



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS
MESTRADO EM FÍSICA

ALFREDO VINÍCIUS ANDRADE GUIMARÃES

TRANSFORMAÇÃO DE CHAN E TERMOS DE
SUPERFÍCIE NO CÁLCULO DE FATORES DE
FORMA ELETROMAGNÉTICOS NO MODELO DE
Nambu-Jona-Lasínio

SÃO JOÃO DEL REI

2017

ALFREDO VINÍCIUS ANDRADE GUIMARÃES

TRANSFORMAÇÃO DE CHAN E TERMOS DE
SUPERFÍCIE NO CÁLCULO DE FATORES DE FORMA
ELETROMAGNÉTICOS NO MODELO DE
NAMBU-JONA-LASÍNIO

Dissertação submetida ao Departamento de Ciências Naturais e ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del Rei - Campus Dom Bosco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Área de pesquisa: Teoria Quântica de Campos

Orientador: Dr. André Luiz Mota

Co-orientador: Dr. Edson Wander Dias

São João del Rei
2017

*Aos meus pais Alfredo e Regina
e a minha cara metade Helsinara
por todo o apoio e amor.*

Agradecimentos

Agradecer a todas as pessoas que fizeram esse momento possível para mim provavelmente preencheria muitas vezes a quantidade de folhas desse trabalho. Portanto não será possível nomear a todos, mas mesmo assim desde já deixo meu agradecimento.

Ao professor Dr. André Luiz Mota por me ensinar e me orientar mesmo que, às vezes, tenha sido tão difícil a conciliação com seu cargo como pró-reitor. Agradeço de coração a paciência e a compreensão.

Ao professor Dr. Edson Wander Dias por todas as nossas conversas e pela monstruosa carga de conhecimento e paciência em me ensinar e me colocar no caminho certo. Sem sua ajuda esse trabalho não seria possível.

Aos amigos do LATEC pela ótima convivência em especial ao meu amigo Filipe Batista pelas longas conversas e pelas horas de trabalho conjunto desvendando todos os mistérios intrigantes ao longo do trabalho.

Aos meus pais Regina e Alfredo e à minha irmã Letícia pela formação humana e pelo apoio durante toda a vida. Vocês são a grande razão do meu sucesso pessoal e profissional.

Ao meu grande amor Helsinara Piassi pelo carinho e amor. Obrigado por segurar as pontas em todos os momentos da minha vida, me afagar nas aflições e compartilhar das conquistas e realizações. Sem você minha jornada não seria possível!

A todos os amigos de São João del Rei que proporcionaram tantos momentos bons e me ajudaram a amenizar toda dificuldade de se completar esse grande passo. Em especial aos amigos do Grupo Mutirão por proporcionarem tantos bons momentos musicais e humanos!

A todos os professores que foram responsáveis pela minha formação profissional e em especial a professora Maria Carolina Nemes que me mostrou o que é ser um cientista. Sua paixão e dedicação me inspiram até hoje, mesmo que somente em pensamento.

Finalmente agradeço a esse universo maravilhoso em que habitamos, que tanto me fascina e me enche de indagações e estímulos para desvendar e para continuar o trabalho.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo do modelo de Nambu-Jona-Lasínio no setor $SU(3)$ para o cálculo de propriedades de mésons leves, mais especificamente, para o pión e káon. Apresentamos uma revisão do modelo e obtenção dos termos da ação efetiva, que correspondem aos observáveis calculados.

Calculamos a equação de GAP que nos dá a massa constituinte dos quarks, a auto-energia dos mésons que nos fornece suas massas e o fator de forma eletromagnético, esse relacionado ao fato de os mésons não serem partículas pontuais.

Os cálculos foram realizados utilizando um roteamento completamente arbitrário, o que nos forneceu parcelas não físicas nos momentos dos loops. Esses termos foram eliminados a partir da transformação proposta por Chan, proporcionando com que pudéssemos manter os termos de superfície, esses que são de grande importância para um melhor resultado dos cálculos.

Como conclusão obtivemos os gráficos dos fatores de forma eletromagnéticos para o pión e para o káon, com e sem os termos de superfície. Observamos que os termos de superfície são essenciais para a obtenção dos valores teóricos ajustados aos experimentais. Assim, concluímos que a transformação de Chan é de suma importância, pois possibilita a conservação dos termos de superfície no modelo.

Abstract

This work presents a study of Nambu-Jona-Lasinio model at $SU(3)$ sector for the calculation of light mesons proprieties, more specifically, for the meson π and the meson K . We present a revision of the model and the achievement of the effective action terms, wich correspond to the calculated observables.

We calculate the GAP equation wich give us the constituint mass to the quarks, the self-energy of the mesons that provide their masses and the eletromagnetic form factor, related to the fact that mesons are not punctual particles.

The calculations were made using a completely arbitrary routing, wich providedede the appearance of non-physical terms in the loops moments. These terms were eliminated by the transformation provided by Chan, giving us the possibility of maintaining the surface terms, wich are of sune importance for better results.

As conclusion we built the form factor's graphs for the meson π and meson K , with and without surface terms. We observed that the surface terms are essential for obtaining of the right theoretical values in accordance with the experimantal ones. Hence, we conclude that the Chan transformation is of big importance, as it keeps the surface terms of the model.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	8
2	Modelo de Nambu-Jona-Lasínio	13
2.1	Cromodinamica Quantica	13
2.2	Modelo de NJL	15
2.3	Bosonização do Modelo de NJL	18
2.3.1	Integração nos Campos Fermiônicos	20
3	Obtenção dos Observáveis Pelos Termos da Ação Efetiva	24
3.1	Equação de GAP	24
3.2	Auto-energia dos mésons	28
4	Fator de Forma Eletromagnético	38
4.1	Cálculo do fator de forma eletromagnético dos mésons	40
5	Resultados	50
5.1	Ajuste de parâmetros	50
5.2	Cálculo do Fator de Forma eletromagnético	51
6	Conclusão	54
	Referências Bibliográficas	56

Lista de Figuras

1	Tabela das partículas elementares	9
2	Ilustração de duas partículas com quiralidade opostas	16
3	Diagrama bolha para um méson	29
4	Diagrama triângulo para mésons	40
5	Valores experimentais do Fator de Forma eletromagnético	52
6	Gráfico do Fator de Forma eletromagnético para o Píon	53
7	Gráfico do Fator de Forma eletromagnético para o Káon	53

INTRODUÇÃO

O *Modelo Padrão* é utilizado para explicar toda física das partículas elementares e de três forças da natureza (eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca), que juntas, formam toda a matéria. Foi desenvolvido no início da década de 70 e é uma teoria quântica de campos, consistente com a *Mecânica Quântica* e com a *Teoria da Relatividade Especial* e, até o presente momento, não obteve-se êxito em incorporar a quarta força (gravitacional) no modelo. O modelo consegue descrever todos os fenômenos microscópicos conhecidos com grande precisão e foi considerado uma das grandes conquistas do último século.

O *Modelo Padrão* descreve dois tipos de partículas: *Bósons* e *Férmions*. Os bósons são partículas com spin inteiro, que não obedecem o *Princípio de exclusão de Pauli* e, ainda, são os mediadores das forças fundamentais. Os férmions são partículas com spin semi-inteiro, obedecem ao *Princípio de exclusão de Pauli* e constituem a matéria.

Os férmions são divididos em quarks e léptons. Os quarks são as partículas que constituem os núcleons, possuem carga fracionária e interagem por meio da interação forte. Os quarks apresentam o fenômeno de confinamento, ou seja, se comportam como partículas livres em pequenas distâncias pois o valor da constante de acoplamento se torna menor nessa situação. Acredita-se que seja uma característica inerente da QCD pois até o momento não obteve-se sucesso em detectar quarks livre. Os léptons são partículas de carga inteira e não possuem carga de cor, sendo assim não experimentam a interação forte. Juntos eles formam partículas chamadas *Hádrons*. Os léptons são divididos entre os que possuem carga (elétron, múon e tau) e os que não possuem carga (neutrino do elétron, neutrino do múon e neutrino do tau). Tanto os quarks quanto os léptons são divididos em 3 famílias onde a diferença entre elas é apenas a massa.

Os bósons são divididos em *Bósons de Calibre* que possuem spin 1 e o *Bóson de Higgs* que possui spin 0. Como a descoberta de ondas gravitacionais pela colaboração dos observatórios *LIGO* e *Virgo* foi anunciada no dia 11 de fevereiro de 2016 [1] espera-se que também exista o *Gráviton*, de spin 2, que já havia sido previsto pela teoria.

	1 st	2 nd	3 rd			
QUARKS	2.3 M u up 2/3 1/2	1.27 G c charm 2/3 1/2	173.1 G t top 2/3 1/2	strong nuclear force	H 126 G 0 0 higgs	
	4.8 M d down -1/3 1/2	95 M s strange -1/3 1/2	4.2 G b bottom -1/3 1/2			g gluon 0 1
	0.511 M e electron -1 1/2	105.7 M μ muon -1 1/2	1.78 G τ tau -1 1/2			γ photon 0 1
LEPTONS	<2.2 ν_e e neutrino 0 1/2	0.17 M ν_μ μ neutrino 0 1/2	<15.5 M ν_τ τ neutrino 0 1/2	weak nuclear force	W boson 80.4 G ±1 1	
						Z boson 91.2 G 0 1
FERMIONS			GAUGE BOSONS			

Figura 1: Tabela das partículas elementares

O modelo padrão consiste da união da *Teoria Eletrofraca* que descreve as interações fracas e eletromagnéticas e da *Cromodinâmica Quântica* (QCD) que descreve a interação forte. O nome cromodinâmica quântica é utilizado pois as partículas que interagem fortemente, os quarks, possuem uma carga forte, chamada de carga de cor, que podem ser: vermelha, verde ou azul. Todas as partículas que não interagem fortemente possuem carga de cor neutra, ou seja, combinações das três cores ou de cor e anti-cor.

Inicialmente o desenvolvimento da QCD enfrentou um grande problema. A constante de acoplamento dos vértices da teoria possuía valores superiores a 1, ao contrário da QED onde para cada vértice se multiplica um fator $1/137$. Esse fato gerava o problema de que quanto mais complexos e mais vértices o processo possuísse mais provável ele seria. Isso invalidava a utilização das técnicas perturbativas desenvolvidas para a QED. O problema foi resolvido no momento que descobriu-se que a constante de acoplamento da teoria era dependente da distância entre as partículas. Se a interação entre as partículas ocorresse em distâncias bem abaixo do tamanho atômico os quarks se moveriam praticamente como partículas livres. Esse fenômeno é conhecido como *Liberdade Assintótica* [2].

A QCD, no regime de altas energias ou pequenas distâncias, é bem entendida pois, como apresenta o fenômeno de *liberdade assintótica*, podemos fazer uso das técnicas perturbativas da QED. Já no regime de baixas energias a constante de acoplamento adquire um valor alto, logo não podemos realizar cálculos perturbativos. Dessa maneira deve-se procurar alguma maneira de se realizar os cálculos, nessa faixa de energia, a partir da lagrangiana definida para a QCD.

A lagrangiana da QCD é bem definida mas muito complicada para extrairmos as propriedades das partículas descritas pelo modelo, portanto procura-se uma lagrangiana efetiva, mais simples, tratável perturbativamente, e que descreva os fenômenos de nosso interesse, mas que mantenha as principais características e simetrias da QCD. Nessas lagrangianas são levados em conta somente os graus de liberdade importantes para os fenômenos que deseja-se descrever, simplificando, assim, a obtenção das propriedades física do sistema.

Uma teoria efetiva para a QCD deve possuir as seguintes características [3, 4]

- A teoria deve ser formulada a partir de quarks, com ou sem a presença de glúons;
- deve possuir simetria quiral e a quebra espontânea dessa simetria;
- o vácuo da teoria deve ser assimétrico;
- as correntes axiais devem gerar transições do estado fundamental para o estado de um pión ou káon;
- o espaço deve conter $N_f^2 - 1$ bósons de Goldstone.

Para esse trabalho usaremos o *modelo de Nambu-Jona-Lasinio* (NJL). O modelo surgiu a partir de dois artigos com o título de "Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity" [5, 6], onde são combinados elementos da teoria spinorial não-linear de Heisenberg com analogias retiradas da teoria BCS [7]. Foi, originalmente, construído para lidar com a interação entre dois núcleons como uma interação de dois corpos, porém, hoje, é utilizado como um modelo de interação entre quarks.

A lagrangiana do modelo é construída de forma a manter algumas das simetrias da QCD e também a quebra dessas simetrias, que são importantes, por exemplo, para gerar a massa dos férmions do modelo. Os bósons de Goldstone, advindos da quebra de simetria, são interpretados como o octeto de mésons pseudo-escalares. Observa-se também relações da álgebra de correntes presentes no modelo de NJL, tendo em vista que essas relações só dependem das propriedades de simetria e não do modelo em si.

Por ser um modelo onde as interações são tomadas como de caráter pontual, em $(3 + 1)$ dimensões, o modelo de NJL não é renormalizável, portanto para usá-lo como um modelo efetivo, um esquema de regularização deve ser adotado. No presente trabalho

adotaremos a regularização por *cut-off*, ou seja, estabelecemos um valor de corte para os momentos dos quarks que pode ser pensado como o intervalo de validade do modelo.

Uma característica do modelo é que a interação local não apresenta o fenômeno de confinamento de quarks, que, à primeira vista, parece ser um grande problema, porém, para muitas situações, essa característica não possui grande importância. Um exemplo é que a interação dos hádrons abaixo do limiar para a produção de quarks livres não pode depender dos detalhes do confinamento.

No entanto o modelo é de grande valia para o estudo de transições de fase quirais pois possui o processo da quebra dessa simetria, que é feito adicionando um termo de massa à lagrangiana. O modelo de NJL é, assim, um modelo fenomenológico de interações fermiônicas e que preserva várias características da QCD, porém possui a vantagem de podermos tratá-lo perturbativamente no regime de baixas energias, ao contrário da QCD.

Para realizarmos os cálculos dos modos mesônicos vamos bosonizar a lagrangiana onde teremos campos fermiônicos e bosônicos que são interpretados como os mésons pseudo-escalares.

Por ser não-renormalizável vimos que o tratamento para o modelo de NJL deve ser acompanhado de um *cut-off*. Isso faz com que, ao realizarmos um shift na variável de integração apareçam termos de superfície que em alguns esquemas de regularização são zero. No nosso trabalho faremos uso da transformação proposta por Chan [8] e preservaremos esses termos e realizaremos os cálculos com e sem os termos de superfície para que possamos determinar como modificam os resultados finais.

Ao realizarmos os cálculos dos observáveis usaremos um roteamento completamente arbitrário que, no final dos cálculos, resultará em um termo não físico adicionado aos momentos. Porém veremos que podemos absorver esses termos fazendo uso da transformação proposta por Chan. Consideraremos, entretanto, a possibilidade de inclusão de termos de superfície nas expressões das amplitudes, em contraste com abordagens que tomam tais termos identicamente nulos em função da regularização empregada.

O trabalho será organizado da seguinte forma: No capítulo 2 traremos um background do modelo de NJL assim como o processo de bosonização e obtenção dos termos da ação efetiva. No capítulo 3 faremos os cálculos de alguns observáveis para os mésons pseudo-escalares como a equação de GAP, a auto energia dos mésons a partir dos termos obtidos no capítulo anterior. No capítulo 4 falaremos sobre o fator de forma

eletromagnético, esse, o tema principal do trabalho e realizaremos os cálculos dessa quantidade para os mésons pseudo-escalares. No capítulo 5 faremos a apresentação dos ajustes de parâmetros para o modelo e realizaremos os cálculos numéricos para os observáveis propostos. Finalmente no capítulo 6 apresentaremos as conclusões e possíveis perspectivas do trabalho.

MODELO DE NAMBU-JONA-LASÍNIO

Neste capítulo vamos dar o background para entendermos o Modelo de Nambu-Jona-Lasínio (NJL). Mostraremos desde a lagrangeana inicial até a obtenção da ação efetiva passando pelo processo de Bosonização do modelo. Observa-se, porém, que não pretendemos mostrar uma descrição completa de toda a formulação do modelo. Tal descrição pode ser encontrada em [5, 6, 9–11].

2.1 Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é uma teoria de gauge que descreve os processos onde se observam interações fortes. Em seu limite de altas energias observamos o efeito de *liberdade assintótica* que faz com que o acoplamento quark-gluon seja pequeno. Nesse caso podemos usar, com sucesso, as técnicas perturbativas desenvolvidas na Eletrodinâmica Quântica.

A lagrangiana da QCD é dada por:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \psi \not{D} \psi \quad (2.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$\not{D} = \not{\partial} - i \frac{g}{2} \lambda^a \not{A}^a$$

são o tensor do campo de Glúons e a derivada covariante, respectivamente, g é a constante de acoplamento da QCD e f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo $SU(3)$ no espaço

de cores. Os espinores ψ representam vetores no espaço de sabores do grupo $SU(3)$ que é

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

onde u , d e s são os campos fermiônicos relacionados aos *quarks up, down e strange*, respectivamente. As matrizes λ^a com $a = 1, 2, 3, \dots, 8$ são as *Matrizes de Gell-Mann* dadas por:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (2.2) \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \lambda_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A lagrangiana (2.1) apresenta invariância sobre algumas transformações de simetria como a $U_V(1)$, $SU_V(3)$ e a mais importante para nossa finalidade $SU_A(3)$ que é a transformação de simetria quiral. Essa transformação é realizada da seguinte forma:

$$\psi \rightarrow e^{\frac{-i\lambda^a \theta^a \gamma^5}{2}} \psi \quad (2.3)$$

onde θ^a é o conjunto de parâmetros globais da transformação.

Observa-se na mesma lagrangiana o processo de quebra espontânea de simetria quiral global. Essa quebra nos indica a existência de partículas de massa zero e spin um, os chamados *Bósons de Goldstone*. O processo de formação desses bósons é descrito pelo *Teorema de Goldstone* [12]. Nos modelos fenomenológicos esses bósons são interpretados como sendo o *Octeto de mésons pseudo-escalares*.

2.2 Modelo de NJL

O Modelo de NJL é utilizado para descrever fenômenos onde a troca de momentos é baixa. Ele é usado pois, nesse limite, as constantes de acoplamento da QCD ficam grandes não podendo, assim, se utilizar os métodos perturbativos desenvolvidos na QED.

O modelo de NJL é um bom modelo efetivo para tratarmos de processos menos energéticos pois conserva algumas simetrias da QCD observadas na natureza e possui, também, a quebra da simetria quiral que gera massa para os quarks e nos fornece os bósons de Goldstone. Observa-se também que outras relações importantes da QCD como a *Relação de Goldberg-Treiman* e a *Relação de Gell-Mann-Oaks-Renner* [13, 14] são satisfeitas.

Existem, porém, alguns problemas com o modelo que fazem com que tenhamos que considera-lo um modelo efetivo. Vimos que, como as interações são pontuais, em $(3+1)$ dimensões o modelo é não renormalizável, o que faz com que os resultados não dependam somente dos parâmetros físicos, mas também do esquema de regularização empregado. Outra adversidade do modelo é que o mesmo não apresenta confinamento de quarks. Assim abre-se a possibilidade do aparecimento de fenômenos não físicos como a presença de quarks livres, ainda não observada experimentalmente. E como não apresenta graus de liberdade gluônicos obtemos problemas para descrições de fenômenos em altas energias. Apesar disso o modelo apresenta grande utilidade para o estudo de propriedades de simetria e para fenômenos relacionados a transições de fase quirais.

A lagrangiana do modelo nos fornece as interações escalares, pseudo-escalares, vetoriais e pseudo-vetoriais da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\partial - \hat{m}) \psi + \frac{1}{2}G \left[(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right] + \frac{1}{2}G_v \left[(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_a\gamma^\mu\gamma^5\psi)^2 \right]. \quad (2.4)$$

A lagrangiana fermiônica com seus setores escalar e pseudo-escalar em $SU(3)$ é escrita como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\partial - \hat{m}) \psi + \frac{1}{2}G \left[(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right] \quad (2.5)$$

onde \hat{m} é a matriz de massa do modelo com as massas dos quarks *up*, *down* e *strange* dada por

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Vemos que no limite quiral, $m \rightarrow 0$, a lagrangiana obedece às mesmas simetrias da QCD e dentre elas a transformação quiral que, sua quebra, nos fornece os *Modos de Goldstone* do modelo. Esses modos de Goldstone são interpretados como os mésons pseudo-escalares.

A simetria quiral $U_L(1) \otimes U_R(1)$ se caracteriza pelo fato de partículas sem massa de spin $1/2$, tem uma helicidade bem definida, ou seja, seu spin está alinhado ou anti-alinhado com o seu momento [10]

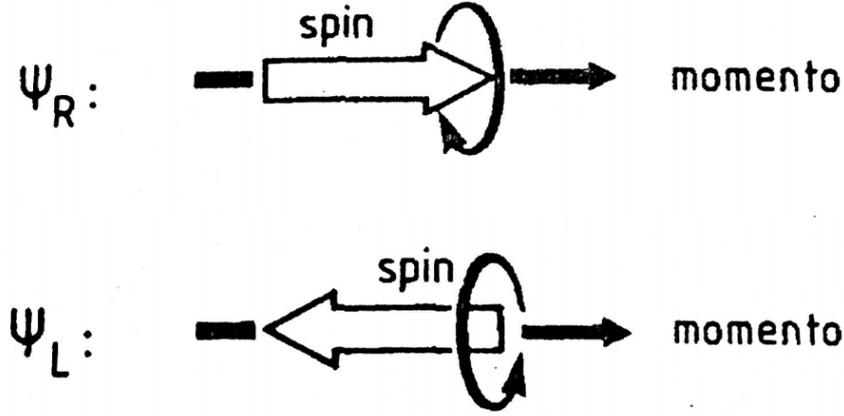


Figura 2: Ilustração de duas partículas com quiralidade opostas

e pela invariância da lagrangiana do modelo sobre o grupo $SU_A(3)$, que como vimos acima é dada pela transformação

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{\frac{-i\lambda^a \theta^a \gamma^5}{2}} \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{\frac{-i\lambda^a \theta^a \gamma^5}{2}}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Realizando as transformações (2.7) na lagrangiana do modelo (2.5) no limite quiral ($m \rightarrow 0$) provaremos a invariância da parte livre:

$$\begin{aligned}\bar{\psi} (i\partial) \psi &\rightarrow \bar{\psi} e^{\frac{-i\lambda^a \theta^a \gamma^5}{2}} (i\partial) e^{\frac{-i\lambda^a \theta^a \gamma^5}{2}} \psi \\ &= \bar{\psi} e^{\frac{-i\lambda^a \theta^a \gamma^5}{2}} e^{\frac{i\lambda^a \theta^a \gamma^5}{2}} (i\partial) \psi \\ &= \bar{\psi} (\partial) \psi\end{aligned}\quad (2.8)$$

Realizando o mesmo procedimento agora para a parte de interação:

$$\begin{aligned}(\bar{\psi} \lambda_a \psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi} \lambda_a \psi)^2 \cos^2 \left(\frac{-\lambda^a \theta^a}{2} \right) - (\bar{\psi} \lambda_a \gamma^5 \psi)^2 \sin^2 \left(\frac{-\lambda^a \theta^a}{2} \right) + \\ &\quad 2i (\bar{\psi} \lambda_a \psi) (\bar{\psi} \lambda_a \gamma^5 \psi) \cos(-\lambda^a \theta^a) \sin(-\lambda^a \theta^a)\end{aligned}\quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \left(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^5\psi\right)^2 &\rightarrow \left(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^5\psi\right)^2 + \sin^2(-\lambda^a\theta^a)(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + \sin^2(-\lambda^a\theta^a)\left(\bar{\psi}\gamma^5\lambda_a\psi\right)^2 - \\ &2i(\bar{\psi}\lambda_a\psi)\left(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^5\psi\right)\cos(-\lambda^a\theta^a)\sin(-\lambda^a\theta^a) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + \left(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^5\psi\right)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2\cos^2\left(\frac{-\lambda^a\theta^a}{2}\right) - \left(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^5\psi\right)^2\sin^2\left(\frac{-\lambda^a\theta^a}{2}\right) + \\ &+ 2i(\bar{\psi}\lambda_a\psi)\left(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^5\psi\right)\cos(-\lambda^a\theta^a)\sin(-\lambda^a\theta^a) + \\ &+ \left(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^5\psi\right)^2 + \sin^2(-\lambda^a\theta^a)(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + \sin^2(-\lambda^a\theta^a)\left(\bar{\psi}\gamma^5\lambda_a\psi\right)^2 - \\ &- 2i(\bar{\psi}\lambda_a\psi)\left(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^5\psi\right)\cos(-\lambda^a\theta^a)\sin(-\lambda^a\theta^a) \\ &= (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + \left(\bar{\psi}\lambda_a\gamma^5\psi\right)^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde utilizamos que

$$e^{-i\lambda^a\theta^a\gamma^5} = \cos(-\lambda^a\theta^a) + i\gamma^5\sin(-\lambda^a\theta^a).$$

Dessa maneira provamos que a lagrangiana do modelo, no limite quiral é invariante perante a transformação (2.7), logo preserva a simetria $SU_A(3)$ da QCD.

O processo da quebra da simetria quiral é obtido através do termo de massa na lagrangiana. Pelo *teorema de Noether* sabemos que para qualquer simetria contínua presente na lagrangiana corresponde uma corrente conservada [15]. Podemos mostrar isso analisando o divergente da corrente axial $j^{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$. Observaremos que para que tenhamos essa corrente conservada, ou seja, esse divergente igual a zero, teremos que, necessariamente, tomar a massa como sendo zero. Esse resultado nos confirma que, fora do limite quiral ($m \neq 0$) não observamos mais a presença da simetria.

A equação de Dirac e sua complexa conjugada podem ser escritas como

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0 \rightarrow \gamma^\mu\partial_\mu\psi = -im\psi \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - m) &= 0 \rightarrow \bar{\psi}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu = im\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Realizando agora o divergente da corrente axial teremos

$$\begin{aligned} \partial_\mu(j^{\mu 5}) &= \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) = \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu\gamma^5\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como $\bar{\psi}$ e ψ são soluções da equação de Dirac e $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$ temos de (2.12)

$$\begin{aligned} \partial_\mu (j^{\mu 5}) &= im\bar{\psi}\gamma^5\psi + im\bar{\psi}\gamma^5\psi \\ &= 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Observamos, portanto, que a única maneira de termos a conservação da corrente axial é tomarmos $m = 0$. Assim vemos que a simetria foi quebrada.

O modelo de Nambu-Jona-Lasinio também é utilizado para estudar fenômenos onde se adicionam parâmetros externos como temperatura, potencial químico e campos de Maxwell e de cor. Porém nesse trabalho não cobriremos essas abordagens que podem ser encontradas em [9].

Vamos nesse momento implementar as manipulações necessárias para realizarmos os cálculos para os mésons a serem descritos. Partimos da lagrangiana 2.5 em seus setores escalares e pseudo-escalares e encontramos o funcional gerador das funções de Green que pode ser escrito em uma expansão funcional das funções de Green de n-pontos [16,17]. O funcional gerador fermiônico é escrito como:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \frac{i}{N} \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi) \right] \quad (2.15)$$

onde $\bar{\psi}$ e ψ são os campos fermiônicos, $\bar{\eta}$ e η são as fontes fermiônicas e N é um fator de normalização. Substituindo (2.5) em (2.15) teremos:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \frac{i}{N} \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m}) \psi + \frac{G}{2} \left((\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi \right] \right\}. \quad (2.16)$$

Observa-se que a descrição das interações fermiônicas é dada por interações quárticas entre os férmions. Para que possamos estudar os fenômenos envolvendo mésons vamos realizar o processo de *Bosonização* [9]. Esse processo substituirá os graus de liberdade exclusivamente fermiônicos por graus de liberdade bosônicos. Isso fará com que possamos interpretar os graus bosônicos como os mésons e assim estudar seus processos de interação, agora mediado por férmions que, no nosso caso, são os quarks.

2.3 Bosonização do Modelo de NJL

O processo de bosonização do modelo de NJL consiste em introduzirmos campos bosônicos auxiliares na lagrangiana. A introdução desses campos não pode alterar as equações de movimento de Euler-Lagrange portanto dizemos que são campos sem

dinâmica.

A introdução desses campos que serão associados aos mésons nos fazem trocar as interações quárticas entre os férmions por interações mesônicas intermediadas por quarks.

Vamos realizar o processo de bosonização via formalismo de integrais de caminho de Feynman, onde os campos mesônicos, sem dinâmica, a serem introduzidos são:

$$\int \mathcal{D}\mathbf{S}_a \exp \left[\frac{-i}{2G} (\mathbf{S}_a - G\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 \right] \quad (2.17)$$

$$\int \mathcal{D}\mathbf{P}_a \exp \left[\frac{-i}{2G} (\mathbf{P}_a - G\bar{\psi}i\gamma^5\lambda_a\psi)^2 \right] \quad (2.18)$$

onde \mathbf{S}_a e \mathbf{P}_a se referem aos campos escalar e pseudo-escalar, respectivamente.

Sendo assim reescrevemos a lagrangiana adicionando os termos relacionados aos campos mesônicos da seguinte forma:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{1}{2G} [\mathbf{S}_a - G\bar{\psi}\lambda_a\psi]^2 - \frac{1}{2G} [\mathbf{P}_a - G\bar{\psi}i\gamma^5\lambda_a\psi]^2. \quad (2.19)$$

Ao aplicarmos as equações de Euler-Lagrange nos campos auxiliares obtemos as relações para \mathbf{S}_a e \mathbf{P}_a :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbf{S}_a} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \mathbf{S}_a)} = 0 \Rightarrow \mathbf{S}_a = G\bar{\psi}\lambda_a\psi \quad (2.20)$$

e da mesma maneira

$$\mathbf{P}_a = G\bar{\psi}i\gamma^5\lambda_a\psi. \quad (2.21)$$

Temos, então, a lagrangiana bosonizada do modelo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\partial - \hat{m}) \psi + \frac{1}{2} G \left[(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right] - \\ & - \frac{1}{2G} [\mathbf{S}_a - G\bar{\psi}\lambda_a\psi]^2 - \frac{1}{2G} [\mathbf{P}_a - G\bar{\psi}i\gamma^5\lambda_a\psi]^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

que abrindo os termos quadráticos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\partial - \hat{m}) \psi + \frac{1}{2} G \left[(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right] - \\ & - \frac{1}{2G} \left[\mathbf{S}_a^2 - 2\mathbf{S}_a G\bar{\psi}\lambda_a\psi + G^2 (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 \right] - \\ & - \frac{1}{2G} \left[\mathbf{P}_a^2 - 2G\bar{\psi}i\gamma^5\lambda_a\psi + G^2 (\bar{\psi}i\gamma^5\lambda_a\psi)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dessa maneira vemos que os termos $\bar{\psi}\lambda_a\psi^2$ e $\bar{\psi}i\gamma^5\lambda_a\psi^2$ da lagrangiana inicial podem ser

cortados com os termos dos campos auxiliares, portanto ficamos com

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m}) \psi - \frac{1}{2G} [\mathbf{S}_a^2 - 2\mathbf{S}_a G \bar{\psi} \lambda_a \psi] - \frac{1}{2G} [\mathbf{P}_a^2 - 2G \bar{\psi} i\gamma^5 \lambda_a \psi] \\ \mathcal{L} &= \bar{\psi} \left(i\cancel{\partial} - \hat{m} + \mathbf{S}_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i\gamma^5 \lambda_a \right) \psi - \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2).\end{aligned}\quad (2.24)$$

Podemos observar em (2.24) que trocamos as interações quárticas de (2.5) por interações triplas entre férmions e bósons contando ainda com os termos quadráticos nesses campos.

O valor esperado de \mathbf{S}_a no vácuo não é zero portanto temos que $\langle 0 | \mathbf{S}_a | 0 \rangle = c_a$. Desse modo podemos introduzir um novo campo \mathbf{S}'_a que tem valor esperado nulo no vácuo, portanto podemos fazer $\mathbf{S}_a = \mathbf{S}'_a + c_a$. Logo ficamos com

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} \left(i\cancel{\partial} - \hat{m} + (\mathbf{S}'_a + c_a) \lambda_a + \mathbf{P}_a i\gamma^5 \lambda_a \right) \psi - \frac{1}{2G} [(\mathbf{S}'_a + c_a)^2 + \mathbf{P}_a^2] \\ \mathcal{L} &= \bar{\psi} \left(i\cancel{\partial} - \hat{m} + \mathbf{S}'_a \lambda_a + c_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i\gamma^5 \lambda_a \right) \psi - \frac{1}{2G} [\mathbf{S}'_a{}^2 - 2\mathbf{S}'_a c_a + c_a^2 + \mathbf{P}_a^2] \\ \mathcal{L} &= \bar{\psi} \left(i\cancel{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}'_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i\gamma^5 \lambda_a \right) \psi - \frac{1}{2G} [\mathbf{S}'_a{}^2 + c_a^2 + \mathbf{P}_a^2] + \frac{\mathbf{S}'_a c_a}{G},\end{aligned}\quad (2.25)$$

onde $\hat{M} = \hat{m} - c_a \lambda_a$ é uma redefinição do termo de massa do campo fermiônico. Essa nova massa é chamada de massa constituinte dos quarks e é consequência da quebra de simetria quiral, portanto, ao calcularmos o valor esperado dos campos \mathbf{S}_a , chegaremos a *Equação de GAP* para esses quarks.

Para simplificarmos a notação vamos fazer $\mathbf{S}'_a \rightarrow \mathbf{S}_a$ e $P'_a \rightarrow P_a$.

2.3.1 Integração nos Campos Fermiônicos

Agora que temos a lagrangiana bosonizada podemos reescrever o funcional gerador (2.16) com essa nova expressão,

$$\begin{aligned}Z[\eta, \bar{\eta}] &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\mathbf{P}_a \int \mathcal{D}\mathbf{S}_a \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\bar{\psi} \left(i\cancel{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i\gamma^5 \lambda_a \right) \psi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + s_a \mathbf{S}_a + p_a \mathbf{P}_a + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Podemos ver no funcional (2.26) que temos duas partes distintas: um termo bosônico e um termo fermiônico. Dessa maneira podemos separar o funcional em dois termos,

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\mathbf{P}_a \int \mathcal{D}\mathbf{S}_a \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + s_a \mathbf{S}_a + p_a \mathbf{P}_a \right] \right\} Z_F \quad (2.27)$$

onde Z_F é o funcional fermiônico

$$Z_F[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \int d^4y \left[\bar{\psi} \left(i\partial - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i\gamma^5 \lambda_a \right) \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\}. \quad (2.28)$$

Para encontrarmos o propagador fermiônico devemos realizar a derivada funcional com relação as fontes do funcional gerador e no final tomar as fontes como zero. Dessa maneira acharemos a função de Green de dois pontos que é o nosso propagador. Realizando a derivada chegamos que o propagador fermiônico \mathcal{D} é

$$\mathcal{D} = \frac{1}{i\partial - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i\gamma^5 \lambda_a}. \quad (2.29)$$

Dessa maneira temos que $(i\partial - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i\gamma^5 \lambda_a) = \mathcal{D}^{-1}$, portanto o funcional gerador fermiônico pode ser escrito como

$$Z_F[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \int d^4y \left[\bar{\psi} \mathcal{D}^{-1} \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\}. \quad (2.30)$$

Agora temos que resolver a integral do funcional gerador (2.26). Como vimos em (2.27) temos um termo fermiônico onde as integrais são feitas somente com relação aos espinores ψ e $\bar{\psi}$. Dessa maneira utilizaremos a *Algebra de Grassman* para resolvermos as integrais. E de acordo com [16] temos a seguinte relação

$$\int \prod_{i,j} d\theta_i^* d\theta_j \exp \left[- \left(\theta_i^* M_{ij} \theta_j + \theta_i^* C_i + \theta_i C_i^* \right) \right] = N \det(M_{ij}) \exp \left(C_i^* M_{ij}^{-1} C_j \right) \quad (2.31)$$

tomando $M_{ij} = \mathcal{D}^{-1} = (i\partial - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i\gamma^5 \lambda_a)$ temos que

$$Z_F = N \det(\mathcal{D}^{-1}) \exp \left\{ -i \int d^4x \int d^4y \left[\bar{\eta} \mathcal{D}(x,y) \eta \right] \right\}, \quad (2.32)$$

logo chegamos ao seguinte funcional gerador

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\mathbf{P}_a \int \mathcal{D}\mathbf{S}_a \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + s_a \mathbf{S}_a + p_a \mathbf{P}_a \right] \right\} \det(\mathcal{D}^{-1}) \exp \left\{ -i \int d^4x \int d^4y \left[\bar{\eta} \mathcal{D}(x,y) \eta \right] \right\}. \quad (2.33)$$

Para podermos colocar o $\det(\mathcal{D}^{-1})$ na exponencial podemos utilizar a seguinte relação, válida na aproximação a um loop [17]

$$\ln \det A = \text{Tr} \ln A \Rightarrow \det A = \exp \text{Tr} \ln A, \quad (2.34)$$

dessa maneira podemos fazer a seguinte substituição

$$\det(\mathcal{D}^{-1}) = \exp[\text{Tr}(\ln \mathcal{D}^{-1})]$$

$$Z_F = N \exp \left\{ \text{Tr}[\ln(\mathcal{D}^{-1})] - i \int d^4x \int d^4y [\bar{\eta} \mathcal{D}(x,y) \eta] \right\} \quad (2.35)$$

onde

$$\mathcal{D} = \frac{\delta^4(x-y)}{i\cancel{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i \gamma^5 \lambda_a}. \quad (2.36)$$

Temos agora um funcional gerador que é escrito em termos de uma ação efetiva S_{ef} . Realizando a integral em d^4y ficaremos com:

$$Z = N \int \mathcal{D}\mathbf{P}_a \int \mathcal{D}\mathbf{S}_a \exp \left\{ iS_{ef} + i \int d^4x \bar{\eta} \frac{1}{i\cancel{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i \gamma^5 \lambda_a} \eta \right\} \quad (2.37)$$

onde

$$\begin{aligned} S_{ef} &= - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right\} - i \text{Tr} \left[\ln \left(i\cancel{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + \mathbf{P}_a i \gamma^5 \lambda_a \right) \right] \\ &= - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right\} + i \text{Tr} \left[\ln \left(i\cancel{\partial} - \hat{M} \right) \right] - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i\cancel{\partial} - \hat{M}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

O termo $i \text{Tr} \left[\ln \left(i\cancel{\partial} - \hat{M} \right) \right]$ é independente dos campos bosônicos portanto podemos englobá-lo na constante de normalização do funcional gerador. Sendo assim ficamos com

$$S_{ef} = - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right\} - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i\cancel{\partial} - \hat{M}} \right) \right]. \quad (2.39)$$

Vemos que utilizando (2.39) no funcional gerador teremos problemas em determinar o traço do logaritmo natural, por isso vamos expandir o funcional utilizando a relação [18]

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (2.40)$$

onde definiremos

$$x = \left(\frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i\cancel{\partial} - \hat{M}} \right), \quad (2.41)$$

portanto teremos a ação efetiva escrita como uma série infinita

$$S_{ef} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots \quad (2.42)$$

onde cada termo será interpretado como uma amplitude de probabilidade de transição e serão constituintes da lagrangiana efetiva para o modelo. Dessa forma podemos separar

os 4 primeiros termos que são os que apresentarão algum tipo de divergência nas integrais.

Façamos então a expansão do termo $\text{Tr} \left[\ln \left(1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right) \right]$:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right) \right] &= \text{Tr} \left[\left(\frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right)^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Vamos agora substituir (2.43) na ação efetiva e separar os termos ordem por ordem:

- Termo linear:

$$S_1 = - \int d^4x \frac{\mathbf{S}_a c_a}{G} - i \text{Tr} \left(\frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right). \quad (2.44)$$

- Termo quadrático:

$$S_2 = - \int d^4x \frac{\mathbf{S}_a^2 \mathbf{P}_a^2}{2G} + \frac{i}{2} \text{Tr} \left(\frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right)^2. \quad (2.45)$$

- Termo cúbico:

$$S_3 = - \frac{i}{3} \text{Tr} \left(\frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right)^3. \quad (2.46)$$

- Termo quártico

$$S_4 = \frac{i}{4} \text{Tr} \left(\frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right)^4. \quad (2.47)$$

Os termos da ação efetiva separados nos fornecem amplitudes de probabilidades de interações envolvendo mésons no modelo e, dessa maneira, poderemos calcular valores para observáveis importantes. No próximo capítulo faremos os cálculos de alguns deles.

OBTENÇÃO DOS OBSERVÁVEIS PELOS TERMOS DA AÇÃO EFETIVA

Nesse capítulos calcularemos alguns observáveis utilizando os termos expandidos da ação efetiva. Esses termos correspondem, cada um, a um observável como a *Equação de GAP*, a *auto energia* dos mésons, o *Condensado de Quarks* entre outros.

3.1 Equação de GAP

A *Equação de GAP* nos fornece as massas constituintes dos quarks que, no limite quiral são zero portanto ela nos fornece o valor esperado do modelo no vácuo. Se estivéssemos em um mundo quiralmente simétrico os quarks teriam massa zero e assim também seriam as massas dos mésons. Convém observarmos que a massa constituinte dos quarks é um elemento dinâmico, fruto das interações entre quarks vizinhos. Essa ideia pode ser pensada como tentarmos empurrar um elétron contra outro, assim, sua massa pareceria maior do que seu valor real. No vácuo a massa do quark seria o valor de massa corrente.

Para obtermos a equação devemos extremizar a ação efetiva com relação ao campo escalar, e tomar como zero os outros campos. A ação efetiva é dada por

$$S_{ef} = - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right\} - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right) \right]. \quad (3.1)$$

Para extremizarmos o funcional acima com relação a \mathbf{S}_a devemos fazer a seguinte derivada:

$$\left. \frac{\partial S_{ef}}{\partial \mathbf{S}_a} \right| = 0, \quad (3.2)$$

onde tomaremos $\mathbf{S}_a = 0$. Podemos ver que ao realizarmos a derivada na ação efetiva expandida teremos somente o termo relacionado a S_1 diferente de zero logo os termos de ordem superior serão zero.

O resultado da derivada é:

$$\frac{\partial S_{ef}}{\partial \mathbf{S}_a} = - \int d^4x \frac{1}{G} c_a - i \text{Tr} \left(\frac{\lambda_a}{i\partial - \hat{M}} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Para que a integral seja zero e como estamos integrando em todo o espaço o integrando deve ser zero, logo:

$$\frac{1}{G} c_a - i \text{Tr} \left(\frac{\lambda_a}{i\partial - \hat{M}} \right) = 0 \Rightarrow c_a = -Gi \text{Tr} \left(\frac{1}{i\partial - \hat{M}} \right). \quad (3.4)$$

Observe que em (3.4), λ_a transformou-se em uma matriz identidade. Isso ocorre pois a matriz λ_a relacionada ao campo escalar é, na verdade, a matriz identidade. Portanto já fizemos a substituição.

Sabemos que $-c_a = \hat{M} - \hat{m}$, portanto substituindo em 3.4 teremos:

$$\hat{M} - \hat{m} = Gi \text{Tr} \left(\frac{1}{i\partial - \hat{M}} \right). \quad (3.5)$$

Podemos agora definir a quantidade $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ como o condensado de quarks a uma unidade de sabor. Essa quantidade é dada por:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -i \text{Tr} \left(\frac{1}{i\partial - \hat{M}} \right). \quad (3.6)$$

Vemos que o valor medio do campo escalar não se anula, o que da origem à massa dos quarks como consequencia da quebra espontânea da simetria quiral. Isso também implica no aparecimento dos bosons de Goldstone [3, 9, 16]. Vemos isso da seguinte forma:

$$\hat{M} - \hat{m} = -G \langle \bar{\psi} \psi \rangle. \quad (3.7)$$

Para realizarmos o cálculo do condensado de quarks devemos, antes de tudo, definir o que é um traço funcional. O traço dado em uma base dos autoestados $|x\rangle$ de um operador \hat{A} é dado por:

$$\text{Tr} \hat{A} = \text{Tr}_D \int d^4x \langle x | \hat{A} | x \rangle. \quad (3.8)$$

Tendo em mãos a definição (3.8) podemos agora calcular o condensado de quarks:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -i \text{Tr} \left(\frac{1}{i\partial - \hat{M}} \right) = -i \text{Tr}_D \int d^4x \left\langle x \left| \frac{1}{i\partial - \hat{M}} \right| x \right\rangle. \quad (3.9)$$

Podemos agora inserir reações de completudeza com auto estados do operador $\not{\partial}$:

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |k\rangle\langle k|. \quad (3.10)$$

Sabemos também que $\langle x|k\rangle = e^{ikx}$ portanto temos que:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= -i\text{Tr}_D \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \langle x|k\rangle \langle k| \frac{1}{i\not{\partial} - \hat{M}} |k'\rangle \langle k'|x\rangle \\ &= -i\text{Tr}_D \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{ikx} \langle k| \frac{1}{i\not{\partial} - \hat{M}} |k'\rangle e^{ik'x} \\ &= -i\text{Tr}_D \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{ix(k-k')} \langle k| \frac{1}{i\not{\partial} - \hat{M}} |k'\rangle \\ &= -i\text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \delta(k-k') \langle k| \frac{1}{i\not{\partial} - \hat{M}} |k'\rangle \\ &= -i\text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle k| \frac{1}{i\not{\partial} - \hat{M}} |k\rangle \\ &= -i\text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle k|k\rangle \frac{1}{\not{k} - M} \\ &= -i\text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - M}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tomando o traço no espaço de cor e sabor ficamos com a expressão onde ainda devemos tirar o traço no espaço de Dirac [2].

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -iN_s N_c \text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - M}. \quad (3.12)$$

Para isso devemos racionalizar a expressão do condensado de quarks:

$$\frac{1}{\not{k} - M} = \frac{1}{\not{k} - M} \frac{\not{k} + M}{\not{k} + M} = \frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2}, \quad (3.13)$$

onde temos que

$$\not{k} + M = k_\mu \gamma^\mu + \mathbf{M}. \quad (3.14)$$

Sabemos que o Traço de um número ímpar de matrizes de Dirac é zero, portanto, da relação acima, temos que o resultado do traço é 4 [2, 13]. Logo ficamos com:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -iN_c N_s 4M \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2}. \quad (3.15)$$

Para resolvermos a integral acima devemos passar do espaço de Minkovsky para o espaço euclidiano. Para fazermos isso utilizaremos o método da rotação de Wick. Esse

método é implementado realizando uma rotação do eixo temporal para o plano complexo, dessa maneira, mudamos o contorno de integração sendo possível realizar a integral [3, 15]:

$$\begin{aligned} k_0 &= ik_4 \rightarrow k_0^2 = -k_4^2 \\ k^2 &= k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \\ &= -k_4^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = -k_E^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Escrevemos o elemento diferencial no espaço euclidiano da seguinte forma:

$$d^4k = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3 = idk_4 dk_1 dk_2 dk_3 = id^4k_E. \quad (3.17)$$

Mudando para coordenadas hiperesféricas

$$d^4k_E = k^3 dk \sin \theta_1 d\theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_2 d\phi \quad (3.18)$$

com θ_1 e θ_2 variando de 0 a π e ϕ variando de 0 a 2π .

Dessa maneira substituímos as variáveis do espaço euclidiano na integral (3.15) e ficamos com a seguinte integral:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -iN_c N_s 4M(-i) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{k^3 \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 dk d\theta_1 d\theta_2 d\phi}{k^2 + M^2}, \quad (3.19)$$

e ao realizarmos a integração nas variáveis angulares obteremos o resultado de $1/8\pi^2$, portanto:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{-N_c N_s M}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^3}{k^2 + M^2} dk. \quad (3.20)$$

Vemos que a integral (3.20) é quadraticamente divergente no limite $k \rightarrow \infty$. Dessa forma utilizaremos o recurso de *cutoff*, onde integraremos até um valor Λ que será um parâmetro do modelo. Assim ficaremos com a expressão para o condensado de quarks integrado até o valor de validade do modelo

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{-N_c N_s M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^3}{k^2 + M^2} dk. \quad (3.21)$$

Vemos então que o condensado de quarks possui valor esperado diferente de zero que advém da quebra da simetria quiral. Percebe-se que podemos calcular o valor de massa constituinte dos quarks através da equação (3.7).

3.2 Auto-energia dos mésons

A auto-energia nos dá a correção para o termo de massa dos mésons. Portanto devemos calculá-la a partir da lagrangeana efetiva do modelo que é dada por:

$$\mathcal{L}_{eff} = - \left\{ \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right\} - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Podemos expandi-la como fizemos anteriormente porém dessa vez iremos agrupa-la de maneira diferente:

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - \frac{1}{2G} \left[-1 + G \left(i \text{Tr} \left[\frac{1}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right]^2 \right) \right] \mathbf{S}_a^2 - \frac{1}{2G} \left[-1 + G \left(i \text{Tr} \left[\frac{\gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right]^2 \right) \right] \mathbf{P}_a^2 + \dots. \quad (3.23)$$

Vemos porém que os traços na equação acima, quando passados para o espaço de momentos, nos dão o cálculo das amplitudes de probabilidade dos diagramas de auto-energia para os mésons escalares e pseudo-escalares, portanto vamos chamá-los de:

$$\Sigma_S(p^2) = i \text{Tr} \left[\frac{1}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right]^2 \quad \text{e} \quad \Pi_{PS}(p^2) = i \text{Tr} \left[\frac{i \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right]^2. \quad (3.24)$$

Para encontrarmos uma relação para os campos físicos, gostaríamos de obter uma lagrangiana efetiva para o campo \mathbf{P}_a que seja da forma de uma lagrangiana efetiva livre:

$$\mathcal{L}_{eff} = (p^2 - m^2) \tilde{\mathbf{P}}_a^2 + \dots. \quad (3.25)$$

Podemos, então, definir uma função $f(p^2) = \frac{1}{G} (-1 + G \Pi_{PS}(p^2))$ e expandi-la ao redor de $p^2 = m^2$. Após isso escrevemos nossa lagrangiana efetiva da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - \frac{1}{2G} (-1 + G \Sigma_S(p^2)) \mathbf{S}_a^2 - \frac{1}{2} (f(m^2) + (p^2 - m^2) f'(m^2) + \dots) \mathbf{P}_a^2 + \dots. \quad (3.26)$$

Tomando $f'(m^2)$ em evidência teremos

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - \frac{1}{2G} (-1 + G \Sigma_S(p^2)) \mathbf{S}_a^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{f(m^2)}{f'(m^2)} + p^2 - m^2 + \dots \right) f'(m^2) \mathbf{P}_a^2 + \dots, \quad (3.27)$$

e dessa maneira podemos redefinir o campo pseudo escalar $\tilde{\mathbf{P}}_a = \sqrt{f'(m^2)} \mathbf{P}_a$ e definir :

$$g_{PSqq}^{-1} \equiv \sqrt{f'(m^2)}. \quad (3.28)$$

Ficamos então com a seguinte expressão para \mathcal{L}_{eff} :

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - \frac{1}{2G} (-1 + G\Sigma_S(p^2)) \mathbf{S}_a^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{f(m^2)}{f'(m^2)} + p^2 - m^2 + \dots \right) \tilde{\mathbf{P}}_a^2 + \dots \quad (3.29)$$

Temos que na nossa Lagrangiana efetiva redefinimos o nosso termo de massa m_{PS}^2 , que será o termo físico de massa

$$m_{PS}^2 = m^2 - \frac{f(m^2)}{f'(m^2)}. \quad (3.30)$$

Como a expansão foi realizada ao redor de um valor arbitrário m^2 , que pode assumir qualquer valor, podemos fazer com que o valor de m^2 seja o valor físico da massa do méson pseudo-escalar, ou seja, $m^2 = m_{PS}^2$. Dessa maneira temos que:

$$m_{PS}^2 = m_{PS}^2 - \frac{f(m_{PS}^2)}{f'(m_{PS}^2)} \quad \Rightarrow \quad f(m_{PS}^2) = 0. \quad (3.31)$$

Mas temos que $f(m_{PS}^2) = (-1 + G\Pi_{PS}(m_{PS}^2))$, portanto chegamos à relação

$$(-1 + G\Pi_{PS}(m_{PS}^2)) = 0, \quad (3.32)$$

que nos permite encontrar a massa do méson pseudo-escalar.

Vamos agora partir do diagrama bolha para o méson pseudo-escalar e calcular sua amplitude de probabilidade. Vimos que para calcularmos utilizaremos o fator que multiplica o campo P_a^2 para obtermos o valor de sua auto-energia pois temos um diagrama com dois vértices pseudo-escalares.

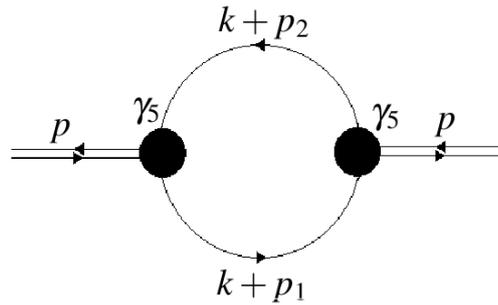


Figura 3: Diagrama bolha para um méson

Vamos calcular a amplitude de probabilidade desse diagrama utilizando o roteamento mais arbitrário possível, para assim, podermos obter o resultado mais geral.

Escrevendo os vínculos dos momentos internos do diagrama temos:

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = p \\ Ap_1 + Bp_2 = \alpha p + l = \Delta \end{cases} \quad \text{para} \quad A \neq -B \quad (3.33)$$

Onde A , B , α e l são constantes arbitrárias. Enquanto p é uma variável física (igual ao momento externo total), Δ é completamente desprovida de significado físico, e esperamos que o resultado final seja independente desta quantidade. Ficamos então com

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = p & (1) \\ p_1 + \frac{B}{A}p_2 = \frac{\Delta}{A} & (2) \end{cases} \quad (3.34)$$

Fazendo (2) – (1) teremos

$$\frac{B}{A}p_2 + p_2 = \frac{\Delta}{A} - p \Rightarrow p_2 = \left(\frac{\alpha - A}{B + A} \right) p + \frac{l}{B + A} \quad (3.35)$$

Para simplificarmos a notação faremos:

$$\frac{\alpha - A}{B + A} = \hat{\alpha} \quad \frac{l}{B + A} = \hat{\beta} \quad (3.36)$$

Portanto ficamos com a seguinte relação:

$$p_2 = \hat{\alpha}p + \hat{\beta} \quad (3.37)$$

E de (3.34) tiramos o valor de p_1

$$p_1 = p + p_2 \Rightarrow p_1 = (1 + \hat{\alpha})p + \hat{\beta} \quad (3.38)$$

Dessa maneira ficamos com o seguinte sistema, em que também faremos uma nova mudança de váriaveis:

$$\begin{cases} p_1 = (1 + \hat{\alpha})p + \hat{\beta} \\ p_2 = \hat{\alpha}p + \hat{\beta} \rightarrow p_2 = \hat{\Delta} \therefore p_1 = p + \hat{\Delta} \end{cases} \quad (3.39)$$

Agora vemos da Figura 3 que podemos construir a integral de Feynman para a amplitude de probabilidade do diagrama.

$$\Pi_{PS}(p^2) = -\text{Tr} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i\gamma_5 \frac{i}{(\not{k} + \not{p}_1) - m_1} i\gamma_5 \frac{i}{(\not{k} + \not{p}_2) - m_2} \right\}. \quad (3.40)$$

Fazendo as multiplicações com os fatores i e multiplicando por

$\frac{\left[\left(\not{k} + \not{p}_1 \right) + m_1 \right] \left[\left(\not{k} + \not{p}_2 \right) + m_2 \right]}{\left[\left(\not{k} + \not{p}_1 \right) + m_1 \right] \left[\left(\not{k} + \not{p}_2 \right) + m_2 \right]}$, ficaremos com:

$$\Pi_{PS}(p^2) = -\text{Tr} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_5 \left[\left(\not{k} + \not{p}_1 \right) + m_1 \right] \gamma_5 \left[\left(\not{k} + \not{p}_2 \right) + m_2 \right]}{\left[(k+p_1)^2 - m_1^2 \right] \left[(k+p_2)^2 - m_2^2 \right]} \right\}. \quad (3.41)$$

Para prosseguirmos agora utilizaremos um artifício conhecido como parametrização de Feynman. Onde substituiremos a mutiplicação no denominador por uma integral quadrática, da seguinte forma:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(A-B)x+B]^2}. \quad (3.42)$$

Dessa maneira temos que escolher qual termo de (3.41) será A e qual será B . No nosso caso escolheremos da seguinte forma:

$$A = (k+p_1)^2 - m_1^2 = (k+p+\hat{\Delta})^2 - m_1^2 \quad \text{e} \quad B = (k+p_2)^2 - m_2^2 = (k+\hat{\Delta})^2 - m_2^2. \quad (3.43)$$

Para simplificar faremos $k+\hat{\Delta} = k'$. Calculando $A-B$ temos:

$$\begin{aligned} (A-B) &= k'^2 + 2k'p + p^2 - m_1^2 - k'^2 + M_2^2 \\ &= p^2 + 2k'p - (m_1^2 - m_2^2). \end{aligned} \quad (3.44)$$

E agora calculamos $(A-B)x+B$

$$\begin{aligned} (A-B)x+B &= p^2x + 2pk'x - (m_1^2 - m_2^2)x + k'^2 - m_2^2 \\ &= p^2x + 2pk'x + p^2x^2 - p^2x^2 - (m_1^2 - m_2^2)x + k'^2 - m_2^2 \\ &= (k'+px)^2 + p^2x(1-x) - (m_1^2 - m_2^2)x - m_2^2 \\ &= (k+\hat{\Delta}+px)^2 - M^2(x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde chamamos $p^2x(1-x) - (m_1^2 - m_2^2)x - m_2^2$ de $-M^2(x)$ pois esse termo não depende de k . Finalmente chegamos a uma expressão para a nossa integral:

$$\Pi_{PS}(p^2) = -\text{Tr} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\gamma_5 \left[\left(\not{k} + \not{p}_1 \right) + m_1 \right] \gamma_5 \left[\left(\not{k} + \not{p}_2 \right) + m_2 \right]}{\left[(k+\hat{\Delta}+px)^2 - M^2(x) \right]^2} \right\}. \quad (3.46)$$

Vamos agora resolver o nosso numerador. Isso será feito tirando os traços das matrizes do numerador. Sabemos que $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$ dessa maneira o numerador N será escrito da

seguinte forma:

$$N = \text{Tr} \left\{ \gamma^5 \left(\gamma^\mu P'_{1\mu} + m_1 \right) \gamma^5 \left(\gamma^\nu P'_{2\nu} + m_2 \right) \right\} \quad (3.47)$$

onde $P'_{1\mu}$ e $P'_{2\nu}$ são $(k + p_1)_\mu$ e $(k + p_2)_\nu$ respectivamente. Agora inverteremos a posição da segunda matriz γ^5 e ganharemos um sinal negativo no parênteses e em seguida utilizaremos a propriedade ciclica do traço para jogarmos a mesma para o início da expressão. Então teremos um produto de duas matrizes γ^5 que é igual à identidade [13]:

$$\begin{aligned} N &= \text{Tr} \left\{ \gamma^5 \left(\gamma^\mu P'_{1\mu} + m_1 \right) \left(-\gamma^\nu P'_{2\nu} + m_2 \right) \gamma^5 \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \gamma^5 \gamma^5 \left(\gamma^\mu P'_{1\mu} + m_1 \right) \left(-\gamma^\nu P'_{2\nu} + m_2 \right) \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \left(\gamma^\mu P'_{1\mu} + m_1 \right) \left(-\gamma^\nu P'_{2\nu} + m_2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Realizando a separação dos termos do traço temos:

$$N = -\text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} P'_{1\mu} P'_{2\nu} + \text{Tr} \{ \gamma^\mu \} P_{1\mu} m_2 - \text{Tr} \{ \gamma^\nu \} P_{2\nu} m_1 + \text{Tr} \{ I \} m_1 m_2. \quad (3.49)$$

Da álgebra de matrizes gama sabemos que o traço de um número ímpar de matrizes gamma é igual a zero. E como estamos trabalhando num espaço 4-dimensional o traço da matriz identidade é igual a 4 [13]. Temos também a relação [2, 13]

$$\text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 4g^{\mu\nu}, \quad (3.50)$$

portanto da expressão (3.49) ficamos com:

$$\begin{aligned} N &= -4g^{\mu\nu} P'_{1\mu} P'_{2\nu} + 4m_1 m_2 \\ &= -4 \left(P'_1 P'_2 - m_1 m_2 \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Voltando P'_1 e P'_2 ao valor inicial temos:

$$N = -4 \left[(k + \hat{\Delta}) (k + p + \hat{\Delta}) - m_1 m_2 \right]. \quad (3.52)$$

Assim chegamos a expressão final da integral Π :

$$\Pi_{PS}(p^2) = 4N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{[(k + \hat{\Delta})(p + k + \hat{\Delta}) - m_1 m_2]}{\left[(k + \hat{\Delta} + px)^2 - M^2(x) \right]^2}. \quad (3.53)$$

Nesse ponto, observamos que nosso resultado é dependente das quantidades arbitrárias introduzidas na equação (3.33), A , B , α e l , traduzidas, ao final, pela variável Δ . Como a variável Δ aparece adicionada sempre à variável de integração k , poderíamos, nesse ponto,

fazer uma mudança de variável do tipo $k' = k + \Delta$, com a conseqüente mudança dos limites de integração em k e o aparecimento dos termos de superfície, como veremos mais adiante. Os termos de superfície ficariam, portanto, dependentes de Δ .

A adoção de esquemas de regularização que eliminem os termos de superfície (por exemplo regularização dimensional ou Pauli-Villars) poderiam ser empregadas nesse ponto. Entretanto, como já mostrado na referência [4] e como veremos no capítulo 6 os termos de superfície são fundamentais para um melhor ajuste numérico do modelo de NJL. Assim, ao contrário de eliminarmos os termos de superfície, iremos utilizar, para eliminar a variável não física $\hat{\Delta}$ a transformação de Chan [8], na qual pode-se fazer uma mudança na variável k por um valor arbitrário l da forma $k \rightarrow k + l$ de tal maneira que preservamos as simetrias do modelo. A transformação é feita antes da expansão da ação efetiva e é realizada adicionando uma matriz identidade do tipo $I = UU^{-1} = e^{-ilx}e^{ilx}$ dentro do traço do logaritmo. Em seguida utiliza-se a propriedade cíclica do traço e expandimos o logaritmo em uma série de Taylor e ao aplicarmos as matrizes no operador expandido, termo a termo, observamos que chegamos a uma transformação do tipo translação. Agrupando novamente a série em um logaritmo teremos somado ao valor de k um shift l :

$$\begin{aligned}
S &= \text{Tr}[\ln(O(k))] \\
&= \text{Tr}\left[e^{-ilx}e^{ilx}\ln(O(k))\right] \\
&= \text{Tr}\left[e^{-ilx}\ln(O(k))e^{ilx}\right] \\
&= \text{Tr}[\ln(O(k+l))].
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Essa transformação nos dá a vantagem de não carregarmos o termo não físico para os termos de superfície fazendo com que esses dependam somente dos termos físicos. Dessa maneira podemos utiliza-los para melhorarmos os valores dos cálculos pois, caso contrário, teríamos que fazer com que fossem zero para não termos um resultado dependente de uma variável não física. Dessa maneira podemos fazer $l = -\hat{\Delta}$ para retirarmos a dependência dessa variável não física.

Assim ficamos com:

$$\Pi_{PS}(p^2) = 4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k(k+p) - m_1 m_2}{[(k+px)^2 - M^2(x)]^2}. \tag{3.55}$$

Nesse momento podemos expandir a integral acima em uma série de potencias ao

redor de px que nada mais é que uma operação de translação na variável k [19] que é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S(k+l) &= e^{l^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu}} \\ &= S(k) + l^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} S(k) + \frac{1}{2} l^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} l^\nu \frac{\partial}{\partial k^\nu} S(k) + \dots \end{aligned} \quad (3.56)$$

Os termos com derivadas são os chamados *termos de superfície* [19, 20] e, dependendo do processo de regularização utilizado, são tomados como zero. Porém utilizando o procedimento de *cut-off* poderemos calcular esses termos para que possamos verificar seus efeitos sobre os observáveis físicos. Podemos, então, fazer o shift $k + px \rightarrow k$ onde, na expansão acima temos, $l = px$. Após esse shift teremos uma nova expressão para $\Pi_{PS}(p^2)$ dada por:

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) &= 4N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k(k+p) - m_1 m_2}{[(k+px)^2 - M^2(x)]^2} \\ &= 4N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx e^{p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu}} \frac{(k-px)(k-px+p) - m_1 m_2}{[k^2 - M^2(x)]^2} \\ &= 4N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ \frac{(k-px)(k-px+p) - m_1 m_2}{[k^2 - M^2(x)]^2} + \right. \\ &\quad \left. + p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{(k-px)(k-px+p) - m_1 m_2}{[k^2 - M^2(x)]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} p^\nu x \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{(k-px)(k-px+p) - m_1 m_2}{[k^2 - M^2(x)]^2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Agora vamos resolver as integrais e derivadas da expansão. Começemos com a primeira parcela Π^1 :

$$\begin{aligned} \Pi^1 &= 4N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{(k-px)(k-px+p) - m_1 m_2}{[k^2 - M^2(x)]^2} \\ &= 4N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k^2 - k(2px-p) - p^2 x(1-x) - m_1 m_2}{[k^2 - M^2(x)]^2}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Como nosso denominador é uma função par, os termos lineares em k na integral Π^1 serão zero, pois são funções ímpares integradas entre um limite simétrico, assim

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{-k(2px-p)}{[k^2 - M^2(x)]^2} = 0. \quad (3.59)$$

Ficamos então com a seguinte integral a ser resolvida:

$$\Pi^1 = 4N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k^2 - p^2 x(1-x) - m_1 m_2}{[k^2 - M^2(x)]^2}. \quad (3.60)$$

Passando para coordenadas hiperesféricas, integrando nas coordenadas angulares e integrando a variável k até o valor limite de *cut-off* ficamos com:

$$\begin{aligned} \Pi^1 &= N_c N_s \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk \frac{-k^5 + k^3 [p^2 x(1-x) + m_1 m_2]}{[k^2 + M^2(x)]^2} \\ &= N_c N_s \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \int_0^\Lambda dk \frac{-k^5}{[k^2 + M^2(x)]^2} + [p^2 x(1-x) + m_1 m_2] \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{[k^2 + M^2(x)]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Temos então duas integrais em k para serem resolvidas. Resolvendo-as:

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda dk \frac{-k^5}{[k^2 + M^2(x)]^2} &= \left[M^2(x) \ln(k^2 + M^2(x)) + \frac{M^4(x)}{2(k^2 + M^2(x))} - \frac{k^2}{2} \right] \Big|_0^\Lambda \\ &= \left[M^2(x) \ln\left(\frac{\Lambda^2 + M^2(x)}{M^2(x)}\right) + \frac{M^4(x)}{2(\Lambda^2 + M^2(x))} - \frac{\Lambda^2}{2} - \frac{M^2(x)}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{[k^2 + M^2(x)]^2} &= \frac{1}{2} \left[\ln(k^2 + M^2(x)) + \frac{M^2(x)}{k^2 + M^2(x)} \right] \Big|_0^\Lambda \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2 + M^2(x)}{M^2(x)}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + M^2(x)} \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Voltando com os resultados das integrais para (3.61) e rearranjando os termos chegamos ao valor final de Π^1

$$\begin{aligned} \Pi^1 &= N_c N_s \frac{i}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2 + M^2(x)}{M^2(x)}\right) (2M^2(x) + p^2 x(1-x) + m_1 m_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Lambda^2 (p^2 x(1-x) + m_1 m_2) + M^4(x)}{\Lambda^2 + M^2(x)} - \Lambda^2 - M^2(x) \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Agora temos que calcular os termos de superfície para analisarmos seus impactos na auto-energia. Os termos de superfície são

$$\begin{aligned} \Pi_{TS} &= 4N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{k^2 - k(2px - p) - p^2 x(1-x) - m_1 m_2}{[k^2 - M^2(x)]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} p^\nu x \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{k^2 - k(2px - p) - p^2 x(1-x) - m_1 m_2}{[k^2 - M^2(x)]^2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Sabemos que os termos com divergências logarítmicas e termos convergentes dos termos de superfície, antes da derivação, são zero [21–23]. Logo após a derivação os termos lineares em k serão logarítmicamente divergentes e os termos logarítmicamente divergentes serão convergentes, portanto só precisamos realizar as seguintes derivadas:

$$\Pi_{TS} = -4iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{k^2}{[k^2 - M^2(x)]^2} + \frac{1}{2} p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} p^\nu x \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{k^2}{[k^2 - M^2(x)]^2} + \dots \right\}. \quad (3.66)$$

Podemos fazer uma simplificação na expressão acima somando e subtraindo $M^2(x)$ no numerador:

$$\Pi_{TS} = -4iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{k^2 - M^2(x) + M^2(x)}{[k^2 - M^2(x)]^2} + p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} p^\nu x \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{k^2 - M^2(x) + M^2(x)}{[k^2 - M^2(x)]^2} + \dots \right\}. \quad (3.67)$$

Percebe-se que podemos, assim, simplificar os termos $k^2 - M^2(x)$ do numerador e denominador e ficaremos com um termo adicional

$$\Pi_{TS} = -4iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - M^2(x)]} + \frac{M^2(x)}{[k^2 - M^2(x)]^2} \right] + \frac{1}{2} p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} p^\nu x \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left[\frac{1}{[k^2 - M^2(x)]} + \frac{M^2(x)}{[k^2 - M^2(x)]^2} \right] + \dots \right\}. \quad (3.68)$$

Mas vimos que termos logarítmicamente divergentes dos termos de superfície se anulam, portanto os termos que apareceram da simplificação serão iguais a zero. Dessa maneira ficamos com:

$$\Pi_{TS} = -4iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{1}{[k^2 - M^2(x)]} + \frac{1}{2} p^\mu x \frac{\partial}{\partial k^\mu} p^\nu x \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{1}{[k^2 - M^2(x)]} + \dots \right\}. \quad (3.69)$$

Realizando as derivadas acima chegamos a seguinte expressão:

$$\Pi_{TS} = -4iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ p^\mu x \frac{-2k^\mu}{[k^2 - M^2(x)]^2} + p^\mu p^\nu x^2 \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{[k^2 - M^2(x)]^2} + \frac{4k^\mu k^\nu}{[k^2 - M^2(x)]^3} \right) \right\}. \quad (3.70)$$

A primeira integral entre chaves é ímpar em um limite de integração simétrico, portanto é igual a zero

$$\Pi_{TS} = -4iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ p^\mu p^\nu x^2 \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{[k^2 - M^2(x)]^2} + \frac{4k^\mu k^\nu}{[k^2 - M^2(x)]^3} \right) \right\}. \quad (3.71)$$

Podemos usar o argumento de simetria e fazer

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 4 \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - M^2(x)]^3} = 4 \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - M^2(x)]^3}$$

Escrevendo

$$\frac{k^2}{[k^2 - M^2(x)]^3} = \frac{1}{[k^2 - M^2(x)]^2} + \frac{M^2(x)}{[k^2 - M^2(x)]^3},$$

podemos cancelar os termos com $g_{\mu\nu}$ e chegamos a:

$$\Pi_{TS} = -4iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ p^\mu p^\nu x^2 \left(\frac{g_{\mu\nu} M^2(x)}{[k^2 - M^2(x)]^3} \right) \right\} \quad (3.72)$$

que finalmente, passando para as coordenadas hiperesféricas e integrando nas coordenadas angulares, é igual a:

$$\Pi_{TS} = N_c N_s \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk \int_0^1 dx \frac{k^3 p^2 x^2 M^2(x)}{[k^2 + M^2(x)]^3}. \quad (3.73)$$

Realizando a integral em k chegamos a:

$$\Pi_{TS} = N_c N_s \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx p^2 x^2 \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{2\Lambda^2 + M^2(x)}{(\Lambda^2 + M^2(x))^2} - \frac{1}{M^2(x)} \right) \right]. \quad (3.74)$$

Agrupando Π^1 e Π_{TS} chegamos ao valor final da auto-energia:

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) = N_c N_s \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{M^2(x)}{\Lambda^2 + M^2(x)} \right) (2M^2(x) + p^2 x(1-x) + m_1 m_2) \right. \\ \left. + \frac{\Lambda^2 (p^2 x(1-x) + m_1 m_2) - M^4(x)}{\Lambda^2 + M^2(x)} + \Lambda^2 + M^2(x) \right. \\ \left. + p^2 x^2 \frac{1}{2} \left(\frac{2\Lambda^2 + M^2(x)}{(\Lambda^2 + M^2(x))^2} - \frac{1}{M^2(x)} \right) \right\}. \quad (3.75) \end{aligned}$$

A partir desse resultado resolveremos numericamente a integral acima e utilizaremos o valor para obtermos a correção de massa para os mésons assim como determinar o valor da constante de acoplamento g_{PSqq}^{-1} a partir da equação (3.28).

FATOR DE FORMA ELETROMAGNÉTICO

Para determinarmos o tamanho de um objeto subatômico devemos realizar cálculos de valores esperados em mecânica quântica. Isso se torna difícil pois nem átomos e nem partículas subatômicas são esferas sólidas, muito menos possuem fronteiras bem definidas. No caso do átomo, o seu tamanho é obtido calculando o valor esperado da coordenada média de seu elétron de valência mais exterior que pode ser realizado por teoria de perturbação. Para partículas subatômicas, entretanto, somente podemos obter seu tamanho a partir de experimentos.

A maneira usual de se determinar tal propriedade é realizada a partir de experimentos de espalhamento de radiação. Para que se observe o objeto com detalhes precisamos de uma radiação com comprimento de onda menor do que o objeto em si, caso contrário, ocorrerá difração fazendo, assim, com que percamos definição nas imagens. Para um núcleo atômico podemos determinar sua distribuição de cargas através de um experimento de espalhamento de elétrons que, após o espalhamento, nos fornece uma seção de choque. Podemos supor que a distribuição espacial de prótons e neutrons seja uniforme, sendo assim, ao determinarmos o raio do próton podemos determinar o raio nuclear.

A distribuição de matéria no interior de um núcleo está ligada ao seu *fator de forma*, que é uma quantidade definida como a amplitude de probabilidade de transição de um estado inicial para um estado final a partir de uma interação $V(r)$. Essa quantidade é determinada pela seguinte integral:

$$F(k_i, k_f) = \int \bar{\psi}_f V(r) \psi_i d^3 r \quad (4.1)$$

onde ψ_i e ψ_f são as funções de onda de um elétron livre antes do espalhamento e depois

do espalhamento, respectivamente e são dadas por

$$\begin{aligned}\psi_i &= e^{ik_i \cdot r}, k_i = \frac{P_i}{\hbar} \\ \psi_f &= e^{ik_f \cdot r}, k_f = \frac{P_f}{\hbar}\end{aligned}\tag{4.2}$$

com P_i e P_f sendo deus momentos inicial e final. Portanto vemos que a partir de (4.1) teremos

$$F(k_i, k_f) = \int e^{i(k_i - k_f) \cdot r} V(r) d^3 r \tag{4.3}$$

onde podemos escrever $k_i - k_f = q$ e

$$v(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_e(r') d^3 r'}{|r - r'|} \tag{4.4}$$

com $\rho_e(r')$ sendo uma distribuição de carga nuclear não dependente da coordenada angular. Passando a integral acima para coordenadas esféricas, realizando a integração nas coordenadas angulares e substituindo em (4.3), tomando $q \cdot r = qr \cos \theta$ teremos

$$F(k_i, k_f) = \frac{4\pi}{q} \int \sin(qr') \rho_e(r') r' dr' \tag{4.5}$$

que podemos escrever como

$$F(q^2) = 4\pi \int \frac{\sin(qr)}{qr} \rho_e(r) r^2 dr. \tag{4.6}$$

Podemos expandir o termo de seno na integral acima e obtermos uma expressão aproximada para $F(q^2)$ dada por

$$F(q^2) \simeq 1 - \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle + O(q^4), \tag{4.7}$$

onde $\langle r^2 \rangle$ é o raio quadrático médio do núcleo.

Essa expressão é o fator de forma eletromagnético do núcleo, que pode ser estendida para qualquer partícula subatômica. No nosso trabalho calcularemos o fator de forma para o pión e o káon. Observamos que, de certa forma, o fator de forma é a transformada de Fourier da distribuição de carga do núcleo ou partícula.

Experimentalmente, para pión e para o káon, o fator de forma é determinado medindo-se a probabilidade de deflexão do méson em colisão com num núcleo pesado [24]. O núcleo absorve um fóton virtual e sofre um recuo, que é medido experimentalmente medindo, assim, o momento q do fóton.

4.1 Cálculo do fator de forma eletromagnético dos mésons

Para calcularmos o fator de forma eletromagnético dos mésons, precisamos adicionar um termo de interação entre férmions e fóton na lagrangiana. Isso é feito adicionando um termo de interação vetorial na lagrangiana, pois queremos um termo de interação entre dois férmions e um fóton:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m} + ie\mathbf{J}_\mu \gamma^\mu) \psi + \frac{1}{2}G \left[(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right]. \quad (4.8)$$

Após o processo de bosonização ficamos com a seguinte ação efetiva:

$$S_{eff} = - \int d^4x \left[\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right] - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5 + ie\mathbf{J}_\mu \gamma^\mu}{i\cancel{\partial} - \hat{M}} \right) \right]. \quad (4.9)$$

O fator de forma é calculado a partir do diagrama triângulo abaixo:

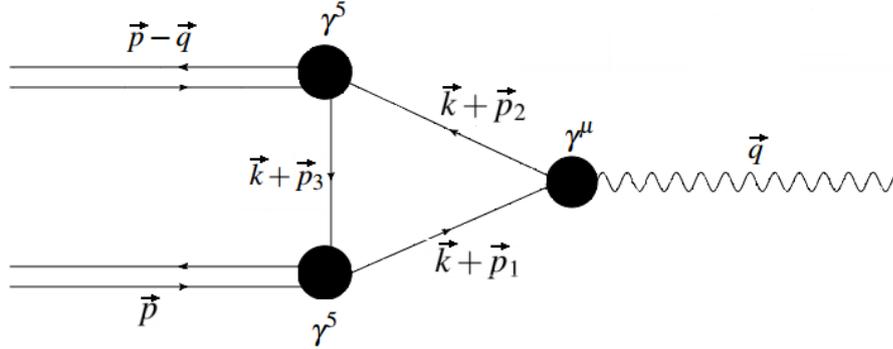


Figura 4: Diagrama triângulo para mésons

Observa-se, portanto, que precisamos dos termos cúbicos da ação efetiva, que são, como vistos no capítulo 2:

$$S_3 = -\frac{i}{3} \text{Tr} \left(\frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5 + ie\mathbf{J}_\mu \gamma^\mu}{i\cancel{\partial} - \hat{M}} \right)^3. \quad (4.10)$$

Pelo diagrama percebe-se que somente necessitamos os termos proporcionais a $\mathbf{P}_a^2 \mathbf{J}_\mu$, pois termos dois vértices pseudo-escalares e um vértice vetorial, assim expandindo a ação

efetiva, como fizemos em 3.2, e pegando somente os termos necessários ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + \frac{1}{2G} \left[1 - G \left(i \text{Tr} \left[\frac{1}{i\hat{\partial} - \hat{M}} \right]^2 \right) \right] \mathbf{S}_a^2 + \frac{1}{2G} \left[1 - G \left(i \text{Tr} \left[\frac{i\gamma^5}{i\hat{\partial} - \hat{M}} \right]^2 \right) \right] \mathbf{P}_a^2 - \\ & - \frac{i}{3} \mathbf{P}_a^2 \mathbf{J}_\mu \text{Tr} \left(i\gamma^5 \frac{1}{i\hat{\partial} - \hat{M}} i e\gamma^\mu \frac{1}{i\hat{\partial} - \hat{M}} i\gamma^5 \frac{1}{i\hat{\partial} - \hat{M}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

Vemos então que o cálculo para o triângulo é dado pelo termo:

$$I^\mu = -i \text{Tr} \left(i\gamma^5 \frac{1}{i\hat{\partial} - \hat{M}} i e\gamma^\mu \frac{1}{i\hat{\partial} - \hat{M}} i\gamma^5 \frac{1}{i\hat{\partial} - \hat{M}} \right). \quad (4.12)$$

Passando para o espaço dos momentos e utilizando o roteamento mais geral, conforme proposto na figura 4 ficamos com:

$$I^\mu = -\frac{i}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(i\gamma^5 \frac{i}{\not{k} + \not{p}_1 - m_1} i e\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} + \not{p}_2 - m_2} i\gamma^5 \frac{i}{\not{k} + \not{p}_3 - m_3} \right). \quad (4.13)$$

Utilizando o mesmo procedimento adotado para o cálculo do diagrama bolha temos:

$$\begin{cases} p_1 - p_3 = p \\ p_1 - p_2 = q \\ Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = \alpha p + \beta q + l = \Omega \end{cases} \quad (4.14)$$

Onde A, B, C, α, β e l são constantes arbitrárias e Ω é uma quantidade não física. Ficamos com:

$$\begin{cases} p_1 - p_3 = p & (1) \\ p_1 - p_2 = q & (2) \\ \frac{A}{B}p_1 + p_2 + \frac{C}{B}p_3 = \frac{\Omega}{B} & (3) \end{cases} \quad (4.15)$$

Somando as equações (2) e (3) teremos:

$$\left(\frac{A+B}{B} \right) p_1 + \left(\frac{C}{B} \right) p_3 = \frac{\Omega}{B} + q \quad \Rightarrow \quad p_1 + \left(\frac{C}{A+B} \right) p_3 = \frac{\Omega + qB}{A+B} \quad (4.16)$$

Subtraindo (4.16) de (1) ficamos com:

$$\left(\frac{C}{A+B} \right) p_3 + p_3 = \frac{\Omega + Bq}{A+B} - p \quad \Rightarrow \quad p_3 = \frac{\Omega + Bq - (A+B)p}{A+B+C} = \Delta \quad (4.17)$$

Mas de (4.15) temos que:

$$\begin{aligned} p_1 - p_3 = p & \quad \Rightarrow \quad p_1 = p + \Delta \\ p_1 - p_2 = q & \quad \Rightarrow \quad p_2 = p + \Delta - q \end{aligned}$$

Finalmente ficamos com o seguinte grupo de equações para os momentos p_1 , p_2 e p_3 :

$$\begin{cases} p_1 = p + \Delta \\ p_2 = p + \Delta - q \\ p_3 = \Delta \end{cases} \quad (4.18)$$

Dessa forma já temos o roteamento para o diagrama da **Figura 4**. Por simplicidade vamos chamar $p - q$ de p' chegamos então a:

$$\begin{cases} p_1 = p + \Delta \\ p_2 = p' + \Delta \\ p_3 = \Delta \end{cases} \quad (4.19)$$

A nossa integral será escrita como:

$$I^\mu = -\frac{i}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(i\gamma^5 \frac{i}{(\not{k} + \not{\Delta}) + \not{p} - m_1} ie\gamma^\mu \frac{i}{(\not{k} + \not{\Delta}) + \not{p}' - m_2} i\gamma^5 \frac{i}{(\not{k} + \not{\Delta}) - m_3} \right). \quad (4.20)$$

Racionalizando ficamos com:

$$I^\mu = -\frac{ie}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma^5 \frac{[(\not{k} + \not{\Delta}) + \not{p}] + m_1}{[(k + \Delta) + p]^2 - m_1^2} \gamma^\mu \frac{[(\not{k} + \not{\Delta}) + \not{p}'] + m_2}{[(k + \Delta) + p']^2 - m_2^2} \gamma^5 \frac{(\not{k} + \not{\Delta}) + m_3}{(k + \Delta)^2 - m_3^2} \right). \quad (4.21)$$

Podemos, ainda, ver pelo diagrama da figura 4, que temos dois férmions se combinando para formar um fóton sendo assim, por conservação de energia, teremos $m_1 = m_2$ como a única opção possível.

Nesse momento vamos ver como obtemos o fator de forma a partir da integral acima. Sabemos que o único resultado possível da integral é do tipo [13]

$$I^\mu = \mathbf{a}p^\mu + \mathbf{b}p'^\mu = (p + p')^\mu \mathbf{f} + (p - p')^\mu \mathbf{g} \quad (4.22)$$

onde \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{f} e \mathbf{g} são constantes arbitrárias. A relação acima pode ser verificada da seguinte forma:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{a} \\ \mathbf{f} - \mathbf{g} = \mathbf{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}, \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2}. \quad (4.23)$$

Agora, podemos calcular a seguinte quantidade:

$$(p - p')_\mu I^\mu = -\frac{ie}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma^5 \frac{[(\not{k} + \not{\Delta}) + \not{p}] + m_1}{[(k + \Delta) + p]^2 - m_1^2} (\not{p} - \not{p}') \frac{[(\not{k} + \not{\Delta}) + \not{p}'] + m_1}{[(k + \Delta) + p']^2 - m_1^2} \gamma^5 \frac{(\not{k} + \not{\Delta}) + m_3}{(k + \Delta)^2 - m_3^2} \right), \quad (4.24)$$

onde usamos que $(p - p')_\mu \gamma^\mu = (\not{p} - \not{p}')$ e utilizamos a propriedade cíclica do traço para desaparecermos com a matriz γ^5 , como mostrado em (3.48).

Somando e subtraindo $(\not{k} + \not{\Delta})$, que vamos chamar de \not{k}' , e m_1 chegamos a

$$\begin{aligned}
(p - p')_\mu I^\mu &= -\frac{ie}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{([\not{k}' + \not{p}] + m_1) (\not{k}' + \not{p} - m_1 - \not{k}' - \not{p}' + m_1) ([\not{k}' + \not{p}'] + m_1) (\not{k}' - m_3)}{([k' + p]^2 - m_1^2) ([k' + p']^2 - m_1^2) (k'^2 - m_3^2)} \right\} \\
&= -\frac{ie}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{([k' + p]^2 + m_1^2) (\not{k}' + \not{p} - m_1) (\not{k}' - m_3) - (\not{k}' + \not{p} + m_1) ([k' + p']^2 + m_1^2) (\not{k}' - m_3)}{([k' + p]^2 - m_1^2) ([k' + p']^2 - m_1^2) (k'^2 - m_3^2)} \right\} \\
&= -\frac{ie}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{(\not{k}' + \not{p} - m_1) (\not{k}' - m_3)}{([k' + p']^2 - m_1^2) (k'^2 - m_3^2)} \right\} + \frac{ie}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{([\not{k}' + \not{p}]^2 + m_1^2) (\not{k}' - m_3)}{([k' + p]^2 - m_1^2) (k'^2 - m_3^2)} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Note que no final chegamos a duas integrais uma em função de p'^2 e outra em função de p^2 , porém, como o fator de forma é calculado *on-shell*, temos que $p^2 = p'^2 = m_{PS}^2$, logo temos:

$$f(p^2) - f(p'^2) = 0. \tag{4.26}$$

Voltando a (4.22), temos

$$\begin{aligned}
I^\mu &= (p + p')^\mu \mathbf{f} + (p - p')^\mu \mathbf{g} \\
(p - p')_\mu I^\mu &= (p^2 - p'^2) \mathbf{f} + (p - p')^2 \mathbf{g},
\end{aligned} \tag{4.27}$$

mas de (4.25) temos que $(p - p')_\mu I^\mu = 0$ e $p^2 = p'^2 = m_{PS}$, portanto

$$\begin{aligned}
0 &= (m_{PS} - m_{PS}) \mathbf{f} + (p - p')^2 \mathbf{g} \\
\mathbf{g} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Dessa maneira chegamos ao seguinte resultado para a integral I^μ :

$$I^\mu = (p + p')^\mu \mathbf{f} = e (p + p')^\mu F_{PS}^{em} \tag{4.29}$$

onde e é a carga do elétron e F_{PS}^{em} é o fator de forma eletromagnético do méson pseudo escalar.

Calculando agora a quantidade $(p + p')_\mu I^\mu$ temos:

$$\begin{aligned} (p + p')_\mu I^\mu &= e (p + p')^2 F_{PS}^{em} \\ F_{PS}^{em} &= \frac{1}{e} \frac{1}{(p + p')^2} (p + p')_\mu I^\mu \\ F_{PS}^{em} &= \frac{1}{e} \frac{1}{(p^2 + p'^2 + 2p \cdot p')} (p + p')_\mu I^\mu. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nesse momento devemos voltar ao diagrama e vemos que:

$$\begin{aligned} q^2 &= (p - p')^2 = p^2 + p'^2 - 2p \cdot p' = 2m_{PS}^2 - 2p \cdot p' \\ 2p \cdot p' &= 2m_{PS}^2 - q^2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo em (4.30) temos:

$$F_{PS}^{em} = \frac{1}{e} \frac{1}{4m_{PS}^2 - q^2} (p + p')_\mu I^\mu. \quad (4.32)$$

Assim vemos como calculamos o valor do fator de forma eletromagnético a partir da integral do triângulo [19, 25].

Agora precisamos calcular a integral (4.21). Começamos trabalhando o denominador

$$D = \frac{1}{\left\{ [(k + \Delta) + p]^2 - m_1^2 \right\} \left\{ [(k + \Delta) + p']^2 - m_1^2 \right\} \left\{ (k + \Delta)^2 - m_3^2 \right\}} \quad (4.33)$$

utilizando a parametrização de Feynmann

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(A - C)x + (B - C)y + C]^3}. \quad (4.34)$$

Tomando $A = [(k + \Delta) + p]^2 - m_1^2$, $B = [(k + \Delta) + p']^2 - m_1^2$ e $C = (k + \Delta)^2 - m_3^2$, teremos:

$$A - C = p^2 + 2(k + \Delta)p - (m_1^2 - m_3^2) \quad (4.35)$$

$$B - C = p'^2 + 2(k + \Delta)p' - (m_1^2 - m_3^2) \quad (4.36)$$

e a partir da parametrização de Feynman chegamos a:

$$\begin{aligned} (A - C)x + (B - C)y + C &= p^2 x + p'^2 y + 2(k + \Delta)(px - p'y) - \\ &\quad - (m_1^2 - m_3^2)x - (m_1^2 - m_3^2)y + (k + \Delta)^2 - m_3. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Completando quadrados e agrupando os termos independentes de k ficamos com:

$$D = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{\left\{ [(k + \Delta) + (px + p'y)]^2 - M^2(x, y) \right\}^3} \quad (4.38)$$

onde

$$-M^2(x, y) = -(px + p'y)^2 + p^2x + p'^2y - (m_1^2 - m_3^2)(x + y) - m_3^2.$$

Agora temos que resolver os traços do numerador de 4.21. Teremos os traços no espaço de sabor e no espaço de cor sendo eles, respectivamente, N_s e N_c . Ficaremos com o traço no espaço de Dirac para calcular, que é feito da seguinte forma:

$$N = \text{Tr}_D \left\{ \gamma^5 [(\not{k} + \not{\Delta}) + \not{p} + m_1] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{\Delta}) + \not{p}' + m_1] \gamma^5 [(\not{k} + \not{\Delta}) + m_3] \right\}. \quad (4.39)$$

Resolvendo os traços teremos o seguinte numerador:

$$N = 4 \left[(k + \Delta)^2 (k + \Delta)^\mu + (k + \Delta)^2 (p^\mu + p'^\mu) + (k + \Delta) (p^\mu p' + pp'^\mu) - (k + \Delta)^\mu (pp' + 2m_1m_3 - m_1^2) - m_1m_3p^\mu - m_1m_3p'^\mu \right]. \quad (4.40)$$

Nesse ponto podemos utilizar a transformação de Chan para nos livrarmos do termo Δ somado a k . Finalmente chegamos a:

$$I^\mu = 8 \frac{ie}{3} N_s N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{k^2 k^\mu + k^2 (p^\mu + p'^\mu) + k (p^\mu p' + pp'^\mu) - k^\mu (pp' + 2m_1m_3 - m_1^2) - m_1m_3 (p^\mu + p'^\mu)}{\left([k + (px + p'y)]^2 - M^2(x, y) \right)^3} \right\}. \quad (4.41)$$

Vamos expandir a integral em torno de l como mostrado em (3.56) para fazermos o shift na variável k , em que $l = (px + p'y)$. Dessa forma ficamos com a seguinte integral:

$$I^\mu = 8 \frac{ie}{3} N_s N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy e^{l^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu}} \left\{ \frac{k^2 k^\mu + (p^\mu + p'^\mu - l^\mu) k^2 - 2l \cdot k k^\mu}{[k^2 - M^2(x, y)]^3} + \frac{+ (l^2 + m_1^2 - 2m_1m_3 - pp') k^\mu + [2l^\mu l + (-2l + p') p^\mu + (-2l + p) p'^\mu] k + N^\mu}{[k^2 - M^2(x, y)]^3} \right\}, \quad (4.42)$$

onde $N^\mu = (-l^2 - m_1^2 + 2m_1m_3 + pp') l^\mu + (l^2 - l \cdot p' - m_1m_3) p^\mu + (l^2 - l \cdot p - m_1m_3) p'^\mu$ é o termo do numerador independente de k .

Expandindo a exponencial chegaremos a:

$$\begin{aligned}
I^\mu = & 8 \frac{ie}{3} N_s N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{k^2 k^\mu + (p^\mu + p'^\mu - l^\mu) k^2 - 2l \cdot k k^\mu}{[k^2 - M^2(x,y)]^3} + \right. \\
& + \frac{(l^2 + m_1^2 - 2m_1 m_3 - p p') k^\mu + [2l^\mu l + (-2l + p') p^\mu + (-2l + p) p'^\mu] k + N^\mu}{[k^2 - M^2(x,y)]^3} + \\
& + l_\nu \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left[\frac{k^2 k^\mu + (p^\mu + p'^\mu - l^\mu) k^2 - 2l \cdot k k^\mu}{[k^2 - M^2(x,y)]^3} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{(l^2 + m_1^2 - 2m_1 m_3 - p p') k^\mu + [2l^\mu l + (-2l + p') p^\mu + (-2l + p) p'^\mu] k + N^\mu}{[k^2 - M^2(x,y)]^3} \right] + \dots \right\}. \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Vamos agora resolver as integrais. Pegando o primeiro termo das chaves, o nosso denominador é uma função par, portanto os termos cúbicos e lineares em k serão funções ímpares, que num limite de integração simétrico se anulam. Sendo assim só precisamos fazer as seguintes integrais:

$$I^\mu = 8 \frac{ie}{3} N_s N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{(p^\mu + p'^\mu - l^\mu) k^2 - 2l \cdot k k^\mu + N^\mu}{[k^2 - M^2(x,y)]^3} \right\}. \quad (4.44)$$

Pegando as integrais em k separadamente, mudando para coordenadas hiperesféricas e integrando até o *cut-off* temos:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - M^2(x,y)]^3} = \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k^5}{[k^2 + M^2(x,y)]^3} = \\
&= \frac{i}{32\pi^2} \left[2 \ln(k^2 + M^2(x,y)) + \frac{4k^2 M^2(x,y) + 3M^4(x,y)}{(k^2 + M^2(x,y))^2} \right] \Big|_0^\Lambda, \quad (4.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - M^2(x,y)]^3} = \frac{-i}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{[k^2 + M^2(x,y)]^3} = \\
&= \frac{i}{32\pi^2} \left[\frac{2k^2 + M^2(x,y)}{(k^2 + M^2(x,y))^2} \right] \Big|_0^\Lambda, \quad (4.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{l \cdot k k^\mu}{[k^2 - M^2(x,y)]^3} = 2l_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\mu}{[k^2 - M^2(x,y)]^3} = \\
&= \frac{2l_\nu g^{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 M^2(x,y))^3} = \frac{il^\mu}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k^5}{[k^2 + M^2(x,y)]^3} \\
&= \frac{il^\mu}{64\pi^2} \left[2 \ln(k^2 + M^2(x,y)) + \frac{4k^2 M^2(x,y) + 3M^4(x,y)}{(k^2 + M^2(x,y))^2} \right] \Big|_0^\Lambda. \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Agrupando as integrais acima chegamos ao resultado

$$\begin{aligned}
I^\mu &= 8 \frac{ie}{3} N_s N_c \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{i}{32\pi^2} \left\{ \left[-\frac{l^\mu}{2} + (p^\mu + p'^\mu - l^\mu) \right] \left[2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + M^2(x,y)}{M^2(x,y)} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{4M^2(x,y)\Lambda^2 + 3M^4(x,y)}{(\Lambda^2 + M^2(x,y))^2} - 3 \right] + N^\mu \left[\frac{2\Lambda^2 + M^2(x,y)}{(\Lambda^2 + M^2(x,y))^2} - \frac{1}{M^2(x,y)} \right] \right\}. \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Temos, agora, que resolver os termos de superfície. Como já falamos na seção anterior as integrais dos termos de superfície logicamente divergente após a derivação são zero. Como podemos ver somente o termo cúbico da integral é linearmente divergente portanto a única integral que precisamos resolver é:

$$I_{TS}^\mu = \frac{8ie}{3} N_s N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k^\mu k^2}{(k^2 - M^2(x,y))^3}. \tag{4.49}$$

Realizando a derivada

$$\begin{aligned}
I_{TS}^\mu &= \frac{8ei}{3} N_s N_c \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} l_\nu \left[\frac{g^{\mu\nu} k^2 + 2k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2(x,y))^3} - \frac{6k^2 k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2(x,y))^4} \right] \\
&= \frac{8ie}{3} N_s N_c \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} l_\nu \left[\frac{g^{\mu\nu} k^2 + 2k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2(x,y))^3} - \frac{6k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2(x,y))^3} - \frac{6M^2(x,y) k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2(x,y))^4} \right] \\
&= \frac{8ie}{3} N_s N_c \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} l_\nu \left[\frac{g^{\mu\nu} k^2 - 4k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2(x,y))^3} - \frac{6M^2(x,y) k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2(x,y))^4} \right] \\
&= -\frac{8ie}{3} N_s N_c \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy 6M^2(x,y) l_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2(x,y))^4} \\
&= -\frac{8ie}{3} N_s N_c \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{3M^2(x,y) l_\nu g^{\mu\nu}}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - M^2(x,y))^4}, \tag{4.50}
\end{aligned}$$

onde nas últimas três linhas utilizamos que

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2(x,y))^n} = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - M^2(x,y))^n}.$$

Passando para coordenadas hiperesféricas, integrando nas coordenadas angulares e

integrando em k até o *cut-off* ficamos com:

$$\begin{aligned}
I_{TS}^\mu &= -N_s N_c \frac{8ie}{3} \frac{3i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy M^2(x,y) l^\mu \int_0^\Lambda dk \frac{k^5}{(k^2 + M^2(x,y))^4} \\
&= N_s N_c \frac{8ie}{3} \frac{3i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy M^2(x,y) l^\mu \left[\frac{3k^4 + 3k^2 M^2(x,y) + M^4(x,y)}{3(k^2 + M^2(x,y))^3} \right]_0^\Lambda \\
&= N_s N_c \frac{8ie}{3} \frac{3i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy M^2(x,y) l^\mu \left[\frac{3\Lambda^4 + 3\Lambda^2 M^2(x,y) + M^4(x,y)}{3(\Lambda^2 + M^2(x,y))^3} - \frac{1}{3M^2(x,y)} \right].
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Agrupando os termos de superfície com 4.48 chegamos a resposta final:

$$\begin{aligned}
I^\mu &= -e N_s N_c \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{12\pi^2} \left\{ \left[(p^\mu + p'^\mu) - \frac{3l^\mu}{2} \right] \left[2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + M^2(x,y)}{M^2(x,y)} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{4M^2(x,y)\Lambda^2 + 3M^4(x,y)}{(\Lambda^2 + M^2(x,y))^2} - 3 \right] + N^\mu \left[\frac{2\Lambda^2 + M^2(x,y)}{(\Lambda^2 + M^2(x,y))^2} - \frac{1}{M^2(x,y)} \right] - \right. \\
&\quad \left. + l^\mu \left[\frac{3\Lambda^4 M^2(x,y) + 3\Lambda^2 M^4(x,y) + M^6(x,y)}{(\Lambda^2 + M^2(x,y))^3} - 1 \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

A integral acima agora deve ser multiplicada por $(p + p')_\mu$ para conseguirmos calcular o fator de forma, como vimos em (4.32). Dessa maneira conseguiremos um valor escalar, ao contrário da integral que é vetorial. Devemos lembrar também que como o fator de forma é calculado *on-shell*, $p^2 = p'^2 = m_{PS}^2$, logo de (4.31) temos:

$$p \cdot p' = m_{PS}^2 - \frac{q^2}{2}. \tag{4.53}$$

Realizando as operações separadamente para os vetores teremos:

$$(p + p')_\mu (p + p')^\mu = p^2 + p'^2 + 2p \cdot p' = 4m_{PS}^2 - q^2, \tag{4.54}$$

$$(p + p')_\mu l^\mu = (p + p')_\mu (px + p'y)^\mu = p^2 x + p'^2 y + p \cdot p' (x + y) = \left(\frac{x+y}{2} \right) (4m_{PS}^2 - q^2) \tag{4.55}$$

e

$$\begin{aligned}
(p+p')_\mu N^\mu &= (p+p')_\mu [(-l^2 - m_1^2 + 2m_1m_3 + pp') l^\mu + (l^2 - lp' - m_1m_3) p^\mu + (l^2 - lp - m_1m_3) p'^\mu] \\
&= \left(2m_{PS}^2 - \frac{q^2}{2}\right) \left[m_{PS}^2 (2x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x - 2y) - \frac{q^2}{2} (4xy - x - y) - 2m_1m_3 \right] \\
&\quad + \left(2m_{PS}^2 - \frac{q^2}{2}\right) (x+y) \left[-m_{PS}^2 (x^2 + y^2 + 2xy - 1) - \frac{q^2}{2} (1 - 2xy) - m_1^2 + 2m_1m_3 \right],
\end{aligned} \tag{4.56}$$

onde usamos

$$l^2 = (px + p'y)^2 = p^2x^2 + p'^2y^2 + 2p \cdot p'xy = m_{PS}^2(x^2 + y^2) + \left(m_{PS}^2 - \frac{q^2}{2}\right)2xy \tag{4.57}$$

$$l \cdot p = p^2x + p \cdot p'y = m_{PS}^2x + \left(m_{PS}^2 - \frac{q^2}{2}\right)y \tag{4.58}$$

$$l \cdot p' = p \cdot p'x + p'^2y = \left(m_{PS}^2 - \frac{q^2}{2}\right)x + m_{PS}^2y. \tag{4.59}$$

Substituindo todas as operações acima na integral (4.52) ficaremos com:

$$\begin{aligned}
(p+p')_\mu I^\mu &= -eN_sN_c \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{12\pi^2} \left\{ \left[(4m_{PS}^2 - q^2) \left(1 - \left(\frac{x+y}{2} \right) \right) \right] \right. \\
&\quad \left[2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + M^2(x,y)}{M^2(x,y)} \right) + \frac{4M^2(x,y)\Lambda^2 + 3M^4(x,y)}{(\Lambda^2 + M^2(x,y))^2} - 3 \right] + \Omega \left[\frac{2\Lambda^2 + M^2(x,y)}{(\Lambda^2 + M^2(x,y))^2} - \frac{1}{M^2(x,y)} \right] - \\
&\quad \left. + \left[(4m_{PS}^2 - q^2) \left(\frac{x+y}{2} \right) \right] \left[\frac{3\Lambda^4 M^2(x,y) + 3\Lambda^2 M^4(x,y) + M^6(x,y)}{(\Lambda^2 + M^2(x,y))^3} - 1 \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.60}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left(2m_{PS}^2 - \frac{q^2}{2}\right) \left[m_{PS}^2 (2x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x - 2y) - \frac{q^2}{2} (4xy - x - y) - 2m_1m_3 \right] \\
&\quad + \left(2m_{PS}^2 - \frac{q^2}{2}\right) (x+y) \left[-m_{PS}^2 (x^2 + y^2 + 2xy - 1) - \frac{q^2}{2} (1 - 2xy) - m_1^2 + 2m_1m_3 \right].
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Assim devemos calcular numericamente o valor da integral acima e, a partir de (4.32), calcularmos os valores do *Fator de Forma*, variando o valor do momento q do fóton, onde chegaremos em um gráfico do *Fator de forma* em função da energia do fóton emitido [19, 25].

RESULTADOS

Nesse capítulo listaremos e discutiremos os resultados obtidos dos cálculos numéricos realizados a partir de todas as expressões obtidas ao longo do trabalho. Baseando-se no ajuste de parâmetros apresentado em [4], mostraremos os gráficos para o fator de forma eletromagnético do pión e o do káon comparados aos dados experimentais mostrados em [24, 26].

5.1 Ajuste de parâmetros

Para realizar os cálculos referentes aos fatores de forma eletromagnéticos do pión e do káon, reproduzimos o ajuste de parâmetros desenvolvido em [4]. Naquele trabalho o ajuste é realizado tomando-se por base os valores experimentais das massas do pión ($m_\pi = 139,15\text{MeV}$) do káon ($m_K = 493,68\text{MeV}$), o valor da constante de decaimento fraco do pión ($f_\pi = 92,21\text{MeV}$), esses extraídos de [27] e a massa constituinte do quark up, extraída das estimativas de Borka e Jovanovich [28]. Os valores do cut-off Λ e da massa do quark strange, são então ajustados para reproduzir os valores experimentais acima mencionados, permitindo o cálculo dos acoplamentos entre pions e quarks, dado por $g_{\pi qq}$, entre káons e quarks, dado por g_{Kqq} e da constante de decaimento fraco do káon, f_K , conforme relacionadas nas tabelas 1 e 2, considerando-se os cálculos realizados sem o e com os termos de superfície, respectivamente.

Observou-se que os resultados se aproximam mais da massa estimada para o quark strange e para a constante de decaimento fraco do káon, para o conjunto de parâmetros caracterizados por $m_u = 292,35\text{MeV}$, razão pela qual este conjunto foi adotado no presente trabalho.

Tabela 1: Valores dos parâmetros sem os termos de superfície

m_{up} (MeV)	$m_{strange}$ (MeV)	Λ (MeV)	m_{0up} (MeV)	m_{0s} (MeV)	$G(10^{-6})$	$g_{\pi qq}$	g_{kqq}
292,35	532,10	827,40	7,43	180,67	12,91	3,097	3,334
300,88	537,91	812,60	7,61	184,02	13,68	3,189	3,434
304,55	540,42	806,83	7,83	185,52	14,00	3,229	3,477
308,05	542,82	801,65	7,87	186,68	14,31	3,267	3,518
314,75	547,41	792,49	8,06	188,90	14,89	3,339	3,596
318,12	549,72	788,24	8,11	189,87	15,18	3,375	3,635

Tabela 2: Valores dos parâmetros com os termos de superfície

m_{up} (MeV)	$m_{strange}$ (MeV)	Λ (MeV)	m_{0up} (MeV)	m_{0s} (MeV)	$G(10^{-6})$	$g_{\pi qq}$	g_{kqq}
292,35	544,44	952,92	7,48	170,36	9,18	2,641	2,970
300,88	550,66	935,62	7,65	174,21	9,70	2,738	3,046
304,55	553,34	928,88	7,71	175,75	9,92	2,731	3,079
308,05	555,90	922,81	7,98	177,43	10,12	2,757	3,110
314,75	560,79	912,09	8,09	179,96	10,51	2,807	3,169
318,12	563,25	907,11	8,23	181,27	10,70	2,831	3,198

5.2 Cálculo do Fator de Forma eletromagnético

Utilizando os valores das tabelas mostradas em (5.1) realizamos os cálculos do fator de forma eletromagnético para o pión e para o káon para o conjunto de valores relacionados a $m_{up} = 292,35\text{MeV}$. Esses resultados foram, assim, plotados em um gráfico para compararmos com os valores obtidos experimentalmente retirados de [24, 26], conforme a figura 5.

Nos gráficos comparamos os valores obtidos para o fator de forma eletromagnético com e sem os termos de superfície.

A figura 6 mostra o gráfico referente ao fator de forma eletromagnético do Pión sem os termos de superfície (linha cheia) e com os termos de superfície (linha tracejada) e os valores experimentais 5a com seus respectivos erros. Na figura 7 vemos os mesmos resultados agora para o Káon com os valores experimentais mostrados em 5b.

Observamos que nos dois casos os cálculos dos fatores de forma com os termos de superfície nos fornece resultados mais próximos dos valores experimentais. Analisando os resultados experimentais vemos que os valores do fator de forma decaem com o aumento do momento q do fóton emitido. Assim percebe-se que o comportamento dos valores calculados pelo modelo estão de acordo com os resultados.

Pode-se mostrar que o fator de forma eletromagnético em $q = 0$ é igual a 1. Vemos das

$t(\text{GeV}/c)^2$	$ F ^2$	Error	$t(\text{GeV}/c)^2$	$ F ^2$	Error
-0.0150	0.944	0.007	-0.0830	0.757	0.015
-0.0170	0.921	0.006	-0.0890	0.715	0.016
-0.0190	0.933	0.006	-0.0950	0.724	0.018
-0.0210	0.926	0.006	-0.1010	0.680	0.017
-0.0230	0.914	0.007	-0.1070	0.696	0.019
-0.0250	0.905	0.007	-0.1130	0.688	0.020
-0.0270	0.898	0.008	-0.1190	0.676	0.021
-0.0290	0.884	0.008	-0.1250	0.665	0.023
-0.0310	0.884	0.009	-0.1310	0.651	0.024
-0.0330	0.890	0.009	-0.1370	0.646	0.027
-0.0350	0.866	0.010	-0.1440	0.616	0.023
-0.0370	0.876	0.011	-0.1530	0.654	0.023
-0.0390	0.857	0.011	-0.1630	0.563	0.024
-0.0420	0.849	0.009	-0.1730	0.534	0.030
-0.0460	0.837	0.009	-0.1830	0.586	0.034
-0.0500	0.830	0.010	-0.1930	0.544	0.036
-0.0540	0.801	0.011	-0.2030	0.529	0.040
-0.0580	0.800	0.012	-0.2130	0.616	0.048
-0.0620	0.809	0.012	-0.2230	0.487	0.049
-0.0660	0.786	0.014	-0.2330	0.417	0.058
-0.0700	0.785	0.015	-0.2430	0.593	0.074
-0.0740	0.777	0.016	-0.2530	0.336	0.073
-0.0780	0.769	0.017			

$q^2 (\text{GeV}/c)^2$	$ F_K ^2$
0.0175	0.965 ± 0.024
0.0225	0.900 ± 0.024
0.0275	0.973 ± 0.031
0.0325	0.962 ± 0.037
0.0375	0.918 ± 0.043
0.0425	0.890 ± 0.049
0.0475	0.877 ± 0.055
0.0525	0.813 ± 0.060
0.0575	0.880 ± 0.071
0.0625	0.938 ± 0.084
0.0675	0.742 ± 0.088
0.0725	0.732 ± 0.095
0.0775	0.72 ± 0.12
0.0850	0.73 ± 0.10
0.0950	0.80 ± 0.14

(a) Fator de forma eletromagnético do Píon [24]	(b) Fator de forma eletromagnético do Káon [26]
---	---

Figura 5: Valores experimentais do Fator de Forma eletromagnético

figuras 6 e 7, que os resultados calculados com os termos de superfície ajustam-se quase que perfeitamente com o valor esperado (a menos de erros numéricos). Já os resultados calculados sem os termos de superfície se distanciam consideravelmente deste resultado esperado. A razão para isso reside na escolha distinta feita para a parametrização de Feynman no cálculo do fator de forma (equação (4.41) na qual o shift na variável de integração é feito em $k + (px + p'y)$) e no cálculo da constante de acoplamento méson-quark, $g_{\pi qq}$ e g_{Kqq} (equações (3.28) e (3.57) nas quais o shift é feito na variável $k + px$). Os diferentes shifts feitos sem a adequada compensação dos termos de superfície causam o maior erro na determinação de $F_\pi(q^2 = 0)$ e $F_K(q^2 = 0)$, erro que se propaga para os demais valores de q^2 .

Estes resultados evidenciam a importância da preservação dos termos de superfície nos resultados do modelo de NJL, reforçando também a necessidade, portanto, de se empregar a transformação de Chan para se eliminar os termos não físicos dos observáveis, que poderiam prejudicar a determinação correta dos termos de superfície, além de torná-los ambíguos.

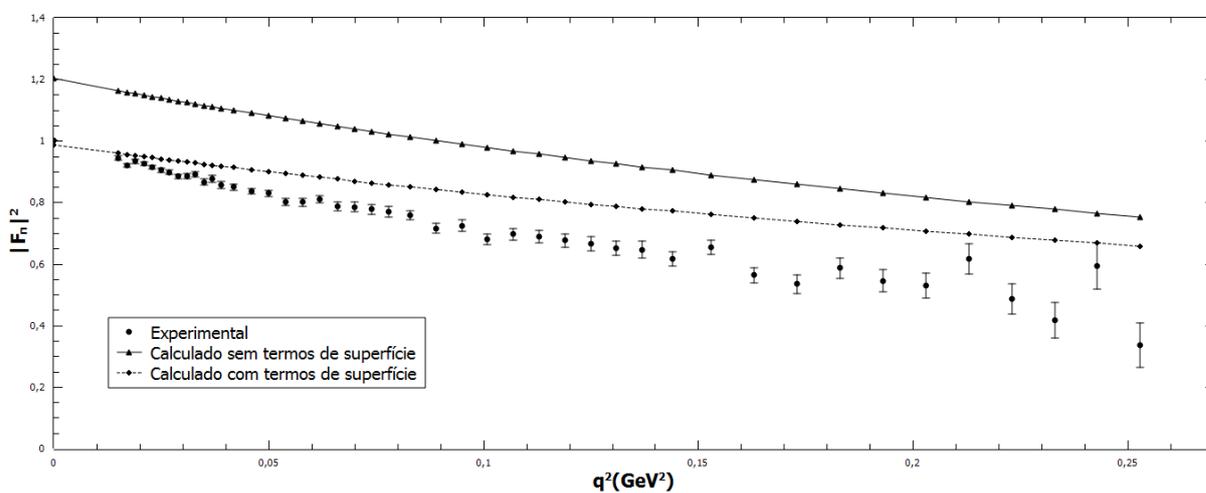


Figura 6: Gráfico do Fator de Forma eletromagnético para o Píon

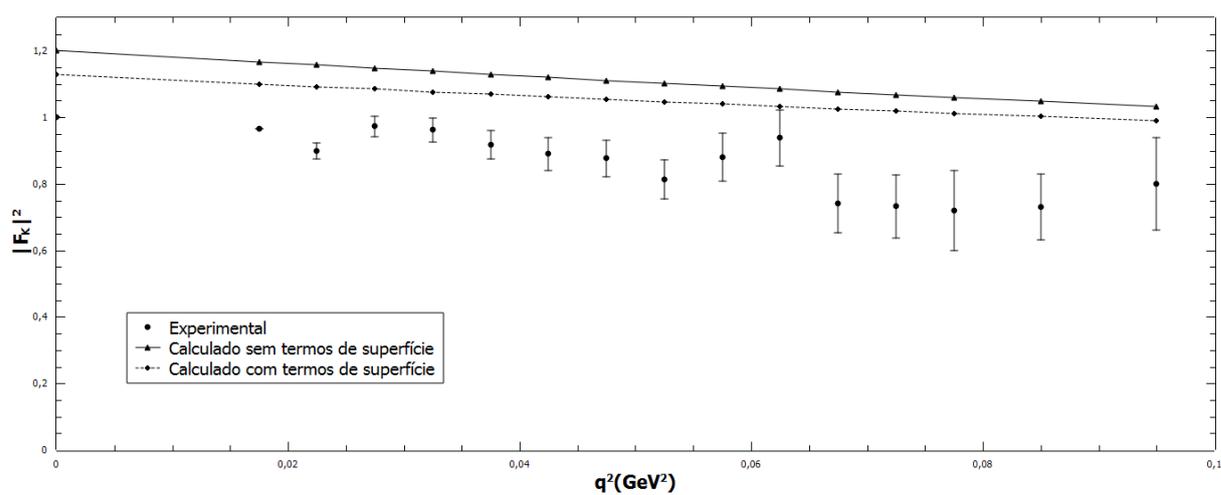


Figura 7: Gráfico do Fator de Forma eletromagnético para o Káon

CONCLUSÃO

Neste trabalho fizemos a revisão do Modelo de Nambu-Jona-Lasínio no setor $SU(3)$ tratada em uma aproximação em campo médio a 1-loop, com a utilização do processo de bosonização do modelo. Esse processo nos forneceu a lagrangiana efetiva para realizarmos os cálculos de propriedades dos mésons escalares leves, o pión e o káon. Obtivemos, a partir de sua expansão, os termos da ação efetiva que correspondem à *Equação de GAP* (3.1), a auto-energia dos mésons (3.2) e o *Fator de Forma Eletromagnético* (4.1). Como foi mencionado, o modelo de Nambu-Jona-Lasínio não é renormalizável, portanto os cálculos das amplitudes ficam dependentes de um cut-off finito. Isso faz com que esse valor de corte seja um parâmetro do modelo que é interpretado como sendo o limite seu limite de validade.

Os observáveis foram calculados utilizando a parametrização mais geral possível que no final resultou, como usual, em termos não físicos nas expressões. Utilizamos a transformação proposta por Chan [8], na qual é realizada uma translação nos momentos dos loops a fim de eliminarmos os termos não físicos. Isso faz com que seja possível manter os demais termos de superfície que dependem apenas de variáveis físicas, que em alguns processos de regularização são tomados como zero pois dependem dos termos não físicos e, assim, nos foi possível analisar os efeitos desses termos nos cálculos. O processo de isolamento e eliminação, através da transformação de Chan, dos termos não físicos das amplitudes observáveis, correspondem ao principal resultado desta dissertação.

Como aplicação calculamos os fatores de forma eletromagnéticos do pión e do káon, para os quais utilizamos os valores das massas dos mésons retirados de [27], das massas dos quarks retirados de [28] e dos parâmetros ajustados em [4]. Utilizamos os valores para os parâmetros correspondentes a $m_{up} = 292,35MeV$, pois foram os valores que melhor reproduziram os dados experimentais. A partir desses valores realizamos os cálculos numéricos para o pión, com massa de $139,57MeV$ e para o káon com massa de $493,68MeV$, e comparamos com os valores experimentais retirados de [24, 26].

Embora os fatores de forma não apresentem um bom ajuste aos resultados

experimentais, característica usual os modelos que dependem de um cut-off finito [29], os resultados mostram claramente a importância da inclusão dos termos de superfície na obtenção dos fatores de forma, pois observa-se que as curvas calculadas utilizando os termos de superfície, a menos de erros numéricos, se aproximam consideravelmente dos resultados experimentais justificando, com isso, a necessidade da adoção do processo de eliminação dos termos não físicos das amplitudes do modelo utilizando a transformação proposta por Chan.

Referências Bibliográficas

- [1] ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>.
- [2] GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. WILEY. [S.l.]: VCH, Weinheim, 2004.
- [3] DIAS, E. W. *Independência de ambiguidades na versão renormalizável do Modelo de Nambu-Jona-Lasinio SU(2)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.
- [4] GONSALVES, B. da F. *Os efeitos dos termos de superfície no modelo de Nambu-Jona-Lasinio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João del Rei, 2015.
- [5] NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Physical Review*, APS, v. 122, n. 1, p. 345, 1961.
- [6] NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. ii. *Physical Review*, APS, v. 124, n. 1, p. 246, 1961.
- [7] BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. *Physical Review*, APS, v. 108, n. 5, p. 1175, 1957.
- [8] CHAN, L.-H. Derivative expansion for the one-loop effective actions with internal symmetry. *Physical review letters*, APS, v. 57, n. 10, p. 1199, 1986.
- [9] KLEVANSKY, S. The nambu—jona-lasinio model of quantum chromodynamics. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 64, n. 3, p. 649, 1992.
- [10] VOGL, U.; WEISE, W. The nambu and jona-lasinio model: its implications for hadrons and nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier, v. 27, p. 195–272, 1991.
- [11] VOLKOV, M. K.; RADZHABOV, A. E. The nambu—jona-lasinio model and its development. *Physics-Uspekhi*, IOP Publishing, v. 49, n. 6, p. 551, 2006.
- [12] GOLDSTONE, J. Field theories with «superconductor» solutions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Springer, v. 19, n. 1, p. 154–164, 1961.
- [13] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*. [S.l.]: Westview Press Incorporated, 1995.

- [14] ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum field theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2006.
- [15] WIT, B. de; SMITH, J. *Field theory in particle physics*. [S.l.]: Elsevier, 2012. v. 1.
- [16] DAS, A. *Field theory: a path integral approach*. [S.l.]: World Scientific, 1993. v. 52.
- [17] RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996.
- [18] GUSYNIN, V.; MIRANSKIJ, V. Effective action in the gauged nambu-jona-lasinio model. *Unknown*, v. 1, 1991.
- [19] MOTA, A. L. *O Modelo de Nambu-Jona-Lasinio como uma teoria Quantica de Campos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 1999.
- [20] JACKIW, R. When radiative corrections are finite, but undetermined. *International Journal of Modern Physics B*, World Scientific, v. 14, n. 19n20, p. 2011–2021, 2000.
- [21] PORTO, J. S. *Anomalia de escala e invariância de calibre em eletrodinâmica quântica: um estudo diagramático*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- [22] BRIZOLA, A. et al. Implicit regularisation technique: Calculation of the two-loop-theory β -function. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 14, n. 22, p. 1509–1517, 1999.
- [23] BATTISTEL, O.; DALLABONA, G. A systematization for one-loop 4d feynman integrals-different species of massive fields. *Journal of Modern Physics*, Scientific Research Publishing, v. 3, n. 10, p. 1408, 2012.
- [24] AMENDOLIA, S. et al. A measurement of the space-like pion electromagnetic form factor. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 277, p. 168–196, 1986.
- [25] BLIN, A.; HILLER, B.; SCHADEN, M. Electromagnetic form factors in the nambu-jona-lasinio model. *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei*, Springer, v. 331, n. 1, p. 75–82, 1988.
- [26] AMENDOLIA, S. et al. A measurement of the kaon charge radius. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 178, n. 4, p. 435–440, 1986.
- [27] OLIVE, K. A. et al. Review of particle physics particle data group. Chinese Physical Soc, v. 38, n. 9, 2014. ISSN 1674-1137. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1674-1137/38/9/090001>>.
- [28] JOVANOVIĆ, V. B. et al. Constituent quark masses obtained from hadron masses with contributions of fermi-breit and glozman-riska hyperfine interactions. *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 11, p. 117501, 2010.
- [29] MOTA, A. et al. Meson properties in a renormalizable version of the njl model. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 652, n. 1, p. 73–87, 1999.