5. Canal Binário Simétrico. I. Oliveira, Anderson José de , orient. II. Título.

MARIANA GABRIELA GUSMÃO

CONEXÕES EXISTENTES ENTRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUCHSIANAS, GEOMETRIA HIPERBÓLICA E CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS, APLICADAS EM CANAIS DISCRETOS SEM MEMÓRIA

O Presidente da banca examinadora abaixo assina a aprovação da Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e Biometria pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Estatística Aplicada e Biometria

Aprovada em: 28 de julho de 2023.

Prof. Dr. Anderson José de Oliveira

Presidente da Banca Examinadora

Instituição: Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG

Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia

Instituição: Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

Profa. Dr. Luiz Alberto Beijo

Instituição: Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG



Documento assinado eletronicamente por **Anderson Jose de Oliveira, Presidente**, em 06/09/2023, às 15:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unifal-mg.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1079684** e o código CRC **13B23AEC**.

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo agradeço a Deus, pela vida, pela conquista alcançada e por todas as vezes que acalmou meus pensamentos, meu coração e minha alma.

Aos meus pais, Ana Maria e Marcus, que com muito trabalho e esforço permitiram que eu trilhasse mais uma etapa em minha vida. Aos meus irmãos Paloma e Lucas, meu namorado Guilherme, e aos meus amigos e colegas, que tanto me incentivaram e se mantiveram presentes em minha vida nos momentos bons e também nos difíceis.

Ao meu orientador e agora amigo, Anderson José de Oliveira, por todo conhecimento compartilhado, por cada evento vivenciado juntos, por todas as longas conversas, por seu companheirismo e compreensão e por embarcar em cada viagem de meus pensamentos e se propor a investiga-las. Gratidão por tudo, você é um profissional e pessoa extraordinária.

Aos membros da banca, Giuliano, Cátia e Luiz, que com todas suas sugestões e apontamentos muito contribuíram na produção deste trabalho.

À Universidade Federal de Alfenas e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

E a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram nesse ciclo da minha vida.

RESUMO

A Teoria dos Códigos Corretores de Erros, da Geometria Hiperbólica e das Equações Diferenciais Fuchsianas vêm se tornando presente nos trabalhos de diversos pesquisadores, e são áreas com diversas possibilidades de aplicações, como no estudo dos erros que podem ocorrer no processo de transmissão da informação. Neste trabalho são apresentadas possíveis conexões existentes entre códigos geometricamente uniformes, elementos de geometria hiperbólica e equações diferenciais fuchsianas, obtidas por meio de estudos teóricos com as principais definições e propriedades das respectivas áreas. Foram consideradas singularidades complexas de equações diferenciais fuchsianas que também geravam constelações de sinais no plano complexo. Posteriormente, foi analisada a existência de um código perfeito ou quase perfeito, os quais apresentaram a mesma capacidade de correção de erros, independente da singularidade geradora do código. Por fim, foi possível representar as palavras-código como entradas e saídas de um canal discreto sem memória, mostrando que a probabilidade de erro, p , está relacionada ao número de palavras-código sobre a constelação. Um outro caminho estabelecido foi analisar essas singularidades como vértices de um triângulo hiperbólico para analisar o gênero da superfície associada, por meio dos emparelhamentos dos lados desse triângulo, além de estabelecer uma conexão com o canal binário simétrico $C_{2,2}$, verificando que a probabilidade de erro também é a mesma, independente da singularidade transmitida. Além disso, apresentamos novos códigos perfeitos e quase perfeitos sobre anéis quocientes de inteiros gaussianos, destacando uma estrutura geométrica diferente da encontrada na literatura. Os resultados expostos neste trabalho contribuem para o desenvolvimento de ferramentas que podem ser aplicadas tanto na Matemática quanto na Engenharia, uma vez que foram utilizados conceitos algébricos e da Teoria da Informação, áreas em franca expansão.

Palavras-chave: códigos geometricamente uniformes; triângulos hiperbólicos; singularidades; constelação de sinais; canal binário simétrico.

ABSTRACT

The Theory of Error-Correcting Codes, Hyperbolic Geometry and Fuchsian Differential Equations have been becoming present in the work of several researchers, and they are areas with several possible applications, such as in the study of errors that may occur in the process of information transmission. In this work, we present possible connections between geometrically uniform codes, hyperbolic geometry elements and Fuchsian differential equations, obtained through theoretical studies with the main definitions and properties of the respective areas. Complex singularities of Fuchsian differential equations that also generated signal constellations in the complex plane were considered, then the existence of a perfect or quasi-perfect code was analyzed, which presented the same error correction capability, regardless of the singularity generating the code. Finally, it was possible to represent the codewords as inputs and outputs of a discrete channel without memory, showing that the error probability, p , is related to the number of codewords on the constellation. Another path established was to analyze these singularities as vertices of a hyperbolic triangle to analyze the genus of the associated surface, through the pairings of the sides of this triangle, besides establishing a connection with the symmetric binary channel $C_{2,2}$, verifying that the error probability is also the same, regardless of the transmitted singularity. In addition, we present new perfect and quasi-perfect codes on quotient rings of Gaussian integers, highlighting a different geometric structure from that found in the literature. The results exposed in this work contribute to the development of tools that can be applied both in mathematics and in engineering, since algebraic and information theory concepts were utilized, areas in booming expansion.

Keywords: geometrically uniform codes; hyperbolic triangles; singularities; signal constellation; binary symmetric channel. simétrico.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Geodésicas no Semiplano superior.	25
Figura 2 – Geodésicas no plano de Poincaré.	26
Figura 3 – Grafo de Petersen.	36
Figura 4 – Diagrama do funcionamento de um sistema de comunicação.	37
Figura 5 – Representação das distâncias do Exemplo 8 sobre o grafo gerado por $\alpha = 3 + 4i$	40
Figura 6 – Código Perfeito 1-dominante em G_{3+4i}	46
Figura 7 – Código Perfeito 1-dominante em G_{-3+4i}	48
Figura 8 – Singularidades $\{-3 + 4i, 3 + 4i \text{ e } \infty\}$	49
Figura 9 – Singularidades no disco de Poincaré.	50
Figura 10 – Código quase perfeito sobre \mathbb{Z}_{8+9i}	56
Figura 11 – Código quase perfeito sobre \mathbb{Z}_{-8+9i}	59
Figura 12 – Singularidades $\{-8 + 9i, 8 + 9i \text{ e } \infty\}$	60
Figura 13 – Representação do triângulo no disco de Poincaré	61
Figura 14 – Código quase perfeito sobre \mathbb{Z}_{6+3i}	65
Figura 15 – Código quase perfeito sobre \mathbb{Z}_{-6+3i}	67
Figura 16 – Singularidades $\{-6 + 3i, 6 + 3i \text{ e } \infty\}$	68
Figura 17 – Representação do triângulo no disco de Poincaré	69
Figura 18 – Grafo associado as singularidades $3 + 4i$ e $-3 + 4i$	71
Figura 19 – Grafo associado às singularidades $8 + 9i$ e $-8 + 9i$	72
Figura 20 – Grafo associado às singularidades $6 + 3i$ e $-6 + 3i$	72
Figura 21 – Canal associado a cinco palavras-código	73
Figura 22 – Grafo associado as palavras-código com probabilidade de erro p definida.	74

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUCHSIANAS	15
2.1.1	Equações diferenciais de segunda ordem	15
2.1.2	Classificação dos pontos	16
2.1.3	Equações diferenciais fuchsianas	17
2.2	GEOMETRIA HIPERBÓLICA	21
2.2.1	Introdução histórica da Geometria Hiperbólica	21
2.2.2	Espaço hiperbólico	23
2.2.3	Modelos euclidianos do plano hiperbólico	24
2.2.3.1	Semiplano superior	24
2.2.3.2	Disco de Poincaré	25
2.2.3.3	Transformações de Mobius	26
2.3	ELEMENTOS DE ÁLGEBRA	27
2.3.1	Grupos	27
2.3.2	Anéis e corpos	31
2.3.3	Extensões de corpos	33
2.3.4	Norma e traço de um elemento	34
2.3.5	Anéis de inteiros Gaussianos	35
2.4	GRAFOS	35
2.5	CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS	36
2.5.1	Códigos geometricamente uniformes	38
2.5.1.1	Códigos sobre grafos	39
2.5.1.2	Códigos perfeitos	40
2.5.1.3	Códigos quase perfeitos	41
3	CONEXÕES ENTRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUCHSIANAS, CÓDIGOS GEOMETRICAMENTE UNIFORMES E GEOMETRIA HIPERBÓLICA	42
3.1	SITUAÇÃO 1: SINGULARIDADES $3 + 4i$, $-3 + 4i$ e ∞	42
3.1.1	Equações diferenciais fuchsianas	42
3.1.2	Códigos geometricamente uniformes	44
3.1.3	Geometria hiperbólica	48
3.2	SITUAÇÃO 2: SINGULARIDADES $8 + 9i$, $-8 + 9i$ E ∞	50
3.2.1	Equações diferenciais fuchsianas	51
3.2.2	Códigos geometricamente uniformes	53
3.2.3	Geometria hiperbólica	58

3.3	SITUAÇÃO 3: SINGULARIDADES $6 + 3i$, $-6 + 3i$ E ∞	61
3.3.1	Equações diferenciais fuchsianas	61
3.3.2	Códigos geometricamente uniformes	63
3.3.3	Geometria hiperbólica	67
4	CONEXÃO COM CANAIS DE COMUNICAÇÃO	70
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	75
	REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

As Teorias dos Códigos Corretores de Erros, Geometria Hiperbólica e Equações Diferenciais Fuchsianas são áreas em franca expansão e os respectivos estudos permitem diversas possibilidades de aplicação, como no processo de transmissão da informação em sistemas de comunicação.

O estudo dos códigos corretores de erros teve sua origem na Teoria da Informação proposta por Claude E. Shannon em 1948, em um artigo intitulado “*A Mathematical Theory of Communication*” [1]. Shannon foi um matemático, engenheiro eletrônico e criptógrafo, conhecido como “pai da teoria da informação”. O principal objetivo desses códigos é transmitir e armazenar dados de maneira confiável, de modo que, ao recuperar uma informação, seja possível detectar e corrigir erros.

Dentre os diversos tipos de códigos sobre estruturas algébricas, temos os códigos de grupos. Slepian foi o responsável por introduzir o conceito de códigos de grupos para o canal Gaussiano em 1968 [2], apresentando suas principais propriedades.

Forney [3] estudou uma classe de códigos denominada “Códigos Geometricamente Uniformes”, mais gerais com relação aos códigos de Slepian, pois é permitido que os elementos do grupo gerador sejam isometrias arbitrárias, em vez de serem apenas transformações ortogonais ou traduções, e o código pode ser definido como um conjunto de sequências possivelmente de dimensão infinita.

Na decodificação de códigos geometricamente uniformes, não é necessário saber a região de Voronoi de cada palavra-código, basta saber a região de Voronoi associada a uma dessas palavras-código e pode-se determinar as demais regiões a partir de translações da região conhecida. Em um código geometricamente uniforme, todas as regiões de Voronoi são congruentes. A região de Voronoi de um elemento na constelação de sinais consiste dos pontos que estão mais próximos de tal elemento do que qualquer outro ponto.

Em 2007, Martinez, Beivide e Gabidulin [4], desenvolveram uma nova métrica sobre espaços de sinais bidimensionais derivados da Teoria de Grafos sobre constelações em uma modulação QAM (Quadrature Amplitude Modulation) e uma subclasse dos códigos geometricamente uniformes, denominadas códigos perfeitos sobre anéis quociente de inteiros Gaussianos, em que pontos complexos geram as constelações de sinais e o código. Uma generalização dos códigos perfeitos derivados de anéis quociente de inteiros Gaussianos é realizada em [5] e de inteiros de Eisenstein-Jacobi em [6], denominados códigos quase perfeitos. Os códigos quase perfeitos, além de preservarem as propriedades dos códigos geometricamente uniformes, são capazes de corrigir mais padrões de erro quando comparado aos códigos perfeitos.

De acordo com [7] e [8], o estudo das equações diferenciais fuchsianas despertou

grande interesse na Matemática na segunda metade do século XIX e início do século XX, proporcionando um grande desenvolvimento na teoria das funções de variáveis complexas.

Nas equações diferenciais fuchsianas, todo ponto singular no plano complexo estendido é regular, podendo ser classificadas em equações hipergeométricas, de Legendre, de Tchebychev, com três pontos singulares regulares e de Heun, com quatro pontos singulares regulares.

Uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é dita ser uma equação fuchsiana se possuir um número finito de pontos singulares, todos regulares. As equações fuchsianas possuem algumas propriedades de transformação que facilitam sua análise. As equações hipergeométricas são as mais utilizadas em problemas de Física-Matemática, visto que podem ser obtidas a partir das outras equações fuchsianas, além de apresentar linearidade homogênea.

Segundo Vaz Jr. e Oliveira [7], o estudo de equações diferenciais fuchsianas é justificado pois várias equações importantes, sendo que algumas dessas EDO's de segunda ordem são equações fuchsianas. Além disso, o fato de se considerar o plano complexo estendido, e não apenas o plano complexo, facilita o estudo dessas equações e permite apresentar resultados importantes.

No artigo “Uniformização de Curvas Algébricas Planares via EDOs Fuchsianas no Estudo de Sistemas de Comunicação” de Oliveira e Palazzo Jr. [9], as singularidades de equações diferenciais fuchsianas são vistas como elementos de uma sequência de Farey, em que o infinito é sempre uma das singularidades. Além disso, é estabelecida uma relação desses conceitos com a geometria hiperbólica quando as singularidades de uma equação hipergeométrica, com três pontos singulares regulares, e de uma equação de Heun, com quatro pontos singulares regulares, são vistas como polígonos fundamentais da geometria hiperbólica.

Ao considerar uma equação fuchsiana com seis pontos singulares, os autores mostram que não houve igualdade entre o gênero da curva e o gênero da região fundamental; consequentemente, não foi possível determinar a região para uniformização da curva algébrica associada à equação fuchsiana nesse caso. Assim, percebe-se que há uma restrição associada ao número de singularidades para que a igualdade do gênero possa ser alcançada.

A Geometria Hiperbólica surge com a tentativa falha em demonstrar o quinto postulado de Euclides, quando esse estudo trouxe avanços importantes, como provar por exemplo, que sem o Postulado das Paralelas, segue-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior ou menor do que π .

Na primeira metade do século XIX começou-se a suspeitar da independência do Postulado das Paralelas, ou seja, de que sua negação poderia gerar uma geometria consistente, sem contradições. Portanto, desenvolveram-se estudos amplos e detalhados

de uma geometria que assumia a existência de mais de uma reta paralela, criando assim uma nova geometria, que com o tempo ficou conhecida como *Geometria de Lobatchevsky* ou *Geometria Hiperbólica*. No final do século XIX, matemáticos como Eugenio Beltrami, Henri Poincaré e Felix Klein criaram modelos euclidianos para esta geometria, resolvendo a questão da consistência desta geometria, pois qualquer eventual contradição a ser encontrada implicaria em uma contradição existente na geometria euclidiana, ou seja, as geometrias hiperbólica e euclidiana têm o mesmo grau de consistência. [10]

Neste trabalho, serão utilizados apenas dois modelos da geometria hiperbólica, conhecidos como *disco de Poincaré* e o *semiplano superior*. Pode-se utilizar o modelo que for mais conveniente, dependendo das propriedades que se deseja estudar. Existem também os modelos de Klein e o de Minkowsky, mas tais modelos não serão considerados nesta pesquisa.

De acordo com [11], é possível utilizar elementos de geometria hiperbólica e equações diferenciais fuchsianas no processo de modelagem de um sistema de comunicação para analisar a influência dos ruídos no processo de transmissão da informação.

Segundo [12], os elementos de geometria hiperbólica podem ser aplicados aos códigos geometricamente uniformes. Em [13] foi proposta a construção de constelações de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico por meio do processo de construção de cadeias de partições geometricamente uniformes a partir do grupo de isometrias do octógono.

Em um processo de transmissão de informação, é relevante o estudo dos sistemas de comunicação, a fim de que a mensagem recebida em um processo de comunicação seja a mais confiável possível. Para isso, o estudo de estruturas algébricas, geometria hiperbólica, equações diferenciais fuchsianas e os códigos corretores de erros, suas aplicações, definições e resultados são necessários.

O objetivo deste trabalho é identificar conexões existentes entre elementos de geometria hiperbólica, equações diferenciais fuchsianas, códigos geometricamente uniformes e estruturas algébricas para, posteriormente, aplicá-las em canais discretos sem memória.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1 é apresentada a introdução, no Capítulo 2 são apresentados os principais conceitos teóricos utilizados no trabalho. Assim, na primeira seção são apresentados conceitos básicos sobre Equações Diferenciais Fuchsianas; as principais referências utilizadas são [7] e [11]. Na segunda seção são apresentadas algumas definições e propriedades da Geometria Hiperbólica, sendo [10], [11] e [14] as principais referências utilizadas. E, na terceira seção, são apresentadas algumas definições e propriedades de conceitos algébricos, grafos e códigos corretores de erros, sendo [15], [16] e [17] as principais referências utilizadas nessa seção.

No Capítulo 3 são apresentados os resultados obtidos nesta pesquisa, em que são

apresentadas as conexões estabelecidas entre equações diferenciais fuchsianas, geometria hiperbólica e códigos geometricamente uniformes, por meio de exemplos, análise e interpretação dos mesmos. No Capítulo 4 é apresentada uma conexão entre os vértices de triângulos hiperbólicos e as palavras-código, que são singularidades, com canais discretos sem memória.

Finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas as considerações finais do trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Em virtude da interdisciplinaridade desta pesquisa, neste capítulo serão apresentados conceitos relacionados a Equações Diferenciais Fuchsianas, Geometria Hiperbólica, Álgebra, Grafos e Códigos Corretores de Erros.

O presente capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 2.1 é realizada uma breve introdução dos principais conceitos referentes a equações diferenciais fuchsianas. Na Seção 2.2 são apresentadas as principais definições da geometria hiperbólica, os modelos euclidianos presentes nessa geometria e as transformações de Möbius. Nas Seções 2.3 e 2.4, são apresentados os principais conceitos e definições das estruturas algébricas de grupos, anéis, anéis quociente e grafos. Esses são fundamentais para as construções que serão realizadas no decorrer deste estudo. Na Seção 2.5 é apresentada uma breve introdução aos códigos corretores de erros, os principais elementos em um sistema de comunicação, além dos códigos geometricamente uniformes, que serão utilizados para a análise de correção de erros. Além disso, alguns conceitos sobre canais de comunicação, mais especificamente os canais binários simétricos.

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUCHSIANAS

Nesta seção, serão apresentados conceitos fundamentais associados às equações diferenciais fuchsianas para a compreensão deste estudo, tendo como principais referências os trabalhos [7] e [11].

2.1.1 Equações diferenciais de segunda ordem

Segundo Oliveira [11], a forma padrão de uma equação diferencial linear de segunda ordem (EDO) é:

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + p(z)\frac{du(z)}{dz} + q(z)u(z) = 0, \quad (1)$$

em que $p(z)$ e $q(z)$ são funções analíticas em um domínio $S \subset \mathbb{C}$, ou analíticas em S exceto em um número finito de pontos isolados, ou seja, funções meromorfas em S . O domínio S pode ser todo o plano complexo incluindo o ∞ , o plano complexo estendido.

Podemos transformar a Eq. (1) em uma forma reduzida:

$$\frac{d^2u_1(z)}{dz^2} + q_1(z)u_1(z) = 0 \quad (2)$$

com a seguinte mudança de variável dependente:

$$\begin{cases} u(z) = u_1(z) \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_b^z p(z') dz'\right\} \\ q_1(z) = q(z) - \frac{1}{2} \frac{dp(z)}{dz} - \frac{1}{4}(p(z))^2 \end{cases},$$

em que $b \in S$.

Dizemos que uma função f é holomorfa em $z_0 \in \mathbb{U}$ se existe o limite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$. A função é holomorfa se for holomorfa em todos os pontos de seu domínio.

Uma função $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita meromorfa se existe um conjunto P tal que as seguintes condições são satisfeitas: f é holomorfa em $\mathbb{U} \rightarrow P$; os pontos de P são isolados, ou seja, P é discreto; os pontos de P são polos de f . De fato, a condição de meromorfia está associada à diferenciabilidade em $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Exemplo 1. As equações a seguir são exemplos de equações diferenciais lineares de segunda ordem:

$$x^2 y'' + \sin(x) y' + e^x y = u(x) \quad e \quad y'' - 7y' + 12y = \cos(x).$$

2.1.2 Classificação dos pontos

Um ponto z no plano complexo é classificado dependendo das propriedades analíticas das funções $p(z)$ e $q(z)$ em z .

Definição 1. Um ponto $z \in \mathbb{C}$ ($z \neq \infty$) é denominado ponto regular da equação diferencial (1) se $p(z)$ e $q(z)$ são analíticas em uma vizinhança de z . Um ponto $z \in \mathbb{C}$ ($z \neq \infty$) é chamado de ponto singular da equação diferencial (1) se $p(z)$ ou $q(z)$ tem uma singularidade em z .

Da mesma forma, um ponto $z \in \mathbb{C}$ ($z \neq \infty$) na forma reduzida (2) é classificado como um ponto singular ou regular dependendo se $q_1(z)$ é singular ou analítica (regular) em z , respectivamente.

Definição 2. O ponto infinito $z = \infty$ é classificado como:

1. um ponto regular da equação diferencial (1) fornecido por $\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} p\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ e é analítico em $\zeta = 0 \Leftrightarrow 2z - z^2 p(z)$ for analítico em $z = \infty$ tal que $p(z) = \frac{2}{z} + O(z^2)$ quando $z \rightarrow \infty$ e $\frac{1}{\zeta^4} q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ é analítico em $\zeta = 0 \Leftrightarrow z^4 q(z)$ for analítico em $z = \infty$ tal que $q(z) = O(z^4)$ quando $z \rightarrow \infty$;
2. um ponto singular regular da equação diferencial (1) fornecido por: $2 - \frac{1}{\zeta} p\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ e é analítico em $\zeta = 0 \Leftrightarrow 2z - z^2 p(z)$ for analítico em $z = \infty$ tal que $p(z) = \frac{2}{z} + O(z^{-2})$ quando $z \rightarrow \infty$ e $\frac{1}{\zeta^4} q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ é analítico em $\zeta = 0 \Leftrightarrow z^4 q(z)$ for analítico em $z = \infty$ tal que $q(z) = O(z^{-4})$ quando $z \rightarrow \infty$,

3. um ponto singular irregular da equação diferencial (1) em todos os outros casos.

2.1.3 Equações diferenciais fuchsianas

Dizemos que a equação:

$$y^{(n)}(z) + p_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(z)y'(z) + p_n(z)y(z) = 0$$

é uma equação de Fuchs ou uma equação do tipo fuchsiana se todo ponto singular no plano complexo estendido for regular. Podemos escrever uma equação diferencial ordinária (EDO) fuchsiana de segunda ordem com n pontos singulares da forma:

$$y''(z) + p_1(z)y'(z) + p_2(z)y(z) = 0. \quad (3)$$

Neste caso, um ponto singular é dito regular se a singularidade em $p_1(z)$ for um polo simples e em $p_2(z)$ for um polo de, no máximo, ordem 2.

As equações diferenciais fuchsianas (EDFs) possuem como principal característica o fato de que todo ponto singular no plano complexo estendido é regular [8]. Os pontos singulares são aqueles em que $p(z)$ ou $q(z)$ deixam de ser analíticas, ou seja, são os pontos que zeram o denominador da fração e um ponto é singular regular se tanto $(z - z_0)p(z)$ quanto $(z - z_0)^2q(z)$ forem analíticas em z_0 , onde z_0 é uma singularidade. Classificamos uma equação fuchsiana como hipergeométrica, de Tchebychev e de Legendre, quando restrita a três pontos singulares regulares, sendo um desses localizado no infinito.

Para [7], o estudo de equações diferenciais fuchsianas é justificado pois várias equações importantes, sendo que algumas dessas EDO's de segunda ordem, são equações fuchsianas. Além disso, o fato de considerar o plano complexo estendido, e não apenas o plano complexo, facilita o estudo dessas equações e permite apresentar resultados importantes, pois é possível encontrar a forma das funções $p_i(z)$, para $i = 1, \dots, n$, utilizando resultados conhecidos da teoria das variáveis complexas, em particular o Teorema de Liouville.

Segundo [7], encontrar a forma geral das funções $p_i(z)$ não é uma tarefa difícil, pois uma função cujas únicas singularidades no plano complexo estendido são polos deve ser necessariamente uma função racional.

Suponha que o ponto complexo no infinito, ∞ , não seja um polo. Assim, $\lim_{t \rightarrow 0} |f(t^{-1})| < M = \text{constante}$. Agora admita que $f(z)$ tem polos de ordem m_j nos pontos ξ_j , para $j = 1, \dots, n$. Então, em torno do ponto ξ_1 a função $f(z)$ tem a serie de Laurent,

$$f(z) = \frac{b_1}{z - \xi_1} + \cdots + \frac{b_{m_1}}{(z - \xi_1)^{m_1}} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - \xi_1)^k,$$

podendo ser reescrita como:

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{(z - \xi_1)^{m_1}} + g_1(z),$$

em que $P_1(z)$ é um polinômio de grau $m - 1$ e $g_1(z)$ é analítica em ξ_1 .

Considere o polo em ξ_2 , essa singularidade é proveniente da função $g_1(z)$. De maneira análoga, tomando a série de Laurent em torno do ponto ξ_2 , podemos escrever

$$g_1(z) = \frac{P_2(z)}{(z - \xi_2)^{m_2}} + g_2(z),$$

em que $P_2(z)$ é um polinômio de grau $m - 2$ e $g_2(z)$ é analítica em ξ_1 e ξ_2 .

Seguindo esse mesmo raciocínio, podemos escrever $f(z)$ da seguinte forma:

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{(z - \xi_1)^{m_1}} + \dots + \frac{P_n(z)}{(z - \xi_n)^{m_n}} + g(z),$$

em que $P_i(z)$ ($i = 1, \dots, n$) é um polinômio de grau $m_i - 1$ e $g(z)$ é analítica em $\bar{\mathbb{C}}$. Do teorema de Liouville tem-se que $g(z) = C = \text{constante}$, assim:

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{(z - \xi_1)^{m_1}} + \dots + \frac{P_n(z)}{(z - \xi_n)^{m_n}} + C = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

em que $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios.

Considerando uma equação diferencial fuchsiana de segunda ordem, por definição $p_1(z)$ deve ter no máximo um polo de ordem 1 em ξ_1 e $p_2(z)$ de ordem 2 em ξ_2 . Portanto, devem ser da forma:

$$\begin{aligned} p_1(z) = p(z) &= \frac{A_1}{z - \xi_1} + \dots + \frac{A_n}{z - \xi_n} + K_1, \\ p_2(z) = q(z) &= \frac{B_1}{(z - \xi_1)^2} + \frac{C_1}{z - \xi_1} + \dots + \frac{B_n}{(z - \xi_n)^2} + \frac{C_n}{z - \xi_n} + K_2, \end{aligned}$$

Para que $z = \infty$ seja um ponto ordinário, devemos estabelecer uma relação entre as constantes A_i, B_i e C_i ($i = 1, \dots, n$).

Para isso, vamos fazer a mudança de variável $z = \frac{1}{w}$, de modo que

$$\frac{dy}{dz} = -w^2 \frac{dy}{dw}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw},$$

assim tem-se a seguinte equação:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + P(w) \frac{dy}{dw} + Q(w)y = 0,$$

em que:

$$P(w) = \frac{2}{w} - \frac{1}{w^2} p\left(\frac{1}{w}\right),$$

$$Q(w) = \frac{1}{w^4} q\left(\frac{1}{w}\right).$$

Para que $w = 0$ seja um ponto ordinário, as funções $P(w)$ e $Q(w)$ devem ser analíticas nesse ponto. Para $P(w)$ tem-se:

$$\begin{aligned} P(w) &= \frac{2}{w} - \frac{1}{w^2} \left[\frac{A_1 w}{1 - \xi_1 w} + \cdots + \frac{A_n w}{1 - \xi_n w} + K_1 \right] \\ &= -\frac{K_1}{w^2} + \frac{2}{w} - \frac{1}{w} [A_1(1 + \xi_1 w + O(w^2)) + \cdots + A_n(1 + \xi_n w + O(w^2))] \\ &= -\frac{K_1}{w^2} + \frac{2}{w} - \frac{1}{w} (A_1 + \cdots + A_n) - (A_1 \xi_1 + \cdots + A_n \xi_n) + O(w). \end{aligned}$$

$P(w)$ é analítica em $w = 0$ se

$$\begin{aligned} K_1 &= 0 \\ A_1 + \cdots + A_n &= 2. \end{aligned}$$

Agora, para $Q(w)$ tem-se:

$$\begin{aligned} Q(w) &= \frac{1}{w^4} \left[\frac{B_1 w^2}{(1 - \xi_1 w)^2} + \frac{C_1 w}{1 - \xi_1 w} + \cdots + \frac{B_n w^2}{(1 - \xi_n w)^2} + \frac{C_n w}{1 - \xi_n w} + K_2 \right] \\ &= \frac{K_2}{w^4} + \frac{1}{w^2} [B_1(1 + 2\xi_1 w + 3\xi_1^2 w^2 + O(w^3)) + \cdots + B_n(1 + 2\xi_n w + 3\xi_n^2 w^2 + O(w^3))] \\ &\quad + \frac{1}{w^3} [C_1(1 + \xi_1 w + \xi_1^2 w^2 + \xi_1^3 w^3 + O(w^4)) + \cdots + C_n(1 + \xi_n w + \xi_n^2 w^2 + \xi_n^3 w^3 + O(w^4))] \\ &= \frac{K_2}{w^4} + \frac{1}{w^3} (C_1 + \cdots + C_n) + \frac{1}{w^2} [(B_1 + \cdots + B_n) + (\xi_1 C_1 + \cdots + \xi_n C_n)] + \frac{1}{w} [(2\xi_1 B_1 + \cdots \\ &\quad \cdots + 2\xi_n B_n) + (\xi_1^2 C_1 + \cdots + \xi_n^2 C_n)] + O(1). \end{aligned}$$

$Q(w)$ é analítica em $w = 0$ se:

$$\begin{aligned} K_2 &= 0 \\ C_1 + \cdots + C_n &= 0, \\ (B_1 + \cdots + B_n) + (\xi_1 C_1 + \cdots + \xi_n C_n) &= 0, \\ (2\xi_1 B_1 + \cdots + 2\xi_n B_n) + (\xi_1^2 C_1 + \cdots + \xi_n^2 C_n) &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, uma equação fuchsiana de segunda ordem com n pontos singulares é da forma 3 com:

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{A_1}{z - \xi_1} + \cdots + \frac{A_n}{z - \xi_n}, \\ q(z) &= \frac{B_1}{(z - \xi_1)^2} + \frac{C_1}{z - \xi_1} + \cdots + \frac{B_n}{(z - \xi_n)^2} + \frac{C_n}{z - \xi_n}, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} A_1 + \cdots + A_n &= 2, \\ C_1 + \cdots + C_n &= 0, \\ (B_1 + \cdots + B_n) + (\xi_1 C_1 + \cdots + \xi_n C_n) &= 0, \\ (2\xi_1 B_1 + \cdots + 2\xi_n B_n) + (\xi_1^2 C_1 + \cdots + \xi_n^2 C_n) &= 0. \end{aligned}$$

Podemos representar essa equação diferencial fuchsiana, com três pontos singulares regulares, por meio do símbolo P-Riemann, que representa um conjunto de soluções da equação. Segundo Oliveira [11], o símbolo P-Riemann apresenta os pontos singulares da equação e os expoentes da equação na singularidade z_0 que são obtidos por meio da equação indicial.

Definição 3 ([11]). Se z_0 é um ponto singular regular de $y'' + py' + qy = 0$, então a equação indicial para esse ponto é:

$$r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0, \quad (4)$$

em que:

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)p(z), \\ q_0 &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 q(z). \end{aligned}$$

As raízes da equação indicial são chamadas expoentes (índices) da equação na singularidade z_0 .

Vaz Jr. e Oliveira [7] mostram que a Equação de Riemann é obtida ao relacionar os coeficientes A_i e B_i ($i = 1, 2, 3$.) com os expoentes característicos dos pontos singulares. É importante destacar que, ao buscar soluções $y(z) = (z - z_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, o expoente r satisfaz a equação indicial 4, em que $p_0 = a$ e $q_0 = b$.

Para $z_0 = \xi_1$ temos

$$a = A_1, \quad b = B_1,$$

e, denotando as raízes da equação indicial por α e α' , vemos que

$$A_1 - 1 = -\alpha - \alpha' \quad B_1 = \alpha\alpha'.$$

Para $z_0 = \xi_2$ temos

$$a = A_2, \quad b = B_2,$$

e, denotando as raízes da equação indicial por β e β' , vemos que

$$A_2 - 1 = -\beta - \beta' \quad B_2 = \beta\beta'.$$

Para $z_0 = \xi_3$ temos

$$a = A_3, \quad b = B_3,$$

e, denotando as raízes da equação indicial por γ e γ' , vemos que

$$A_3 - 1 = -\gamma - \gamma' \quad B_1 = \gamma\gamma'.$$

Com isso, podemos reescrever a relação dos coeficientes $A_1 + A_2 + A_3 = 2$, em termos dos expoentes:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1, \quad (5)$$

a Equação 5 é denominada *Condição de Riemann*, e os expoentes do símbolo P-Riemann satisfazem essa equação.

Com isso podemos reescrever a Equação 3 com:

$$p(z) = \frac{1 - \alpha - \alpha'}{z - \xi_1} + \frac{1 - \beta - \beta'}{z - \xi_2} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - \xi_3},$$

$$q(z) = \frac{1}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3)} \left[\frac{\alpha\alpha'(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}{z - \xi_1} + \frac{\beta\beta'(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}{z - \xi_2} + \frac{\gamma\gamma'(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}{z - \xi_3} \right].$$

Essa equação é denominada Equação de Riemann, e os expoentes das singularidades dessa equação se colocam na forma do símbolo P-Riemann,

$$y = P \left\{ \begin{array}{ccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right\}.$$

2.2 GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Nesta seção, serão apresentados conceitos fundamentais associados à Geometria Hiperbólica para a compreensão deste estudo, tendo como principais referências os trabalhos [7] e [11].

2.2.1 Introdução histórica da Geometria Hiperbólica

Por mais de dois mil anos “Os Elementos” do matemático Euclides (325 a.c - 265 a.c), foi o texto padrão no estudo da Geometria. No primeiro dos seus trinta conjuntos de volumes, sistematicamente descobriu a geometria euclidiana, introduzindo definições de

termos geométricos (tais como reta e ponto), cinco noções comuns concentrando magnitudes, e os seguintes cinco postulados:

- (i) Uma reta pode ser traçada de qualquer ponto a outro.
- (ii) Qualquer segmento finito de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta.
- (iii) Dados um ponto e uma distância quaisquer, pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual à distância dada.
- (iv) Todos os ângulos retos são iguais entre si.
- (v) Se uma reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos interiores, de um mesmo lado, seja menor que dois ângulos retos, então as duas outras retas se cruzam, quando suficientemente prolongadas, do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos.

Ao longo dos séculos foram encontrados diversos enunciados equivalentes ao quinto postulado, sendo o mais popular deles feito por John Fairplay (1748 – 1819) que afirma que, “Por um ponto não contido em uma reta dada, pode ser traçada uma e apenas uma reta paralela a reta dada”, que ficou conhecido como Postulado das Paralelas.

Durante o século XVIII, diversos matemáticos tais como Girolomo Sacheri e Johann Heinrich Lambert tentaram demonstrar o quinto postulado, mas não foram bem sucedidos, já que este é um postulado independente, fato conhecido hoje em dia. Apesar disso, conseguiram avanços importantes, como provar por exemplo, que sem o Postulado das Paralelas, obtém-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior ou menor do que π .

Na primeira metade do século XIX começou-se a suspeitar da independência do Postulado das Paralelas. Matemáticos como Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855), János Bolyai (1802 – 1860) e Nicolai Lobatchevsky (1793 – 1856) trataram da questão ao considerar três situações distintas: Por um ponto não contido em uma reta dada passa, mais de uma, apenas uma ou nenhuma reta paralela à reta dada. Por suspeitarem da independência do Postulado das Paralelas, ou seja, de que sua negação poderia gerar uma geometria consistente, sem contradições, desenvolveram de forma axiomática um estudo amplo e detalhado de uma geometria que assumia a existência de mais de uma reta paralela (a terceira hipótese, da inexistência de retas paralelas, pode ser descartada se assumirmos que as retas são infinitas), criando o que veio a ser chamada com o tempo de *Geometria de Lobatchevsky* ou *Geometria Hiperbólica*. No entanto, as dúvidas referentes à consistência desta nova geometria só foram dirimidas no final do século XIX, quando matemáticos como Eugenio Beltrami, Henri Poincaré e Felix Klein criaram modelos euclidianos para esta geometria. A criação de modelos euclidianos para a geometria hiperbólica resolve a questão da consistência desta geometria, pois qualquer eventual contradição a ser encontrada

implicaria em uma contradição existente na geometria euclidiana, ou seja, as geometrias hiperbólica e euclidiana tem o mesmo grau de consistência, [10].

Existem muitos modelos para o plano hiperbólico, mas esta pesquisa concentra-se em apenas dois desses modelos, conhecidos como *disco de Poincaré* e o *semiplano superior*. De acordo com [14], os modelos exercem para a geometria a mesma função que um bom atlas exerce para a geografia: apesar de os mapas apresentarem distorções, estas são quantificáveis e razoavelmente “bem comportadas”, de modo que podemos nos situar de forma bastante satisfatória apenas através de nossos mapas. Além disso, de forma análoga ao que acontece com os distintos mapas de um atlas, modelos distintos distorcem ou preservam propriedades distintas. Assim, dependendo da propriedade que desejamos estudar, podemos escolher um modelo que preserve tal propriedade, ou seja, o mapa mais conveniente.

2.2.2 Espaço hiperbólico

Como definido em [14], considere o conjunto:

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\},$$

dotado da estrutura riemanniana:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}. \quad (6)$$

Com essa estrutura, o semi-espaço \mathbb{H}^{n+1} é chamado *espaço hiperbólico (n+1)-dimensional*, e a métrica ds , *métrica hiperbólica*.

Ao introduzir esta estrutura Riemanniana é possível definir comprimentos de curvas, geodésicas e distância entre pontos, apresentadas a seguir.

Definição 4. Sejam $[a, b]$ um intervalo fechado e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma curva continuamente diferenciável por partes, em que $\gamma(t) = ((x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)))$. Então, o *comprimento* $\|\gamma\|$ da curva $\gamma([a, b])$ é dado por:

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{dt}\right)^2}}{x_{n+1}} dt.$$

Assuma, sem perda de generalidade, que a curva γ está definida no intervalo $[0, 1]$. De fato, considere a aplicação $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definida por $\phi(t) = a + bt$ e o caminho $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \phi)(t) = \gamma(a + bt)$, obtém-se pela regra da cadeia que:

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\phi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{d\phi}\right)^2}}{x_{n+1}} d\phi = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{dt}\right)^2}}{x_{n+1}} dt = \|\tilde{\gamma}\|.$$

Definição 5. Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{H}^2$, a distância entre p e q é dada por:

$$d(p, q) = \inf \|\gamma\|,$$

em que o ínfimo \inf é considerado sobre o conjunto das curvas continuamente diferenciáveis por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

A distância $d(., .)$ é de fato uma distância, pois $\sqrt{\frac{(\frac{dx_1}{d\phi})^2 + \dots + (\frac{dx_{n+1}}{d\phi})^2}{x_{n+1}}}$ é sempre positiva e igual a zero para todo $t \in [0, 1]$ se, e somente se, $\frac{dx_1}{dt} \cong \dots \cong \frac{dx_{n+1}}{dt} \cong 0$, ou seja, se a curva é um único ponto $p = q$. A função é simétrica, pois se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$, então $\tilde{\gamma}(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, definida por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$, é tal que $\tilde{\gamma}(0) = q$ e $\tilde{\gamma}(1) = p$, de modo que $d(p, q) = d(q, p)$. A desigualdade triangular também é satisfeita, tome os pontos $p, q, r \in \mathbb{H}^2$ e os caminhos $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tais que $\gamma_1(0) = p$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = q$ e $\gamma_2(1) = r$, então o caminho $\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, definido por:

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{se } x \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

é tal que $\gamma_3(0) = p$ e $\gamma_3(1) = r$ e $\|\gamma_3\| = \|\gamma_1\| + \|\gamma_2\|$, de modo que

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r).$$

A partir da definição de distância são definidas as geodésicas, que são curvas de menor comprimento entre dois pontos.

Definição 6. Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ é uma *geodésica* se para quaisquer pontos $s, t \in [a, b]$ tivermos:

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = \int_s^t \frac{\sqrt{(\frac{dx_1}{d\phi})^2 + \dots + (\frac{dx_{n+1}}{d\phi})^2}}{x_{n+1}} d\phi,$$

ou seja, se γ minimizar a distância entre os pontos de seu traçado.

2.2.3 Modelos euclidianos do plano hiperbólico

2.2.3.1 Semiplano superior

Considere o semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ com a métrica Riemanniana:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}, \quad (7)$$

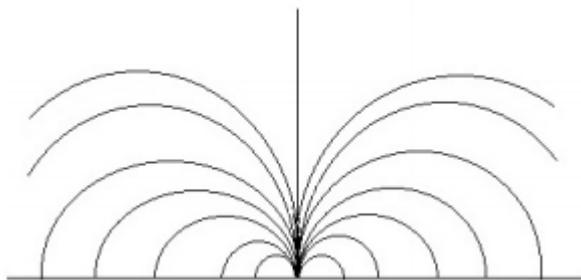
onde $z = x + yi$ e o ângulo entre duas curvas é definido como o ângulo entre as curvas quando elas são consideradas curvas em \mathbb{C} , ou seja, como o ângulo entre suas tangentes. Com esta métrica, \mathbb{H}^2 é um modelo do plano hiperbólico.

Observação 1. O limitante euclidiano ou bordo de \mathbb{H}^2 é dado por $\partial\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$.

Pode-se ainda determinar as geodésicas do plano hiperbólico.

As geodésicas de \mathbb{H}^2 são as semi-retas e semi-circunferências ortogonais a $\partial\mathbb{H}^2$, conforme apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Geodésicas no Semiplano superior.



Fonte: [14]

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{H}^2$, sua *área hiperbólica*, denotada por $\mu(A)$ é dada por:

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2},$$

se a integral existir.

2.2.3.2 Disco de Poincaré

Um outro modelo euclidiano do plano hiperbólico é o disco unitário $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ com a métrica derivada da diferencial:

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}, \quad (8)$$

e é chamado modelo do disco de Poincaré.

Observação 2. O limitante euclidiano ou bordo de \mathbb{D}^2 é dado por $\partial\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

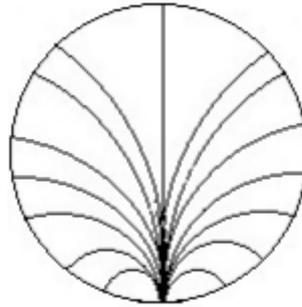
Neste caso, as geodésicas do plano hiperbólico são dadas pelo seguinte resultado: as geodésicas de \mathbb{D}^2 são segmentos de retas ortogonais a \mathbb{D}^2 (pela origem) e de circunferências ortogonais a $\partial\mathbb{D}^2$. Um exemplo é apresentado na Figura 2.

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{D}^2$, sua *área hiperbólica*, denotada por $\mu(A)$ é dada por:

$$\mu(A) = \int_A \frac{4dx dy}{(1 - (x^2 + y^2))^2},$$

se a integral existir.

Figura 2 – Geodésicas no plano de Poincaré.



Fonte: [14]

2.2.3.3 Transformações de Möbius

Definição 7. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tal que $ad - bc \neq 0$ e $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Uma transformação de Möbius é uma função $\gamma : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ da forma:

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Note que caso $ad - bc = 0$, tem-se $ad = bc$ e, assim, γ é constante igual a $\frac{a}{c}$. Além disso, se $c \neq 0$, define-se $\gamma(\frac{-d}{c}) = \infty$, e $\gamma(\infty) = \frac{a}{c}$. E, se $c = 0$, define-se $\gamma(\infty) = \infty$.

As transformações de Möbius possuem uma transformação inversa $\gamma^{-1} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, dada por $\gamma^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ que também é uma transformação de Möbius. Tem-se $\gamma^{-1}(\infty) = \infty$, se $c = 0$ e, caso $c \neq 0$, $\gamma^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c}$ e $\gamma^{-1}(\frac{a}{c}) = \infty$. Observe que toda transformação de Möbius é uma bijeção do plano complexo estendido ($\bar{\mathbb{C}}$) em si mesmo.

Além disso, uma propriedade interessante das transformações de Möbius é que estas podem ser decompostas em outras transformações de Möbius mais simples. De fato, a composição de duas transformações de Möbius é também uma transformação de Möbius: dadas $\gamma_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ e $\gamma_2(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\lambda z + \delta}$, a composição $\gamma_1 \circ \gamma_2$ é:

$$\gamma_1(\gamma_2(z)) = \frac{(a\alpha + b\lambda)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\lambda)z + (c\beta + d\delta)} = \frac{Az + B}{Cz + D},$$

em que $AD - BC = (a\alpha + b\lambda)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\lambda) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\lambda) \neq 0$.

Mais ainda, como a identidade $\gamma(z) = z$, com $a = d = 1$ e $b = c = 0$, é uma transformação de Möbius, tem-se que o conjunto das transformações de Möbius forma um grupo com a operação de composição.

Vamos denotar o conjunto das transformações de Möbius por $Mob(\cdot)$, sendo $Mob(\mathbb{H}^2)$ e $Mob(\mathbb{D}^2)$ as transformações no semi-plano superior e no disco de Poincaré, respectivamente.

Definição 8. Dado γ uma transformação de Möbius, podemos associar à transformação de Möbius uma matriz 2×2 por:

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longrightarrow [\gamma] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Definição 9. Considere $\gamma \in Mob(\mathbb{H}^2)$ sendo uma transformação de Möbius com $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, em que $ad - bc = 1$. Chamamos $Tr(\gamma) = (a + d)^2$ de traço de γ .

Ao associar à transformação de Möbius a uma matriz, o traço é definido como a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja, se $[\gamma] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $Tr([\gamma]) = a + d$.

Podemos agora classificar os três tipos de transformações de Möbius: hiperbólica, parabólica e elíptica, por meio da função traço.

- Transformação elíptica, quando $Tr([\gamma]) < 2$;
- Transformação parabólica, quando $Tr([\gamma]) = 2$;
- Transformação hiperbólica, quando $Tr([\gamma]) > 2$.

2.3 ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

Nesta seção, será apresentada uma revisão de estruturas algébricas, como grupos, anéis, anéis de inteiros Gaussianos, anéis quociente, extensão de corpos, norma e traço de um elemento, e por fim, alguns exemplos e teoremas importantes da teoria de grafos e de códigos corretores de erros, importantes para a compreensão deste trabalho. As referências utilizadas foram [15], [16] e [17].

2.3.1 Grupos

Definição 10. Um conjunto não vazio G munido de uma operação binária $(x, y) \mapsto x * y$ é chamado *grupo* se satisfaz as seguintes condições:

1. $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$ (associatividade);
2. Existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$ (elemento neutro);
3. Para cada $a \in G$, existe $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$ (elemento simétrico).

Observação 3. Particularmente, quando a operação $*$ é a multiplicação, denotamos o simétrico de a por a^{-1} e o chamamos de inverso de a . Neste caso, o elemento neutro de G é o 1, que é denotado por 1_G , quando há risco de confusão. Agora, quando a operação $*$ é a adição, denotamos o simétrico de a por $-a$ e o chamamos de oposto de a . Neste caso, o elemento neutro de G é o 0, que é denotado por 0_G , quando há risco de confusão.

Definição 11. Seja G um grupo em relação à operação $*$. Então G é chamado de *grupo comutativo*, ou um *grupo abeliano*, se $*$ é comutativa. Ou seja, $x * y = y * x$, $\forall x, y \in G$.

Propriedades de um grupo

G_1) $\exists!$ $e \in G$; (unicidade do elemento neutro)

Demonstração: Sejam $a \in G$ e e, e' elementos neutros de G . Assim,

$$e = e * e' = e'.$$

□

G_2) $\exists!$ a^{-1} , para cada $a \in G$; (unicidade do elemento simétrico)

Demonstração: Sejam $a \in G$ e a', a'' elementos simétricos de a . Assim,

$$a' = e * a' = (a'' * a) * a' = a'' * (a * a') = a'' * e = a''.$$

□

G_3) $(a')' = a, \forall a \in G$;

Demonstração: Sejam $a \in G$, a' o elemento simétrico de a e $e \in G$ o elemento neutro de G .

$$(a')' = (a')' + e = (a')' + (a' + a) = ((a')' + a') + a = e + a = a.$$

□

G_4) Se $a + x = a + y$, então $x = y$. O elemento a é chamado de regular.

Demonstração: Sejam a, x e $y \in G$. Suponhamos que $a + x = a + y$, logo

$$x = e + x = (a' + a) + x = a' + (a + x) = a' + (a + y) = (a' + a) + y = e + y = y.$$

□

G_5) $(a + b)' = b' + a', \forall a, b \in G$;

Demonstração: Sejam $a, b \in G$.

$$\begin{aligned}
 (a+b)' + (a+b) &= e \\
 (a+b)' + (a+b) + b' &= e + b' \\
 (a+b)' + a + (b+b') &= b' \\
 (a+b)' + a + e &= b' \\
 (a+b)' + a &= b' \\
 (a+b)' + a + a' &= b' + a' \\
 (a+b)' + e &= b' + a' \\
 (a+b)' &= b' + a'
 \end{aligned}$$

□

Definição 12. Se um grupo G tem um número finito de elementos, G é chamado de *grupo finito*. O número de elementos em G é chamado de ordem de G e é indicado por $o(G)$ ou $|G|$. Se G não possui um número finito de elementos, G é chamado de *grupo infinito*.

Exemplo 2. $(\mathbb{Z}_m, +)$ é um grupo comutativo para todo m , em que $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ é chamado conjunto das classes de restos módulo m . Portanto, $\bar{0}$ é formado por todos os inteiros cômgruos a 0, módulo m , $\bar{1}$ por todos os inteiros cômgruos a 1, módulo m , e assim por diante.

A *adição módulo m* é uma operação em \mathbb{Z}_m definida por:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b},$$

a qual vale a associatividade e a comutatividade. Mais ainda, $\bar{0}$ é elemento neutro dessa operação, pois:

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a+0} = \bar{a}.$$

E a classe $\overline{m-a}$ é o oposto de \bar{a} em \mathbb{Z}_m nesta operação, pois:

$$\bar{a} + \overline{m-a} = \overline{a+(m-a)} = \overline{m} = \bar{0}.$$

Então, $\overline{-a} = \overline{m-a}$.

A *multiplicação módulo m* em \mathbb{Z}_m é uma operação definida por:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}.$$

Nessa operação também valem as propriedades associativa e comutativa. O elemento $\bar{1}$ é elemento neutro dessa operação, pois:

$$\bar{a} \cdot \bar{1} = \overline{a \cdot 1} = \bar{a}.$$

Entretanto, o conjunto \mathbb{Z}_m munido da operação “.” é um grupo se, e somente se, m é um número primo e o elemento $\bar{0}$ não pertence a \mathbb{Z}_m . Isso acontece pois nem todos os elementos de \mathbb{Z}_m possuem inverso, como por exemplo o $\bar{0}$. A demonstração da existência do inverso de todos elementos apenas quando m é primo pode ser verificada em [15].

Vamos mostrar que as operações de adição e multiplicação em \mathbb{Z}_m estão bem definidas, isto é:

$$\text{Se } (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{x}, \bar{y}), \text{ então } \overline{a + b} = \overline{x + y}.$$

$$\text{Se } (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{x}, \bar{y}), \text{ então } \overline{a \cdot b} = \overline{x \cdot y}.$$

Lema 2.1. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ e $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$. Se $a \equiv x \pmod{m}$, então:

$$1. a + b \equiv x + y \pmod{m}$$

$$2. a \cdot b \equiv x \cdot y \pmod{m}$$

Demonstração:

1.

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv x \pmod{m} \Rightarrow m \mid (a - x) \\ b \equiv y \pmod{m} \Rightarrow m \mid (b - y) \end{array} \right\} \Rightarrow m \mid (a - x + b - y) \Rightarrow m \mid ((a + b) - (x + y)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (a + b) \equiv (x + y) \pmod{m}$$

2.

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv x \pmod{m} \Rightarrow m \mid (a - x) \Rightarrow m \mid b(a - x) \\ b \equiv y \pmod{m} \Rightarrow m \mid (b - y) \Rightarrow m \mid x(b - y) \end{array} \right\} \Rightarrow m \mid (ab - bx + bx - xy) \Rightarrow m \mid (ab - xy) \Rightarrow \\ \Rightarrow ab \equiv xy \pmod{m}$$

□

Proposição 2.2. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Se $\bar{a} = \bar{x}$ e $\bar{b} = \bar{y}$, então:

$$1. \bar{a} + \bar{b} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$2. \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Demonstração: Como $\bar{a} = \bar{x}$ e $\bar{b} = \bar{y}$, tem-se que $a \equiv x \pmod{m}$ e $b \equiv y \pmod{m}$. Do Lema 2.1 tem-se que $a + b \equiv x + y \pmod{m}$ e $a \cdot b \equiv x \cdot y \pmod{m}$, portanto, $\overline{a + b} = \overline{x + y}$ e $\overline{a \cdot b} = \overline{x \cdot y}$ então $\bar{a} + \bar{b} = \bar{x} + \bar{y}$ e $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ □

2.3.2 Anéis e corpos

Definição 13. Um conjunto não vazio A , juntamente com duas operações binárias em A $+$ e \cdot , é dito ser um *anel* se:

1. $(A, +)$ é um grupo abeliano;
2. A segunda operação é associativa, isto é: se $a, b, c \in A$, então $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
3. Valem as leis distributivas: se $a, b, c \in A$, então $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Notação: $(A, +, \cdot)$.

Dado o anel $(A, +, \cdot)$, como $(A, +)$ é um grupo abeliano, o anel possui a mesma propriedade que esse grupo em relação à primeira operação. Um anel $(A, +, \cdot)$ em que o conjunto A é finito, chama-se *anel finito*.

Definição 14. Um subconjunto não vazio S de um anel $(A, +, \cdot)$ é um *subanel* de A se S é um anel com as operações induzidas de A .

Um importante anel é o $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$, chamado anel das classes de resto módulo m . Para todo inteiro $m > 1$, é dado pelo conjunto $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ em relação as seguintes operações:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad e \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}.$$

- (i) Temos que $(\mathbb{Z}_m, +)$ é um grupo abeliano, conforme apresentado na Subseção 2.3.1.
- (ii) A multiplicação é associativa. De fato, se $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, então $\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \overline{a \cdot bc} = \overline{abc} = \overline{ab \cdot c} = \overline{(a \cdot b) \cdot c}$.
- (iii) A multiplicação é distributiva em relação à adição. De fato, se $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, então $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \overline{a \cdot (b + c)} = \overline{a(b + c)} = \overline{ab + ac} = \overline{ab} + \overline{ac}$. A distributiva à direita é análoga.

Portanto, $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ é um anel. O zero desse anel é a classe $\bar{0}$ e o oposto de um elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ é a classe $\overline{m - a}$.

Definição 15. Um anel $(A, +, \cdot)$ em que a operação \cdot é comutativa, é chamado *anel comutativo*. Um anel $(A, +, \cdot)$ em que a operação \cdot tem elemento neutro é chamado *anel com unidade* ou simplesmente, *anel com 1*.

Um anel que possui unidade e cuja multiplicação é comutativa é denominado *anel comutativo com unidade*.

Exemplo 3. Os anéis \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} são exemplos de anéis comutativos com unidade. Os anéis \mathbb{Z}_m das classes de resto, módulo m , também são anéis comutativos com unidade, pois o resto da divisão de ab por m é igual ao resto da divisão de ba por m , e a unidade é a classe $\bar{1}$, pois $\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a} = \bar{1} \cdot \bar{a}$, com $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$.

Um elemento $a \in A$, $a \neq 0$ é um *divisor de zero à esquerda* se existe $b \neq 0$ em A , tal que $a \cdot b = 0$. Analogamente $a \neq 0$ é um *divisor de zero à direita* se existe $b \neq 0$ tal que $b \cdot a = 0$.

Definição 16. Um anel $(A, +, \cdot)$ comutativo com unidade é um *domínio*, ou um *anel de integridade*, se para todo $a, b \in A$, $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Também podemos definir um *domínio*, ou um *anel de integridade* se este for um anel comutativo com unidade que não possui divisores de zero.

Definição 17. Seja A um anel comutativo, e I um subconjunto não vazio de A . Chamamos I de ideal de A se para todo $x, y \in I$ e $a \in A$, verificarem-se as relações seguintes:

1. $x - y \in I$;
2. $a \cdot x \in I$.

Definição 18. Um anel $(A, +, \cdot)$ é um anel com divisão, ou um quase corpo se $(A - \{0\}, \cdot)$ é um grupo, ou seja, $1 \in A$ e para todo $a \in A$, $a \neq 0$, existe $b \in A$, tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$, b é o inverso de a e é denotado por a^{-1} . Um corpo é um anel com divisão comutativo.

Se I é um ideal em um anel comutativo A , então I é um subanel de A e um subgrupo do grupo aditivo A . Como A é comutativo, I é subgrupo normal de $(A, +)$. Com isso, podemos considerar o grupo quociente A/I cujos elementos são as classes laterais $a + I$, $a \in A$. O elemento neutro de A/I é a classe lateral $0 + I = I$ e o elemento oposto de $a + I$ é a classe $(-a) + I$. A adição é definida por:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \quad a, b \in A,$$

e a multiplicação é definida por:

$$(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I.$$

$(A/I, +, \cdot)$ é chamado *anel quociente*.

É importante destacar que as operações $+$ e \cdot estão bem definidas. Se $a + I = a' + I$ e $b + I = b' + I$, então existem x_1 e $x_2 \in I$ tais que $a = a' + x_1$ e $b = b' + x_2$.

Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned}
 (a + I) + (b + I) &= (a + b) + I \\
 &= ((a' + x_1) + (b' + x_2)) + I \\
 &= (a' + b') + (x_1 + x_2) + I = (a' + b') + I + (x_1 + x_2) + I \\
 &= (a' + b') + I + 0 + I = (a' + b' + 0) + I \\
 &= (a' + I) + (b' + I),
 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
 (a + I) \cdot (b + I) &= (a \cdot b) + I \\
 &= ((a' + x_1) \cdot (b' + x_2)) + I \\
 &= (a'b' + a'x_2 + b'x_1 + x_1x_2) + I \\
 &= (a'b' + I) + \underbrace{((a'x_2 + b'x_1 + x_1x_2) + I)}_{\in I} \\
 &= (a'b' + I) + (0 + I) = (a'b' + 0) + I = a'b' + I \\
 &= (a' + I) \cdot (b' + I).
 \end{aligned}$$

2.3.3 Extensões de corpos

Definição 19. Sejam \mathbb{K} e \mathbb{L} corpos. \mathbb{L} é uma *extensão algébrica* de \mathbb{K} se, e somente se, \mathbb{K} é um subcorpo de \mathbb{L} . Neste caso, $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, \mathbb{K} é um corpo com as operações induzidas em \mathbb{L} e $1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{L}}$.

Um elemento $\alpha \in \mathbb{L}$ é chamado *elemento algébrico* sobre \mathbb{K} se for raiz de um polinômio com coeficientes em \mathbb{K} . Dizemos que \mathbb{L} é *algébrico* sobre \mathbb{K} se todo elemento de \mathbb{L} é algébrico sobre \mathbb{K} .

Todo corpo \mathbb{K} é uma extensão de si mesmo, e as seguintes extensões são chamadas de extensões naturais: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ e $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definição 20. Seja \mathbb{L} uma extensão do corpo \mathbb{K} . A dimensão de \mathbb{L} sobre \mathbb{K} é chamada *grau da extensão*, ou grau de \mathbb{L} sobre \mathbb{K} , e é denotada por $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$. Se o grau de \mathbb{L} sobre \mathbb{Q} é finito, dizemos que \mathbb{L} é um *corpo de números*.

Exemplo 4. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ é uma extensão finita de grau 2. De fato, $\{1, \sqrt{2}\}$ gera $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ como \mathbb{Q} -espaço vetorial. Suponhamos que $a + b\sqrt{2} = 0$, com $a, b \in \mathbb{Q}$. Se $b \neq 0$, então $\sqrt{2} = -a \cdot b^{-1} \in \mathbb{Q}$, o que é um absurdo. Logo, $b = 0$ e, conseqüentemente, $a = 0$. Portanto, $\{1, \sqrt{2}\}$ é linearmente independente sobre \mathbb{Q} . Então, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.

A extensão de grau 2 sobre o corpo \mathbb{Q} dos números racionais do Exemplo 4 é chamada *corpo quadrático*. Todo corpo quadrático é da forma $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, onde d é um inteiro livre de quadrados, ou seja, $d \not\equiv 0 \pmod{4}$.

Teorema 2.3. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ um corpo quadrático, em que d é um inteiro livre de quadrados. Se

1. $d \not\equiv 1 \pmod{4}$, então o anel dos inteiros $\mathbb{I}_{\mathbb{K}}$ é $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ e $\{1, \sqrt{d}\}$ é base de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ como um \mathbb{Z} -módulo.
2. $d \equiv 1 \pmod{4}$, então o anel dos inteiros $\mathbb{I}_{\mathbb{K}}$ é $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ e $\{1, \frac{1+\sqrt{d}}{2}\}$ é base de $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ como um \mathbb{Z} -módulo.

Obs.: Pode-se dizer, a grosso modo, que um módulo é um “espaço vetorial” sobre um anel.

Uma demonstração do Teorema 2.3 pode ser encontrada em [17].

2.3.4 Norma e traço de um elemento

Sejam \mathbb{K} um corpo de números de grau n e $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ os monomorfismos de \mathbb{K} em \mathbb{C} . Para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$ definimos respectivamente a norma e o traço de α , como:

$$N(\alpha) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(\alpha) \quad e \quad Tr(\alpha) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\alpha).$$

Como os σ_i 's são monomorfismos segue que:

$$N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha)N(\beta),$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Teorema 2.4. Sejam \mathbb{K} um corpo de números, $I_{\mathbb{K}}$ o anel de inteiros de \mathbb{K} e $[\alpha]$ o ideal de $I_{\mathbb{K}}$ gerado por α , então o anel quociente $\frac{I_{\mathbb{K}}}{[\alpha]}$ tem $N(\alpha)$ elementos.

Uma demonstração do Teorema 2.4 pode ser encontrada em [17].

Corolário 2.5. Seja $\alpha \in I_{\mathbb{K}}$.

1. Se $\beta \in I_{\mathbb{K}}$ é tal que $\beta | \alpha$, então o ideal $[\beta] \subset \frac{I_{\mathbb{K}}}{[\alpha]}$ tem ordem $N(\alpha)/N(\beta)$;
2. Se $\beta \in I_{\mathbb{K}}$ é tal que $\beta \nmid \alpha$ e $\gamma = mdc(\alpha, \beta)$, então o ideal $[\beta] \subset \frac{I_{\mathbb{K}}}{[\alpha]}$ é gerado por γ e tem ordem $N(\alpha)/N(\gamma)$.

2.3.5 Anéis de inteiros Gaussianos

Dado o corpo de números $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, pelo Teorema 2.3, o anel dos inteiros de \mathbb{K} é $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, chamado *anel dos inteiros de Gauss*.

A norma de $\mathbb{Z}[i]$ é dada pela aplicação $N : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}_+$, definida como $N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha}$, em que $\alpha = a + bi$ e $\bar{\alpha}$ é o conjugado de α , $a - bi$.

A aplicação N é um monomorfismo. De fato, como $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$, tem-se que $N(\alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot \beta \cdot \overline{\alpha \cdot \beta} = \alpha \cdot \beta \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot \beta \cdot \bar{\beta} = N(\alpha) \cdot N(\beta)$. Assim, N é um homomorfismo, e a aplicação N é injetora pois, dados $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di$, se $\alpha \neq \beta$, então $a \neq c$ e $b \neq d$, logo $N(\alpha) = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \neq c^2 + d^2 = (c + di) \cdot (c - di) = N(\beta)$, então $N(\alpha) \neq N(\beta)$.

O anel quociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{[\alpha]}$, denotado por $\mathbb{Z}[i]_\alpha$, possui $N(\alpha) = a^2 + b^2$ elementos, conforme o Teorema 2.4.

Exemplo 5. Observe os elementos do anel quociente $\mathbb{Z}[i]_{3+4i}$,

$$\mathbb{Z}[i]_{3+4i} = \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, i, 2i, 3i, -i, -2i, -3i, 1+i, 1+2i, 1-i, 1-2i, -1-i, -1-2i, -1+i, -1+2i, 2+i, -2+i, 2-i, -2-i\}.$$

Como $\alpha = 3 + 4i$, tem-se $N(\alpha) = 25$, ou seja, o quociente do anel $\mathbb{Z}[i]$ e o ideal $[3 + 4i]$, possui 25 elementos.

2.4 GRAFOS

Um grafo G consiste de um conjunto finito e não vazio $V(G)$ de elementos denominados *vértices* e um conjunto $A(G)$ de elementos denominados *arestas*, que são pares não ordenados de vértices. Um grafo G é, portanto, um par ordenado $G = (V, A)$, em que V é o conjunto de vértices e A é o conjunto de arestas de G . As arestas podem ser definidas como uma função $\psi : A \rightarrow V \times V$ definida como $\psi(a) = uv$ (ou $\psi(a) = vu$, pois a ordem não importa) que associa a cada aresta a um par não ordenado de vértices u, v , os quais chamamos de extremos de a .

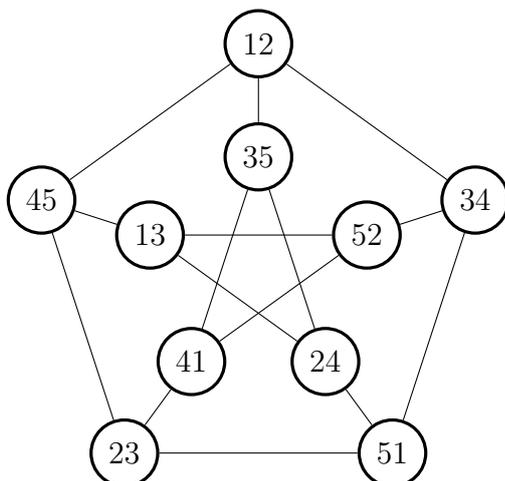
Se $G = (V, A)$ é um grafo e u e v são dois de seus vértices, diremos que u e v são vizinhos ou adjacentes se $\{u, v\} \in A$; neste caso, dizemos que a aresta $\{u, v\}$ incide nos vértices u e v . Se u e v não forem adjacentes, dizemos que são vértices não adjacentes de G . Denotamos a aresta $\{u, v\}$ por uv , sempre que não houver perigo de confusão.

Grafos são representados por diagramas, em que os elementos de V correspondem a pontos no plano e os elementos de A são os arcos que ligam os pontos correspondentes. Um grafo pode ter diferentes representações gráficas e o propósito da Figura 3 é apenas representar esquematicamente as relações de adjacência entre os vértices de G .

O número de vértices de G é denotado por $n(G)$ e o número de arestas por $m(G)$. Assim, $n(G) = |V(G)|$ e $m(G) = |A(G)|$. Um grafo é dito *completo* se possui n vértices, com dois quaisquer deles conectados por um arco. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n , e possui $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

Exemplo 6. Seja V o conjunto de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que têm exatamente 2 elementos. Dois elementos v e w de V são adjacentes se $v \cap w = \emptyset$. Essa relação de adjacência sobre V define o *grafo de Petersen*, representado na Figura 3.

Figura 3 – Grafo de Petersen.



Fonte: Autor (baseado em [18]).

2.5 CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS

Pode-se resumir o processo de transmissão de informação da seguinte forma: a informação parte de uma fonte e é destinada a um receptor, através de um meio conhecido como canal; se o canal não tem ruído, a informação recebida será igual à enviada, porém, na prática, o ruído é introduzido à informação, resultando na introdução de erros pelo canal.

Um código corretor de erros, basicamente, acrescenta dados adicionais a cada informação que deve ser transmitida ou armazenada, de maneira que ao recuperar essa informação, seja possível detectar e talvez corrigir erros. Para ilustrar um código corretor de erros, suponha que um robô esteja andando sobre um piso quadriculado de modo que

ao darmos os comandos Leste, Oeste, Norte ou Sul, ele se desloque conforme o comando. Essas direções foram codificadas pelos elementos do conjunto $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ da seguinte maneira:

Fonte		Código de fonte
Leste	→	00
Oeste	→	01
Norte	→	10
Sul	→	11

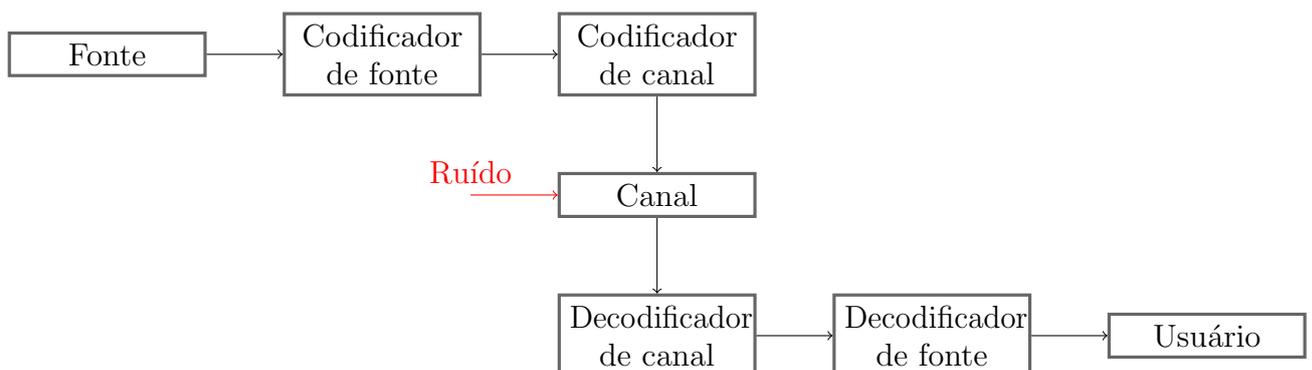
Suponha que desejemos que o robô vá para o Sul, e devido a alguma interferência o robô receba o comando 10, então se deslocará para o Norte, nenhum erro será detectado e corrigido, pois ambas as palavras pertencem ao código. Para evitar esse tipo de problema pode-se recodificar as palavras de modo a introduzir redundância que permita detectar e corrigir erros, quando fazemos isso estamos modificando o código de fonte para que se torne um código corretor de erro. Observe a recodificação apresentada a seguir:

Fonte		Código de fonte		Código do Canal
Leste	→	00	→	00000
Oeste	→	01	→	01011
Norte	→	10	→	10110
Sul	→	11	→	11101

Agora, suponha novamente que desejemos que o robô vá para o Sul, ou seja, a informação enviada é 11101, porém a mensagem recebida é 11111. Neste caso identificaríamos o erro, visto que a palavra "11111" não pertence ao código. Além disso, poderíamos corrigir o erro, pois a palavra do código que tem menor número de componentes diferentes da mensagem recebida é 11101, que é a mensagem enviada.

O procedimento realizado anteriormente pode ser esquematizado pelo diagrama dado pela Figura 4, que descreve o funcionamento dos códigos corretores de erros.

Figura 4 – Diagrama do funcionamento de um sistema de comunicação.



Fonte: Autor.

Pode-se definir um código corretor de erros (CCE) da seguinte forma:

Definição 21. Considere um conjunto finito K denominado alfabeto. Um *código corretor de erros* \mathcal{C} é um subconjunto qualquer de K^n , em que $K^n = KxKx\dots xK$, ou seja, o produto cartesiano de K por K , n vezes, para algum número natural n . Chamamos cada elemento de \mathcal{C} de palavra-código.

A distância de Hamming é definida para toda palavra de K^n , em particular, para toda palavra-código, que é exatamente o número de posições nas quais duas palavras diferem. Assim, sejam as palavras $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \in \mathcal{C}$, a distância de Hamming é definida por :

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\{i; v_i \neq w_i, 1 \leq i \leq n\}|,$$

em que $|\{\cdot\}|$ denota a cardinalidade do conjunto $\{\cdot\}$.

2.5.1 Códigos geometricamente uniformes

Definição 22. Seja \mathcal{A} um alfabeto e n um número natural. Dizemos que uma função $F : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^n$ é uma isometria de \mathcal{A}^n se ela preserva distância, ou seja,

$$d(F(x), F(y)) = d(x, y), \forall x, y \in \mathcal{A}^n.$$

Exemplo 7. Sejam $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ e $n = 3$. A aplicação $F : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$, definida por $F(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_1, x_2, x_3)$, é uma isometria. De fato, como $1 - x_1 = 1 - y_1 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ tem-se $d(F(x_1, x_2, x_3), F(y_1, y_2, y_3)) = d((1 - x_1, x_2, x_3), (1 - y_1, y_2, y_3)) = d((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$.

Definição 23. Uma constelação de sinais S é um subconjunto finito de pontos em um espaço métrico (M, d) . Essa constelação é um código geometricamente uniforme se, dados s_1 e s_2 em S , existe uma isometria u_{s_1, s_2} de M que transforma s_1 em s_2 mantendo S invariante, ou seja,

$$u_{s_1, s_2}(s_1) = s_2, \quad u_{s_1, s_2}(S) = S. \quad (9)$$

Seja $U(S)$ o grupo de simetrias de S em M . Assim, S é geometricamente uniforme se o grupo de simetrias $U(S)$ de S age transitivamente em S . Se S for finito, dizemos que S é uma constelação uniforme, se S for infinito dizemos que S é um arranjo regular.

Seja $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \dots\}$ um conjunto de pontos no plano euclidiano, com $2 \leq n \leq \infty$. Cada ponto p_i tem coordenadas cartesianas (x_i, y_i) e $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$, i e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Toma-se um ponto p qualquer do plano euclidiano com coordenadas (x, y) . A distância euclidiana de p até p_i é dada por:

$$d(p, p_i) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}. \quad (10)$$

Se $d(p, p_i) \leq d(p, p_j)$, com $j \neq i$, o ponto p é designado para p_i e a região $V(p_i)$, chamada região de Voronoi associada ao ponto p_i , é definida por:

$$V(p_i) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_i) \leq d(p, p_j), j \neq i\}.$$

A região de Voronoi de s_0 em S consiste dos pontos que estão mais próximos de s_0 que de qualquer outro ponto de S .

Para realizar o processo de decodificação, em códigos geometricamente uniformes, não é necessário saber a região de Voronoi de cada palavra-código; simplesmente basta saber a região de Voronoi associada a uma dessas palavras-código e pode-se determinar as demais regiões a partir de translações da região conhecida. Em um código geometricamente uniforme todas as regiões de Voronoi são congruentes.

2.5.1.1 Códigos sobre grafos

Podemos definir um grafo gerado por α , com $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, da seguinte forma:

Definição 24. Seja $\alpha \neq 0$, com $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. O grafo gerado por α , denotado por $G_\alpha = (V, A)$, é definido por:

- a) $V =$ o anel quociente $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ é o conjunto de vértices, ou seja, os vértices são as classes de equivalência do anel quociente;
- b) $A = \{(\eta, \tau) \in V \times V \mid D_\alpha(\eta, \tau) = 1\}$ é o conjunto de arestas.

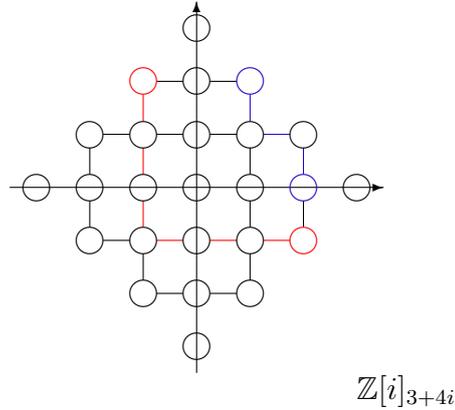
Definição 25. Seja $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. A distância sobre o anel quociente $\mathbb{Z}[i]_\alpha$ é a distância induzida pelo grafo G_α . Assim, se $\eta, \tau \in \mathbb{Z}[i]_\alpha$, a distância D_α é dada por:

- a) $D_\alpha(\eta, \tau) = \min\{|x|+|y|\}$, tal que $\tau - \eta \equiv x + yi \pmod{\alpha}$.

Exemplo 8. Seja $V = \mathbb{Z}[i]_{3+4i}$. Se $\tau = 1 + 2i$ e $\eta = 2$, temos $\tau - \eta = (1 + 2i) - 2 = -1 + 2i$, logo $D_\alpha(\eta, \tau) = |-1|+|2| = 1+2 = 3$ (em azul na Figura 5). Se $\tau = -1 + 2i$ e $\eta = 2 - i$, temos $\tau - \eta = (-1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 2i - 2 + i = -3 + 3i$, logo $D_\alpha(\eta, \tau) = |-3|+|3| = 3+3 = 6$ (em vermelho na Figura 5).

Dado um grafo G_α com conjunto de vértices V e distância D_α , um código em G_α é um subconjunto não vazio \mathcal{C} de G_α . A região de Voronoi V_η , com $\eta \in \mathcal{C}$ é o subconjunto formado pelos elementos de V para os quais η é o ponto mais próximo em \mathcal{C} , ou seja, $V_\eta = \{\tau \in V \mid D_\alpha(\eta, \tau) = D_\alpha(\eta, \mathcal{C})\}$. O número $t = \max\{D_\alpha(\eta, \mathcal{C})\}$ é chamado raio de cobertura do código. O raio de cobertura é o menor número t tal que as bolas de raio t , cujo os centros são pontos do código corretor \mathcal{C} , dadas por $B_t(\eta) = \{\tau \in V \mid D_\alpha(\eta, \tau) \leq t\}$ cobrem V .

Figura 5 – Representação das distâncias do Exemplo 8 sobre o grafo gerado por $\alpha = 3 + 4i$.



Fonte: Autor.

Definição 26. Um vértice η de um grafo G é dito t -dominar outro vértice τ se $D(\eta, \tau) \leq t$, em que D denota a distância do grafo. Então, um subconjunto S de vértices é denominado um conjunto t -dominante se todo vértice de G é t -dominado por um único vértice em S .

2.5.1.2 Códigos perfeitos

Um código \mathcal{C} é chamado *perfeito* se as bolas de raio t centradas nos pontos de \mathcal{C} particionam o conjunto de pontos V , ou seja, é um código que corrige todos os padrões com até t erros e nenhum padrão com $t + 1$ erros ou mais. Assim, ao recebermos um ponto da constelação de sinal que está dentro de uma bola de raio t , poderemos detectá-lo como um erro e corrigi-lo para o ponto central da bola, que é um ponto do código.

O Teorema 2.6 a seguir, fornece um procedimento para a obtenção destes conjuntos no caso do anel dos inteiros de Gauss.

Teorema 2.6. Dado $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]$ e t um inteiro positivo. Temos que:

1. Se $\beta = t + (t + 1)i$ divide α , então o ideal $S = [\beta] \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ forma um código perfeito que corrige todos os padrões com até t erros;
2. Se $\bar{\beta} = t - (t + 1)i$ divide α , então o ideal $S = [\bar{\beta}] \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ forma um código perfeito que corrige todos os padrões com até t erros.

Dado β , a norma $N(\beta) = 2t^2 + 2t + 1$ resulta no número de pontos da região de Voronoi, a qual chamamos de esfera de Lee de raio t , em que cada ponto do grafo é uma célula da esfera.

A demonstração do Teorema 2.6 pode ser encontrada em [17].

2.5.1.3 Códigos quase perfeitos

Um código é dito *quase-perfeito* se é capaz de corrigir todos os padrões com até t erros e alguns padrões com $t + 1$ erros.

Ao escolhermos $\beta = t \pm (t + 1)i$ divisor de α obtemos um código perfeito, e a constelação de pontos é coberta por regiões cujo raio de cobertura tem valor máximo t , ou seja, as regiões fundamentais são constituídas por esferas de Lee de raio t . Portanto, códigos perfeitos são obtidos por meio de translações de esferas de Lee de raio t , e uma esfera de Lee de raio t em \mathbb{Z}^2 possui $2t^2 + 2t + 1$ pontos, visto que obtemos o número de pontos da região de Voronoi calculando a norma $N(\beta) = 2t^2 + 2t + 1$. Mas, se tomarmos um β divisor de α diferente dos definidos anteriormente, ou seja $\beta \neq t \pm (t + 1)i$, deixamos de ter um código perfeito, mas obtemos um novo código que cobre a constelação de pontos por regiões fundamentais idênticas, e mantendo as propriedades de um código geometricamente uniforme.

Teorema 2.7. Seja $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]$ e t um inteiro positivo. Temos que:

1. Se $\beta = (t - c) + (t + (c + 1))i$ divide α , então o ideal $S = [\beta] \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até t erros e $2c^2 + 2c$ padrões com $t + 1$ erros em G_α ;
2. Se $\bar{\beta} = (t - c) - (t + (c + 1))i$ divide α , então o ideal $S = [\bar{\beta}] \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até t erros e $2c^2 + 2c$ padrões com $t + 1$ erros em G_α .

A demonstração do Teorema 2.7 pode ser encontrada em [17].

A partir dos conceitos teóricos apresentados anteriormente, é possível analisar as conexões existentes entre as equações diferenciais fuchsianas, a geometria hiperbólica e os códigos geometricamente uniformes, apresentadas nas seções a seguir.

3 CONEXÕES ENTRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUCHSIANAS, CÓDIGOS GEOMETRICAMENTE UNIFORMES E GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Neste capítulo serão apresentados três exemplos com base na seguinte metodologia: inicialmente foram considerados pontos singulares regulares de uma equação diferencial fuchsiana que também gerassem uma constelação de sinais no plano complexo. A partir da constelação de sinais, será possível analisar a existência de um código perfeito e/ou quase perfeito, além de verificar a capacidade de correção de erros. Além disso, dados três pontos singulares, sendo um deles o infinito e os outros dois opostos em relação ao eixo imaginário, foi construído um triângulo hiperbólico no semiplano superior e no disco de Poincaré e efetuou-se a análise do gênero da superfície associada à equação diferencial fuchsiana e à constelação de sinais.

3.1 SITUAÇÃO 1: SINGULARIDADES $3 + 4i$, $-3 + 4i$ E ∞

Nesta seção será apresentado o primeiro resultado obtido com as conexões entre equações fuchsianas, geometria hiperbólica e códigos geometricamente uniformes.

3.1.1 Equações diferenciais fuchsianas

Sejam dois pontos do plano complexo juntamente com o ponto no infinito, vistos como singularidades de uma equação diferencial fuchsiana, e também como geradores de uma constelação de sinais.

Considere os pontos singulares regulares $3 + 4i$, $-3 + 4i$ e ∞ . A partir dessas singularidades (desconsiderando o infinito), é possível identificar a curva algébrica associada, vista como $y^2 = (z - a)(z - b)$, em que a e b são as singularidades. Então: $(z - 3 - 4i)(z + 3 - 4i) = z^2 + 3z - 4iz - 3z - 9 + 12i - 4iz - 12i - 16 = z^2 - 8iz - 25$.

Assim, por definição de equação diferencial fuchsiana, pode-se construir a seguinte equação:

$$y'' + \left[\frac{A_1}{(z - (3 + 4i))} + \frac{A_2}{(z - (-3 + 4i))} + K_1 \right] y' + \left[\frac{B_1}{(z - (3 + 4i))^2} + \frac{B_2}{(z - (-3 + 4i))^2} + \frac{C_1}{(z - (3 + 4i))} + \frac{C_2}{(z - (-3 + 4i))} + K_2 \right] y = 0.$$

Sejam,

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ C_1 + C_2 = 0 \\ (B_1 + B_2) + ((3 + 4i)C_1 + (-3 + 4i)C_2) = 0 \\ (2(3 + 4i)B_1 + 2(-3 + 4i)B_2) + ((3 + 4i)^2C_1 + (-3 + 4i)^2C_2) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, uma das soluções possíveis é:

$$\begin{cases} A_2 = 2 \\ A_1 = B_1 = B_2 = C_1 = C_2 = 0. \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} y'' + \left(\frac{A_2(z - 3 - 4i) + k_1(z^2 - 6z + 25)}{(z - 3 - 4i)(z + 3 - 4i)} \right) y' + \left(\frac{K_2(z - 3 - 4i)^2(z + 3 - 4i)^2}{(z - 3 - 4i)^2(z + 3 - 4i)^2} \right) y = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y'' + \left(\frac{2z - 6 - 8i}{z^2 - 8iz - 25} + K_1 \right) y' + K_2 y = 0. \end{aligned}$$

Logo, a partir das singularidades $3 + 4i$, $-3 + 4i$ e ∞ e usando as condições necessárias para que a equação seja fuchsiana, temos:

$$(z^2 - 8iz - 25)y'' + [2z - 6 - 8i + K_1(z^2 - 8iz - 25)]y' + [K_2(z^2 - 8iz - 25)]y = 0,$$

em que $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$.

Por meio do símbolo P-Riemann, é possível representar um conjunto de soluções da equação, apresentado a seguir:

- para $z = -3 + 4i$

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{z \rightarrow -3+4i} [z - (-3 + 4i)] \left(\frac{2z - 6 - 8i}{z^2 - 8iz - 25} + K_1 \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -3+4i} \left[\frac{2z^2 - 6z - 8iz + 6z - 18 - 24i - 8iz + 24i - 32}{z^2 - 8iz - 25} + K_1(z + 3 - 4i) \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -3+4i} \left[\frac{2z^2 - 16iz - 50}{z^2 - 8iz - 25} + K_1(z + 3 - 4i) \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -3+4i} \left[2 \frac{z^2 - 8iz - 25}{z^2 - 8iz - 25} + K_1(z + 3 - 4i) \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -3+4i} 2 + \lim_{z \rightarrow -3+4i} K_1(z + 3 - 4i) = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$

Logo, $p_0 = 2$.

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow -3+4i} [z - (-3 + 4i)]^2 K_2,$$

como $\lim_{z \rightarrow -3+4i} (z^2 + 6z - 8iz - 7 - 24i) = 0$, $q_0 = 0$.

Substituindo na equação indicial 4, temos:

$$r(r-1)+2r+0 = 0 \Rightarrow r^2-r+2r = 0 \Rightarrow r^2+r = 0 \Rightarrow r(r+1) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = -1.$$

- para $z = 3 + 4i$

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{z \rightarrow 3+4i} [z - (3 + 4i)] \left(\frac{2z - 6 - 8i}{z^2 - 8iz - 25} + K_1 \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 3+4i} \left[\frac{2z^2 - 6z - 8iz - 6z + 18 + 24i - 8iz + 24i - 32}{z^2 - 8iz - 25} + K_1(z - 3 - 4i) \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 3+4i} \left[\frac{2z^2 - 12z - 16iz - 14 + 48i}{z^2 - 8iz - 25} + K_1(z - 3 - 4i) \right], \end{aligned}$$

como $\lim_{z \rightarrow 3+4i} 2z^2 - 12z - 16iz - 14 + 48i = 0$ e $\lim_{z \rightarrow 3+4i} z^2 - 8iz - 25 = 0$, aplicamos a regra de L'Hopital para calcular o limite.

Seja $f(z) = 2z^2 - 12z - 16iz - 14 + 48i$ e $g(z) = z^2 - 8iz - 25 \rightarrow f'(z) = 4z - 12 - 16i$ e $g'(z) = 2z - 8i$. Assim, $\lim_{z \rightarrow 3+4i} \frac{4z-12-16i}{2z-8i} = 0$. Logo, tem-se $p_0 = 0$ pois, $\lim_{z \rightarrow 3+4i} K_1(z - 3 - 4i) = 0$.

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 3+4i} [z - (3 + 4i)]^2 K_2,$$

como $\lim_{z \rightarrow 3+4i} (z^2 - 6z - 8iz - 7 - 24i) = 0$, $q_0 = 0$.

Substituindo na equação indicial 4, temos:

$$r(r-1) + 0r + 0 = 0 \Rightarrow r(r-1) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1.$$

- Para $z = \infty$ pode-se analisar a função que acompanha y . Como temos " K_2y ", $r = 1$ ou $r = K_2$.

Desta forma, o símbolo P-Riemann dessa equação diferencial é:

$$y = P \left\{ \begin{array}{ccc} -3 + 4i & 3 + 4i & \infty \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} z \\ z \\ z \end{array} \right\}.$$

3.1.2 Códigos geometricamente uniformes

Considere agora os pontos $3+4i$ e $-3+4i$, vistos anteriormente como singularidades, sendo os geradores de uma constelação de sinais.

Tomando $\alpha = 3 + 4i$, os elementos do anel quociente são:

$$\mathbb{Z}[i]_{3+4i} = \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, i, 2i, 3i, -i, -2i, -3i, 1+i, 1+2i, 1-i, 1-2i, -1-i, -1-2i, -1+i, -1+2i, 2+i, -2+i, 2-i, -2-i\},$$

contendo $N(\alpha) = 25$ elementos.

Se $\alpha = -3 + 4i$, obtemos os mesmos elementos do anel quociente, ou seja, $\mathbb{Z}[i]_{3+4i} = \mathbb{Z}[i]_{-3+4i}$.

Dado $\alpha = 3 + 4i$, pode-se reescrever α como $3 + 4i = (1 - 2i)(-1 + 2i)$, e considerando $\bar{\beta} = 1 - 2i$ tem-se o gerador do conjunto perfeito t-dominante, assim o ideal $[\bar{\beta}] = [1 - 2i]$ é um conjunto perfeito 1-dominante em G_{3+4i} .

Vamos determinar os elementos do conjunto gerado por $\bar{\beta}$: (observe que $(1 - 2i) + (1 - 2i) = (1 - 2i) \cdot 2$, será utilizada essa notação para melhor visualização.)

- $(1 - 2i) \cdot 0 = \mathbf{0}$,
- $(1 - 2i) \cdot 1 = \mathbf{1-2i}$,
- $(1 - 2i) \cdot 2 = 2 - 4i \equiv \mathbf{-2-i} \pmod{3 + 4i}$, pois $3 + 4i | [(-2 - i) - (2 - 4i)]$, $-4 + 3i = (3 + 4i)(i)$,
- $(1 - 2i) \cdot 3 = 3 - 6i \equiv \mathbf{2+i} \pmod{3 + 4i}$, pois $3 + 4i | [(2 + i) - (3 - 6i)]$, $-1 + 7i = (3 + 4i)(1 + i)$,
- $(1 - 2i) \cdot 4 = 4 - 8i \equiv \mathbf{-1+2i} \pmod{3 + 4i}$, pois $3 + 4i | [(-1 + 2i) - (4 - 8i)]$, $-5 + 10i = (3 + 4i)(1 + 2i)$,
- $(1 - 2i) \cdot 5 = 5 - 10i \equiv \mathbf{0} \pmod{3 + 4i}$, pois $3 + 4i | [0 - (5 - 10i)]$, $-5 + 10i = (3 + 4i)(1 + 2i)$.

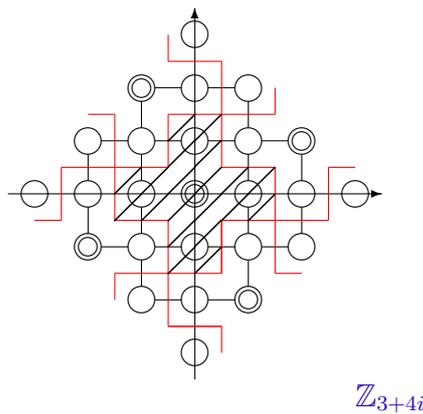
O próximo passo é determinar os pontos que pertencem às regiões de Voronoi de cada palavra código. Como existe uma esfera de Lee com raio de cobertura 1 em todas as regiões de Voronoi, sabe-se que todos os pontos com distância 1 de uma palavra código pertencem a sua região de decisão.

- Palavra-código $\mathbf{0}$
 - Distância 0: $\{0\}$;
 - Distância 1: $\{1, -1, i, -i\}$;
- Palavra-código $\mathbf{1-2i}$
 - Distância 0: $\{1 - 2i\}$;

- Distância 1: $\{-2i, 1 - i, 1 - 3i(\equiv -3), 2 - 2i(\equiv -2 + i)\}$;
- Palavra-código **2+i**
 - Distância 0: $\{2 + i\}$;
 - Distância 1: $\{2, 1 + i, 2 + 2i(\equiv -1 - 2i), 3 + i(\equiv -3i)\}$;
- Palavra-código **-1+2i**
 - Distância 0: $\{-1 + 2i\}$;
 - Distância 1: $\{2i, -1 + i, -1 + 3i(\equiv 3), -2 + 2i(\equiv 2 - i)\}$;
- Palavra-código **-2-i**
 - Distância 0: $\{-2 - i\}$;
 - Distância 1: $\{-2, -1 - i, -2 - 2i(\equiv 1 + 2i), -3 - i(\equiv 3i)\}$;

Portanto, o código perfeito que corrige todos os padrões com 1 erro e nenhum padrão com 2 ou mais erros, possui $N(\alpha)/N(\beta) = \frac{25}{5} = 5$ elementos e é dado pelo conjunto gerado por $\bar{\beta}$. $[\bar{\beta}] = \{0, 1 - 2i, 2 + i, -1 + 2i, -2 - i\}$ é identificado no grafo a seguir pelos pontos que estão duplamente circulos, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 5 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 25 elementos de $\mathbb{Z}[i]_{3+4i}$ (FIGURA 6).

Figura 6 – Código Perfeito 1-dominante em G_{3+4i}



Fonte: Autor.

Se $\alpha = -3 + 4i$, pode-se reescrever α como $-3 + 4i = (1 + 2i)(1 + 2i)$. Assim, o ideal $[\beta] = [1 + 2i]$ é um conjunto perfeito 1-dominante em G_{-3+4i} .

Vamos determinar os elementos do conjunto gerado por β :

- $(1 + 2i) \cdot 0 = \mathbf{0}$,
- $(1 + 2i) = \mathbf{1+2i}$,
- $(1 + 2i) \cdot 2 = 2 + 4i \equiv \mathbf{-2+i} \pmod{-3+4i}$, pois $-3+4i|((-2+i) - (2+4i))$, $-4-3i = (-3+4i)(i)$,
- $(1 + 2i) \cdot 3 = 3 + 6i \equiv \mathbf{2-i} \pmod{-3+4i}$, pois $-3+4i|((2-i) - (3+6i))$, $-1-7i = (-3+4i)(-1+i)$,
- $(1 + 2i) \cdot 4 = 4 + 8i \equiv \mathbf{-1-2i} \pmod{-3+4i}$, pois $-3+4i|((-1-2i) - (4+8i))$, $-5-10i = (-3+4i)(-1+2i)$,
- $(1 + 2i) \cdot 5 = 5 + 10i \equiv \mathbf{0} \pmod{-3+4i}$, pois $-3+4i|[0 - (5+10i)]$, $-5-10i = (-3+4i)(-1+2i)$.

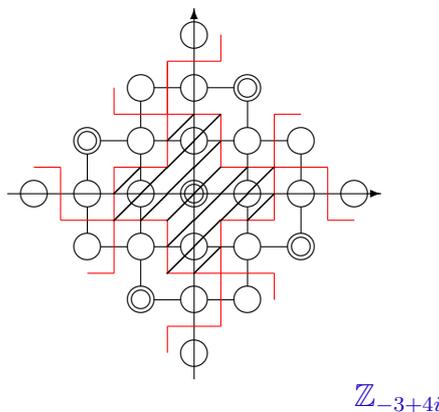
Vamos determinar os pontos que pertencem às regiões de Voronoi de cada palavra código. Como existe uma esfera de Lee com raio de cobertura 1 em todas as regiões de Voronoi, sabemos que todos os pontos com distância 1 de uma palavra código pertencem a sua região de decisão.

- Palavra-código $\mathbf{0}$
 - Distância 0: $\{0\}$;
 - Distância 1: $\{1, -1, i, -i\}$;
- Palavra-código $\mathbf{1+2i}$
 - Distância 0: $\{1 + 2i\}$;
 - Distância 1: $\{2i, 1 + i, 1 + 3i(\equiv -3), 2 + 2i(\equiv -2 - i)\}$;
- Palavra-código $\mathbf{2-i}$
 - Distância 0: $\{2 - i\}$;
 - Distância 1: $\{2, 1 - i, 2 - 2i(\equiv -1 + 2i), 3 - i(\equiv 3i)\}$;
- Palavra-código $\mathbf{-1-2i}$
 - Distância 0: $\{-1 - 2i\}$;
 - Distância 1: $\{-2i, -1 - i, -1 - 3i(\equiv 3), -2 - 2i(\equiv 2 + i)\}$;
- Palavra-código $\mathbf{-2+i}$
 - Distância 0: $\{-2 + i\}$;

– Distância 1: $\{-2, -1 + i, -2 + 2i(\equiv 1 - 2i), -3 + i(\equiv -3i)\}$;

O código perfeito que corrige todos os padrões com 1 erro e nenhum padrão com 2 ou mais erros, possui $N(\alpha)/N(\beta) = \frac{25}{5} = 5$ elementos. Logo, $[\beta] = \{0, 1 + 2i, 2 - i, -1 - 2i, -2 + i\}$ são elementos do código perfeito, identificados no grafo a seguir pelos pontos que estão duplamente circulados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 5 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 25 elementos de $\mathbb{Z}[i]_{-3+4i}$ (FIGURA 7).

Figura 7 – Código Perfeito 1-dominante em G_{-3+4i} .



Fonte: Autor.

3.1.3 Geometria hiperbólica

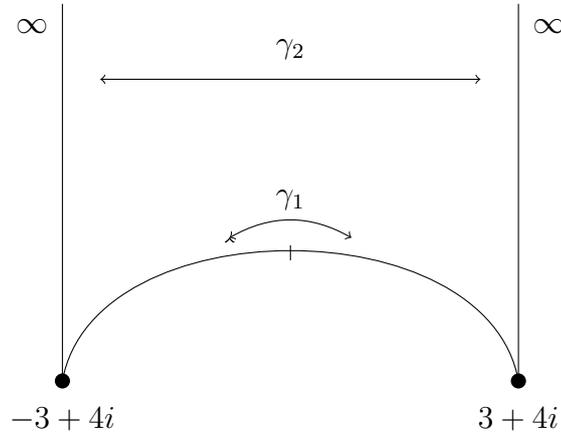
Considere agora $3+4i$, $-3+4i$ e ∞ como vértices de um triângulo hiperbólico, ou seja, as singularidades da equação fuchsiana vistas como vértices de um triângulo hiperbólico no semiplano superior e as transformações de Mobius (transformações de emparelhamentos), que podem ser aplicadas aos lados desse polígono. A partir das transformações de Mobius é possível identificar a superfície associada ao triângulo hiperbólico, conforme apresentado na Figura 8.

A transformação elíptica γ_1 leva o ponto $3 + 4i$ no ponto $-3 + 4i$, o ponto $-3 + 4i$ no ponto $3 + 4i$ e fixa o ponto médio da geodésica, conectando esses dois vértices, e a transformação parabólica γ_2 que leva ∞ em ∞ e $3 + 4i$ em $-3 + 4i$ e vice-versa.

De fato, dado $\gamma_1 = -z + 8i$, $\gamma_1(3 + 4i) = -3 + 4i$ e $\gamma_1(-3 + 4i) = 3 + 4i$, tem-se:

$$\gamma_1(z) = \frac{(-1)z + 8i}{0z + 1} \longrightarrow [\gamma_1] = \begin{bmatrix} -1 & 8i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Figura 8 – Singularidades $\{-3 + 4i, 3 + 4i \text{ e } \infty\}$.



Fonte: Autor.

Por definição, $Tr(\gamma_1) = (-1) + 1 = 0$. Logo, a transformação γ_1 é elíptica.

E, dado $\gamma_2 = \begin{cases} z + 6 & a < 0 \\ z - 6 & a > 0 \end{cases}$ com $a \in Re$, em que Re representa a parte real de $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $\gamma_2(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \gamma_2 = \infty$, tem-se:

$$\gamma_2(z) = \frac{1z \pm 6}{0z + 1} \longrightarrow [\gamma_2] = \begin{bmatrix} 1 & \pm 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(\gamma_2) = 1 + 1 = 2.$$

Logo, a transformação γ_2 é parabólica.

Além da representação das singularidades no modelo do semiplano superior, pode-se representar as mesmas no modelo do disco de Poincaré, por meio da Transformação de Cayley $\bar{z} = \frac{z-i}{z+i}$, uma bijeção do semiplano superior no disco de Poincaré, Figura 9.

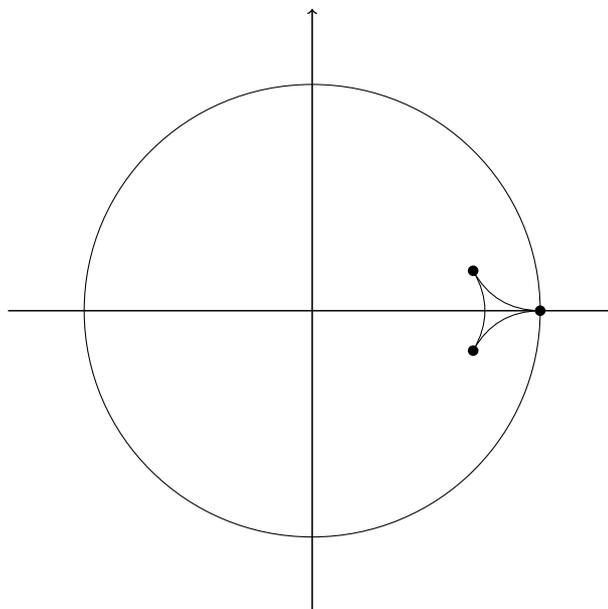
- para $z = 3 + 4i \Rightarrow \bar{z} = \frac{3+4i-i}{3+4i+i} = \frac{3+3i}{3+5i} = \frac{1}{17}(12 - 3i)$;
- para $z = -3 + 4i \Rightarrow \bar{z} = \frac{-3+4i-i}{-3+4i+i} = \frac{-3+3i}{-3+5i} = \frac{1}{17}(12 + 3i)$;
- para $z = \infty \Rightarrow \bar{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-i}{z+i} = 1$.

Aplicando a transformação inversa $z = -i \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}$, tem-se:

- para $\bar{z} = \frac{1}{17}(12 - 3i) \Rightarrow z = -i \frac{\frac{12-3i}{17}+1}{\frac{12-3i}{17}-1} = 3 + 4i$;

- para $\bar{z} = \frac{1}{17}(12 + 3i) \Rightarrow z = -i \frac{\frac{12+3i}{17} + 1}{\frac{12+3i}{17} - 1} = -3 + 4i$;
- para $\bar{z} = 1 \Rightarrow z = \infty$.

Figura 9 – Singularidades no disco de Poincaré.



Fonte: Autor.

Além disso, é possível identificar a superfície associada aos emparelhamentos por meio da característica de Euler, dada por:

$$X = 2 - 2g = V - E + F,$$

em que X é a característica de Euler, g é o gênero da superfície, V é o número de vértices, E é o número de arestas e F é o número de faces.

Da Figura 9, tem-se:

$$X(A) = V - E + F = 3 - \frac{4}{2} + 1 = 2,$$

$$X(A) = 2 - 2g = 2 \Rightarrow g = 0.$$

Portanto, a superfície associada é a esfera.

3.2 SITUAÇÃO 2: SINGULARIDADES $8 + 9i$, $-8 + 9i$ E ∞

Nesta seção será apresentado o segundo exemplo, com as conexões entre equações fuchsianas, geometria hiperbólica e códigos geometricamente uniformes para as singularidades $8 + 9i$, $-8 + 9i$ e ∞ .

3.2.1 Equações diferenciais fuchsianas

Considere os pontos singulares regulares $8 + 9i$, $-8 + 9i$ e ∞ . A partir dessas singularidades pode-se identificar a curva algébrica associada, vista como $y^2 = (z - a)(z - b) = (z - 8 - 9i)(z + 8 - 9i) = z^2 + 8z - 9iz - 8z - 64 + 72i - 9iz - 72i - 81 = z^2 - 18iz - 145$.

Assim, pode-se construir a seguinte equação diferencial fuchsiana:

$$y'' + \left[\frac{A_1}{(z - (8 + 9i))} + \frac{A_2}{(z - (-8 + 9i))} + K_1 \right] y' + \left[\frac{B_1}{(z - (8 + 9i))^2} + \frac{B_2}{(z - (-8 + 9i))^2} + \frac{C_1}{(z - (8 + 9i))} + \frac{C_2}{(z - (-8 + 9i))} + K_2 \right] y = 0.$$

Sejam,

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ C_1 + C_2 = 0 \\ (B_1 + B_2) + ((8 + 9i)C_1 + (-8 + 9i)C_2) = 0 \\ (2(8 + 9i)B_1 + 2(-8 + 9i)B_2) + ((8 + 9i)^2C_1 + (-8 + 9i)^2C_2) = 0 \end{cases}$$

Uma das soluções possíveis do sistema é:

$$\begin{cases} A_2 = 2 \\ A_1 = B_1 = B_2 = C_1 = C_2 = 0. \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} y'' + \left(\frac{A_2(z - 8 - 9i) + k_1(z^2 - 18iz + 145)}{z^2 - 18iz - 145} \right) y' + K_2 y &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y'' + \left(\frac{2z - 16 - 18i}{z^2 - 18iz - 145} + K_1 \right) y' + K_2 y &= 0 \Rightarrow \\ (z^2 - 18iz - 145)y'' + [2z - 18i - 16 + K_1(z^2 - 18iz - 145)]y' + [K_2(z^2 - 18iz - 145)]y &= 0. \end{aligned}$$

Assim, a partir das singularidades $8 + 9i$, $-8 + 9i$ e ∞ e usando as condições necessárias para que a equação seja fuchsiana, tem-se:

$$(z^2 - 18iz - 145)y'' + [2z - 18i - 16 + K_1(z^2 - 18iz - 145)]y' + [K_2(z^2 - 18iz - 145)]y = 0,$$

onde $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$.

Um conjunto de soluções dessa equação pode ser representado por meio do símbolo P-Riemann.

- para $z_0 = 8 + 9i$

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow 8+9i} [z - (8 + 9i)] \left[\frac{2z - 16 - 18i}{z^2 - 18iz - 145} + K_1 \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow 8+9i} \left[\frac{2z^2 - 32z - 36iz - 34 + 288i + K_1(z^3 - 307z - 8z^2 + 1160 - 27iz^2 + 144iz + 1305i)}{z^2 - 18iz - 145} \right].$$

Como $\lim_{z \rightarrow 8+9i} [2z^2 - 32z - 36iz - 34 + 288i] = 0$, $\lim_{z \rightarrow 8+9i} [z^3 - 307z - 8z^2 + 1160 - 27iz^2 + 144iz + 1305i] = 0$ e $\lim_{z \rightarrow 8+9i} (z^2 - 18iz - 145) = 0$, aplica-se a regra de L'Hopital para calcular o limite.

Seja $f(x) = 2z^2 - 32z - 36iz - 34 + 288i + K_1(z^3 - 307z - 8z^2 + 1160 - 27iz^2 + 144iz + 1305i)$ e $g(x) = z^2 - 18iz - 145 \Rightarrow f(x)' = 4z - 32 - 36i + K_1(3z^2 - 16z - 37 - 54iz + 144i)$ e $g(x)' = 2z - 18i$. Assim, $\lim_{z \rightarrow 8+9i} \frac{4z - 32 - 36i + K_1(3z^2 - 16z - 37 - 54iz + 144i)}{2z - 18i} = \frac{0}{16} = 0$. Logo, $p_0 = 0$.

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 8+9i} [z - (8 + 9i)]^2 K_2,$$

como $\lim_{z \rightarrow 8+9i} [z^2 - 17 - 16z - 18iz + 144i] = 0$, $q_0 = 0$.

Substituindo na equação indicial 4, tem-se:

$$r(r - 1) + 0r + 0 = 0 \Rightarrow r(r - 1) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1.$$

- para $z_0 = -8 + 9i$

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow -8+9i} [z - (-8 + 9i)] \left[\frac{2z - 16 - 18i}{c} + K_1 \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow -8+9i} \left[\frac{2z^2 - 36iz - 290 + K_1(z^3 - 307 + 8z^2 - 1160 - 27iz^2 - 144iz + 1305i)}{z^2 - 18iz - 145} \right] =$$

$$\frac{17 + 144i + K_1(-2763 + 2763i)}{0} = 0,$$

tem-se $p_0 = 0$.

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow -8+9i} [z - (-8 + 9i)]^2 K_2 = 0 \cdot K_2 = 0,$$

logo $q_0 = 0$.

Substituindo na equação indicial 4:

$$r(r - 1) + 0r + 0 = 0 \Rightarrow r(r - 1) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1.$$

- para $z = \infty$ pode-se analisar a função que acompanha y . Como temos " K_2y ", $r = 1$ ou $r = K_2$.

Substituindo na equação indicial 4:

$$r(r - 1) + [\infty(1 + K_1)]r + (\infty \cdot K_2) = 0.$$

Desta forma, o símbolo P-Riemann da equação diferencial é:

$$y = P \left\{ \begin{array}{ccc} 8 + 9i & -8 + 9i & \infty \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & K_2 \end{array} \right\} z.$$

3.2.2 Códigos geometricamente uniformes

Considere os pontos $8 + 9i$ e $-8 + 9i$, anteriormente vistos como singularidades, agora vistos como os geradores de uma constelação de sinais.

Tomando $\alpha = 8 + 9i$, os elementos do anel quociente são:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[i]_{8+9i} = \{ & 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, i, 2i, 3i, 4i, 5i, 6i, 7i, 8i, - \\ & i, -2i, -3i, -4i, -5i, -6i, -7i, -8i, 1 + i, 1 + 2i, 1 + 3i, 1 + 4i, 1 + 5i, 1 + 6i, 1 \\ & + 7i, 1 - i, 1 - 2i, 1 - 3i, 1 - 4i, 1 - 5i, 1 - 6i, 1 - 7i, -1 + i, -1 + 2i, -1 + \\ & 3i, -1 + 4i, -1 + 5i, -1 + 6i, -1 + 7i, -1 - i, -1 - 2i, -1 - 3i, -1 - 4i, -1 - \\ & 5i, -1 - 6i, -1 - 7i, 2 + i, 2 + 2i, 2 + 3i, 2 + 4i, 2 + 5i, 2 + 6i, 2 - i, 2 - 2i, 2 - \\ & 3i, 2 - 4i, 2 - 5i, 2 - 6i, -2 + i, -2 + 2i, -2 + 3i, -2 + 4i, -2 + 5i, -2 + 6i, - \\ & 2 - i, -2 - 2i, -2 - 3i, -2 - 4i, -2 - 5i, -2 - 6i, 3 + i, 3 + 2i, 3 + 3i, 3 + 4i, \\ & 3 + 5i, 3 - i, 3 - 2i, 3 - 3i, 3 - 4i, 3 - 5i, -3 + i, -3 + 2i, -3 + 3i, -3 + 4i, - \\ & 3 + 5i, -3 - i, -3 - 2i, -3 - 3i, -3 - 4i, -3 - 5i, 4 + i, 4 + 2i, 4 + 3i, 4 + 4i, \\ & 4 - i, 4 - 2i, 4 - 3i, 4 - 4i, -4 + i, -4 + 2i, -4 + 3i, -4 + 4i, -4 - i, -4 - 2i, \\ & -4 - 3i, -4 - 4i, 5 + i, 5 + 2i, 5 + 3i, 5 - i, 5 - 2i, 5 - 3i, -5 + i, -5 + 2i, - \\ & 5 + 3i, -5 - i, -5 - 2i, -5 - 3i, 6 + i, 6 + 2i, 6 - i, 6 - 2i, -6 + i, -6 + 2i, - \\ & 6 - i, -6 - 2i, 7 + i, 7 - i, -7 + i, -7 - i\}, \end{aligned}$$

contendo $N(\alpha) = 145$ elementos.

Se $\alpha = -8 + 9i$, os mesmos elementos do anel quociente são obtidos, ou seja, $\mathbb{Z}[i]_{8+9i} = \mathbb{Z}[i]_{-8+9i}$. Como o conjunto de vértices é dado por $V = \mathbb{Z}[i]_{\alpha}$, o grafo gerado por $8 + 9i$ e o grafo gerado por $-8 + 9i$ possuem os mesmos vértices.

Para obter β , de forma que satisfaça o Teorema 2.7 considera-se a norma de α , $N(\alpha) = 145$, e seus divisores, 5 e 29. Assim os divisores de α em $\mathbb{Z}[i]_{8+9i}$ possuem norma 5 e/ou 29. Os únicos elementos em $\mathbb{Z}[i]$ com norma 5 são: $1 + 2i, 1 - 2i, -1 + 2i, -1 - 2i$, e com norma 29 são: $2 + 5i, 2 - 5i, -2 + 5i, -2 - 5i$. Observe que $\beta = \{1 + 2i, 1 - 2i, -1 + 2i, -1 - 2i\}$ não gera um código quase perfeito, nem $\beta = \{2 + 5i, -2 - 5i\}$, mas $\beta = \{2 - 5i, -2 + 5i\}$ geram, segundo o Teorema 2.7.

Agora, se $\beta = -2 + 5i$, $N(\beta) = 29$, e a maior esfera de Lee contida em 29 pontos possui 25 pontos com raio de cobertura 3. Nesse caso, como $t = 1$, teria uma esfera de Lee com 5 pontos com raio de cobertura 1, e 24 padrões com 2 erros, o que é um absurdo, visto que não há 24 pontos com distância 2 que equidistem um ponto nessa constelação. Sendo assim, $\bar{\beta} = 2 - 5i$ é o único divisor de α que gera um código quase perfeito.

Dado $\alpha = 8 + 9i$, é possível reescrever α como $8 + 9i = (2 - 5i)(-1 + 2i)$. Logo, pelo Teorema 2.7, o ideal gerado por $\beta = 2 - 5i$, forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até 3 erros e $2c^2 + 2c = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$ padrões com $t + 1 = 4$ erros em G_{8+9i} . A norma de $\bar{\beta}$ é 29 e a maior esfera de Lee contida em 29 pontos possui 25 pontos com raio de cobertura $t = 3$, os 4 padrões com 4 erros completam a região de Voronoi com 29 pontos.

Dado que o ideal gerado por $\bar{\beta}$, $S = \langle \bar{\beta} \rangle$, possui $\frac{N(\alpha)}{N(\beta)} = \frac{145}{29} = 5$ elementos, o código quase perfeito possui 5 elementos. Vamos determinar os elementos do conjunto gerado por $\bar{\beta}$: (observe que $(2 - 5i) + (2 - 5i) = (2 - 5i) \cdot 2$, será utilizada essa notação para melhor visualização.)

- $(2 - 5i) \cdot 0 = \mathbf{0}$,
- $(2 - 5i) \cdot 1 = \mathbf{2-5i}$,
- $(2 - 5i) \cdot 2 = 4 - 10i \equiv \mathbf{-5-2i} \pmod{8+9i}$, pois $8 + 9i|[(2 - 5i) - (4 - 10i)]$, $-9 + 8i = (8 + 9i)(i)$,
- $(2 - 5i) \cdot 3 = 6 - 15i \equiv \mathbf{5+2i} \pmod{8+9i}$, pois $8 + 9i|[(2 - 5i) - (6 - 15i)]$, $-1 + 17i = (8 + 9i)(1 + i)$,
- $(2 - 5i) \cdot 4 = 8 - 20i \equiv \mathbf{-2+5i} \pmod{8+9i}$, pois $8 + 9i|[(2 - 5i) - (8 - 20i)]$, $-10 + 25i = (8 + 9i)(1 + 2i)$.

Vamos determinar os pontos que pertencem as regiões de Voronoi de cada palavra código. Como temos uma esfera de Lee com raio de cobertura 3 em todas as regiões de Voronoi, sabemos que todos os pontos com distância menor ou igual a 3 de uma palavra código pertencem a sua região de decisão. Mas para determinar os 4 padrões com 4 erros, é necessário analisar se esse ponto não tem distância menor ou igual a 3 de qualquer outra palavra código, ou seja, para que esse ponto pertença a região de Voronoi de uma palavra código ele deve ter distância 4 dessa palavra e distância estritamente maior que 4 de qualquer outra palavra código.

• Palavra-código $\mathbf{0}$

- Distância 0: $\mathbf{0}$;
- Distância 1: $\{1, -1, i, -i\}$;
- Distância 2: $\{2, -2, 2i, -2i, 1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i\}$;
- Distância 3: $\{3, -3, 3i, -3i, 1 + 2i, 1 - 2i, -1 + 2i, -1 - 2i, 2 + i, 2 - i, -2 + i, -2 - i\}$;
- Distância 4: $\{1 + 3i, -1 - 3i, 3 - i, -3 + i\}$;

• Palavra-código **2-5i**

- Distância 0: $2 - 5i$;
- Distância 1: $\{1 - 5i, 2 - 4i, 2 - 6i, 3 - 5i\}$;
- Distância 2: $\{-5i, 1 - 4i, 1 - 6i, 2 - 3i, 2 - 7i(\equiv -7 + i), 3 - 4i, 3 - 6i(\equiv -6 + 2i), 4 - 5i(\equiv -5 + 3i)\}$;
- Distância 3: $\{-4i, -6i, 1 - 3i, 1 - 7i, -1 - 5i, 2 - 2i, 2 - 8i(\equiv -7), 3 - 3i, 3 - 7i(\equiv -6 + i), 4 - 4i, 4 - 6i(\equiv -5 + 2i), 5 - 5i(\equiv -4 + 3i)\}$
- Distância 4: $\{1 - 8i(\equiv -8), -1 - 4i, 3 - 2i, 5 - 6i(\equiv -4 + 2i)\}$;

• Palavra-código **-5-2i**

- Distância 0: $-5 - 2i$;
- Distância 1: $\{-4 - 2i, -5 - i, -5 - 3i, -6 - 2i\}$;
- Distância 2: $\{-5, -3 - 2i, -4 - i, -4 - 3i, -5 - 4i(\equiv 3 + 5i), -6 - i, -6 - 3i(\equiv 2 + 6i), -7 - 2i(\equiv 1 + 7i)\}$;
- Distância 3: $\{-4, -6, -2 - 2i, -3 - i, -3 - 3i, -4 - 4i, -5 + i, -5 - 5i(\equiv +4i), -6 - 4i(\equiv 2 + 5i), -7 - i, -7 - 3i(\equiv 1 + 6i), -8 - 2i(\equiv 7i)\}$;
- Distância 4: $\{-2 - 3i, -4 + i, -6 - 5i(\equiv 2 + 4i), -8 - i(\equiv 8i)\}$;

• Palavra-código **-2+5i**

- Distância 0: $-2 + 5i$;
- Distância 1: $\{-1 + 5i, -2 + 4i, -2 + 6i, -3 + 5i\}$;
- Distância 2: $\{5i, -1 + 6i, -2 + 3i, -1 + 4i, -2 + 7i(\equiv 7 - i), -3 + 4i, -3 + 6i(\equiv 6 - 2i), -4 + 5i(\equiv 5 - 3i)\}$;
- Distância 3: $\{4i, 6i, 1 + 5i, -1 + 3i, -1 + 7i, -2 + 2i, -2 + 8i(\equiv 7), -3 + 3i, -3 + 7i(\equiv 6 - i), -4 + 4i, -4 + 6i(\equiv 5 - 2i), -5 + 5i(\equiv 4 - 3i)\}$;
- Distância 4: $\{1 + 4i, -1 + 8i(\equiv 8), -3 + 2i, -5 + 6i(\equiv 4 - 2i)\}$;

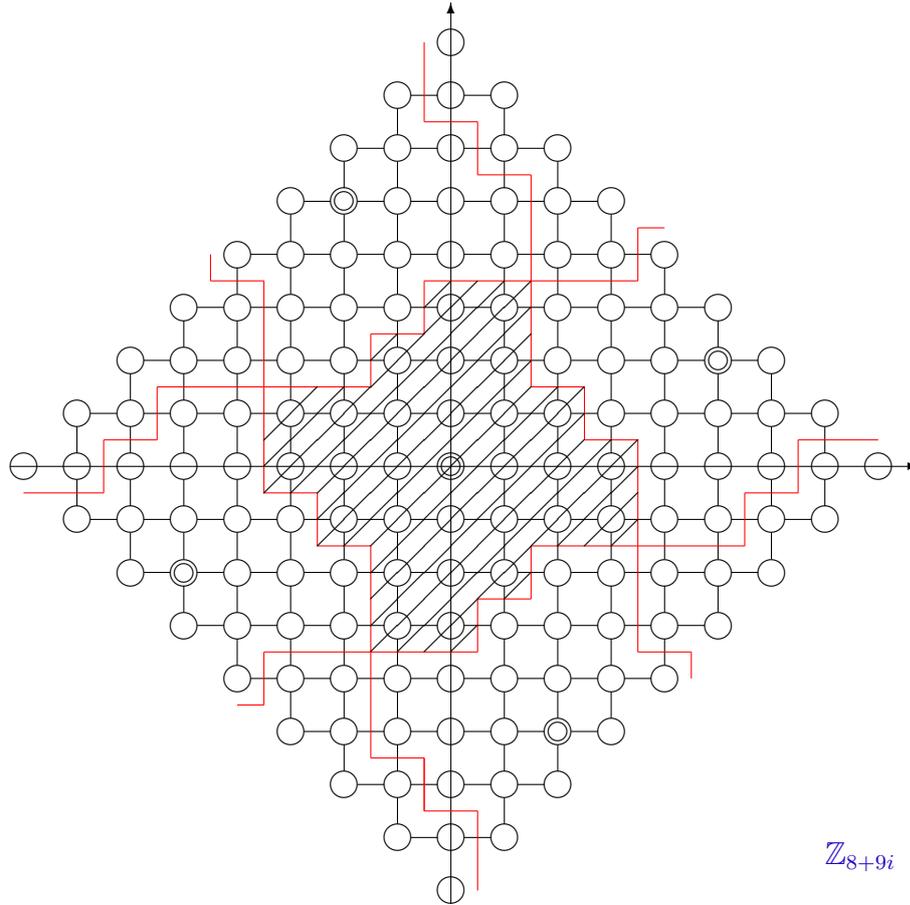
• Palavra-código **5+2i**

- Distância 0: $5 + 2i$;
- Distância 1: $\{4 + 2i, 5 + i, 5 + 3i, 6 + 2i\}$;
- Distância 2: $\{5, 3 + 2i, 4 + i, 4 + 3i, 5 + 4i(\equiv -3 - 5i), 6 + i, 6 + 3i(\equiv -2 - 6i), 7 + 2i(\equiv -1 - 7i)\}$;
- Distância 3: $\{4, 6, 2 + 2i, 3 + i, 3 + 3i, 4 + 4i, 5 - i, 5 + 5i(\equiv -3 - 4i), 6 + 4i(\equiv -2 - 5i), 7 + i, 7 + 3i(\equiv -1 - 6i), 8 + 2i(\equiv -7i)\}$;

– Distância 4: $\{2 + 3i, 4 - i, 6 + 5i (\equiv -2 - 4i), 8 + i (\equiv -8i)\}$;

Assim, $S = \langle \bar{\beta} \rangle = \{0, 2 - 5i, 5 + 2i, -2 + 5i, -5 - 2i\}$, é identificado no grafo a seguir pelos pontos que estão duplamente circutados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 29 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 145 elementos de $\mathbb{Z}[i]_{8+9i}$ (FIGURA 10).

Figura 10 – Código quase perfeito sobre \mathbb{Z}_{8+9i} .



Fonte: [17].

Dado $\alpha = -8 + 9i$, é possível reescrever α como $-8 + 9i = (2 + 5i)(1 + 2i)$. Logo, pelo Teorema 2.7, o ideal gerado por $\beta = 2 + 5i$, forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até 3 erros e $2c^2 + 2c = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$ padrões com $t + 1 = 4$ erros em G_{-8+9i} . A norma de β é 29 e a maior esfera de Lee contida em 29 pontos possui 25 pontos com raio de cobertura $t = 3$, os 4 padrões com 4 erros completam nossa região de Voronoi com 29 pontos.

Dado que o ideal gerado por β , $S = \langle \beta \rangle$, possui $\frac{N(\alpha)}{N(\beta)} = \frac{145}{29} = 5$ elementos, o código quase perfeito possui 5 elementos. Vamos determinar os elementos do conjunto gerado por β :

- $(2 + 5i) \cdot 0 = \mathbf{0}$,
- $(2 + 5i) \cdot 1 = \mathbf{2+5i}$,
- $(2+5i) \cdot 2 = 4+10i \equiv \mathbf{-5+2i} \pmod{-8+9i}$, pois $-8+9i|((-5+2i)-(4+10i))$, $-9-8i = (-8+9i)(i)$,
- $(2+5i) \cdot 3 = 6+15i \equiv \mathbf{5-2i} \pmod{-8+9i}$, pois $-8+9i|((5-2i)-(6+15i))$, $-1-17i = (-8+9i)(-1+i)$,
- $(2+5i) \cdot 4 = 8+20i \equiv \mathbf{-2-5i} \pmod{-8+9i}$, pois $-8+9i|((-2-5i)-(8+20i))$, $-10-25i = (-8+9i)(-1+2i)$.

Vamos determinar os pontos que pertencem as regiões de Voronoi de cada palavra código:

- Palavra-código **0**

- Distância 0: 0;
- Distância 1: $\{1, -1, i, -i\}$;
- Distância 2: $\{2, -2, 2i, -2i, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$;
- Distância 3: $\{3, -3, 3i, -3i, 1+2i, 1-2i, -1+2i, -1-2i, 2+i, 2-i, -2+i, -2-i\}$;
- Distância 4: $\{1-3i, -1+3i, 3+i, -3-i\}$;

- Palavra-código **2+5i**

- Distância 0: $2 + 5i$;
- Distância 1: $\{1 + 5i, 2 - 4i, 2 + 6i, 3 + 5i\}$;
- Distância 2: $\{5i, 1 + 4i, 1 + 6i, 2 + 3i, 2 + 7i(\equiv -7 - i), 3 + 4i, 3 + 6i(\equiv -6 - 2i), 4 + 5i(\equiv -5 - 3i)\}$;
- Distância 3: $\{4i, 6i, 1 + 3i, 1 + 7i, -1 + 5i, 2 + 2i, 2 + 8i(\equiv -7), 3 + 3i, 3 + 7i(\equiv -6 - i), 4 + 4i, 4 + 6i(\equiv -5 - 2i), 5 + 5i(\equiv -4 - 3i)\}$;
- Distância 4: $\{1 + 8i(\equiv -8), -1 + 4i, 3 + 2i, 5 + 6i(\equiv -4 - 2i)\}$;

- Palavra-código **-5+2i**

- Distância 0: $-5 + 2i$;
- Distância 1: $\{-4 + 2i, -5 + i, -5 + 3i, -6 + 2i\}$;
- Distância 2: $\{-5, -3 + 2i, -4 + i, -4 + 3i, -5 + 4i(\equiv 3 - 5i), -6 + i, -6 + 3i(\equiv 2 - 6i), -7 + 2i(\equiv 1 - 7i)\}$;

- Distância 3: $\{-4, -6, -2 + 2i, -3 + i, -3 + 3i, -4 + 4i, -5 - i, -5 + 5i(\equiv 3 - 4i), -6 + 4i(\equiv 2 - 5i), -7 + i, -7 + 3i(\equiv 1 - 6i), -8 + 2i(\equiv -7i)\}$;
- Distância 4: $\{-2 + 3i, -4 - i, -6 + 5i(\equiv 2 - 4i), -8 + i(\equiv -8i)\}$;

• Palavra-código **-2-5i**

- Distância 0: $-2 - 5i$;
- Distância 1: $\{-1 - 5i, -2 - 4i, -2 - 6i, -3 - 5i\}$;
- Distância 2: $\{-5i, -1 - 6i, -2 - 3i, -1 - 4i, -2 - 7i(\equiv 7 + i), -3 - 4i, -3 - 6i(\equiv 6 + 2i), -4 - 5i(\equiv 5 + 3i)\}$;
- Distância 3: $\{-4i, -6i, 1 - 5i, -1 - 3i, -1 - 7i, -2 - 2i, -2 - 8i(\equiv 7), -3 - 3i, -3 - 7i(\equiv 6 + i), -4 - 4i, -4 - 6i(\equiv 5 + 2i), -5 - 5i(\equiv 4 + 3i)\}$;
- Distância 4: $\{1 - 4i, -1 - 8i(\equiv 8), -3 - 2i, -5 - 6i(\equiv 4 + 2i)\}$;

• Palavra-código **5-2i**

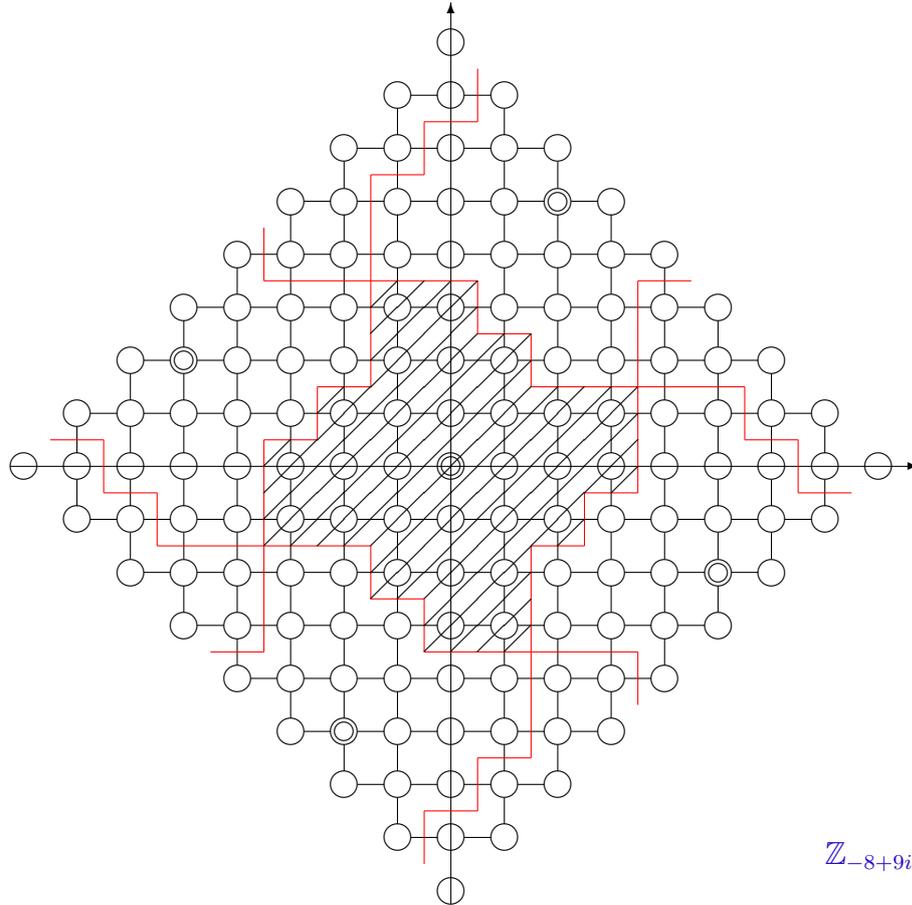
- Distância 0: $5 - 2i$;
- Distância 1: $\{4 - 2i, 5 - i, 5 - 3i, 6 - 2i\}$;
- Distância 2: $\{5, 3 - 2i, 4 - i, 4 - 3i, 5 - 4i(\equiv -3 + 5i), 6 - i, 6 - 3i(\equiv -2 + 6i), 7 - 2i(\equiv -1 + 7i)\}$;
- Distância 3: $\{4, 6, 2 - 2i, 3 - i, 3 - 3i, 4 - 4i, 5 + i, 5 - 5i(\equiv -3 + 4i), 6 - 4i(\equiv -2 + 5i), 7 - i, 7 - 3i(\equiv -1 + 6i), 8 - 2i(\equiv 7i)\}$;
- Distância 4: $\{2 - 3i, 4 + i, 6 - 5i(\equiv -2 + 4i), 8 - i(\equiv 8i)\}$;

$S = \langle \beta \rangle = \{0, 2 + 5i, 5 - 2i, -2 - 5i, -5 + 2i\}$, é identificado no grafo a seguir pelos pontos que estão duplamente circulados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 29 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 145 elementos de $\mathbb{Z}[i]_{-8+9i}$ (FIGURA 11).

3.2.3 Geometria hiperbólica

Agora, considere $8 + 9i$, $-8 + 9i$ e ∞ como vértices de um polígono hiperbólico, ou seja, as singularidades são vistas como vértices de um triângulo hiperbólico no semiplano superior e as transformações de Mobius (transformações de emparelhamentos), que podem ser aplicadas a esse polígono. A partir das transformações de Mobius será identificada a superfície associada ao triângulo hiperbólico.

Figura 11 – Código quase perfeito sobre \mathbb{Z}_{-8+9i}



Fonte: Autor.

A Figura 12 apresenta a representação das singularidades $8 + 9i$, $-8 + 9i$ e ∞ como vértices de um triângulo hiperbólico e as possíveis transformações que podem ser aplicadas a esse polígono.

Neste caso, uma transformação elíptica γ_1 que leva o ponto $8 + 9i$ no ponto $-8 + 9i$ e o ponto $-8 + 9i$ no ponto $8 + 9i$ e fixa o ponto médio da geodésica conectando esses dois vértices, e a transformação parabólica γ_2 que leva ∞ em ∞ e $8 + 9i$ em $-8 + 9i$ e vice-versa.

De fato, dado $\gamma_1 = -z + 18i$, $\gamma_1(8 + 9i) = -8 + 9i$ e $\gamma_1(-8 + 9i) = 8 + 9i$, tem-se:

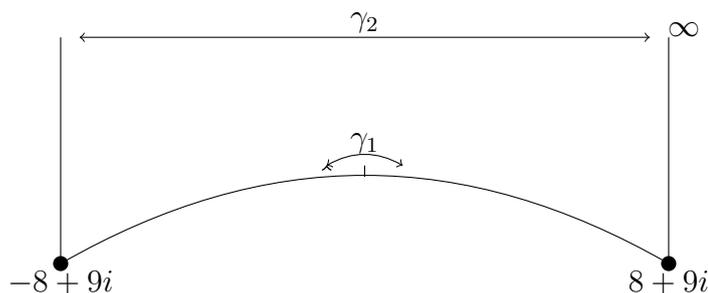
$$\gamma_1(z) = \frac{(-1)z + 18i}{0z + 1} \longrightarrow [\gamma_1] = \begin{bmatrix} -1 & 18 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por definição, $Tr(\gamma_1) = (-1) + 1 = 0$. Logo, a transformação γ_1 é elíptica.

E, dado $\gamma_2 = z + a$ com $a \in \mathbb{C}$, $\gamma_2(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z + a = \infty$, temos

$$\gamma_2(z) = \frac{1z + a}{0z + 1} \longrightarrow [\gamma_2] = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(\gamma_2) = 1 + 1 = 2.$$

Figura 12 – Singularidades $\{-8 + 9i, 8 + 9i \text{ e } \infty\}$



Fonte: Autor.

Logo, a transformação γ_2 é parabólica.

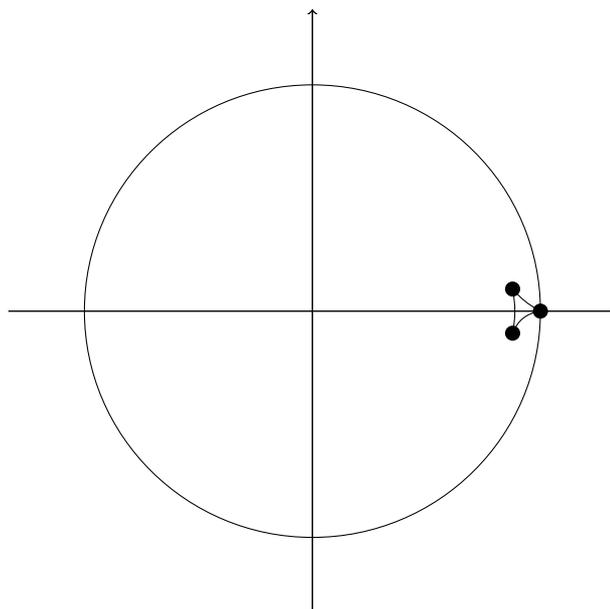
Além da representação das singularidades no modelo do semiplano superior, é possível representar as mesmas no modelo do disco de Poincaré, por meio da transformação de Cayley $\bar{z} = \frac{z-i}{z+i}$ que leva os elementos do semiplano superior para o disco de Poincaré, conforme Figura 13 a seguir.

- para $z = 8 + 9i \Rightarrow \bar{z} = \frac{8+9i-i}{8+9i+i} = \frac{8+8i}{8+10i} = \frac{1}{41}(36 - 4i)$;
- para $z = -8 + 9i \Rightarrow \bar{z} = \frac{-8+9i-i}{-8+9i+i} = \frac{-8+8i}{-8+10i} = \frac{1}{41}(36 + 4i)$;
- para $z = \infty \Rightarrow \bar{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+i}{z-i} = 1$.

Aplicando a transformação inversa $z = -i \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}$:

- para $\bar{z} = \frac{1}{41}(36 - 4i) \Rightarrow z = -i \frac{\frac{36-4i}{41}+1}{\frac{36-4i}{41}-1} = 8 + 9i$;
- para $\bar{z} = \frac{1}{41}(36 + 4i) \Rightarrow z = -i \frac{\frac{36+4i}{41}+1}{\frac{36+4i}{41}-1} = -8 + 9i$;
- para $\bar{z} = 1 \Rightarrow z = \infty$.

Figura 13 – Representação do triângulo no disco de Poincaré



Fonte: Autor.

3.3 SITUAÇÃO 3: SINGULARIDADES $6 + 3i$, $-6 + 3i$ E ∞

3.3.1 Equações diferenciais fuchsianas

Considere os pontos singulares regulares $6 + 3i$, $-6 + 3i$ e ∞ . A partir dessas singularidades a curva algébrica associada será $y^2 = (z - a)(z - b) = (z - 6 - 3i)(z + 6 - 3i) = z^2 + 6z - 3iz - 6z - 36 + 18i - 3iz - 18i - 9 = z^2 - 6iz - 45$.

A partir da definição de equações diferenciais fuchsianas, tem-se a seguinte equação:

$$y'' + \left[\frac{A_1}{(z - (6 + 3i))} + \frac{A_2}{(z - (-6 + 3i))} + K_1 \right] y' + \left[\frac{B_1}{(z - (6 + 3i))^2} + \frac{B_2}{(z - (-6 + 3i))^2} + \frac{C_1}{(z - (6 + 3i))} + \frac{C_2}{(z - (-6 + 3i))} + K_2 \right] y = 0.$$

Sejam,

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ C_1 + C_2 = 0 \\ (B_1 + B_2) + ((6 + 3i)C_1 + (-6 + 3i)C_2) = 0 \\ (2(6 + 3i)B_1 + 2(-6 + 3i)B_2) + ((6 + 3i)^2C_1 + (-6 + 3i)^2C_2) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, uma das soluções possíveis é:

$$\begin{cases} A_2 = 2 \\ A_1 = B_1 = B_2 = C_1 = C_2 = 0. \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} y'' + \left(\frac{A_2(z - 6 - 3i) + K_1(z^2 - 6iz - 45)}{z^2 - 6iz - 45} \right) y' + K_2 y &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y'' + \left(\frac{2z - 12 - 6i}{z^2 - 6iz - 45} + K_1 \right) y' + K_2 y &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a partir das singularidades $6 + 3i$, $-6 + 3i$ e ∞ e usando as condições necessárias para que a equação seja fuchsiana, tem-se:

$$(z^2 - 6iz - 45)y'' + [2z - 6i - 12 + K_1(z^2 - 6iz - 45)]y' + [K_2(z^2 - 6iz - 45)]y = 0,$$

$$y'' + \left(\frac{2z - 12 - 6i}{z^2 - 6iz - 45} + K_1 \right) y' + K_2 y = 0$$

em que $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$.

É possível representar um conjunto de soluções da equação por meio do símbolo P-Riemann, conforme apresentado a seguir.

- para $z_0 = 6 + 3i$

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{z \rightarrow 6+3i} [z - (6 + 3i)] \left[\frac{2z - 12 - 6i}{z^2 - 6iz - 45} + K_1 \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 6+3i} \left[\frac{2z^2 - 24z - 12iz + 54 + 72i + K_1(z^3 - 6z^2 - 9iz^2 - 63z - 36iz + 270 + 135i)}{z^2 - 6iz - 45} \right]. \end{aligned}$$

Como $\lim_{z \rightarrow 6+3i} (2z^2 - 24z - 12iz + 54 + 72i) = 0$, $\lim_{z \rightarrow 6+3i} [z^3 - 6z^2 - 9iz^2 - 63z - 36iz + 135i + 270] = 0$ e $\lim_{z \rightarrow 6+3i} (z^2 - 6iz - 45) = 0$, aplica-se a regra de L'Hopital para calcular o limite.

Seja $f(x) = 2z^2 - 24z - 12iz + 54 + 72i + K_1(z^3 - 6z^2 - 9iz^2 - 63z - 36iz + 270 + 135i)$ e $g(x) = z^2 - 6iz - 45 \Rightarrow f'(x) = 4z - 24 - 12i + K_1(3z^2 - 12z - 18iz - 63 - 36i)$ e $g'(x) = 2z - 6i$. Assim, $\lim_{z \rightarrow 6+3i} \frac{4z - 24 - 12i + K_1(3z^2 - 12z - 18iz - 63 - 36i)}{2z - 6i} = -6iK_1$. Logo, $p_0 = -6iK_1$.

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 6+3i} [z - (6 + 3i)]^2 K_2,$$

como $\lim_{z \rightarrow 6+3i} [z^2 - 12z - 6iz + 27 + 36i] = 0$, $q_0 = 0$.

Substituindo na equação indicial 4, tem-se:

$$r(r-1) + r(-6iK_1) + 0 = 0 \Rightarrow r^2 - r - 6iK_1 r = 0 \Rightarrow r(r-1-6iK_1) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1+6iK_1.$$

- para $z_0 = -6 + 3i$

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow -6+3i} [z - (-6 + 3i)] \left[\frac{2}{z + 6 - 3i} + K_1 \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow -6+3i} 2 + K_1(z + 6 - 3i) =$$

$$\lim_{z \rightarrow -6+3i} 2 + K_1 \lim_{z \rightarrow -6+3i} z + 6 - 3i = 2 + K_1 \cdot 0 = 2,$$

temos que $p_0 = 2$.

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow -6+3i} (z + 6 - 3i)^2 K_2 = 0 \cdot K_2 = 0,$$

logo $q_0 = 0$.

Substituindo na equação indicial 4, tem-se:

$$r(r-1) + 2r + 0 = 0 \Rightarrow r^2 - r + 2r = 0 \Rightarrow r^2 + r = 0 \Rightarrow r(r+1) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = -1.$$

- para $z = \infty$ pode-se analisar a função que acompanha y . Como temos “ K_2y ”, considere, $r = 1$ ou $r = K_2$.

Desta forma, o símbolo P-Riemann da equação diferencial é:

$$y = P \left\{ \begin{array}{ccc} 6 + 3i & -6 + 3i & \infty \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 + 6iK_1 & -1 & K_2 \end{array} \right\} z.$$

3.3.2 Códigos geometricamente uniformes

Considere os pontos $6 + 3i$ e $-6 + 3i$, anteriormente vistos como singularidades, agora vistos como geradores de uma constelação de sinais.

Considere $\alpha = 6 + 3i$, desta forma os elementos do anel quociente são:

$$\mathbb{Z}[i]_{6+3i} = \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, i, 2i, 3i, -i, -2i, -3i, 1+i, 1+2i, 1+3i, 1+4i, 1-i, 1-2i, \\ 1-3i, -1+i, -1+2i, -1+3i, -1-i, -1-2i, -1-3i, -1-4i, 2+i, 2+2i, 2+ \\ 3i, 2-i, 2-2i, -2+i, -2+2i, -2-i, -2-2i, -2-3i, 3+i, 3-i, 3-2i, -3+ \\ i, -3+2i, -3-i, 4-i, -4+i\},$$

contendo $N(\alpha) = 45$ elementos.

Dado $\alpha = 6 + 3i$, é possível reescrever α como $6 + 3i = 3i \cdot (1 - 2i)$. Tomando $\bar{\beta} = 1 - 2i$, o ideal gerado por $\bar{\beta}$ gera um código perfeito que corrige todos os padrões com um erro e o código possui 9 elementos, o que é um absurdo! Logo, vamos tomar $\beta = 3i$, pelo Teorema 2.7, o ideal gerado por $\beta = 3i$, forma um código quase perfeito que corrige

todos os padrões com 1 erro e $2c^2 + 2c = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$ padrões com $t + 1 = 2$ erros em G_{6+3i} . A norma de β é 9 e a maior esfera de Lee contida em 9 pontos possui 5 pontos com raio de cobertura $t = 1$, os 4 padrões com 2 erros completam a região de Voronoi com 9 pontos.

Dado que o ideal gerado por β , $S = \langle \beta \rangle$, possui $\frac{N(\alpha)}{N(\beta)} = \frac{45}{9} = 5$ elementos, o código quase perfeito possui 5 elementos. Determinando os elementos do conjunto gerado por β : (observe que $3i + 3i = 3i \cdot 2$, será utilizada essa notação para melhor visualização.)

- $3i \cdot 0 = \mathbf{0}$,
- $3i \cdot 1 = \mathbf{3i}$,
- $3i \cdot 2 = 6i \equiv \mathbf{3} \pmod{6 + 3i}$, pois $6 + 3i \mid (3 - 6i)$, $3 - 6i = (6 + 3i)(i)$,
- $3i \cdot 3 = 9i \equiv \mathbf{-3} \pmod{6 + 3i}$, pois $6 + 3i \mid (-3 - 9i)$, $-3 - 9i = (6 + 3i)(-1 - i)$,
- $3i \cdot 4 = 12i \equiv \mathbf{-3i} \pmod{6 + 3i}$, pois $6 + 3i \mid (-3i - 12i)$, $-15i = (6 + 3i)(-1 - 2i)$.

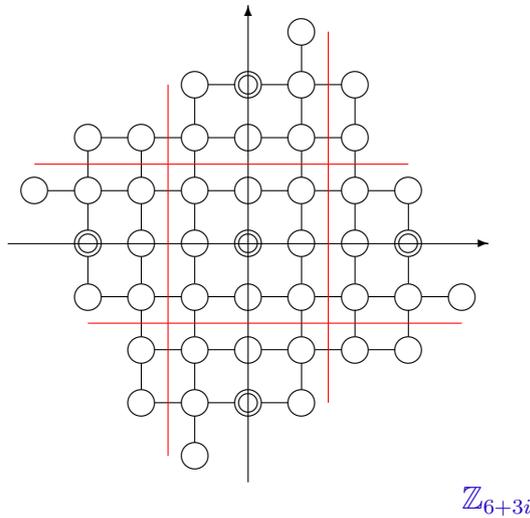
Vamos determinar os pontos que pertencem às regiões de Voronoi de cada palavra código. Como temos uma esfera de Lee com raio de cobertura 1 em todas as regiões de Voronoi, sabemos que todos os pontos com distância 1 de uma palavra código pertencem a sua região de decisão. Mas para determinar os 4 padrões com 2 erros, devemos analisar se esse ponto não tem distância 1 de qualquer outra palavra código, ou seja, para que esse ponto pertença a região de Voronoi de uma palavra código, ele deve ter distância 2 dessa palavra e distância estritamente maior que 2 de qualquer outra palavra código.

- Palavra-código $\mathbf{0}$
 - Distância 0: 0;
 - Distância 1: $\{1, -1, i, -i\}$;
 - Distância 2: $\{1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i\}$;
- Palavra-código $\mathbf{3}$
 - Distância 0: 3;
 - Distância 1: $\{2, 3 + i, 3 - i, 4(\equiv -2 - 3i)\}$;
 - Distância 2: $\{2 + i, 2 - i, 4 - i, 4 + i(\equiv -2 - 2i)\}$;
- Palavra-código $\mathbf{-3}$
 - Distância 0: -3 ;
 - Distância 1: $\{-2, -3 + i, -3 - i, -4(\equiv 2 + 3i)\}$;

- Distância 2: $\{-2 + i, -2 - i, -4 + i, -4 - i(\equiv 2 + 2i)\}$;
- Palavra-código **3i**
 - Distância 0: $3i$;
 - Distância 1: $\{1 + 3i, -1 + 3i, 2i, 4i(\equiv 3 - 2i)\}$;
 - Distância 2: $\{1 + 2i, -1 + 2i, 1 + 4i, -1 + 4i(\equiv 2 - 2i)\}$;
- Palavra-código **-3i**
 - Distância 0: $-3i$;
 - Distância 1: $\{1 - 3i, -1 - 3i, -2i, -4i(\equiv -3 + 2i)\}$;
 - Distância 2: $\{1 - 2i, -1 - 2i, -1 - 4i, 1 - 4i(\equiv -2 + 2i)\}$;

Assim, $S = \langle \bar{\beta} \rangle = \{0, 3, -3, 3i, -3i\}$, é identificado no grafo a seguir pelos pontos que estão duplamente circulados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 9 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 45 elementos de $\mathbb{Z}[i]_{6+3i}$ (FIGURA 14).

Figura 14 – Código quase perfeito sobre \mathbb{Z}_{6+3i}



Fonte: Autor.

Agora, tomando $\alpha = -6 + 3i$, os elementos do anel quociente são:

$$\mathbb{Z}[i]_{-6+3i} = \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, i, 2i, 3i, -i, -2i, -3i, 1 + i, 1 + 2i, 1 + 3i, 1 - i, 1 - 2i, 1 - 3i, 1 - 4i, -1 + i, -1 + 2i, -1 + 3i, -1 + 4i, -1 - i, -1 - 2i, -1 - 3i, 2 + i, 2 + 2i, 2 - i, 2 - 2i, 2 - 3i, -2 + i, -2 + 2i, -2 + 3i, -2 - i, -2 - 2i, 3 + i, 3 + 2i, 3 - i, -3 + i, -3 - i, -3 - 2i, 4 + i, -4 - i, \}$$

contendo $N(\alpha) = 45$ elementos.

Dado $\alpha = -6 + 3i$, é possível reescrever α como $-6 + 3i = 3i \cdot (1 + 2i)$. Logo, pelo Teorema 2.7, o ideal gerado por $\beta = 3i$, forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até 3 erros e $2c^2 + 2c = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$ padrões com $t + 1 = 2$ erros em G_{-6+3i} . A norma de β é 9 e a maior esfera de Lee contida em 9 pontos possui 5 pontos com raio de cobertura $t = 1$, os 4 padrões com 2 erros completam nossa região de Voronoi com 9 pontos.

Dado que o ideal gerado por β , $S = \langle \beta \rangle$, possui $\frac{N(\alpha)}{N(\beta)} = \frac{45}{9} = 5$ elementos, o código quase perfeito possui 5 elementos. Vamos determinar os elementos do conjunto gerado por β :

- $3i \cdot 0 = \mathbf{0}$,
- $3i \cdot 1 = \mathbf{3i}$,
- $3i \cdot 2 = 6i \equiv \mathbf{-3} \pmod{-6 + 3i}$, pois $-6 + 3i \mid (-3 - 6i)$, $-3 - 6i = (-6 + 3i)(i)$,
- $3i \cdot 3 = 9i \equiv \mathbf{3} \pmod{-6 + 3i}$, pois $-6 + 3i \mid (3 - 9i)$, $3 - 9i = (-6 + 3i)(-1 + i)$,
- $3i \cdot 4 = 12i \equiv \mathbf{-3i} \pmod{-6 + 3i}$, pois $-6 + 3i \mid (-3i - 12i)$, $-15i = (-6 + 3i)(-1 + 2i)$.

Vamos determinar os pontos que pertencem as regiões de Voronoi de cada palavra código:

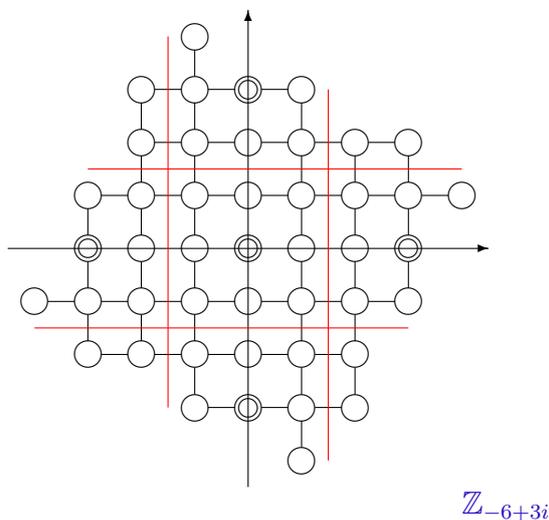
- Palavra código $\mathbf{0}$
 - Distância 0: 0;
 - Distância 1: $\{1, -1, i, -i\}$;
 - Distância 2: $\{1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i\}$;
- Palavra código $\mathbf{3}$
 - Distância 0: 3;
 - Distância 1: $\{2, 3 + i, 3 - i, 4(\equiv -2 + 3i)\}$;
 - Distância 2: $\{2 + i, 2 - i, 4 + i, 4 - i(\equiv -2 + 2i)\}$;
- Palavra código $\mathbf{-3}$
 - Distância 0: -3 ;
 - Distância 1: $\{-2, -3 + i, -3 - i, -4(\equiv 2 - 3i)\}$;
 - Distância 2: $\{-2 + i, -2 - i, -4 + i(\equiv 2 - 2i), -4 - i\}$;

- Palavra código $3i$
 - Distância 0: $3i$;
 - Distância 1: $\{1 + 3i, -1 + 3i, 2i, 4i(\equiv -3 - 2i)\}$;
 - Distância 2: $\{1 + 2i, -1 + 2i, 1 + 4i(\equiv -2 - 2i), -1 + 4i\}$;

- Palavra código $-3i$
 - Distância 0: $-3i$;
 - Distância 1: $\{1 - 3i, -1 - 3i, -2i, -4i(\equiv 3 + 2i)\}$;
 - Distância 2: $\{1 - 2i, -1 - 2i, 1 - 4i, -1 - 4i(\equiv 2 + 2i)\}$;

$S = \langle \beta \rangle = \{0, 3, -3, 3i, -3i\}$, é identificado no grafo a seguir pelos pontos que estão duplamente circulados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 9 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 45 elementos de $\mathbb{Z}[i]_{-6+3i}$ (FIGURA 15).

Figura 15 – Código quase perfeito sobre \mathbb{Z}_{-6+3i}



Fonte: Autor.

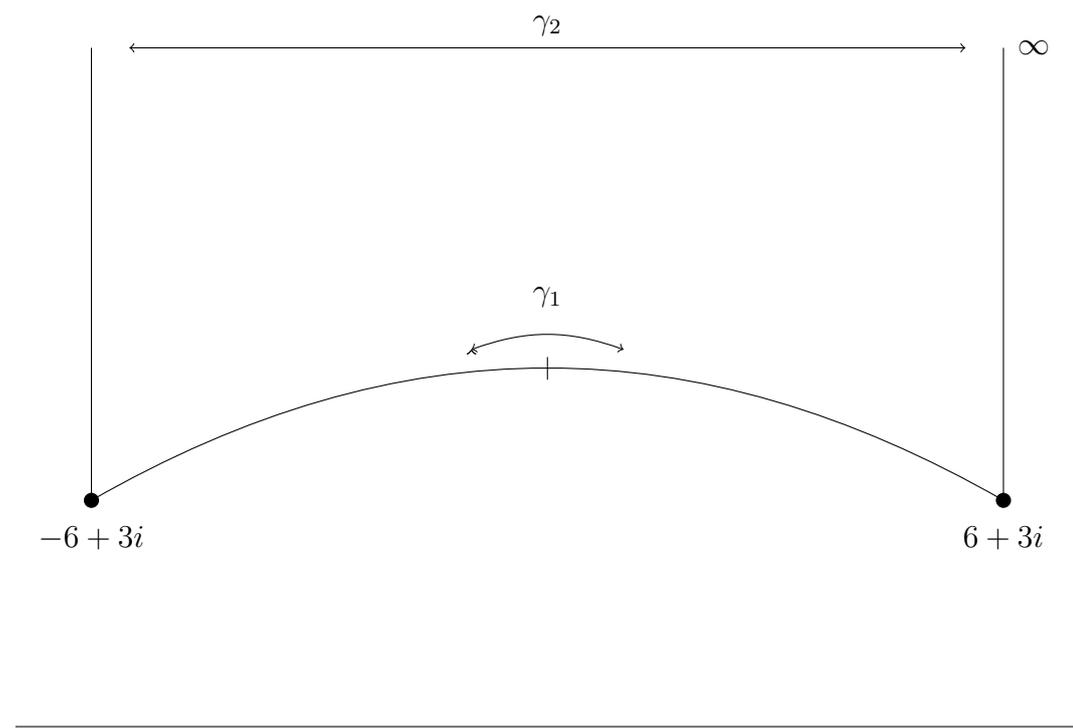
3.3.3 Geometria hiperbólica

Considere as singularidades $6 + 3i$, $-6 + 3i$ e ∞ como vértices de um triângulo hiperbólico no semiplano superior e as transformações de Möbius (transformações de

emparelhamentos), que podem ser aplicadas aos lados desse polígono. A partir das transformações de Möbius, é possível identificar a superfície associada ao triângulo hiperbólico.

A Figura 16 apresenta a representação das singularidades $6 + 3i$, $-6 + 3i$ e ∞ como vértices de um triângulo hiperbólico e as possíveis transformações que podem ser aplicadas a esse polígono.

Figura 16 – Singularidades $\{-6 + 3i, 6 + 3i \text{ e } \infty\}$



Fonte: Autor.

Neste caso tem-se uma transformação elíptica γ_1 que leva o ponto $6 + 3i$ no ponto $-6 + 3i$ e o ponto $-6 + 3i$ no ponto $6 + 3i$ e a transformação parabólica γ_2 que leva ∞ em ∞ .

Dado $\gamma_1 = -z + 6i$, $\gamma_1(6 + 3i) = -6 + 3i$ e $\gamma_1(-6 + 3i) = 6 + 3i$:

$$\gamma_1(z) = \frac{(-1)z + 6i}{0z + 1} \longrightarrow [\gamma_1] = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por definição, $Tr(\gamma_1) = (-1) + 1 = 0$. Logo, a transformação γ_1 é elíptica.

E, dado $\gamma_2 = z + a$ com $a \in \mathbb{C}$, $\gamma_2(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z + a = \infty$:

$$\gamma_2(z) = \frac{1z + a}{0z + 1} \longrightarrow [\gamma_2] = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(\gamma_2) = 1 + 1 = 2.$$

Logo, a transformação γ_2 é parabólica.

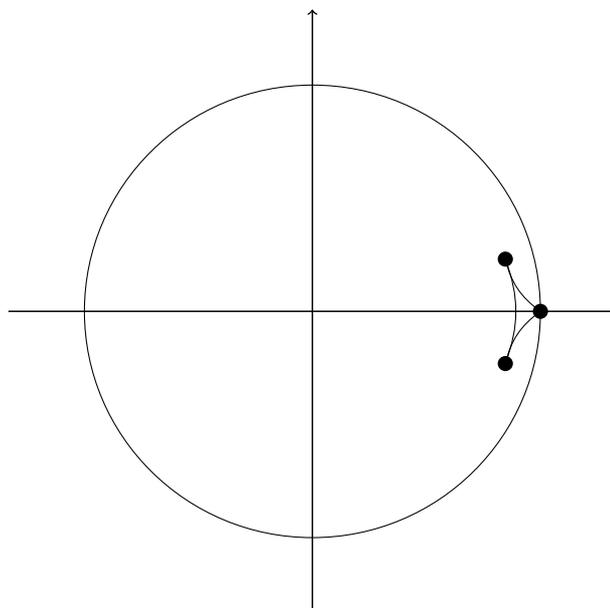
Além da representação das singularidades no modelo do semiplano superior, é possível representar as mesmas no modelo do disco de Poincaré, por meio da Transformação de Cayley $\bar{z} = \frac{z-i}{z+i}$ que leva os elementos do semiplano superior para o disco de Poincaré, conforme apresentado na Figura 17.

- para $z = 6 + 3i \Rightarrow \bar{z} = \frac{6+3i-i}{6+3i+i} = \frac{6+2i}{6+4i} = \frac{1}{13}(11 - 3i)$;
- para $z = -6 + 3i \Rightarrow \bar{z} = \frac{-6+3i-i}{-6+3i+i} = \frac{-6+2i}{-6+4i} = \frac{1}{13}(11 + 3i)$;
- para $z = \infty \Rightarrow \bar{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-i}{z+i} = 1$.

Aplicando-se a transformação inversa $z = -i\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}$, temos:

- para $\bar{z} = \frac{1}{13}(11 - 3i) \Rightarrow z = -i\frac{\frac{11-3i}{13}+1}{\frac{11-3i}{13}-1} = 6 + 3i$;
- para $\bar{z} = \frac{1}{13}(11 + 3i) \Rightarrow z = -i\frac{\frac{11+3i}{13}+1}{\frac{11+3i}{13}-1} = -6 + 3i$;
- para $\bar{z} = 1 \Rightarrow z = \infty$.

Figura 17 – Representação do triângulo no disco de Poincaré



Fonte: Autor.

4 CONEXÃO COM CANAIS DE COMUNICAÇÃO

Além das conexões estabelecidas no capítulo anterior, será apresentada a seguir, por meio da superfície associada aos triângulos hiperbólicos, uma conexão com o canal binário simétrico. Para isso, inicialmente serão apresentados alguns conceitos que fundamentaram tais conexões.

Definição 27 ([11]). Um grafo G é dito mergulhado em uma superfície ω quando quaisquer duas de suas arestas não se cruzam, a não ser em um vértice. O complemento de G em ω é chamado de região. Uma região homeomorfa (equivalência topológica) a um disco aberto é chamada 2-célula; se a região toda é uma 2-célula, o mergulho é dito ser um mergulho 2-células.

Definição 28 ([11]). Um grafo completo bipartido com m e n vértices, denotado por $K_{m,n}$, é um grafo consistindo de dois conjuntos distintos de vértices com m e n vértices, em que cada vértice de um conjunto está conectado a todo vértice do outro conjunto.

O grafo G tem um mergulho 2-células em uma superfície de gênero g , tal que g pertence ao intervalo $g_{min} \leq g \leq g_{max}$, da seguinte forma:

(i) O gênero mínimo de uma superfície compacta orientada é:

$$g_{min}(K_{m,n}) = \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\}, \quad \text{para } m, n \geq 2,$$

em que $\{a\}$ é o menor inteiro maior ou igual a a .

(ii) O gênero máximo de uma superfície compacta orientada é:

$$g_{max}(K_{m,n}) = \left[\frac{(m-1)(n-1)}{2} \right] \quad \text{para } m, n \geq 2,$$

em que $[a]$ é o maior inteiro menor ou igual a a .

Definição 29. Um canal discreto sem memória (DMC) é um canal com entrada e saída discretas, dadas respectivamente por X e Y . A entrada representa os símbolos transmitidos e a saída os símbolos recebidos. Para um canal DMC a entrada X assume os valores binários 0 e 1, enquanto que a saída Y assume valores inteiros de 0 a $M - 1$. As probabilidades de transição são dadas por $P(Y = y|X = x)$. As probabilidades de transição devem satisfazer que $\sum_Y P(Y = y|X = x) = 1$. Além das probabilidades de transição são também conhecidas as probabilidades de transmissão $P(X = x)$, onde $\sum_X P(X = x) = 1$. Este canal é denominado sem memória, pois o símbolo transmitido no instante i não depende dos símbolos transmitidos nos instantes anteriores.

Definição 30. Um canal binário simétrico (BSC) possui entradas e saídas que são variáveis binárias discretas. Trata-se de um caso particular de um canal DMC (canal discreto sem memória).

As probabilidades de acerto e erro são dadas respectivamente por:

$$P(y = 0|x = 0) = P(y = 1, x = 1) = 1 - p,$$

$$P(y = 0|x = 1) = P(y = 1|x = 0) = p.$$

Esse canal é denominado simétrico, pois as probabilidades de acerto, ou de erro, independem do símbolo transmitido.

Pelos resultados obtidos anteriormente, tem-se que a esfera está associada ao triângulo hiperbólico, e também ao canal binário simétrico $C_{2,2}$, um canal com duas entradas e duas saídas. De acordo com [19],

$$g_{min}(K_{2,2}) = \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\} = \left\{ \frac{(2-2)(2-2)}{4} \right\} = 0 = 0,$$

e,

$$g_{max}(K_{2,2}) = \left[\frac{(m-1)(n-1)}{2} \right] = \left[\frac{(2-1)(2-1)}{2} \right] = \left[\frac{1}{2} \right] = 0.$$

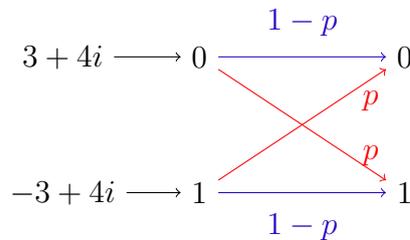
Como, $g_{min} = g_{max}$, $g = 0$, ou seja, o canal está associado a uma esfera.

Pode-se representar o canal $C_{2,2}$ com o grafo bipartido completo $K_{2,2}$.

A seguir serão apresentadas as conexões dos resultados obtidos no capítulo anterior com canais de comunicação, em particular, com o canal $C_{2,2}$.

Considere as singularidades $3 + 4i$, $-3 + 4i$ como as entradas e saídas do canal $C_{2,2}$, sendo representadas respectivamente pelas entradas binárias 0 e 1, conforme apresentado na Figura 18.

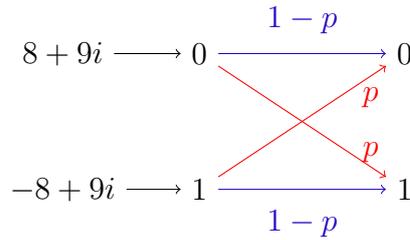
Figura 18 – Grafo associado as singularidades $3 + 4i$ e $-3 + 4i$



Fonte: Autor.

Agora, considere as singularidades $8 + 9i$, $-8 + 9i$ como as entradas e saídas do canal $C_{2,2}$, sendo representadas respectivamente pelas entradas binárias 0 e 1, conforme Figura 19.

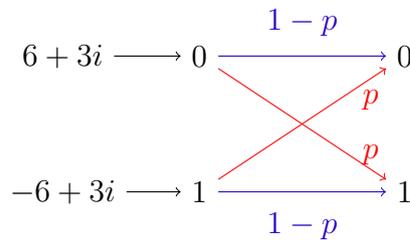
Figura 19 – Grafo associado às singularidades $8 + 9i$ e $-8 + 9i$



Fonte: Autor.

E, as singularidades $6 + 3i$, $-6 + 3i$ como as entradas e saídas do canal $C_{2,2}$, representadas respectivamente pelas entradas binárias 0 e 1, conforme Figura 20.

Figura 20 – Grafo associado às singularidades $6 + 3i$ e $-6 + 3i$



Fonte: Autor.

Considerando que as palavras-código do código geometricamente uniforme possuem a mesma probabilidade de erro e que o número de palavras-código é finito, pode-se representá-las como entradas e saídas de um canal discreto e, posteriormente, apresentar a probabilidade do código cometer um erro.

Mais ainda, como o conjunto de palavras-código, \mathcal{C} , é enumerável, existe uma bijeção com o conjunto dos números naturais, $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$.

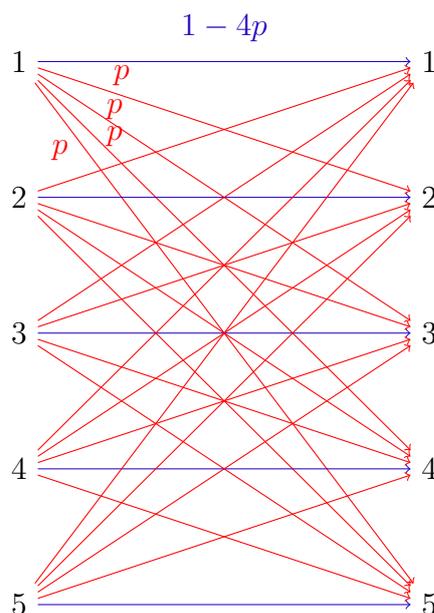
Sendo assim, quando as palavras-código são representadas como entradas e saídas desse canal, percebe-se que a probabilidade de erro, p , está relacionada ao número de palavras-código sobre a constelação. Portanto, tem-se um único canal discreto sem memória capaz de representar as palavras-código de todos códigos apresentados neste trabalho, dado que todos os casos possuem 5 palavras-código.

Dado que em um código geometricamente uniforme a probabilidade de erro é a mesma para todas as palavras-código, considere a probabilidade de erro p , então a probabilidade de acerto será $1 - 4p$, conforme apresentado na Figura 21.

Pode-se calcular essa probabilidade de erro p com o auxílio da constelação de sinais gerada para α .

Então, considere $\alpha = 3+4i$ e suponha que o usuário envie o sinal 0, mas pode ocorrer um erro no processo de transmissão da informação e o sinal recebido pode ser 0, 1, -1 , i

Figura 21 – Canal associado a cinco palavras-código



Fonte: Autor.

ou $-i$. O código identificará o erro e o corrigirá, e o usuário receberá a palavra-código 0, podendo-se considerar que não houve um erro.

No entanto, se ocorrer um erro com distância maior que 1, por exemplo, se ao enviar 0, ocorrer um erro na transmissão e o sinal recebido for $2, 1 + i, 2 + i, -1 - 2i$ ou $-3i$, o código corrigirá para a palavra-código mais próxima, $2 + i$, o que identificamos como um erro desse código corretor, representado pelo canal com probabilidade p . De maneira análoga, se ao enviar 0, o usuário receber $-1 + i, -1 + 2i, 3$ ou $2 - i$, o código cometerá outro erro, pois o sinal será corrido para a palavra-código $-1 + 2i$, esse erro também tem probabilidade p , representada no canal.

Assim temos que, esse erro acontecerá sempre que a mensagem recebida estiver fora da região de Voronoi do sinal enviado.

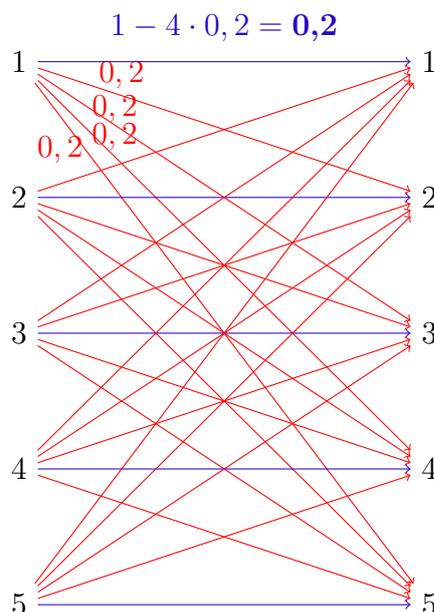
Na constelação gerada por $\alpha = 3 + 4i$, a probabilidade desse evento ocorrer é:

$$p = P(E) = \frac{n(E)}{n(\omega)} = \frac{\text{número de elementos do evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}$$

$$p = P(E) = \frac{5}{25} = 0,2.$$

Dado $p = 0,2$, pode-se representar novamente o canal, com a probabilidade de erro definida, conforme Figura 22 apresentada a seguir.

Figura 22 – Grafo associado as palavras-código com probabilidade de erro p definida.



Fonte: Autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram utilizados conceitos ainda pouco explorados das áreas de Matemática e Engenharia - as equações diferenciais fuchsianas, um tipo especial de equação diferencial ordinária, a geometria hiperbólica, uma geometria não-euclidiana, e os códigos perfeitos e quase perfeitos construídos sobre anéis de inteiros gaussianos - mas de extrema relevância e com diversas possibilidades de aplicações na Física-Matemática e no processo de transmissão da informação.

O objetivo principal desta pesquisa foi identificar conexões existentes entre elementos de geometria hiperbólica, equações diferenciais fuchsianas, códigos geometricamente uniformes e estruturas algébricas para posteriormente aplicá-las em canais discretos, o qual foi alcançado por meio dos resultados obtidos e as conexões estabelecidas. Para que esse objetivo fosse alcançado, singularidades de equações diferenciais fuchsianas tomaram dois caminhos, inicialmente foram vistas como geradoras de constelações de sinais sendo possível analisar a existência de um código perfeito ou quase perfeito sobre as mesmas, e posteriormente, as singularidades foram vistas como vértices de um triângulo hiperbólico, superfícies de gênero zero, assim como os canais binários simétricos $C_{2,2}$. Assim, elementos de equações diferenciais fuchsianas, as singularidades complexas, por meio dos códigos geometricamente uniforme e da geometria hiperbólica foram aplicados na teoria da informação, principalmente na análise de erros associada a canais de comunicação.

Por meio dos resultados obtidos, pode-se concluir que singularidades com a parte

real oposta geram códigos perfeitos e/ou quase perfeitos com a mesma capacidade de correção de erros. Além disso, ao considerar pontos simétricos em relação ao eixo imaginário para a geração da constelação de sinais, obtém-se constelações formadas pelos pontos conjugados. Nos casos em que o módulo da parte real é igual ao módulo da parte imaginária menos um, são obtidas constelações iguais, pois os pontos e seus conjugados pertencem ao anel quociente, $Z[i]_{\alpha}$, $\alpha = 3 + 4i$, $-3 + 4i$, $8 + 9i$ e $-8 + 9i$. O código perfeito sobre a constelação também é formado pelos pontos conjugados. Observe que na constelação de sinais gerada por $\alpha = 3 + 4i$ tem-se um código perfeito com os seguintes pontos $\{0, 1 - 2i, -2 - i, 2 + i, -1 + 2i\}$, e na constelação de sinais gerada por $\alpha = -3 + 4i$ temos o código perfeito $\{0, 1 + 2i, -2 + i, 2 - i, -1 - 2i\}$. Mas quando α não segue esse padrão, módulo da parte real igual ao módulo da parte imaginária menos um, como no caso em que $\alpha = 6 + 3i$, $-6 + 3i$, os pontos conjugados na geração das constelações de sinais, ficam evidentes, porém o código gerado sobre as constelações de sinais são iguais, visto que os pontos e seus respectivos conjugados pertencem ao código gerado.

Ao considerar as singularidades como vértices de um triângulo hiperbólico, foi estabelecida uma conexão com o canal binário simétrico $C_{2,2}$, cujas entradas e saídas representam os pares de singularidades opostas em relação ao eixo imaginário. Portanto, temos que a probabilidade de erro, p , é a mesma independentemente da singularidade transmitida.

Por fim, foi possível representar as palavras-código como entradas e saídas de um único canal discreto sem memória, visto que o conjunto de palavras-código \mathcal{C} é enumerável. E, com isso, percebe-se que a probabilidade de erro, p , está relacionada ao número de palavras-código sobre a constelação.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir serão apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros, como forma de dar continuidade a este trabalho.

- a) Analisar equações diferenciais fuchsianas com um número maior de singularidades, como por exemplo a equação de Heun e as possíveis conexões com os códigos geometricamente uniformes;
- b) Analisar a probabilidade de erro dos códigos gerados sobre as constelações de sinais e do canal $C_{2,2}$;
- c) Identificar a estrutura algébrica associada aos emparelhamentos de polígonos hiperbólicos com um número maior de vértices, identificados a partir de singularidades de equações diferenciais fuchsianas;

- d) Estudar o processo de quantização de canais e as possíveis conexões com os resultados obtidos neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] SHANNON, C. E. A Mathematical Theory of Communication, **The Bell System Technical Journal**, New York, v. 27, n.3, p. 379-423. July. 1948. Citado na página [11](#).
- [2] SLEPIAN, D. Group Codes for the Gaussian Channel, **The Bell System Technical Journal**, [s.l.], v. 37, n.2, p. 575-602. Mar. 1968. Citado na página [11](#).
- [3] FORNEY, G. D. tr. **IEEE Trans. On Inform. Theory**, [s.l.], v.37, n.5, p. 1241-1260. Sept. 1991. Citado na página [11](#).
- [4] MARTÍNEZ, C.; BEIVIDE, R.; GABIDULIN, E. Perfect codes from metrics induced by circulant graphs, **IEEE Trans. On Inform. Theory**, [s.l.], v. 53, n. 9, p. 3042-3052. Sept. 2007. Citado na página [11](#).
- [5] QUILLES QUEIROZ, C.; PALAZZO JR, R. Quasi-perfect geometrically uniform codes derived from graphs over Gaussian integer rings. *In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INFORMATION THEORY, 2010, Austin, Texas. Proceedings [...]*. Austin, Texas: IEEE, 2010. p.1158-1162. Citado na página [11](#).
- [6] QUILLES QUEIROZ, C.; CAMARERO, C.; MARTÍNEZ, C.; PALAZZO JR, R. Quasi-Perfect Codes from Cayley Graphs over Integer Rings, **IEEE Trans. On Inform. Theory**, New York, v. 59, n. 9, p. 5905-5916, 2013. Citado na página [11](#).
- [7] VAZ JR, J.; CAPELAS DE OLIVEIRA, E. **Métodos Matemáticos - volume 1**. 1 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2016. p. 336. Citado 7 vezes nas páginas [11](#), [12](#), [13](#), [15](#), [17](#), [20](#) e [21](#).
- [8] SOTOMAYOR, J. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. IMPA, Rio de Janeiro, 1979. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [17](#).
- [9] OLIVEIRA, A. J.; PALAZZO JR., R. Uniformização de Curvas Algébricas Planares via EDOs Fuchsianas no Estudo de Sistemas de Comunicação. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**. São José dos Campos, v. 6, n. 1, fev. 2018. Citado na página [12](#).
- [10] WALKDEN, C. **Hyperbolic Geometry**. Manchester University, 2012. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [23](#).
- [11] OLIVEIRA, A. J.; PALAZZO JR., R. **Uniformização de curvas algébricas associadas a sequências de Farey através de equações diferenciais fuchsianas na proposta de novos sistemas de comunicação**. 2017. 145 f. Tese (Doutorado

- em Engenharia Elétrica) - FEEC - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2017. Citado 5 vezes nas páginas [13](#), [15](#), [20](#), [21](#) e [70](#).
- [12] ALVES, A. F.; PALAZZO JR., R. **Análise dos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Hiperbólicos para a Construção de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes**. 2011. 108 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - FEEC - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2011. Citado na página [13](#).
- [13] LAZARI, H. **Uma contribuição Teoria dos Códigos Geometricamente Uniformes Hiperbólicos**. Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, 2000. Citado na página [13](#).
- [14] FIRER, M. **Grupos Fuchsianos**. Notas de Aula, IMECC-UNICAMP, 2001. Citado 4 vezes nas páginas [13](#), [23](#), [25](#) e [26](#).
- [15] DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4. ed. ref. São Paulo: Atual, 2003. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [27](#) e [30](#).
- [16] FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. **Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos**. SBM, 2011. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [27](#).
- [17] QUILLES QUEIROZ, C.; PALAZZO JR., R. **Códigos geometricamente uniformes derivados de grafos sobre anéis quocientes de inteiros e de ordens dos quatérnios**. Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, 2011. Citado 6 vezes nas páginas [13](#), [27](#), [34](#), [40](#), [41](#) e [56](#).
- [18] MELO, G. S. de. **Introdução à Teoria dos Grafos**. 2014. 35 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT - Universidade Federal da Paraíba. Paraíba, 2014. Citado na página [36](#).
- [19] OLIVEIRA, A. J.; PALAZZO JR., R. Geometric and algebraic structures associated with the channel quantization problem, **Computational and Applied Mathematics**, 2017. Citado na página [71](#).