

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

Clícia Naldoni de Souza

**Eletrodinâmica de Podolsky Aplicada à
Cosmologia**

Poços de Caldas/MG

2016

Clícia Naldoni de Souza

Eletrodinâmica de Podolsky Aplicada à Cosmologia

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração em Física de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto

Poços de Caldas/MG

2016

S729e Souza, Clícia Naldoni de.

Eletrodinâmica de Podolsky aplicada à cosmologia / Clícia Naldoni de Souza. – Poços de Caldas, 2016.

96 f. –

Orientador: Rodrigo Rocha Cuzinatto.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, MG, 2016.

Bibliografia.

1. Cosmologia. 2. Maxwell, Equações de. 3. Eletrodinâmica. I. Cuzinatto, Rodrigo Rocha. II. Título.

CDD: 523.1

Clícia Naldoni de Souza

Eletrodinâmica de Podolsky Aplicada à Cosmologia

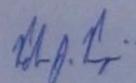
A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física Pela Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG). Área de concentração: Física de Partículas e Campos.

Aprovada em: 16 de maio de 2016.

Prof. Dr. Pedro José Pompeia

Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial

Assinatura:



Prof. Dr. Fernando Gonçalves Gardim

Universidade Federal de Alfenas

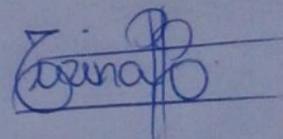
Assinatura:



Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinato

Universidade Federal de Alfenas

Assinatura:



Dedico este trabalho aos curiosos e a você leitor.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Wilma, pois sem sua contínua motivação e suporte para que eu prosseguisse estudando, eu não teria sido capaz de alcançar meus objetivos.

À minha mãe biológica, Vânia Naldoni (*in memoriam*), por ter me mostrado a importância de sermos autênticos.

Ao Daniel Oftedal, meu noivo e amigo, pelo amor, cuidado e carinho nesses dois últimos anos. Sem seu suporte, o caminho seria mais árduo.

Ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Rodrigo Cuzinato, pelo seu suporte contínuo desde o primeiro ano da minha graduação até o presente momento. Agradeço sua paciência, motivação e por muitas vezes me prevenir dos obstáculos que estariam por vir. Eu também agradeço ao professor Rodrigo por ter me apresentado às maravilhas do mundo da física teórica, mais especificamente, por ter me dado a oportunidade de trabalhar nessa área tão fascinante que é a cosmologia.

Ao Prof. Dr. Cassius, por também estar ao longo do meu percurso desde o primeiro ano de graduação. Agradeço sua imensa ajuda, seus comentários que sempre foram de grande valia para meu enriquecimento e por ter me ensinado desde matemática computacional até mecânica analítica. Seu entusiasmo e seu grande conhecimento são inspiradores.

Ao Prof. Dr. Léo, pelas incontáveis reuniões e conversas sobre o universo primordial, sendo o principal colaborador do presente trabalho e sem sua ajuda, essa dissertação seria menos rica.

Ao Prof. Dr. Pimentel, por ter nos recebido no IFT e ter acrescentado de forma significativa a este trabalho.

Ao Prof. Dr. Gardim, por ter me mostrado que física e literatura podem andar juntas e por me ensinar eletrodinâmica de uma forma criativa. Agradeço-o também por ter aceitado ser membro da banca examinadora do presente trabalho.

Ao Prof. Dr. Gustavo, por me ter me ensinado eletromagnetismo ainda na graduação e, depois, mecânica estatística, contribuindo assim, imensamente para o meu conhecimento, para que eu tivesse capacidade de realizar este trabalho. Agradeço-o também pelo seu entusiasmo e prestatividade com todos os seres que passam por sua vida.

Ao Edu, por ter me ensinado a trabalhar com análise numérica, pelas conversas enriquecedoras, por me salvar inúmeras vezes quando havia problema com os gráficos e por sempre se dispor a me ensinar.

Ao meu tio Valter Amoedo, por ter me ensinado ainda na minha infância que o mundo não era o limite.

Ao tio Walter e à tia Wanda, por terem colocado as fitas cassete de Cosmos para eu assistir enquanto os adultos conversavam.

À May, por ter me ajudado a me tornar uma pessoa mais humana e por sua amizade.

À Gabi, por me ajudar a ter uma vida social durante o mestrado. Sua alegria, disposição e amizade são de grande valia para meu ser.

À Paula Sato, pela amizade e pelas conversas frutíferas sobre didática e sobre a vida.

Ao Távio, por sua amizade, companhia nos estudos e nas conversas filosóficas.

Ao Pedro, pela amizade e conversas enriquecedoras sobre psicologia.

À Naty, pela paciência, presença e amizade. Por ter tirado minhas dúvidas em análise química e daí, firmamos uma amizade duradoura.

À Paty Gonçalves, pela amizade e por acompanhar nas comidas vegetarianas.

Aos meus amigos e orientadores ao veganismo: Jessica, Cardim, Manucci, Raquel e Marcella.

Ao Silas, pela amizade, incentivo e por ter me falado do ninjutsu.

À Aline e ao Mário, pela amizade, conversas transcendentais e jantas maravilhosas.

À Ana Lúcia, por me ajudar me entender melhor.

Ao William de Oliveira, por ter me ensinado técnicas de oratória.

À Sabrina e ao George, fundadores da escola de negócios e coworking UpStairs, por cederem o espaço para eu trabalhar nos últimos meses de conclusão desta dissertação. Agradeço-os também por, em pouco tempo, terem me dado as ferramentas e oportunidades para me desenvolver como ser humano. Sem falar das conversas frutíferas com meus coworkers: Dai, Júlio, Andress e Marcelo. Valeu pessoal!

Às meninas da república Bruna e Bia, pela coexistência.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho e para o meu desenvolvimento pessoal, direta ou indiretamente nesses últimos dois anos da minha vida.

“And in the end it is not the years in your life that count, it’s the life in your years.”

Abraham Lincoln

“Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana.”

Carl Jung

RESUMO

O mesmo procedimento estabelecido em teoria dos campos clássicos que nos leva a deduzir as equações de Maxwell, também conduz à eletrodinâmica de Podolsky, desde que a Lagrangia envolva derivadas do tensor intensidade de campo. A partir das equações de campo para Podolsky, que apresenta uma constante de acoplamento a associada à massa do fóton, é possível deduzir a equação de estado para a radiação de Podolsky. Essa equação é do tipo $P = w(a, T) \varepsilon$, em que P é pressão do gás fotônico; ε , a sua densidade de energia e w é o parâmetro da equação barotrópica que depende da temperatura T , além da massa do fóton. Usando essa equação de estado na expressão de conservação do tensor energia-momento de fluido perfeito e na equação de Friedmann, é possível resolver a dinâmica cósmica para um universo preenchido pela radiação de Podolsky. Mostramos que a dinâmica é pouco afetada pela presença de fótons massivos, uma vez que $0,282 < w_{\text{Podolsky}} < w_{\text{Maxwell}} = 1/3$ para qualquer valor de T , ou equivalentemente, do tempo cosmológico t . A correção de Podolsky para a lei de Stefan-Boltzmann é obtida para qualquer valor de temperatura, descrevendo potencialmente desde o universo primordial até o universo atual. Essa correção é relevante no intervalo $0 \lesssim \xi \lesssim 8$ para o parâmetro adimensional $\xi = \beta m$. A máxima influência da massa do fóton acontece em $\xi_{\text{ref}} = 2,899$. Fora do intervalo referido intervalo de ξ , a dinâmica cosmológica de Podolsky tende à de Maxwell: nos limites de universo primordial ($\xi \ll 1$) e universo atual/futuro ($\xi \gg 1$), $w_{\text{Podolsky}} \rightarrow w_{\text{Maxwell}}$ e o fator de escala de Podolsky vai com \sqrt{t} , de maneira consistente com um gás de fótons não massivos.

Palavras-chave: Podolsky. Maxwell. Eletrodinâmica. Cosmologia.

ABSTRACT

The same procedure established by the classical field theory which leads us to Maxwell's equations also leads to Podolsky's electrodynamics provided that the Lagrangian contains derivatives of the field strength. With Podolsky's field equations in hand, which has a coupling constant a associated to the photon mass, it's possible to derive an equation of state for Podolsky's radiation. The equation of state is of the type $P = w(a, T)\varepsilon$, where P is the pressure of the photon gas; ε is its energy density and w is the barotropic parameter depending on the temperature T and the photon mass. If we use the equation of state in the fluid equation and afterwards in Friedmann's equation, it's possible to solve the cosmic dynamics for a universe filled with Podolsky radiation. We show that the cosmic dynamics is not affected in a significant way by the massive photons, once $0,282 < w_{\text{Podolsky}} < w_{\text{Maxwell}} = 1/3$ for any value of T , or equivalently of the cosmic time t . Podolsky correction to the Stefan-Boltzmann law is obtained for every T ; it potentially describes the whole cosmic history. This correction is significant in the interval $0 \lesssim \xi \lesssim 8$ for the dimensionless parameter $\xi = \beta m$. The maximum influence of the photon mass takes place at $\xi_{\text{ref}} = 2,899$. Out the above interval for ξ , Podolsky cosmic dynamics tends to the Maxwell's one: the scale factor behaves as \sqrt{t} in the limits corresponding to the primeval universe ($\xi \ll 1$) and present-day universe ($\xi \gg 1$), when $w_{\text{Podolsky}} \rightarrow w_{\text{Maxwell}}$.

Keywords: Podolsky. Maxwell. Electrodynamics. Cosmology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<p>Figura 1 – Gráfico de $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_M}$ em função do parâmetro adimensional ξ. $\varepsilon = \varepsilon_M$ é representado pela reta vermelha pontilhada e, se $\varepsilon = \varepsilon_{Pod}$, obtém-se a curva preta.</p> <p style="text-align: right;">Fonte: Da autora.</p>	54
<p>Figura 2 – Gráfico da equação efetiva, $w(\xi)$, para a Eletrodinâmica Generalizada (curva preta). Observamos o comportamento do parâmetro w da equação efetiva de Podolsky. A reta vermelha pontilhada representa Maxwell ou $w = 1/3$. ξ_{min} representa o ponto de maior influência de Podolsky, para $\xi_{min} = \xi_{ref} = 2,899$, i.e., $w(\xi_{min}) = 0,282$.</p> <p style="text-align: right;">Fonte: Da autora.</p>	55
<p>Figura 3 – Gráfico do comportamento da variação do parâmetro de equação de estado ($dw/d\xi$), onde a curva pontilhada vermelha representa a primeira derivada de w em relação à ξ para Maxwell e a curva preta para Podolsky.</p> <p style="text-align: right;">Fonte: Da autora.</p>	57
<p>Figura 4 – Gráfico do fator de escala a completo em relação à ξ para Podolsky (curva preta) e para Maxwell.</p> <p style="text-align: right;">Fonte: Da autora.</p>	59
<p>Figura 5 – Gráfico do tempo adimensional τ em função de ξ para Podolsky.</p> <p style="text-align: right;">Fonte: Da autora.</p>	60
<p>Figura 6 – Fator de escala a em função do tempo cósmico τ para Maxwell (curva vermelha pontilhada) e para Podolsky (curva preta).</p> <p style="text-align: right;">Fonte: Da autora.</p>	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – História térmica do universo. Adaptado de (ELLIS,2012)	28
Tabela 2 – Limites para a massa de Podolsky de acordo com a literatura recente. As letras na última coluna indicam respectivamente: D. para o evento de desacoplamento de neutrinos, T. para transição quark-hadron e U. para unificação eletrofraca.	28
Tabela 3 – Solução da dinâmica cósmica considerando um universo plano respei- tando a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para diversos componentes.	39

SUMÁRIO

1	A TEORIA ELETROMAGNÉTICA	21
1.1	O paradigma Maxwelliano	21
1.2	Eletrodinâmica de Podolsky	23
1.3	Limites experimentais para a massa de Podolsky	26
2	MECÂNICA ESTATÍSTICA BOSÔNICA	31
2.1	Função de partição de um gás de fótons massivos	34
2.2	Obtenção das propriedades termodinâmicas sem aproximação	35
3	ESTRUTURA GERAL DA DINÂMICA CÓSMICA	37
3.1	As equações básicas da cosmologia física	37
3.2	Equação do Fluido para Podolsky: equação $a(T)$	40
3.3	Equação de Friedmann para Podolsky: equação $t(T)$	41
4	SOLUÇÕES APROXIMADAS PARA A DINÂMICA CÓSMICA	43
4.1	A aproximação $\beta m \ll 1$	43
4.1.1	A densidade de energia para altas temperaturas	44
4.1.2	A pressão para altas temperaturas	45
4.1.3	Pressão em função da densidade de energia: $P(\varepsilon)$	45
4.1.4	Equação de Fluido: a equação de $\varepsilon(a)$ no limite $\beta m \ll 1$	47
4.1.5	Equação de Friedmann: a equação de $a(t)$ no limite $\beta m \ll 1$	48
4.1.6	A aproximação $\beta m \gg 1$	48
4.1.7	A densidade de energia para altas temperaturas: $\beta m \gg 1$	49
4.1.8	A pressão para temperaturas finitas: $\beta m \gg 1$	50
4.1.9	Relação entre a pressão e densidade de energia no regime de temperatura finita: $\beta m \gg 1$	51
5	SOLUÇÃO COSMOLÓGICA COMPLETA E ANÁLISE DE SUA DINÂMICA	53
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
	REFERÊNCIAS	65

APÊNDICES	69
APÊNDICE A – EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA ELETRODINÂMICA	71
A.1 Equação de Movimento da Eletrodinâmica Maxwelliana	71
A.2 Equação de Movimento da Eletrodinâmica de Podolsky	73
APÊNDICE B – CONSIDERAÇÕES SOBRE UM GÁS DE FÓTONS	77
APÊNDICE C – INTEGRAIS IMPORTANTES	83
C.1 Integral na forma $\int_0^\infty p^2 \ln(1 - e^{-\beta p}) dp$	83
C.2 Integral na forma $\int_0^\infty p^2 e^{-k\beta \sqrt{p^2+m^2}} dp$	84

INTRODUÇÃO

O físico e matemático escocês James C. Maxwell estabeleceu o paradigma da teoria clássica de campos para a interação eletromagnética (JACKSON, 1999). Seu maior feito foi unificar em quatro equações os resultados de Gauss, Ampère, Faraday e tantos outros que estudaram os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} , entrelaçando fenômenos como luz, eletricidade e magnetismo numa mesma teoria. Suas equações preveem a existência de ondas eletromagnéticas, revelam a natureza da luz e estabelecem com sucesso as bases da teoria de *gauge* mais simples que conhecemos. Apesar da eletrodinâmica de Maxwell desempenhar um papel crucial para o desenvolvimento tecnológico da humanidade, existem teorias alternativas como por exemplo, as de Podolsky e Weber.

Um dos motivos principais que faz com que a teoria de Maxwell seja tão aceita pela comunidade científica, é que ela possui duas simetrias fundamentais da natureza: a de Lorenz e a de *gauge* (BONIN et al., 2010). Por outro lado, em uma eletrodinâmica massiva cuja Lagrangiana para o potencial vetor depende apenas de A_μ e $\partial_\nu A_\mu$ a *simetria de gauge é quebrada* (PROCA; GOUDSMIT, 1939), (CUZINATTO et al., 2011). Uma teoria massiva que possui a simetria de Lorenz foi proposta por Boris Podolsky em 1942, e é denominada Eletrodinâmica Generalizada (PODOLSKY; SCHWED, 1948), (PODOLSKY, 1942), (PODOLSKY; KIKUCHI, 1944). É importante notar que o eletromagnetismo de Podolsky depende de um parâmetro livre, a , que é proporcional à m^{-1} , onde m é a massa do fóton. Esse parâmetro pode ser fixado a partir de experimentos ou observações (CUZINATTO et al., 2011), (BONIN et al., 2010). Portanto, se existir um modo massivo para o fóton, a eletrodinâmica de Podolsky é um dos candidatos para a descrição da interação eletromagnética.

Um dos principais motivos de estudar eletrodinâmicas alternativas, é que existe na teoria Maxwelliana uma divergência na origem para um potencial de Coulomb clássico de uma carga pontual, sendo que para Podolsky, o potencial é finito em todos os pontos (PODOLSKY, 1942).

Interessa-nos estudar Podolsky num contexto cosmológico pois pode haver implicações geradas por uma era da radiação composta por fótons massivos. Isso pode gerar uma nova física e lançar luz sobre alguns dos problemas da cosmologia moderna.

A teoria mais aceita é a de que o universo teve um início através do Big Bang e por isso, em geral a cosmologia tenta modelar o cosmos levando em consideração esse paradigma. Entretanto, o Big Bang traz consigo problemas. São problemas fundamentais da cosmologia moderna: o problema da planura e o problema do horizonte. O problema da planura surge devido ao fato de que é sabido, através de dados observacionais, que o universo é aproximadamente plano hoje. Seguindo essa lógica, ele deveria ser ainda mais plano no passado. Já o fato de que o universo é altamente isotrópico e homogêneo

hoje, nos faz pensar que ele deveria ter sido assim no início também, apesar de que os domínios separados estiveram causalmente desconectados (SANOJA, 2010). Existem muitos conceitos “estranhos” da cosmologia moderna como *inflação*, *energia escura*, formas exóticas de matéria denominada escura e até mesmo multiversos, que surgem da tentativa de explicar o que pode-se observar atualmente ou na tentativa de solucionar os problemas citados: problema da planura e do horizonte.

Quando tentamos modelar um universo somente com radiação, descobre-se que as equações de Maxwell não conseguem descrever um universo isotrópico e homogêneo com uma distribuição de cargas total uniforme, pois o tensor de campo eletromagnético, $F_{\mu\nu}$, num cenário deste tipo deveria desaparecer em todas as direções (LI, 2016). Entretanto, não é isso que acontece na eletrodinâmica Maxwelliana. Em um universo fechado com carga total não nula, as equações de Maxwell falham independentemente da simetria do espaço-tempo e da distribuição de cargas. Daí a importância de estudar eletrodinâmicas alternativas em um contexto cosmológico, pois um modelo do universo primordial pode ser diferente do que o obtido estudando a cosmologia do modelo padrão. Segundo Branberger et. al. (CAI et al., 2009), dado um modelo de Lee-Wick obtém-se um universo em *bounce* (ou em português rebote) e, é possível introduzir um potencial para um campo escalar e obter um período longo o suficiente de inflação depois de ter havido esse salto. Um modelo deste tipo, pode solucionar os principais problemas da cosmologia moderna. Lee e Wick (1969) (LEE; WICK, 1969b), (LEE; WICK, 1969a) trabalharam exatamente com o mesmo formato de eletrodinâmica massiva que Podolsky, com exceção de que fizeram isso de uma maneira mais ampla num contexto perturbativo de teoria de campos que Podolsky não teve possibilidade de fazer, pois na década de 40 os diagramas de Feynmann ainda não estavam consolidados. Em vista disso, pode ser que a eletrodinâmica de Podolsky tenha algum efeito no modelo de universo primordial.

A presente dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 1 fazemos uma breve discussão da eletrodinâmica de Podolsky. Falamos das motivações para estudá-la, passando pela construção da sua Lagrangiana, obtendo as equações de movimento para o potencial vetor, as condições de gauge para Maxwell e para Proca e também discutimos os limites experimentais para a massa de Podolsky. No Capítulo 2 discutimos a mecânica estatística para um gás de fótons da eletrodinâmica de Podolsky, passando pela estatística bosônica, construção da função de partição, incluindo a discussão dos graus de liberdade internos e também obtemos as propriedades termodinâmicas: pressão e densidade de energia sem aproximação. Os reflexos da eletrodinâmica de Podolsky para a cosmologia constam no Capítulo 3, onde obtemos as equações diferenciais da dinâmica cósmica sem aproximação. Devido ao fato de não termos encontrado uma solução analítica para essas equações diferenciais, são apresentados resultados obtidos através da análise numérica. Na busca por uma solução analítica, estudamos o limite de $\beta m \ll 1$, que corresponde ao começo da história térmica do universo, e o limite $\beta m \gg 1$, que corresponde ao universo

atual e seu futuro. Nessas considerações, $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$ é o parâmetro de Boltzmann, T é a temperatura e k_B é a constante de Boltzmann; m é a massa do fóton de Podolsky. As conclusões dessa investigação são apresentadas no Capítulo 4. Finalmente, no Capítulo 5 tecemos nossos comentários finais.

1 A TEORIA ELETROMAGNÉTICA

Para melhor apreciar a proposta generalizadora de Podolsky, convém lembrar os principais resultados da teoria de Maxwell para o campo eletromagnético. Isso é feito na próxima seção, que também serve para fixarmos a notação.

1.1 O PARADIGMA MAXWELLIANO

Existem quatro equações para o campo elétrico \mathbf{E} e para o campo magnético \mathbf{B} no vácuo, denominadas Equações de Maxwell, onde não há densidade de cargas ($\rho = 0$) e a densidade de corrente é nula ($\mathbf{j} = 0$). Na forma diferencial, as quatro equações de Maxwell são:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.1)$$

A primeira equação do conjunto (1.1) refere-se à Lei de Gauss; a segunda, à ausência de monopólos magnéticos; a terceira, à Lei de Faraday e a quarta, à lei de Ampère-Maxwell. A beleza dessas equações está ligada ao fato de serem invariantes por transformações de Lorentz, algo que só seria verificado depois do advento da Relatividade Especial, quando as Eqs. (1.1) já estavam estabelecidas e haviam previsto a natureza e a velocidade de propagação da luz.

Sob as transformações de Lorentz:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

($\mu = 0, 1, 2, 3$) com

$$(\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} assumem as formas abaixo (GRIFFITHS, 2014):

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \gamma(E_2 - vB_3), & E'_3 &= \gamma(E_3 + vB_2), \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \gamma\left(B_2 - \frac{v}{c^2}E_3\right), & B'_3 &= \gamma\left(B_3 + \frac{v}{c^2}E_2\right), \end{aligned}$$

sendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

e c é a magnitude da velocidade da luz. Essas transformações indicam que as componentes dos campos elétrico e magnético misturam-se quando passamos de um referencial inercial K para um outro referencial K' em movimento relativo uniforme de velocidade $\mathbf{v} = \frac{dx^i}{dt}$ ($i = 1, 2, 3$) com respeito ao primeiro. Isso sugere a unificação dos campos elétrico e magnético em um único tensor, chamado tensor intensidade de campo eletromagnético, que é a matriz 4×4 :

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

A matriz acima é também um tensor anti-simétrico: tensor porque obedece à lei de transformação (SABBATA; GASPERINI, 1985):

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} F^{\alpha\beta}, \quad (1.3)$$

anti-simétrico pois, para as componentes da matriz (1.2), vale

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \quad (1.4)$$

Os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} podem ser descritos em termos do potencial escalar ϕ e do potencial vetor \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Por isso, sabemos que os campos elétrico e magnético dependem das derivadas de $A_{\mu} = (\phi, \mathbf{A}) = (\phi, A_1, A_2, A_3)$. Logo, o tensor intensidade de campo eletromagnético pode ser escrito como:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \quad (1.5)$$

com a taquigrafia

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

Com a definição (1.5), as equações de Maxwell na forma diferencial (1.1) podem ser resumidas em:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (1.6)$$

que representam as leis de Gauss e de Ampère-Maxwell no vácuo, e

$$\partial_{\mu} F_{\rho\sigma} + \partial_{\sigma} F_{\mu\rho} + \partial_{\rho} F_{\sigma\mu} = 0, \quad (1.7)$$

que são as equações de Faraday e de ausência de monopólos magnéticos. Essas duas equações são encontradas no Apêndice A.

1.2 ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY

Apesar da aceitação da teoria Maxwelliana, o objetivo desta dissertação é apresentar novas possibilidades para a aplicação da teoria eletromagnética no contexto da cosmologia. A Lagrangiana de Podolsky é:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial_\nu F^\zeta{}_\zeta. \quad (1.8)$$

Consideremos o caso sem fonte, i.e., $j_\mu = 0$. O segundo termo depois da igualdade na Eq. (1.8) é justificado pela Teoria Quântica de Campos (PODOLSKY; KIKUCHI, 1944).

Da mesma forma que em Maxwell o tensor $F^{\mu\nu}$ é representado por (1.5):

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

O parâmetro livre a tem dimensões de m^{-1} , onde m tem dimensão de energia.¹ No limite $|m| \rightarrow \infty$ recuperamos a densidade Lagrangiana de Maxwell dada pela Eq. (A.1) (BONIN et al., 2010).

As equações de movimento associadas à $\mathcal{L}_P = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, \partial_\rho \partial_\nu A_\mu)$ são:²

$$(1 + a^2 \square) \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0, \quad (1.9)$$

que generaliza a Eq. (1.6), e

$$\partial_{[\mu} F_{\rho\sigma]} = 0, \quad (1.10)$$

que é a identidade de Bianchi, válida também para Maxwell, Eq. (1.7). Essas equações são deduzidas no Apêndice A.

Considerando (1.9) e (1.5), temos:

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = (1 + a^2 \square) (\square A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu) = (1 + a^2 \square) \square A^\nu - (1 + a^2 \square) \partial^\nu \partial_\mu A^\mu \quad (1.11)$$

O segundo termo pode ser reescrito assim:

$$(1 + a^2 \square) \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) + a^2 \partial_\rho \partial^\rho \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu).$$

Como as derivadas ordinárias comutam, podemos fazer ∂^ν aparecer à frente de todos os termos no último membro. De fato,

$$(1 + a^2 \square) \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) + a^2 \partial_\rho \partial^\rho \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu + a^2 \partial_\rho \partial^\rho \partial_\mu A^\mu),$$

i.e.

$$(1 + a^2 \square) \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \partial^\nu \left[(1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu \right].$$

¹ Na presente dissertação usamos o sistema natural de unidades e a assinatura da métrica (+ - - -) [vide (A.3)].

² $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = c^{-2} \partial_0^2 - \partial_i^2$.

Perceba que, sob a condição (GALVÃO; PIMENTEL, 1988):

$$\boxed{(1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu = 0} \quad (\text{gauge de Lorenz generalizado}) , \quad (1.12)$$

temos:

$$(1 + a^2 \square) \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 , \quad (1.13)$$

de modo que o segundo termo do lado direito de (1.11) se anula:

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = (1 + a^2 \square) \square A^\nu . \quad (1.14)$$

A condição (1.12) é chamada de **gauge de Lorenz generalizado** porque é válida para a eletrodinâmica generalizada de Podolsky. O nome dessa condição de gauge é apropriado pois, no caso da eletrodinâmica convencional de Maxwell, usamos o gauge de Lorenz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, o qual é exatamente (1.12) com $a = 0$.

Usando (1.14) em (1.9), obtemos a equação de movimento da eletrodinâmica de Podolsky em termos de A^μ :

$$\boxed{(1 + a^2 \square) \square A^\nu = 0} \quad (\text{equação de movimento}) . \quad (1.15)$$

Essa expressão permite ver existência de um modo massivo e um modo sem massa para o campo eletromagnético na teoria de Podolsky.³ Isso é feito empregando a *transformada de Fourier* de A^μ conforme segue. Seja:

$$A^\nu(x^\mu) = \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} d^4p . \quad (1.16)$$

Logo,

$$\partial_\rho A^\nu(x^\mu) = \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\rho} (-ip_\lambda x^\lambda) d^4p = \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} (-ip_\rho) d^4p ,$$

ou seja, ganhamos um fator $(-ip_\rho)$ no integrando da transformada de Fourier quando atuamos o operador de derivação ∂_ρ sobre A^ν . Acontece que há várias derivadas de A^ν na equação (1.15); veja:

$$(1 + a^2 \square) \square A^\nu = (1 + a^2 \partial^\sigma \partial_\sigma) \partial^\rho \partial_\rho A^\nu = 0 .$$

Ao substituirmos (1.16) em (1.15), resulta:

$$(1 + a^2 \square) \partial^\rho \partial_\rho \int \tilde{A}^\nu e^{-ip_\lambda x^\lambda} d^4p = 0$$

$$(1 + a^2 \square) \int \tilde{A}^\nu e^{-ip_\lambda x^\lambda} \left(-ip^\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\rho} \right) (-ip_\rho) d^4p = 0$$

³ Todo o procedimento que segue deveria, a rigor, ser realizado com a equação de movimento com fontes, ao invés da Eq. (1.15). Com isso a separação do potencial vetor em um setor massivo e um setor não massivo segue de maneira dedutiva e sem ambiguidades.

$$\begin{aligned} (1 + a^2 \square) \int \tilde{A}^\nu e^{-ip^\lambda x_\lambda} (-p^2) d^4 p &= 0 , \\ (1 + a^2 \partial^\sigma \partial_\sigma) \int \tilde{A}^\nu e^{-ip^\lambda x_\lambda} (-p^2) d^4 p &= 0 . \end{aligned}$$

Agora, distribuimos a integral pelos dois termos do parênteses, escrevendo:

$$\int \tilde{A}^\nu e^{-ip^\lambda x_\lambda} (-p^2) d^4 p + a^2 \partial^\sigma \partial_\sigma \int \tilde{A}^\nu e^{-ip^\lambda x_\lambda} (-p^2) d^4 p = 0 .$$

Por analogia aos passos anteriores, sabemos que vamos obter mais um fator $(-p^2)$ no interior da segunda integral devido às derivadas $\partial^\sigma \partial_\sigma$:

$$\int \tilde{A}^\nu e^{-ip^\lambda x_\lambda} (-p^2) d^4 p + a^2 \int \tilde{A}^\nu e^{-ip^\lambda x_\lambda} (-p^2) (-p^2) d^4 p = 0 ,$$

ou

$$\int \tilde{A}^\nu e^{-ip^\lambda x_\lambda} [p^2 (1 - a^2 p^2)] d^4 p = 0 .$$

Essa equação é satisfeita identicamente caso o conteúdo do colchetes no integrando seja zero. Por isso, requerimos que:

$$\boxed{p^2 (1 - a^2 p^2) = 0} , \quad (1.17)$$

que é chamada de **relação de dispersão**.

Por sua vez, a Eq. (1.17) é satisfeita para

$$p^2 = 0 \quad (\text{relação de dispersão de Maxwell}) , \quad (1.18)$$

ou

$$1 - a^2 p^2 = 0 \quad (\text{relação de dispersão de Proca}) . \quad (1.19)$$

Enfatizamos que as Eqs. (1.18) e (1.19) são *independentes*.

A Eq. (1.18) é chamada de relação de dispersão do eletromagnetismo de Maxwell e é consistente com um fóton de massa de repouso nula. Isso é assim pois lembramos a definição do quadrimomento da relatividade especial (MARION, 2013):

$$p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = (\varepsilon, \mathbf{p})$$

Então:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p^0 p^0 - p^1 p^1 - p^2 p^2 - p^3 p^3 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 , \quad (1.20)$$

de modo que $p^2 = 0$ é

$$\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2} \quad (\text{Maxwell}) . \quad (1.21)$$

Quando essa equação é comparada com a relação de Einstein da relatividade especial,⁴

$$\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (\text{relatividade especial}) , \quad (1.22)$$

⁴ Em unidade do SI, a relação de einstein é $\varepsilon^2 = (\mathbf{pc})^2 + (mc^2)^2$.

percebemos que a igualdade só é possível se

$$m = 0 \quad (\text{Maxwell}) , \quad (1.23)$$

daí dizermos que o *fóton na eletrodinâmica de Maxwell tem massa nula*.

A Eq. (1.19) é chamada de relação de dispersão da eletrodinâmica de Proca (PROCA; GOUDSMIT, 1939) e está ligada a um fóton massivo. Em verdade, substituindo (1.20) em (1.19) resulta:

$$1 - a^2 (\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2) = 0 \Rightarrow a^2 (\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2) = 1 \Rightarrow \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = \frac{1}{a^2} ,$$

i.e.

$$\boxed{\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{a^2}} \quad (\text{Proca}) . \quad (1.24)$$

Comparando (1.24) e a relação de energia da relatividade especial (1.22), temos:

$$m^2 = \frac{1}{a^2} \quad (\text{Proca}) , \quad (1.25)$$

e, por essa razão, dizemos que o *fóton da teoria de Podolsky é massivo*. Afinal, o fator a que aparece na Lagrangiana de Podolsky é o inverso da massa de Proca.

Dessa forma, percebemos que na teoria de Podolsky temos um fóton com um modo sem massa – o modo de Maxwell, Eq. (1.23) – e um modo massivo – o modo de Proca, Eq. (1.25). Ademais, esses modos são independentes, pois eles decorrem das Eqs. (1.18) e (1.17), que são independentes. Essa **independência dos modos fotônicos** também é manifesta nas Eqs. (1.21) e (1.24) para as energias dos fótons e será de fundamental importância quando construirmos a função de partição $Z(\varepsilon)$ da teoria de Podolsky.

1.3 LIMITES EXPERIMENTAIS PARA A MASSA DE PODOLSKY

Uma predição fundamental das equações de Maxwell é que a radiação eletromagnética viaja à uma velocidade constante no vácuo, c . No contexto da eletrodinâmica quântica (QED, do inglês *Quantum Electrodynamics*), um campo eletromagnético relativístico quantizado com frequência ν , é reconhecido como um conjunto de partículas fotônicas com energia $h\nu$. Esses quanta de luz viajam à velocidade constante c e, por isso, tem massa de repouso nula. Devido ao fato de essa teoria ter apresentado uma predição de seis ou mais casas decimais (GOLDHABER; NIETO, 1971) já na década de 70, a ideia do fóton não ter massa tornou-se um axioma da física.

De uma maneira geral, a ideia da existência de fótons massivos é compatível com os princípios mais gerais da física de partículas (FONSECA; PAREDES, 2010), por isso, a possibilidade de ser um fato verídico não deve ser descartada. Na Tabela 2 fazemos um apanhado bibliográfico das predições da massa do fóton no contexto eletrodinâmica de Podolsky.

Para relacionar a energia da massa do fóton com uma temperatura associada a uma era específica pela qual o universo tenha passado, é necessário termos em mãos o valor médio da energia atual. Depois da descoberta da Radiação Cósmica de Fundo (em inglês, *Cosmic Microwave Background*: CMB) por Arno Penzias e Robert Wilson na década de 60, foi possível obter muitos dados até então inacessíveis, e.g. a temperatura atual do universo e sua densidade de energia. Esses dados são de grande importância para a cosmologia observacional. Usando uma antena ultrasensível na detecção de microondas na Bell Telephone Laboratories, em Nova Jersey, os dois físicos estadunidenses encontraram um fundo isotrópico de radiação microondas (PENZIAS; WILSON, 1965). Recentemente, o satélite COBE (do inglês *Cosmic Background Explorer*) nos forneceu dados suficientes para concluir que a CMB pode ser muito bem ajustada ao espectro do corpo negro com a temperatura $T_0 = 2,725 \pm 0,001$ K (DODELSON, 2003). A densidade de energia da CMB pode ser calculada através da equação de Stefan-Boltzmann $\varepsilon = \sigma T^4$, onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann. A densidade de energia da CMB é então $4,17 \times 10^{-14}$ J m⁻³. Com isso é possível calcular a energia média dos fótons da CMB: $E_0 = 6,34 \times 10^{-4}$ eV (RYDEN, 2003).

Em termos numéricos segundo a Ref. (BUFALO; PIMENTEL; SOTO, 2014), temos:

$$m > 370 \text{ GeV.} \quad (1.26)$$

Vamos fazer uma razão para relacionar a energia média por partícula com a temperatura. Para isso, utilizamos a temperatura atual T_0 , a temperatura T relacionada à massa-energia de 370×10^9 eV, a energia atual E_0 e a de energia de Podolsky E_P consistente com (1.26). A seguir os passos:

$$\begin{aligned} \frac{T_P}{T_0} &\gtrsim \frac{E_P}{E_0} \gtrsim \frac{3,7 \times 10^{11} \text{ eV}}{6,34 \times 10^{-4} \text{ eV}} \\ T_P &\gtrsim (5,8360 \times 10^{14}) \times 2,725 \gtrsim 1,5903 \times 10^{15} \text{ K.} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Essa temperatura corresponde a um universo primordial como esperado para a etapa em que a radiação de Podolsky tem algum efeito cosmológico. Podemos realizar essa mesma estimativa para outros valores de limites inferiores da massa do fóton de Podolsky, conforme a literatura. Ou seja, sabendo que 1 eV equivalem a $1,60217733 \times 10^{-19}$ J e que $kT = E$, onde k é a constante de Boltzmann igual a $1,38064852 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ e E é energia média por partícula, podemos completar a última coluna da Tabela 1 para a temperatura.

A temperatura de Podolsky encontrada de acordo com os cálculos indicados acima nos dá a escala de energia em que a contribuição de Podolsky é mais relevante para a dinâmica cósmica. De acordo com a Tabela 1 a massa de Podolsky é mais relevante no intervalo entre o início do universo até aproximadamente o evento de bariogênese. Entretanto, para tempos menores que 10^{-10} s, a física é incerta. Para valores de tempo da ordem de 10^{-43} s (tempo de Planck) espera-se que a Relatividade Geral não seja mais válida

Tabela 1 – História térmica do universo. Adaptado de (ELLIS,2012)

Eventos	Tempo	Energia	Temperature (K)
Era da Gravitação Quântica	$< 10^{-43}$ s	10^{19} GeV	1.16×10^{32}
A Grande Unificação	$\simeq 10^{-36}$ s	$\simeq 10^{16}$ GeV	$\simeq 1.16 \times 10^{29}$
Inflação e Reaquecimento	$\gtrsim 10^{-34}$ s	$\gtrsim 10^{15}$ GeV	$\gtrsim 1.16 \times 10^{28}$
Desacoplamento Matéria Escura Fria	$< 10^{-10}$ s	> 1 TeV	$> 1.16 \times 10^{16}$
Bariogênese	$< 10^{-10}$ s	> 1 TeV	$> 1.16 \times 10^{16}$
Unificação eletrofraca	$< 10^{-10}$ s	$0,1 - 1$ TeV	$10^{15} - 10^{16}$
Transição quark-hadron	$< 10^{-4}$ s	$0,1 - 0,4$ GeV	10^{12}
Desacoplamento de neutrinos	1 s	1 MeV	10^{10}
Aniquilação elétron-pósitron	4 s	0,5 MeV	5.8×10^9
Nucleossínteses	200 s	0,1 MeV	1.2×10^9
Era matéria-radiação	10^4 yrs	1 eV	11605
Desacoplamento de fótons	4×10^4 yrs	0,1 eV	1160.5
Idade das Trevas	$10^5 - 10^8$ yrs		
Reionização	10^8 yrs		
Formação das Galáxias	$\simeq 6 \times 10^8$ yrs		
Era da energia escura	$\simeq 10^9$ yrs		
Sistema Solar	$\simeq 8 \times 10^9$ yrs		
Hoje	$\simeq 14 \times 10^9$ yrs	1 meV	11.605

Tabela 2 – Limites para a massa de Podolsky de acordo com a literatura recente. As letras na última coluna indicam respectivamente: D. para o evento de desacoplamento de neutrinos, T. para transição quark-hadron e U. para unificação eletrofraca.

Referência	Massa m_γ	T (K)	Eventos
(BONIN et al., 2010)	$\gtrsim 4,0$ MeV	$1,719 \times 10^{10}$	D.
(CUZINATTO et al., 2011)	$> 35,51$ MeV	$1,526 \times 10^{11}$	D.
(BARONE; NOGUEIRA, 2015)	$\simeq 10$ GeV	$4,298 \times 10^{13}$	T.
(BUFALO; PIMENTEL; ZAMBRANO, 2012)	$\gtrsim 37,595$ GeV	$1,616 \times 10^{14}$	T.
(ACCIOLY et al., 2011)	$\simeq 42$ GeV	$1,805 \times 10^{14}$	T.
(BUFALO; PIMENTEL; SOTO, 2014)	> 370 GeV	$1,590 \times 10^{15}$	U.

e a gravidade passa a ser uma interação quântica (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM, 2012).

Fazendo um levantamento bibliográfico das massas de Podolsky já calculadas, podemos relacioná-las com as temperaturas de acordo com a história térmica do universo apresentada pela Tabela 1.

Na Tabela 2 é possível observar diferentes limites inferiores para a massa do fóton seguindo a eletrodinâmica de Podolsky. Essa eletrodinâmica prevê um fóton com massa

de repouso muito maior que zero; por outro lado, a eletrodinâmica de Proca ([PROCA; GOUDSMIT, 1939](#)) é construída para um fóton com massa muito pequena, próxima do zero. Ao contrário da eletrodinâmica de Proca, onde o limite da massa do fóton abrange o universo num futuro longínquo, a eletrodinâmica de Podolsky tem sua maior influência no passado do universo, como veremos no capítulo 4.

O fato de que quando relacionamos a ordem da massa do fóton de Podolsky com a cronologia do universo, abranger altas energias, faz sentido. Isso ocorre porque a eletrodinâmica de Podolsky insere um parâmetro a que é proporcional à m^{-1} , o que implica que o fóton massivo é uma partícula pesada. De fato, recentemente, Accioly ([ACCIOLY et al., 2011](#)) encontrou que a massa de Podolsky é $\simeq 42$ GeV, que é da mesma ordem de magnitude que a massa dos bósons W e Z .

O limite inferior para as massas de Podolsky citados na primeira coluna da Tabela 2, abrangem eventos desde o desacoplamento de neutrinos até a grande unificação.

2 MECÂNICA ESTATÍSTICA BOSÔNICA

De acordo com a teoria de Planck, a energia de uma onda eletromagnética não é contínua, mas quantizada. Se a frequência da onda eletromagnética é ν , então a energia da onda é dada por:¹

$$\varepsilon_s = \hbar n_s \omega = n_s h \nu = n_s \frac{hc}{\lambda} = n_s cp, \quad (2.1)$$

onde $n_s = 0, 1, 2, 3, \dots$ é um número inteiro positivo incluindo o 0, ω é a frequência angular, s representa os possíveis estados e \hbar é a constante reduzida de Planck $\hbar = h/2\pi$, $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ é o momento linear e \mathbf{k} , o vetor de onda. A onda eletromagnética pode ser considerada um conjunto de fótons com a energia de cada fóton sendo $h\nu$. Quando a onda eletromagnética e a parede do recipiente que a contém estão em equilíbrio térmico (radiação de corpo negro), pode-se usar as relações termodinâmicas macroscópicas para estudar a pressão e densidade de energia dos fótons, que nada mais são que propriedades termodinâmicas do gás.

Considerando que os fótons são partículas indistinguíveis e não-interagentes, podemos tratá-los como um *gás quântico ideal*. Os fótons são partículas bosônicas, devido ao fato de terem spin inteiro e por isso, obedecem à estatística de Bose-Einstein. Entretanto, existe uma grande diferença entre fótons e bósons: o número de fótons não é limitado. E, por isso, a restrição usualmente utilizada:

$$\sum_{j=1} n_j = N, \quad (2.2)$$

onde N é o número total de partículas, não pode ser aplicada. Devido a esse fato, a estatística fotônica é mais simples que a estatística de Bose-Einstein.

Já é sabido através da mecânica estatística que a *Função de Partição* Z , que representa a soma sobre todos os estados (do alemão *Zustandsumme*) é definida da seguinte maneira (REIF, 2009):

$$Z \equiv \sum_s e^{-\beta \varepsilon_s}, \quad (2.3)$$

para β definido como:

$$\beta \equiv \frac{1}{k_B T}, \quad (2.4)$$

onde T é a temperatura e k_B é a constante de Boltzmann.

Para esse tipo de estatística, a função de partição é dada pela soma sobre todos os valores n_s (número de partículas por estados s) para cada s , sem qualquer restrição. Logo a soma sobre todos os valores é,

$$Z = \sum_S e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots)} = \sum_{n_1, n_2, \dots} \left(e^{-\beta n_1 \varepsilon_1} e^{-\beta n_2 \varepsilon_2} \dots \right) = \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta n_1 \varepsilon_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta n_2 \varepsilon_2} \dots, \quad (2.5)$$

¹ Especialmente nesta seção será usado o sistema internacional de unidades SI.

onde cada soma é do tipo série geométrica:

$$S = c + cf + cf^2 + \dots + cf^n. \quad (2.6)$$

Se o fator $|f| < 1$ e a série é infinita, S converge para:

$$S = \frac{c}{1-f}. \quad (2.7)$$

Des fato:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\varepsilon})^n = 1 + e^{-\beta\varepsilon} + (e^{-\beta\varepsilon})^2 + (e^{-\beta\varepsilon})^3 + \dots + (e^{-\beta\varepsilon})^n$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\varepsilon})^n = \frac{1}{(1 - e^{-\beta\varepsilon})}. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.5), temos:

$$Z = \frac{1}{(1 - e^{-\beta\varepsilon_1})} \frac{1}{(1 - e^{-\beta\varepsilon_2})} \frac{1}{(1 - e^{-\beta\varepsilon_3})} \dots = \prod_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - e^{-\beta\varepsilon_s})}. \quad (2.9)$$

Aplicando o logaritmo:

$$\ln Z = \ln \prod_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - e^{-\beta\varepsilon_s})} = \sum_{s=1}^{\infty} \ln \frac{1}{(1 - e^{-\beta\varepsilon_s})},$$

assim

$$\ln Z(\varepsilon) = - \sum_{\varepsilon_s} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_s}), \quad (2.10)$$

que é o \ln da função de partição na distribuição fotônica.

A passagem de (2.10) do regime discreto para o contínuo ocorre da seguinte maneira:

$$\ln Z(\varepsilon) = - \sum_{\varepsilon_s} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_s}) \rightarrow \ln Z(p) = -g_N V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta p}), \quad (2.11)$$

sendo g_N o grau de degenerescência, associados à propagação dos fótons. A energia ε está associada ao momento \mathbf{p} pela relação de Einstein. V é o volume do recipiente que encerra o gás de fótons. A justificativa para o fator $\frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}$ encontra-se no Apêndice B.

Para os fótons não-massivos da teoria de Maxwell $g_N = 2$. Podemos escrever então que a função de partição contínua de Maxwell é dada por:

$$\ln Z_M = - \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln(1 - e^{-\beta p}), \quad (2.12)$$

definimos:

$$I \equiv \int d^3\mathbf{p} \ln(1 - e^{-\beta p}),$$

onde $\mathbf{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ e $d^3\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z = p^2 \sin\phi d\theta d\phi dp$ em coordenadas esféricas.

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p^2 \sin\phi d\theta d\phi dp \ln(1 - e^{-\beta p}) = \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} p^2 dp \ln(1 - e^{-\beta p})$$

Usando a integral deduzida (C.5) no Apêndice C.1, temos:

$$I = -\cos \phi|_0^\pi (2\pi) \left(\frac{-\pi^4}{45\beta^3} \right) = 2(2\pi) \left(\frac{-\pi^4}{45\beta^3} \right) \quad (2.13)$$

onde o resultado da integral em p só é válido para $\beta \in \mathbb{R}$ e positivo (uma condição que certamente é satisfeita, pois a temperatura absoluta é sempre positiva). Substituímos (2.13) em (2.12):

$$\ln Z_M = \frac{\pi^2 V}{45\beta^3}. \quad (2.14)$$

A mecânica estatística de sistemas em equilíbrio dá uma relação para pressão em termos da função de partição Z (REIF, 2009), qual seja:

$$\boxed{P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z.} \quad (2.15)$$

Para o caso específico de Maxwell, vale (2.14). Portanto:

$$P(\beta) = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{15\beta^4}. \quad (2.16)$$

A densidade de energia ε em termos da função de partição é (REIF, 2009):

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z,} \quad (2.17)$$

i.e.

$$\varepsilon(\beta) = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\pi^2 V}{45\beta^3} \right) = \frac{\pi^2}{15\beta^4}. \quad (2.18)$$

Substituímos (2.18) em (2.16):

$$P = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (\text{Maxwell}), \quad (2.19)$$

que é a pressão de radiação de um gás de fótons na eletrodinâmica de Maxwell.

Conforme mencionamos na seção 1.2, há dois modos de energia (ou momento) para os fótons na teoria de Podolsky; e esses modos são independentes. Portanto, se desejamos construir a função de partição da teoria de Podolsky Z_P , devemos somar sobre esses modos independentes:

$$\ln Z_{\text{Pod}} = - \sum_{\substack{\text{modos} \\ \text{fotônicos}}} \sum_{\varepsilon_s} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_s}) = - \sum_{\varepsilon_M} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_M}) - \sum_{\varepsilon_P} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_P}), \quad (2.20)$$

onde ε_M e ε_P são as energias associadas aos modos não-massivo e massivo respectivamente. A energia ε_M é justamente a Eq. (1.21), i.e.

$$\varepsilon_M = \mathbf{p} \cdot \quad (2.21)$$

A energia ε_P é a que aparece na Eq. (1.24), ou seja,

$$\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{a^2} = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (2.22)$$

onde usamos (1.25).

Agora é trivial rescrever (2.20) usando (2.21) e (2.22), juntamente com a passagem ao contínuo no espaço dos momentos sugerida em (2.11). temos:

$$\ln Z_{\text{Pod}} = -g_M V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(1 - e^{-\beta \mathbf{p}} \right) - g_P V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \right], \quad (2.23)$$

com $g_M = 2$ (o fóton não massivo tem graus de degenerescência dois) e $g_P = 3$ (o modo massivo do fóton propaga-se nas três direções espaciais) (TU; LUO; GILLIES, 2005).

2.1 FUNÇÃO DE PARTIÇÃO DE UM GÁS DE FÓTONS MASSIVOS

A primeira integral do lado direito de (2.23) diz respeito à eletrodinâmica de Maxwell e já foi resolvida acima – vide Eq. (2.13). A segunda integral do lado direito de (2.23) pode ser rescrita em coordenadas esféricas. Assim, temos:

$$\ln Z_{\text{Pod}} = \frac{\pi^2 V}{45\beta^3} - g_P \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left[1 - e^{-\beta \sqrt{p^2 + m^2}} \right] \quad (2.24)$$

Estudando a técnica de expansão de uma função em série de Taylor (ARFKEN; WEBER, 2007), concluímos que:

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad (2.25)$$

para um $x < 1$. Com isso,

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k\beta \sqrt{p^2 + m^2}} &= \ln \left[1 + \left(-e^{-\beta \sqrt{p^2 + m^2}} \right) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\left(-e^{-\beta \sqrt{p^2 + m^2}} \right)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{e^{-k\beta \sqrt{p^2 + m^2}}}{k} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Inserindo (2.26) em (2.24):

$$\ln Z_{\text{Pod}} = \frac{\pi^2 V}{45\beta^3} + \frac{g_P V}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^\infty dp p^2 e^{-k\beta \sqrt{p^2 + m^2}}. \quad (2.27)$$

A integral em (2.27) é resolvida em detalhes no Apêndice C.2. Substituindo (C.23) em (2.27), encontramos:

$$\ln Z_{\text{Pod}} = \frac{\pi^2 V}{45\beta^3} + \frac{g_P \beta m^4 V}{2 \pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2}, \quad (2.28)$$

onde $K_2(x)$, para $x \equiv k\beta m$, é a função especial de Bessel modificada de segundo tipo.

2.2 OBTENÇÃO DAS PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS SEM APROXIMAÇÃO

Iremos calcular pressão e densidade de energia em termos do somatório do logaritmo da função de partição da seção anterior. Sabemos pela mecânica estatística que a pressão é expressa pela Eq. (2.15) e a densidade de energia por (2.17). Dessa forma, substituindo (2.28) em (2.15), temos:

$$P(\beta, m) = \frac{\pi^2}{45\beta^4} \left[1 + 45 \frac{g_P}{2} \frac{(\beta m)^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right]. \quad (2.29)$$

Obtemos assim a equação para a pressão considerando a eletrodinâmica de Podolsky. Pode-se perceber que o primeiro termo depois da igualdade representa o gás de fótons não massivos – vide Eq. (2.16). O segundo termo de (2.29) acompanha-o como uma correção devido à massa do fóton. Esse padrão ocorrerá a cada passo das contas que são realizadas neste trabalho.

Para a densidade de energia, vale a relação (2.17). Substituindo (2.28) nessa relação, obtemos:

$$\varepsilon(\beta, m) = 3 \frac{\pi^2}{45\beta^4} - \frac{g_P}{2} \frac{m^4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right). \quad (2.30)$$

A derivada da Eq. (2.30) é:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right) = -\frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} - \frac{K_1(k\beta m) + K_3(k\beta m)}{2(k\beta m)}, \quad (2.31)$$

onde usamos a relação de recorrência (GRADSHTEYN; RYZHIK; TABLES, 1965):

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2 \frac{d}{dz} K_{\nu}(z), \quad (2.32)$$

para $\nu = 2$.

Substituindo (2.31) em (2.30):

$$\varepsilon = 3 \frac{\pi^2}{45\beta^4} + \frac{g_P}{2} \frac{m^4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} + \frac{K_1(k\beta m)}{2(k\beta m)} + \frac{K_3(k\beta m)}{2(k\beta m)} \right]. \quad (2.33)$$

A relação de recorrência

$$zK_{\nu-1}(z) - zK_{\nu+1}(z) = -2\nu K_{\nu}(z), \quad (2.34)$$

com $\nu = 2$, resulta em:

$$\frac{K_1(k\beta m)}{2(k\beta m)} + 2 \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} = \frac{K_3(k\beta m)}{2(k\beta m)}. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.35) em (2.33):

$$\varepsilon(\beta, m) = \frac{\pi^2}{15\beta^4} \left\{ 1 + \frac{15g_P}{2} \frac{\beta^4 m^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{K_1(k\beta m)}{(k\beta m)} + 3 \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right] \right\}, \quad (2.36)$$

Esta é densidade de energia para a Eletrodinâmica Generalizada de Podolsky sem qualquer aproximação. Da mesma forma que na expressão para pressão (2.29), obtemos um termo não-massivo que representa a eletrodinâmica de Maxwell – cf. Eq. (2.18), mais um termo de correção que é a correção de Podolsky.

3 ESTRUTURA GERAL DA DINÂMICA CÓSMICA

Até agora foi possível calcular, sem lançar mão de nenhuma aproximação, as propriedades termodinâmicas: pressão, Eq. (2.29), e densidade de energia, Eq. (2.36), para a Eletrodinâmica Generalizada.

Acontece que a pressão P e a densidade de energia ε são grandezas fundamentais para determinar a dinâmica do universo. De fato, como veremos neste capítulo, P e ε aparecem nas equações diferenciais de fluido e de Friedmann que permitem obter como o parâmetro de escala a (uma medida das distâncias cósmicas) varia com o tempo cosmológico t . Nossa estratégia será escrever as equações diferenciais de fluido e de Friedmann em função de β , resolvendo assim um sistema paramétrico $a(T)$ e $t(T)$.

3.1 AS EQUAÇÕES BÁSICAS DA COSMOLOGIA FÍSICA

Friedmann deduziu um conjunto de equações, usando a Relatividade Geral de Einstein e considerando o *princípio cosmológico*,¹ que descrevem a expansão do espaço no Universo.

A Relatividade Geral é uma das teorias mais notórias da história da física, mas até mesmo Einstein teve problemas na sua tentativa de usá-la para deduzir equações da dinâmica cósmica, pois naquela época acreditava-se que o universo era estático. Na sua tentativa, Einstein encontrou termos que envolviam a expansão do universo atual, o que foi descoberto logo depois por Hubble como um fato. Entretanto, devido ao senso comum de seu tempo, a única forma de encontrar um universo estático seria adicionar um termo constante, chamado *constante cosmológica* e representado pela letra grega Λ (EINSTEIN, 1917). No final, Einstein aceitou o universo em expansão, e chamou sua constante cosmológica de o maior erro de sua vida. Hoje em dia, a constante cosmológica é cotada como um dos candidatos para explicar componentes exóticos, e.g., a energia escura.

O matemático e físico russo Alexander Alexandrovich Friedmann publicou em 1924 um artigo em alemão: “*Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*” (em português, “Da possibilidade de um mundo com uma constante de curvatura negativa do espaço”), onde ele demonstrou com sucesso a dinâmica cósmica do modelo de curvatura negativa (FRIEDMANN,).

A métrica utilizada usada para isso é a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{1}{1 - \kappa r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (3.1)$$

¹ Hipótese que nos diz que em escalas suficientemente grandes, o universo pode ser considerado espacialmente homogêneo e isotrópico.

onde $a(t)$ é o fator de escala representa a dependência temporal entre a distância relativa de dois pontos do universo. κ é o parâmetro de curvatura do espaço, tomado como um dos valores do conjunto $\{-1, 0, +1\}$ os quais descrevem um espaço hiperbólico (aberto), plana (Euclidiano) ou esférico (fechado), respectivamente. Em nossa convenção, r é adimensional. A métrica (3.1) descreve o universo isotrópico e homogêneo, porque não possui nenhum termo cruzado entre o espaço e o tempo [e.g. do tipo $f(t, r) dt dr$] e, por isso, não privilegia nenhuma direção (ROMEY, 2014). Consideramos $c = 1$. Com (3.1), podemos deduzir as equações de Friedmann usando o maquinário da Relatividade Geral.

As equações de Einstein são (D'INVERNO, 1992):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

G é a constante universal da gravitação.

O lado esquerdo de (3.2) representa a parte geométrica das equações de campo de Einstein, onde $G_{\mu\nu}$ é chamado tensor de Einstein, e para calculá-lo usamos a métrica (3.1). $G_{\mu\nu}$ contém um tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e um escalar de Ricci, R . Em geral, o lado esquerdo apresenta ainda Λ , introduzido por Einstein com intuito de obter o seu universo estático. Entretanto, para o presente trabalho Λ é nulo.²

Do lado direito de (3.2) temos o tensor energia momento de um fluido perfeito $T_{\mu\nu}$. Esse tensor é usado para modelar distribuições de matéria homogêneas e isotópicas, como admitimos que seja o caso do universo. Para um sistema de eixos que acompanha o movimento global do universo (referencial co-móvel), a velocidade $v^i = dx^i/ds$ é nula, ao passo que $dt/ds = 1$. Por isso, o quadri-vetor velocidade é:

$$u^\alpha = (1, 0, 0, 0) \quad (\text{co-móvel}). \quad (3.3)$$

Isso simplifica bastante a forma de $T_{\mu\nu}$, que é dado pela expressão:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

sendo $g_{\mu\nu}$ é o tensor da métrica do espaço-tempo curvo (que não é constante como o tensor do espaço-tempo euclidiano $\eta_{\mu\nu}$), P é a pressão.

Substituindo (3.1), (3.3) e (3.4) em (3.2), é possível obter as equações diferenciais para a dinâmica cósmica, denominadas **equações de Friedmann** (ROMEY, 2014). Temos:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa^2}{a^2} \quad (3.5a)$$

$$\left(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\right) = -\frac{4\pi G}{3}[\varepsilon(t) + 3P(\varepsilon)] + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.5b)$$

² Depois do artigo de Einstein de 1917 sobre a constante cosmológica (EINSTEIN, 1917), outra notável contribuição foi feita por W. de Sitter. De Sitter estudou o modelo dinâmico onde existe constante cosmológica, i.e., $\Lambda \neq 0$, mas sem matéria e energias ordinárias (SITTER, 1917).

Tabela 3 – Solução da dinâmica cósmica considerando um universo plano respeitando a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para diversos componentes.

Componente	EoS	Fator de escala $a(t)$
Radiação Maxwelliana	$P = \frac{1}{3}\varepsilon$	$(t/t_0)^{1/2}$
Matéria incoerente	$P = 0$	$(t/t_0)^{2/3}$
Constante cosmológica	$P = -\varepsilon = \text{constante}$	$e^{H(t-t_0)}$

Nas Eqs. (3.5a) e (3.5b) usamos a notação $\dot{a} = \frac{da}{dt}$, onde, por definição, a quantidade $a_0 = a(t_0) = 1$ é usualmente tomada como o fator de escala atual. Note que a Eq. (3.5b) não possui o parâmetro de curvatura, pois sendo uma constante, sua derivada é zero. A razão

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

é conhecida como *função de Hubble*. A Eq. (3.5a) é deduzida da componente 00 das equações de campo de Einstein. Já (3.5b) é deduzida da primeira equação de Friedmann, juntamente com o traço das equações de Einstein.

Para resolver a primeira equação de Friedmann da dinâmica cósmica é necessário obtermos mais uma, que relaciona o fator de escala $a(t)$ e a densidade de energia ε . Essa equação adicional é a *equação da conservação* ou **equação de fluido**, que é deduzida a partir da conservação covariante do tensor energia-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ($\nabla = \partial + \Gamma$ é o operador derivada covariante, e Γ é a conexão de Christoffel). O resultado é:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{3}{a}(\varepsilon + P). \quad (3.6)$$

Até agora temos três funções desconhecidas, $a(t)$, $\varepsilon(t)$ e $P(t)$. Poderíamos pensar que as três equações diferenciais (3.5a), (3.5b) e (3.6) seriam suficientes para encontrarmos essas funções desconhecidas. Todavia, as equações diferenciais não são independentes: combinando (3.5a) e (3.6) obtem-se (3.5b). Evidentemente, precisaremos de uma terceira equação independente para fechar o sistema. A equação que cumprirá esse papel é uma equação de estado (EoS, do inglês *Equation of State*) que relaciona P e ε .³ Essa relação irá refletir nosso conhecimento sobre os componentes que constituem o universo.

Os principais componentes cósmicos são: poeira (matéria incoerente, bariônica ou escura), radiação (campo eletromagnético, Maxwelliano ou não) e a constante cosmológica (ou energia escura) (D'INVERNO, 1992). Cada um deles terá a sua equação de estado $P(\varepsilon)$ correspondente, e cada qual levará a uma solução para $a(t)$ particular (RYDEN, 2003), (SOUZA, 2012). A Tabela 3 exibe essas informações para as equações de estado e a solução da dinâmica cósmica $a(t)$.

³ As EoS são encontradas através do nosso conhecimento de termodinâmica e mecânica estatística.

A equação de estado para a radiação massiva da eletrodinâmica de Podolsky não encontra-se na Tabela 3 por uma boa razão. Observe novamente as Eqs. (2.29) e (2.36):

$$\begin{cases} P(\beta) = \frac{\pi^2}{45\beta^4} \left[1 + 45 \frac{g_P}{2} \frac{(\beta m)^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right] \\ \varepsilon(\beta) = \frac{\pi^2}{15\beta^4} \left\{ 1 + \frac{15g_P}{2} \frac{\beta^4 m^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{K_1(k\beta m)}{(k\beta m)} + 3 \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right] \right\} \end{cases} \quad (3.7)$$

Para escrever $P(\varepsilon)$ deveríamos, por exemplo, **(i)** isolar β na equação para $\varepsilon(\beta)$ para obter $\beta = \beta(\varepsilon)$; e **(ii)** substituir $\beta = \beta(\varepsilon)$ na equação de $P(\beta)$, construindo a função $P(\beta(\varepsilon)) = P(\varepsilon)$. Acontece que não é possível realizar o passo **(i)** analiticamente.⁴ Em verdade, β aparece no argumento das funções de Bessel modificadas, a somatória infinita dessas funções não tem uma forma analítica fechada, o que torna a equação $\varepsilon(\beta)$ transcendental em β . Conclusão: a equação de estado para a radiação de Podolsky é o sistema de **equações paramétricas** (3.7). Essa diferença importante com respeito aos casos tratados na Tabela 3 exigirá uma abordagem diferente para resolver as equações da cosmologia (3.5a) e (3.6):

$$\begin{cases} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \varepsilon(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa^2}{a^2} \\ \dot{\varepsilon} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\varepsilon + P) \end{cases} \quad (3.8)$$

As equações (3.8) serão resolvidas *parametricamente*. Na seção 3.2, substituímos (3.7) na segunda relação do sistema (3.8) para obter uma equação para o fator de escala em função da temperatura, i.e. tentaremos determinar $a(\beta)$. Na seção 3.3, o objetivo é trabalhar com a primeira equação do sistema (3.8) na tentativa de encontrar o tempo cosmológico em função da temperatura, i.e., $t(\beta)$. Se isso for possível, a dinâmica cósmica para a eletrodinâmica geeralizada será dada por $a(\beta)$ e $t(\beta)$.

3.2 EQUAÇÃO DO FLUIDO PARA PODOLSKY: EQUAÇÃO $a(T)$

Para resolver a equação do fluido para Podolsky, usaremos as quantidades termodinâmicas (2.29) e (2.36) calculadas anteriormente, sem aproximação, juntamente com (3.6):⁵

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} + 3 \frac{da}{dt} \frac{1}{a} [\varepsilon(\beta) + P(\beta)] &= 0 \\ \frac{d\varepsilon}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} + 3 \frac{da}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} \frac{1}{a} [\varepsilon(\beta) + P(\beta)] &= 0 \\ \frac{d\varepsilon}{d\beta} &= -3 \frac{da}{d\beta} \frac{1}{a} [\varepsilon(\beta) + P(\beta)], \end{aligned}$$

i.e.,

$$\int \frac{\frac{d\varepsilon}{d\beta}}{[\varepsilon(\beta) + P(\beta)]} d\beta = -3 \int \frac{da}{a}. \quad (3.9)$$

⁴ A inversão do passo **(i)** pode ser realizada analiticamente apenas no caso aproximado tratado na Seção 4.

⁵ Utilizamos o sistema natural de unidades em que $k_B = 1$.

Para avaliar a integral no lado esquerdo de (3.9), temos que fazer o cálculo da derivada de ε em relação a β . Usando a Eq. (2.36):

$$\frac{d\varepsilon}{d\beta} = -4 \frac{\pi^2}{15\beta^5} + \frac{g_P m^4}{2 \pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{d}{d(k\beta m)} \left(\frac{K_1(k\beta m)}{(k\beta m)} \right) \frac{d(k\beta m)}{d\beta} + 3 \frac{d}{d(k\beta m)} \left(\frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right) \frac{d(k\beta m)}{d\beta} \right\}. \quad (3.10)$$

Com a relação:⁶

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_\nu(z)}{z^\nu} \right) = -\frac{K_{\nu+1}(z)}{z^\nu},$$

podemos calcular as derivadas presentes em (3.10). O resultado é:

$$\frac{d\varepsilon}{d\beta} = -\frac{4\pi^2}{15\beta^5} \left\{ 1 + \frac{15g_P \beta^4 m^4}{8\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(K_2(k\beta m) + 3 \frac{K_3(k\beta m)}{km\beta} \right) \right\}. \quad (3.11)$$

Substituindo (2.29), (2.36) e (3.11) em (3.9):

$$\int \frac{1 + \frac{15g_P(\beta m)^4}{8\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(K_2(k\beta m) + 3 \frac{K_3(k\beta m)}{km\beta} \right) d\beta}{1 + \frac{45g_P(\beta m)^4}{8\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{K_1(k\beta m)}{(k\beta m)} + 4 \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right)} \frac{d\beta}{\beta} = \int \frac{da}{a}. \quad (3.12)$$

A integração da Eq. (3.12) leva a função $a = a(\beta)$ desejada. Entretanto, até onde os envolvidos no presente trabalho têm conhecimento, não há uma solução analítica fechada para a equação (3.12). No Capítulo 5, resolveremos essa equação numericamente. Por hora, dirigimos nossa atenção à equação de Friedmann para a radiação de Podolsky.

3.3 EQUAÇÃO DE FRIEDMANN PARA PODOLSKY: EQUAÇÃO $t(T)$

Utilizando a primeira equação de Friedmann (3.5a) para um universo plano, $k = 0$, e sem a presença da constante cosmológica, $\Lambda = 0$, podemos encontrar uma equação diferencial para $t(T)$. Da seguinte maneira:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \varepsilon$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \varepsilon$$

i.e.

$$\int \frac{1}{a} \frac{da}{d\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \int dt. \quad (3.13)$$

⁶ Disponível em <http://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/BesselK/20/01/02/0006/>

A Eq. (3.12) é o mesmo que:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{d\beta} = \frac{1 + \frac{15g_P(\beta m)^4}{8\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(K_2(k\beta m) + 3 \frac{K_3(k\beta m)}{km\beta} \right)}{1 + \frac{45g_P(\beta m)^4}{8\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{K_1(k\beta m)}{(k\beta m)} + 4 \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right)} \frac{1}{\beta}. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) e (2.36) em (3.13):

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{8\pi^3}{45}} \int dt = \\ & = \int \frac{1 + \frac{15}{8} \frac{g_P}{\pi^4} (\beta m)^4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(K_2(k\beta m) + 3 \frac{K_3(k\beta m)}{km\beta} \right)}{1 + 3 \frac{15}{8} \frac{g_P}{\pi^4} (\beta m)^4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{K_1(k\beta m)}{(k\beta m)} + 4 \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right)} \frac{\beta d\beta}{\left[1 + \frac{15g_P(\beta m)^4}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{K_1(k\beta m)}{(k\beta m)} + 3 \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Usando a relação de recorrência:

$$zK_{\nu-1}(z) - zK_{\nu+1}(z) = -2\nu K_{\nu}(z),$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{K_1(k\beta m)}{(k\beta m)} - \frac{K_3(k\beta m)}{(k\beta m)} &= -4 \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \\ \frac{K_1(k\beta m)}{(k\beta m)} &= -4 \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} + \frac{K_3(k\beta m)}{(k\beta m)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) em (3.15):

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{\sqrt{15}} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \int dt = \\ & \int \frac{\left[1 + \frac{15}{8} \frac{g_P}{\pi^4} (\beta m)^4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(K_2(k\beta m) + 3 \frac{K_3(k\beta m)}{km\beta} \right) \right] \beta}{\left[1 + 3 \frac{15}{8} \frac{g_P}{\pi^4} (\beta m)^4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{K_3(k\beta m)}{(k\beta m)} \right) \right] \left[1 + 4 \frac{15}{8} \frac{g_P}{\pi^4} (\beta m)^4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{K_3(k\beta m)}{(k\beta m)} - \frac{K_2(k\beta m)}{(k\beta m)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} d\beta \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assim como o que aconteceu em (3.12), não foi possível encontrar uma solução analítica fechada para (3.17) durante o percurso deste trabalho: não obtivemos $t(\beta)$ analiticamente como havíamos planejado. A saída será resolver as Eqs. (3.12) e (3.17) numericamente no Capítulo 5.

Uma solução alternativa para resolver as Eqs. (3.12) e (3.17) analiticamente é aproximar essas expressões. Tal **aproximação** pode ser justificada caso entendamos a contribuição do termo massivo de Podolsky como uma leve correção à Maxwell, fato que será verificado pela análise numérica no gráfico da Figura 2, apresentado no Capítulo 5. Isso de fato fará sentido nos regimes $\beta m \ll 1$ e $\beta m \gg 1$, que correspondem a épocas bem determinadas da história térmica do universo. Passaremos a estudar esses limites com cuidado no próximo capítulo.

4 SOLUÇÕES APROXIMADAS PARA A DINÂMICA CÓSMICA

Como visto no capítulo anterior, não conhecemos nenhum método analítico para encontrar a solução das equações para $a(T)$ e $T(t)$ do modelo de Podolsky. Faremos a solução numérica dessas equações adiante. Antes, porém, estudaremos alguns regimes aproximados de soluções analíticas para os quais a solução numérica completa deve convergir.

Aqui é o ponto onde existem mudanças nas equações quando tomamos aproximações para βm . Por isso, teremos dois limites para as expressões $a(T)$ e $T(t)$, uma para a aproximação no início ($\beta m \ll 1$) do universo e outra para o futuro do universo ($\beta m \gg 1$).

4.1 A APROXIMAÇÃO $\beta m \ll 1$

Analisando a definição (2.4), podemos observar que para que o limite $\beta m \ll 1$ seja verdadeiro, a temperatura T deverá tender a valores muito maiores que a massa do fóton de Podolsky. Devido ao fato de estarmos no limite de altas energias, concluímos que estamos tratando do universo primordial, pois hoje os fótons que produzem a Radiação Cósmica de Fundo (CMB, do inglês *Cosmic Radiation Background*) tem sua temperatura medida em $(2,725 \pm 0,002)$ K (ARFKEN; WEBER, 2007).

Para considerarmos o limite de universo primordial, iremos fazer uma expansão em série de Taylor na função especial de Bessel modificada de segundo tipo $K_2(k\beta m)$, mantendo termos de primeira ordem (ARFKEN; WEBER, 2007):

$$K_2(k\beta m) \simeq \frac{2}{(k\beta m)^2} - \frac{1}{2} + O\left((k\beta m)^2\right). \quad (4.1)$$

Podemos substituir essa expansão no segundo termo do lado direito de Eq. (2.28):

$$\ln Z_P = \frac{g_P \beta m^4 V}{2 \pi^2} \left[\frac{2}{(\beta m)^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} - \frac{1}{2(\beta m)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right]. \quad (4.2)$$

Os somatórios infinitos $\frac{1}{k^2}$ e $\frac{1}{k^4}$ já existem na sua forma fechada. O somatório

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

é chamado de Problema da Basileia e foi resolvido por Euler.

Além disso, também temos resolvido analiticamente o seguinte somatório:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Logo,

$$\ln Z_P = \frac{V}{(\beta m)^3} \left[\frac{\pi^2}{90} g_P m^3 - \frac{1}{24} g_P m^3 (\beta m)^2 \right].$$

A função completa de partição é dada por:

$$\ln Z_{\text{Pod}} = \frac{\pi^2 V}{45\beta^3} + \frac{V}{(\beta m)^3} \left[\frac{\pi^2}{90} g_P m^3 - \frac{1}{24} g_P m^3 (\beta m)^2 \right], \quad \text{para } \beta m \ll 1. \quad (4.3)$$

Com o logaritmo da função de partição total em mãos, podemos calcular as duas grandezas termodinâmicas necessárias para determinar a dinâmica do cosmos através da Equação de Friedmann: a pressão P e a densidade de energia ε .

4.1.1 A densidade de energia para altas temperaturas

Nesta seção levamos em consideração apenas o universo primordial, devido ao limite tomado anteriormente $\beta m \ll 1$ que implica em dizer que $m \ll T$. Levando em consideração um universo plano e preenchido somente com radiação, a teoria Maxwelliana estabelece que $\varepsilon \propto \beta^{-4}$. Devido à discussão dos modos de Maxwell e Proca no Capítulo 2, é sensato esperar que teremos um termo não massivo que corresponderá à Maxwell e um termo massivo associado à Proca.

Para calcular a densidade de energia, usaremos a expressão (2.17) juntamente com a função de partição de Podolsky aproximada para altas energia (4.3):

$$\varepsilon(\beta, m) \simeq \frac{\pi^2}{15} \frac{1}{\beta^4} + \frac{\pi^2}{30} g_P m^4 \frac{1}{(\beta m)^4} - \frac{1}{24} g_P m^4 \frac{1}{(\beta m)^2}. \quad (4.4)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (4.4) é o resultado usual de Planck. O segundo termo é a correção devido à massa de Podolsky. Usando β – Eq. (2.4) – em termos de T no sistema natural de unidades:

$$\varepsilon(T, m) \simeq \frac{\pi^2}{15} T^4 + \frac{\pi^2}{30} g_P T^4 - \frac{1}{24} g_P m^2 T^2, \quad (4.5)$$

Ou ainda

$$\varepsilon(T, m) \simeq (\sigma_0 + \delta\sigma_{\text{passado}}) T^4 \simeq \sigma T^4, \quad (4.6)$$

onde

$$\sigma_0 \equiv \frac{\pi^2}{15}, \quad (4.7)$$

é a constante de Stefan-Boltzmann em unidades naturais e

$$\delta\sigma_{\text{passado}} = \frac{g_P}{2} \left[\sigma_0 - \frac{1}{12} (m\beta)^2 \right], \quad (4.8)$$

é nossa correção para Podolsky $\delta\sigma$ no limite $\beta m \ll 1$. Note que agora temos uma nova constante de Boltzmann $\sigma \equiv \sigma_0 + \delta\sigma_{\text{passado}}$ que considera a correção de Podolsky para o universo primordial $\delta\sigma_{\text{passado}}$.

Por se tratar de um campo massivo, temos 3 graus de liberdade associados que correspondem a duas polarizações transversais e uma longitudinal. A primeira instância consideramos $g_P = 3$, mas existe uma discussão em aberto ao redor da possibilidade do

modo longitudinal interagir fracamente com a matéria (TU; LUO; GILLIES, 2005). Dessa forma, a lei de Planck seria alterada por um fator de $3/2$, exatamente o que temos em $g_P/2$. Outra forma de expressar (4.5) é:

$$\varepsilon(\beta, m) \simeq \frac{1}{\beta^4} \left[\sigma_0 + \sigma_0 \frac{g_P}{2} - \frac{1}{12} \frac{g_P}{2} (\beta m)^2 \right]. \quad (4.9)$$

Passamos, agora, ao estudo da pressão para o gás de fótons de Podolsky no limite $\beta m \ll 1$.

4.1.2 A pressão para altas temperaturas

Utilizando (2.15) e (4.3), podemos calcular a pressão no limite de altas temperaturas:

$$P(\beta, m) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z_{\text{Pod}} \simeq \frac{\pi^2}{45} \frac{1}{\beta^4} + \frac{\pi^2}{90} g_P \frac{m^4}{(\beta m)^4} - \frac{1}{24} g_P \frac{m^4}{(\beta m)^2} \quad (4.10)$$

ou

$$P(\beta, m) \simeq \frac{\pi^2}{45} \frac{1}{\beta^4} + \frac{\pi^2}{45} \frac{g_P}{2} \frac{m^4}{(\beta m)^4} - \frac{1}{12} \frac{g_P}{2} \frac{m^4}{(\beta m)^2}. \quad (4.11)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (4.11) é o resultado usual de Planck para a pressão. O segundo termo é a correção devido à massa de Podolsky.

4.1.3 Pressão em função da densidade de energia: $P(\varepsilon)$

Próximo passo é obter uma equação de estado na forma $P(\varepsilon)$. Para isso vamos inverter a Eq. (4.9) para obter um $\beta(\varepsilon)$ e posterior substituição em (4.11). Definindo $x = \frac{1}{\beta^2}$, temos:

$$\varepsilon \simeq \sigma_0 \left(1 + \frac{g_P}{2} \right) x^2 - \frac{1}{12} m^2 \frac{g_P}{2} x, \quad (4.12)$$

que é uma equação do segundo grau em x :

$$x^2 - \frac{1}{12} \frac{m^2 \frac{g_P}{2}}{\sigma_0 \left(1 + \frac{g_P}{2} \right)} x - \frac{\varepsilon}{\sigma_0 \left(1 + \frac{g_P}{2} \right)} \simeq 0$$

cuja solução é:

$$x \simeq \frac{15}{24} \frac{m^2}{\pi^2} \frac{\frac{g_P}{2}}{\left(1 + \frac{g_P}{2} \right)} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma_0 \left(1 + \frac{g_P}{2} \right)} + \frac{15^2}{24^2} \frac{m^4}{\pi^4} \frac{\left(\frac{g_P}{2} \right)^2}{\left(1 + \frac{g_P}{2} \right)^2}},$$

i.e.

$$\frac{1}{\beta^2} \simeq \frac{15}{24} \frac{m^2}{\pi^2} \frac{\frac{g_P}{2}}{\left(1 + \frac{g_P}{2} \right)} \pm \frac{m^2}{\left(1 + \frac{g_P}{2} \right)} \sqrt{\frac{1}{\sigma_0} \frac{\varepsilon}{m^4} \left(1 + \frac{g_P}{2} \right) + \frac{15^2}{24^2} \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{g_P}{2} \right)^2}, \quad (4.13)$$

ou ainda,

$$T^2 \simeq \frac{15}{24} \frac{m^2}{\pi^2} \frac{\frac{g_P}{2}}{\left(1 + \frac{g_P}{2} \right)} \pm \frac{m^2}{\left(1 + \frac{g_P}{2} \right)} \sqrt{\frac{1}{\sigma_0} \frac{\varepsilon}{m^4} \left(1 + \frac{g_P}{2} \right) + \frac{15^2}{24^2} \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{g_P}{2} \right)^2}.$$

Para decidir qual é o sinal adequado no lado direito na expressão de T^2 considere o seguinte. Se estamos no limite de altas temperaturas, a densidade de energia é extremamente grande devido à lei de Stefan-Boltzmann, $\varepsilon \propto T^4$. Logo:

$$\frac{\varepsilon}{m^4} \gg 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{m^4}} \gg 1 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon} \gg m^2. \quad (4.14)$$

Isso significa que o segundo termo do lado direito supera o primeiro, Se mantivermos o sinal negativo, teremos $T^2 < 0$, o que não tem significado físico. Logo, o sinal que será adotado é o positivo:

$$T^2 \simeq \frac{15 m^2}{24 \pi^2} \frac{\frac{g_P}{2}}{\left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} + \frac{m^2}{\left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{\sigma_0} \frac{\varepsilon}{m^4} \left(1 + \frac{g_P}{2}\right) + \frac{15^2}{24^2} \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{g_P}{2}\right)^2}.$$

Ademais, ao extrair a raiz quadrada de ambos os membros desconsideramos um eventual sinal negativo global, já que temperaturas absolutas são sempre positivas.

$$T \simeq \sqrt{\frac{15 m^2}{24 \pi^2} \frac{\frac{g_P}{2}}{\left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} + \frac{m^2}{\left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{\sigma_0} \frac{\varepsilon}{m^4} \left(1 + \frac{g_P}{2}\right) + \frac{15^2}{24^2} \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{g_P}{2}\right)^2}}. \quad (4.15)$$

Com essas escolhas, a expressão de β fica:

$$\frac{1}{\beta^2} \simeq \frac{m^2}{\left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} \left[\frac{15}{\pi^2} \frac{\varepsilon}{m^4} \left(1 + \frac{g_P}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\left(\frac{g_P}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} \frac{15}{24^2} \frac{1}{\pi^2} \frac{m^4}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{15 m^2}{24 \pi^2} \frac{\frac{g_P}{2}}{\left(1 + \frac{g_P}{2}\right)}.$$

Devido à (4.14), $\frac{m^4}{\varepsilon} \ll 1$, o segundo termo do parêntese é pequeno e ele pode ser aproximado, conduzindo à:

$$\frac{1}{\beta^2} \simeq \sqrt{\varepsilon} \left\{ \left(\frac{15}{\pi^2 \left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{g_P}{2}}{24} \left(\frac{15}{\pi^2 \left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} \right) \frac{m^2}{\sqrt{\varepsilon}} \left[1 + \frac{\frac{g_P}{2}}{48} \left(\frac{15}{\pi^2 \left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{m^2}{\sqrt{\varepsilon}} \right] \right\}.$$

Usando (4.14) novamente:

$$T^2 \simeq \frac{1}{\beta^2} \simeq \sqrt{\varepsilon} \left[\left(\frac{15}{\pi^2 \left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{g_P}{2}}{24} \left(\frac{15}{\pi^2 \left(1 + \frac{g_P}{2}\right)} \right) \frac{m^2}{\sqrt{\varepsilon}} \right].$$

Próximo passo é substituir esse resultado na expressão para pressão (4.11), para assim obter a equação da pressão em função da densidade de energia $P(\varepsilon)$. Temos, após fazer uso da aproximação (4.14):

$$P \simeq \frac{\varepsilon}{3} \left(1 - A \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right), \quad (4.16)$$

onde

$$A \equiv \frac{1}{3} \frac{\sqrt{15}}{\pi} \frac{\frac{g_P}{2}}{\sqrt{1 + \frac{g_P}{2}}} m^2. \quad (4.17)$$

Isso determina a equação de estado $P = P(\varepsilon)$ no limite $\beta m \ll 1$. Estamos prontos para a análise das consequências cosmológicas para o universo primordial de levarmos em conta a eletrodinâmica de Podolsky.

4.1.4 Equação de Fluido: a equação de $\varepsilon(a)$ no limite $\beta m \ll 1$

Para ser possível analisar a dinâmica cósmica no regime $m^4 \ll \varepsilon$, iremos substituir a Eq. (4.16) na equação de conservação (3.6):

$$\frac{d\varepsilon}{da} = -\frac{4}{a} \left(\varepsilon - \frac{A}{4} \sqrt{\varepsilon} \right),$$

i.e.

$$\int \frac{d\varepsilon}{\left(\varepsilon - \frac{A}{4} \sqrt{\varepsilon} \right)} = -4 \int \frac{da}{a},$$

A integral do lado esquerdo é:

$$\int \frac{d\varepsilon}{\left(\varepsilon - \frac{A}{4} \sqrt{\varepsilon} \right)} = 2 \ln \left(4\sqrt{\varepsilon} - A \right).$$

Então,

$$\left(4\sqrt{\varepsilon} - A \right)^2 \simeq C^2 a^{-4},$$

sendo C uma constante de integração. Temos:

$$\varepsilon(a) \simeq \frac{1}{a^4} \left(\frac{1}{4} C + \frac{A}{4} a^2 \right)^2.$$

Seja ε_P o valor da densidade de energia quando o efeito da massa fotônica da eletrodinâmica de Podolsky passa ser relevante. Seja a_{Pod} o valor do fator de escala correspondente à ε_{Pod} . (Operacionalmente, ε_{Pod} e a_{Pod} são apenas duas constantes.) Esse valor para a densidade de energia está relacionado à densidade de energia crítica na época em que Podolsky poderia ter maior influência. Usando a condição de contorno $\varepsilon(a_{\text{Pod}}) = \varepsilon_{\text{Pod}}$, fixamos C em:

$$C = a_{\text{Pod}}^2 (4\sqrt{\varepsilon_{\text{Pod}}} - A).$$

Assim,

$$\varepsilon(a) \simeq \frac{\varepsilon_{\text{Pod}}}{2^4} \frac{1}{a^4} \left[2^2 a_{\text{Pod}}^2 + \frac{A}{\sqrt{\varepsilon_{\text{Pod}}}} (a^2 - a_{\text{Pod}}^2) \right]^2. \quad (4.18)$$

Em (4.18) assume-se que $a < a_{\text{Pod}}$, caso contrário os dois termos do lado direito serão pequenos. Se $a < a_{\text{Pod}}$ o primeiro termo será grande, pois apresenta a_{Pod}^2/a^2 e o segundo será uma correção negativa. Além disso, como esperado, mais uma vez a equação subdivide-se entre um termo não massivo que corresponde à densidade de energia para a radiação a^{-4} mais uma correção devido ao parâmetro de Podolsky. Isso comprova que quando o fator de escala era muito pequeno, a densidade de energia era muito grande (condição de Big Bang).

4.1.5 Equação de Friedmann: a equação de $a(t)$ no limite $\beta m \ll 1$

Para terminar de analisar a dinâmica cósmica, vamos substituir a expressão encontrada para $\varepsilon(a)$ [Eq. (4.18)] na primeira equação de Friedmann (3.5a), para obter o fator de escala em termos do tempo. Logo,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \simeq \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\varepsilon_{\text{Pod}}} \frac{1}{(2a)^2} \left[(2a_{\text{Pod}})^2 + \frac{A}{\sqrt{\varepsilon_{\text{Pod}}}} (a^2 - a_{\text{Pod}}^2) \right].$$

Façamos:

$$H_{\text{Pod}} \equiv \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\varepsilon_{\text{Pod}}}, \quad (4.19)$$

$$\frac{a \, da}{a_{\text{Pod}}^2 \left(1 - \frac{(A/2)^2}{\varepsilon_{\text{Pod}}^{1/2}}\right) + \frac{(A/2)^2}{\varepsilon_{\text{Pod}}^{1/2}} a^2} \simeq H_{\text{Pod}} dt.$$

Logo,

$$\left(\frac{a}{a_{\text{Pod}}}\right)^2 \simeq 1 - \frac{\varepsilon_{\text{Pod}}^{1/2}}{(A/2)^2} \left[1 - \exp\left(\frac{2(A/2)^2}{\varepsilon_{\text{Pod}}^{1/2}} H_{\text{Pod}} (t - t_{\text{Pod}})\right) \right]. \quad (4.20)$$

que é a solução procurada para um universo dominado pela **radiação de Podolsky**.

A Eq. (4.20) deve se reduzir ao caso padrão de um universo dominado pela radiação Maxwelliana na condição em que o fator de Podolsky é zero. No limite Maxwelliano podemos fazer a seguinte aproximação, devido ao fato de $\frac{m^2}{\sqrt{\varepsilon_{\text{Pod}}}} \ll 1$, usando (4.14):

$$\left(\frac{a}{a_{\text{Pod}}}\right)^2 \simeq 1 - 2H_{\text{Pod}} (t - t_{\text{Pod}})$$

conforme esperado da seção 3.1 para a era da radiação (de Maxwell) — vide Tabela 3.

4.1.6 A aproximação $\beta m \gg 1$

Satisfazemos a condição $\beta m \gg 1$ para um valor fixo qualquer da massa m exigindo que β seja grande, o que equivale a dizer que a temperatura deve ser pequena. A situação em que a temperatura é pequena corresponde ao período cosmológico que vivemos. De fato, a temperatura média do universo é estimada em $T_0 = 2,725 \pm 0,001$ K (RYDEN, 2003).

Nessas condições, podemos expandir o termo $K_2(k\beta m)$ da equação do $\ln Z_P$, Eq. (2.28), como:

$$K_2(k\beta m) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2k\beta m}} e^{-k\beta m} + O\left(\left(\frac{1}{k\beta m}\right)^{3/2}\right).$$

Com isso, a função de partição ficará:

$$\ln Z_{\text{Pod}} \simeq \frac{3}{2} \frac{\beta m^4 V}{\pi^2 (\beta m)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{\pi}{2k\beta m}} e^{-k\beta m}.$$

Consideramos apenas o primeiro termo da soma ($k = 1$), pois o segundo termo da somatória já é muito menor que o primeiro. Os termos seguintes podem então, ser desprezados. Obtemos,

$$\ln Z_{\text{Pod}} \simeq 3V \sqrt{\frac{m^3}{2^3 \pi^3 \beta^3}} e^{-\beta m} \simeq 3V \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta m}$$

A função completa de partição é dada por:

$$\ln Z_{\text{Pod}} \simeq \frac{\pi^2 V}{45\beta^3} + 3V \left(\frac{m^2}{2\pi\beta m} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta m} \quad \text{para } \beta m \gg 1. \quad (4.21)$$

Com o logaritmo da função de partição total em mãos, podemos calcular duas grandezas termodinâmicas necessárias para que possamos calcular a dinâmica do cosmos através da Equação de Friedmann: a pressão P e a densidade de energia ε .

4.1.7 A densidade de energia para altas temperaturas: $\beta m \gg 1$

Nesta seção levamos em consideração apenas o presente e o futuro cósmico, pois para que o limite tomado seja verdadeiro, a massa de Podolsky deverá ser muito maior que a temperatura.

Tal qual no limite tratado anteriormente, $\beta m \ll 1$, consideraremos um universo plano e preenchido somente com radiação. Assim sendo, a teoria Maxwelliana estabelece que a densidade de energia é diretamente proporcional à T^4 .¹ Em virtude da discussão dos modos de Maxwell e Proca no Capítulo 2, é sensato esperar que teremos um termo não massivo que corresponderá à Maxwell, proporcional à β^{-4} , e um termo massivo associado à Proca, da mesma forma que no limite para o universo primordial tratado anteriormente.

Para calcular a densidade de energia, usaremos a expressão (2.17) juntamente com a função de partição de Podolsky aproximada para baixas temperaturas (4.21). Logo,

$$\varepsilon(\beta, m) \simeq \frac{\pi^2}{15\beta^4} + 3 \left[\frac{3 + 2\beta m}{2\beta} \right] \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta m},$$

sabemos que para o limite que estamos trabalhando $3 + 2\beta m \simeq 2\beta m$, assim:

$$\varepsilon(\beta, m) \simeq \frac{\pi^2}{15\beta^4} + 3m \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta m}, \quad (4.22)$$

ou

$$\varepsilon(\beta, m) \simeq \frac{\pi^2}{15\beta^4} \left[1 + \frac{45}{2^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{7}{2}}} (\beta m)^{\frac{5}{2}} e^{-\beta m} \right].$$

¹ Essa é a chamada lei de Stefan-Boltzmann.

Usando a definição (2.4), $\beta \equiv 1/T$ e (4.7), $\sigma_0 = \pi^2/15$, obtemos:²

$$\varepsilon(T, m) \simeq T^4 \left[\sigma_0 + \frac{45\sigma_0}{\sqrt{8\pi^7}} \left(\frac{m}{T} \right)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{m}{T}} \right] \quad (4.23)$$

ou

$$\varepsilon(T, m) \simeq T^4 [\sigma_0 + \delta\sigma_{\text{futuro}}],$$

onde calculamos a correção de Podolsky para o futuro. O resultado da correção para Podolsky no limite $\beta m \gg 1$, pode ser confirmado no artigo “Podolsky Electromagnetism at Finite Temperature: Implications on Stefan-Boltzmann Law” (BONIN et al., 2010):

$$\delta\sigma_{\text{futuro}} \equiv \frac{45\sigma_0}{\sqrt{8\pi^7}} \left(\frac{m}{T} \right)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{m}{T}} \quad (4.24)$$

Sabemos que:

$$\sigma \equiv \sigma_0 + \delta\sigma_{\text{futuro}}, \quad (4.25)$$

Logo,

$$\varepsilon(T, m) \simeq T^4 \sigma. \quad (4.26)$$

4.1.8 A pressão para temperaturas finitas: $\beta m \gg 1$

Para calcular a pressão, usaremos a expressão (2.15) juntamente com a função de partição de Podolsky aproximada para baixas temperaturas (4.21). Logo,

$$P(\beta, m) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{\pi^2 V}{45\beta^3} + 3V \left(\frac{m^2}{2\pi\beta m} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta m} \right],$$

ou seja,

$$P(T, m) \simeq \frac{1}{3} \left(\frac{\pi^2}{15} \right) T^4 \left[1 + 3 \left(\frac{45}{\sqrt{8\pi^7}} \right) \left(\frac{m}{T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{T}} \right].$$

Através das definições de σ_0 , Eq. (4.7), $\delta\sigma_{\text{futuro}}$, Eq. (4.24) e de σ , Eq. (4.25):

$$P(T, m) \simeq \frac{1}{3} T^4 \left[\sigma_0 + \frac{3 \left(\frac{45\sigma_0}{\sqrt{8\pi^7}} \right) \left(\frac{m}{T} \right)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{m}{T}}}{\left(\frac{m}{T} \right)} \right],$$

assim:

$$P \simeq \frac{1}{3} T^4 \left[\sigma_0 + \frac{3}{\left(\frac{m}{T} \right)} \delta\sigma_{\text{Futuro}} \right]. \quad (4.27)$$

Como teste de consistência, podemos analisar o regime Maxwelliano, onde a correção de Podolsky $\delta\sigma(T, m)$ tende a zero, como consequência: $\sigma_0 = \sigma$. Recuperamos dessa forma a pressão de radiação de Maxwell, vide Eq. (2.19), como esperado:

$$P \simeq \frac{1}{3} T^4 \sigma. \quad (4.28)$$

² Lembrando que estamos trabalhando com o sistema natural de unidades devido à praticidade que esse sistema nos proporciona nas deduções das equações.

4.1.9 Relação entre a pressão e densidade de energia no regime de temperatura finita: $\beta m \gg 1$

Para que seja possível calcular a equação de fluido (3.6), é necessário primeiro relacionar as duas propriedades termodinâmicas encontradas, (4.26) e (4.27). Desse modo, podemos finalmente resolver a equação de Friedmann que nos dá a dinâmica cósmica para o universo atual. Entretanto, podemos notar que não é possível inverter a Eq. (4.23) para encontrar uma função $P(\varepsilon)$ de forma analítica. Essa dificuldade acontece devido ao termo de correção de Podolsky (4.24), pois possui uma função exponencial que dificulta a inversão, tornando assim, a Eq. (4.23), uma equação transcendental. Por isso, o próximo passo seria resolver as equações desse limite numericamente. Esse trabalho tem o mesmo nível de dificuldade da solução não-aproximada. Por isso, optamos por passar diretamente à solução numérica do caso completo, como pode ser visto no Capítulo 5.

5 SOLUÇÃO COSMOLÓGICA COMPLETA E ANÁLISE DE SUA DINÂMICA

O objetivo deste capítulo é construir as equações completas para a Eletrodinâmica Generalizada, resolvê-las numericamente e analisar o comportamento do universo na era da radiação de Podolsky em contraste com a era de radiação padrão de Maxwell.

Por conveniência, foi introduzido um parâmetro adimensional ξ ,¹ sendo este definido como:

$$\xi \equiv \beta m. \quad (5.1)$$

Substituímos (5.1) em (2.28) para obter a função de partição em função de ξ :

$$\ln Z(\xi) = \frac{\pi^2 V m^3}{45 \xi^3} \left[1 + 45 \xi^4 \frac{g_P}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_2(k\xi)}{(k\xi)^2} \right]. \quad (5.2)$$

Com o objetivo de obter a densidade de energia em função do novo parâmetro ξ , substituímos (5.1) em (2.36):

$$\varepsilon(m, \xi) = \frac{\pi^2 m^4}{15 \xi^4} \left[1 + 15 \xi^4 \frac{g_P}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{K_1(k\xi)}{k\xi} + 3 \frac{K_2(k\xi)}{(k\xi)^2} \right) \right], \quad (5.3)$$

e, de modo análogo, substituindo (5.1) em (2.29), temos a pressão:

$$P(m, \xi) = \frac{\pi^2 m^4}{45 \xi^4} \left[1 + 45 \xi^4 \frac{g_P}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{K_2(k\xi)}{(k\xi)^2} \right) \right]. \quad (5.4)$$

Observamos que a densidade de energia total de Podolsky, Eq. (2.36) ou Eq. (5.3), é proporcional à densidade de energia do gás de fótons da teoria Maxwelliana, Eq. (2.18):

$$\varepsilon_M = \frac{\pi^2}{15 \beta^4} = \frac{\pi^2 m^4}{15 \xi^4}. \quad (5.5)$$

Logo,

$$\varepsilon_{\text{Pod}} = \frac{\pi^2 m^4}{15 \xi^4} (1 + \delta\varepsilon) = \varepsilon_M (1 + \delta\varepsilon), \quad (5.6)$$

onde ε_M é a densidade de energia da parte não-massiva e $\delta\varepsilon$ é a correção de Podolsky, definida como:

$$\delta\varepsilon \equiv \frac{15 g_P \xi^4}{2 \pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{K_1(k\xi)}{k\xi} + 3 \frac{K_2(k\xi)}{(k\xi)^2} \right]. \quad (5.7)$$

O termo de proporção entre as teorias de Maxwell e Podolsky é $(1 + \delta\varepsilon)$; esse termo depende da massa do fóton de Podolsky e da temperatura. Portanto, na região onde $\delta\varepsilon$ é desprezível, tende-se à teoria de Maxwell.

¹ É preferível lidar com parâmetros adimensionais nas análises numéricas das equações. No nosso caso, o parâmetro adimensional ξ é além de tudo muito útil, pois não requer que fixemos um valor específico para a massa do fóton.

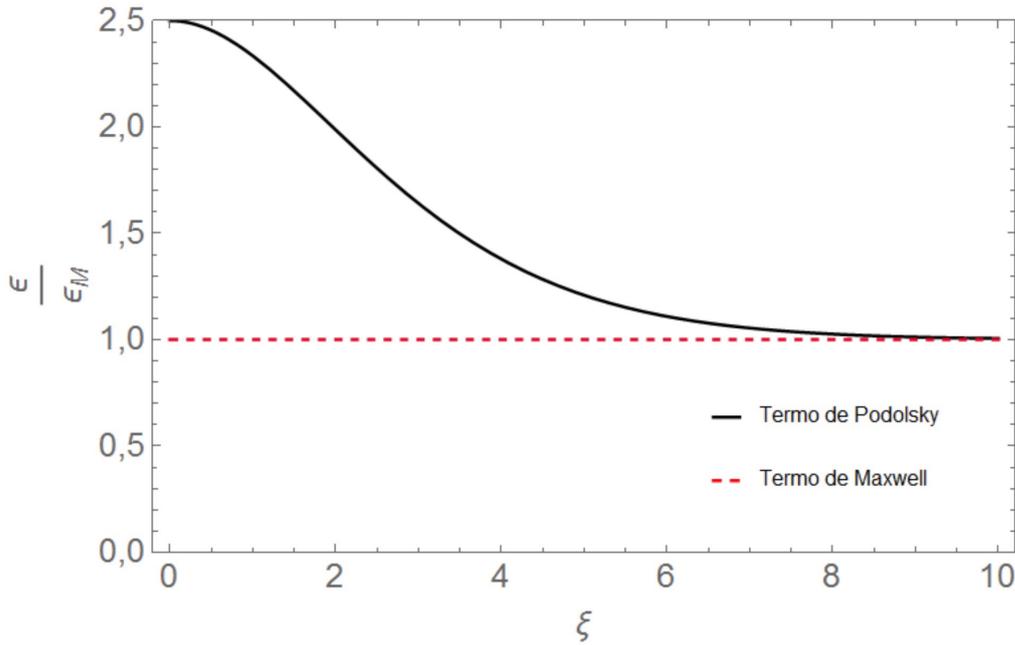


Figura 1 – Gráfico de $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_M}$ em função do parâmetro adimensional ξ . $\varepsilon = \varepsilon_M$ é representado pela reta vermelha pontilhada e, se $\varepsilon = \varepsilon_{\text{Pod}}$, obtém-se a curva preta.
Fonte: Da autora.

A Fig. 1 mostra o gráfico de $\varepsilon/\varepsilon_M$ em função de ξ . A reta pontilhada representa o comportamento da radiação Maxwelliana: de fato, se $\varepsilon = \varepsilon_M$, então $\varepsilon/\varepsilon_M = 1$. Por outro lado, se $\varepsilon = \varepsilon_{\text{Pod}}$, Eq. (5.6), então $\varepsilon/\varepsilon_M = 1 + \delta\varepsilon$, representado pela curva preta no gráfico da Fig. 1. É possível observar claramente que $\delta\varepsilon$ é desprezível no regime de valores grandes de ξ .

No gráfico da Fig. 1 percebemos o valor 2,5 no eixo das ordenadas no limite $\xi \rightarrow 0$ para a curva de $\frac{\varepsilon_{\text{Pod}}}{\varepsilon_M}$ (linha preta). Isso acontece pois $\lim_{\xi \rightarrow 0} \delta\varepsilon = 1,5$, levando à $\varepsilon/\varepsilon_M = 2,5$.

Até este momento não analisamos o comportamento do parâmetro da equação de estado w (conhecido também como *equação efetiva*) na equação de estado barotrópica $P = w\varepsilon$. Este parâmetro é definido como a razão entre a pressão e a densidade de energia de um determinado componente do universo – no nosso caso, a radiação no contexto da Eletrodinâmica Generalizada. Logo,

$$w_{\text{Pod}} \equiv \frac{P}{\varepsilon}. \quad (5.8)$$

Para Maxwell esse parâmetro é bem definido e vale $1/3$, implicação direta do logaritmo (2.19). Já para Podolsky, o parâmetro w_{Pod} deverá ser a razão entre (5.4) e (5.3):

$$w_{\text{Pod}} = \frac{\frac{1}{3} \frac{\pi^2 m^4}{15 \xi^4} \left[1 + 45 \xi^4 \frac{g_P}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{K_2(k\xi)}{(k\xi)^2} \right) \right]}{\frac{\pi^2 m^4}{15 \xi^4} \left[1 + 15 \xi^4 \frac{g_P}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{K_1(k\xi)}{k\xi} + 3 \frac{K_2(k\xi)}{(k\xi)^2} \right) \right]}$$

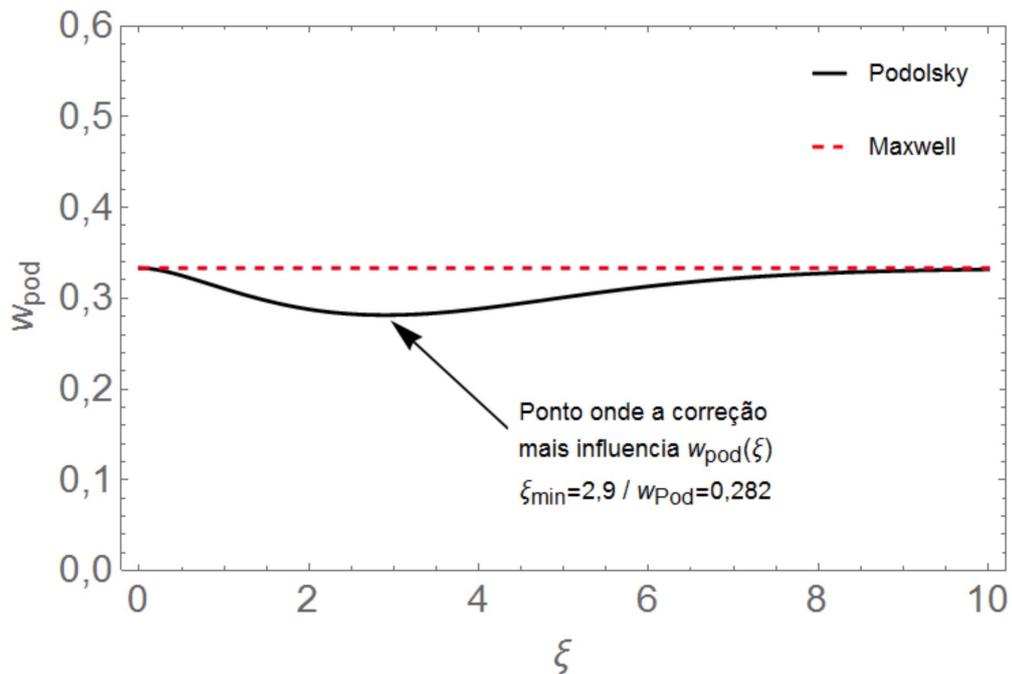


Figura 2 – Gráfico da equação efetiva, $w(\xi)$, para a Eletrodinâmica Generalizada (curva preta). Observamos o comportamento do parâmetro w da equação efetiva de Podolsky. A reta vermelha pontilhada representa Maxwell ou $w = 1/3$. ξ_{\min} representa o ponto de maior influência de Podolsky, para $\xi_{\min} = \xi_{\text{ref}} = 2,899$, i.e., $w(\xi_{\min}) = 0,282$.
Fonte: Da autora.

i.e.

$$w_{\text{Pod}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1 + \frac{15\xi^4 \frac{g_P}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_1(k\xi)}{k\xi}}{1 + 45\xi^4 \frac{g_P}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_2(k\xi)}{(k\xi)^2}}\right)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + f_{\text{Pod}}}\right), \quad (5.9)$$

onde, por conveniência, definimos a função f_{Pod} :

$$f_{\text{Pod}} = \frac{15\xi^4 \frac{g_P}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_1(k\xi)}{k\xi}}{1 + 45\xi^4 \frac{g_P}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_2(k\xi)}{(k\xi)^2}}. \quad (5.10)$$

Perceba que quando f_{Pod} pode ser desprezado, o resultado Maxwelliano é recuperado, Eq. (2.19). A curva de w_{Pod} é traçada na Fig. 2, onde também aparece a reta Maxwelliana $w_M = 1/3$, para comparação.

Através da equação efetiva w_{Pod} podemos perceber que nos dois limites, $\xi \rightarrow 0$ (universo muito no passado) e $\xi \gg 1$ (universo muito no futuro), a dinâmica da teoria de Maxwell (linha pontilhada em vermelho na Fig. 2) é recuperada. Devido a esse fato não há mudança na dinâmica cósmica em nenhum dos extremos.

Isso faz sentido para o passado (i.e. $\xi \ll 1$), pois nesse limite a energia térmica é muito maior que a massa do fóton de Podolsky (vide discussão no Capítulo 4). Com isso, o

fóton de Podolsky se comportará como uma partícula ultrarelativística, como consequência recuperamos a teoria de Maxwell usual.

No futuro, a condição $\xi = m T^{-1} \gg 1$ é satisfeita para uma massa m muito maior que a temperatura T . Isso é naturalmente obtido fisicamente, pois T é da ordem de poucos kelvin (e.g., hoje a temperatura da radiação cósmica de fundo é $T_0 \simeq 2,73 \text{ K} \simeq 2,35 \times 10^{-4} \text{ eV}$) enquanto que a massa esperada pelo fóton de Podolsky é de, no mínimo, $3,70 \times 10^{11} \text{ eV}$, conforme a Tabela 2 e a Ref. (BUFALO; PIMENTEL; SOTO, 2014).

Apesar de Podolsky tender a Maxwell nos dois extremos do universo (vide Fig. 2), existe um valor de ξ , que denominamos ξ_{\min} , onde Podolsky tem maior influência para a dinâmica cósmica. ξ_{\min} corresponde ao menor valor assumido por $w(\xi)$, o ponto mais baixo da curva preta na Fig. 2. Temos:

$$\xi_{\min} = 2,899, \quad w_{\text{Pod}}(\xi_{\min}) = 0,282.$$

Esse é o valor de w_{Pod} que mais difere de $w_{\text{M}} = 1/3 = 0,333$.

A Eletrodinâmica Generalizada promove uma aceleração maior que a de Maxwell. De fato, a curva preta que representa a eletrodinâmica de Podolsky, no gráfico da Fig. 2, está abaixo da reta vermelha pontilhada que representa o caso de Maxwell: $w_{\text{Pod}}(\xi_{\min}) < w_{\text{M}}$, logo $\ddot{a}/a \propto (1 + 3w)$ é menor em Podolsky – vide Eq. (3.5b). Além disso, a aceleração máxima produzida pelo efeito do fóton massivo acontece no ponto ξ_{\min} .

Por essas razões físicas, fica claro que o valor ξ_{\min} é um bom valor de referência para o parâmetro ξ :

$$\xi_{\text{ref}} = \xi_{\min}.$$

Esse valor é utilizado como condição de contorno para a solução das equações diferenciais (3.6) e (3.5a) na forma numérica. Também, ξ_{ref} já foi importante para nós anteriormente, na solução aproximada, vide Seção 4.1.5, onde precisávamos determinar o ponto em que o fator de escala de Podolsky, a_{Pod} , seria normalizado. Vamos utilizar a normalização $a_{\text{Pod}} = 1$, onde a_{Pod} não pode ser confundido com a definição de fator de escala atual $a_0 = 1$, pois agora estamos tomando a condição de normalização para o tempo em que Podolsky teve maior efeito, i.e., no universo primordial. Utilizamos essa normalização para $a_{\text{Pod}}(\xi_{\text{ref}}) = 1$.

É interessante construir um gráfico do comportamento da primeira derivada do parâmetro de equação de estado em função de ξ . Este gráfico é mostrado na Fig. 3. Pode-se observar claramente que Podolsky apresenta uma $dw/d\xi \gg 1$ para $\xi \rightarrow 0$. Por isso, embora a equação de estado de Podolsky tenda à de Maxwell no começo do universo, a primeira rapidamente se diferencia da última. Ainda que isso seja verdade, $dw/d\xi$ de Podolsky é diferente de zero em apenas cerca de 3% (que é o valor mínimo das ordenadas observado na Fig. 3). Além disso, o gráfico de $dw/d\xi$ é consistente com a equivalência Podolsky-Maxwell $\xi \simeq 8$. O ponto de mínimo na Fig. 2 ocorre no ponto em que a derivada $dw/d\xi$ se anula e isso ocorre em $\xi = 2,9$, conforme o esperado.

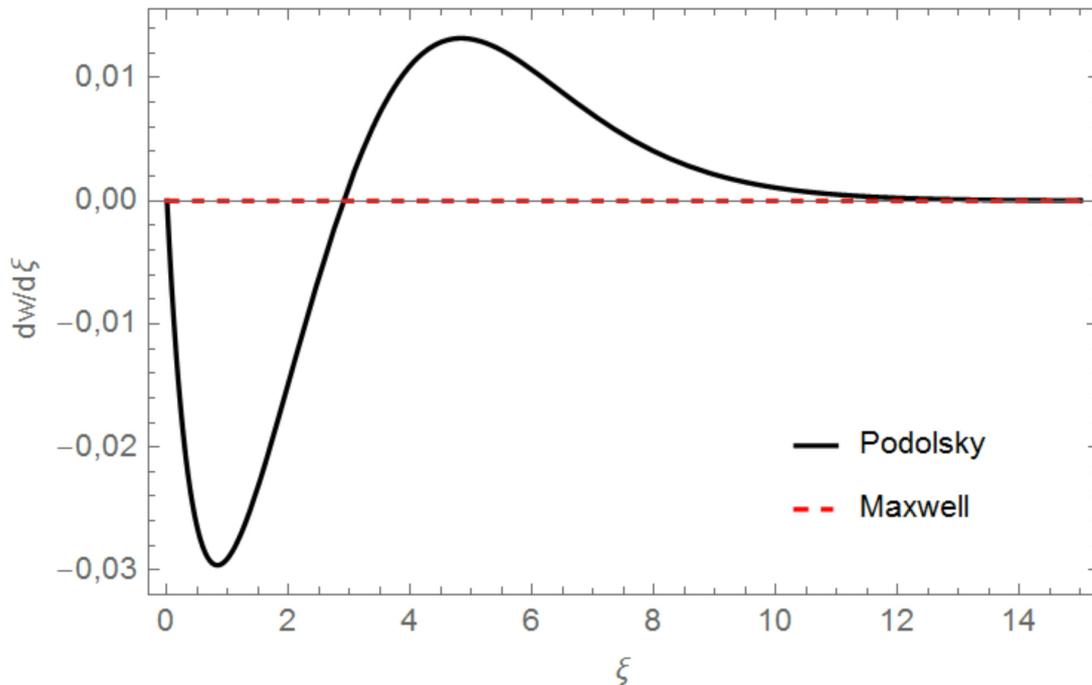


Figura 3 – Gráfico do comportamento da variação do parâmetro de equação de estado ($dw/d\xi$), onde a curva pontilhada vermelha representa a primeira derivada de w em relação à ξ para Maxwell e a curva preta para Podolsky.

Fonte: Da autora.

Usando (3.6) e (5.8), temos:

$$\frac{da}{d\xi} = -\frac{a}{3(1+w_{\text{Pod}})\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\xi}. \quad (5.11)$$

Com essa equação diferencial construímos o gráfico de $a(\xi)$, pois $\varepsilon(\xi)$ é uma função conhecida, Eq. (5.3).

Para resolver (5.11), precisamos ter $\frac{d\varepsilon}{d\xi}$. Isso segue diretamente do logaritmo (3.11): basta dividi-la por m e usar a definição de $\xi = \beta m$. Logo,

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = -4 \frac{\pi^2 m^4}{15 \xi^5} \left[1 + 15 \frac{g_P \xi^4}{8 \pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(K_2(k\xi) + 3 \frac{1}{k\xi} K_3(k\xi) \right) \right]. \quad (5.12)$$

Observe que, ao substituir (5.3) e (5.12) em (5.11), o termo de massa que não está embutido na definição de ξ será cancelado. Devido a esse fato, não é necessário fixar um valor para a massa de Podolsky na análise numérica, feita logo abaixo (Fig. 4).

A equação que soluciona a dinâmica cósmica é a Eq. (3.5a), vide Seção 3.1. Consideramos o caso do universo plano, $\kappa = 0$, somente com radiação e sem constante cosmológica, $\Lambda = 0$, assim:²

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi\varepsilon_{\text{Pod}}}{3} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{Pod}}}.$$

² Lembramos novamente que estamos usando o sistema natural de unidades.

Usamos a definição para o parâmetro de densidade, Ω :

$$\Omega \equiv \frac{\varepsilon(a)}{\varepsilon_{\text{Pod}}}, \quad (5.13)$$

que é uma grandeza adimensional. Empregamos também a definição (4.19):

$$H_{\text{Pod}} \equiv \sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_{\text{Pod}}}{3}}. \quad (5.14)$$

Então,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_{\text{Pod}}^2 \Omega$$

ou

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{a(\xi) H_{\text{Pod}} \sqrt{\Omega(\xi)}} \frac{da}{d\xi}.$$

Definimos:

$$H_{\text{Pod}} t \equiv \tau, \quad (5.15)$$

como o tempo cósmico adimensional: a unidade relacionada à H_{Pod} é s^{-1} ; t é dado em s.

Assim,

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{\Omega(\xi)}} \frac{1}{a(\xi)} \frac{da}{d\xi}, \quad (5.16)$$

que é a equação de Friedmann resolvida numericamente para obter o comportamento $\tau(\xi)$. Observe que a função $\Omega(\xi)$ é obtida do logaritmo (5.3): basta dividi-la por ε_{Pod} e teremos a equação da densidade de energia em termos de $\Omega(\xi)$. O fator $\frac{da}{d\xi}$ vem da resolução de (5.11).

Usando as condições de Big Bang, $a(0) = 0$ e $\tau(0) = 0$, podemos obter gráficos das Figuras 4, e 5. É possível assim, construir um gráfico de $a(\tau)$ quando fazemos um gráfico paramétrico de $a(\xi)$ e $\tau(\xi)$, c.f. a Fig. 6.

O gráfico da Fig. 4 representa o fator de escala em relação à ξ e foi obtido da solução de (5.11). A curva preta é a solução completa para a Eletrodinâmica Generalizada e, para efeito de comparação, podemos observar a curva vermelha pontilhada da Eletrodinâmica Maxwelliana. Na Fig. 2, para o gráfico de $w(\xi)$, percebemos que a maior influência para Podolsky está na região em que ξ varia entre 0 e 8, grosseiramente. Assim, no gráfico de $a(\xi)$, na Fig. 4, delimitamos o intervalo do fator de escala entre 0 e 4. Ainda no gráfico de $a(\xi)$, percebemos que se $\xi \propto \beta$ e, estes são inversamente proporcionais à temperatura, conforme o fator de escala aumenta, temos um decaimento na temperatura, em conformidade com o modelo de Big Bang.

Resolvendo logaritmo (5.16) numericamente temos um gráfico do tempo cósmico adimensional, τ , em função do parâmetro ξ (vide Fig. 5) para um universo primordial preenchido por fótons massivos. Pode ser visto que, assim como no gráfico anterior para $a(\xi)$, quanto maior o tempo cósmico menor a temperatura relacionada, pois $\xi \propto 1/T$. Isso é consistente com o comportamento de um universo em expansão. Da mesma forma,

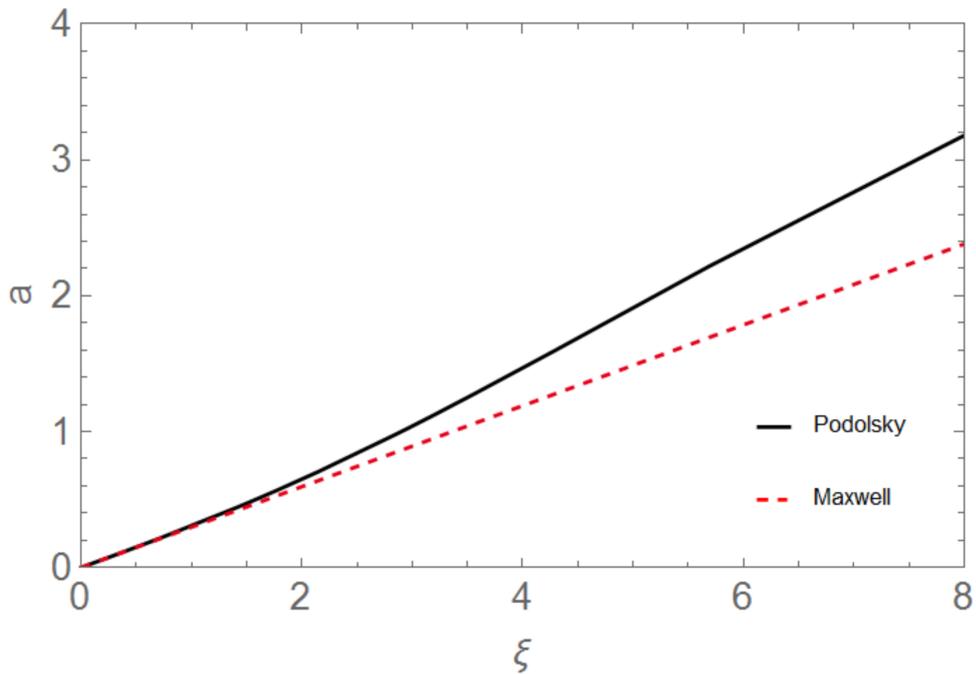


Figura 4 – Gráfico do fator de escala a completo em relação à ξ para Podolsky (curva preta) e para Maxwell.
Fonte: Da autora.

limitamos o eixo para ξ entre os valores 0 e 8, pois de acordo com a Fig. 2, é nesse intervalo que Podolsky tem maior influência sobre Maxwell. Isso significa que no gráfico $\tau(\xi)$ que a maior influência de Podolsky está para valores de τ entre 0 e 25. Como consequência limitamos τ nesse intervalo na Fig. 6.

É possível obter o gráfico paramétrico $a(\tau)$ a partir das Eqs. (5.11) e (5.16) para $a(\xi)$ e $\tau(\xi)$. O resultado é a Fig. 6. O comportamento mostrado por $a(\tau)$ confirma nossas previsões de que, levando em conta uma eletrodinâmica de fótons massivos, não há um efeito significativo na dinâmica cósmica em relação ao que já era esperado de Maxwell. Como pode-se notar no gráfico da Fig. 6, para $\tau = 0$ até aproximadamente $\tau = 1$ Maxwell é equivalente à Podolsky, isso aparece como consequência direta das condições iniciais utilizadas. Após o período de equivalência, que representa um dos extremos da Fig. 2, segue um período onde há uma pequena diferença entre as duas teorias, que equivale ao período de maior influência de Podolsky. Limitamos o gráfico para τ entre 0 e 20, pois como visto no gráfico $w(\xi)$ a maior de influência de Podolsky acontece para ξ entre 0 e 8.

Neste capítulo, fizemos a análise da dinâmica cósmica para um universo preenchido por radiação de Podolsky. No próximo capítulo, faremos considerações finais sobre essas análises e previsões de estudos futuros para o presente trabalho.

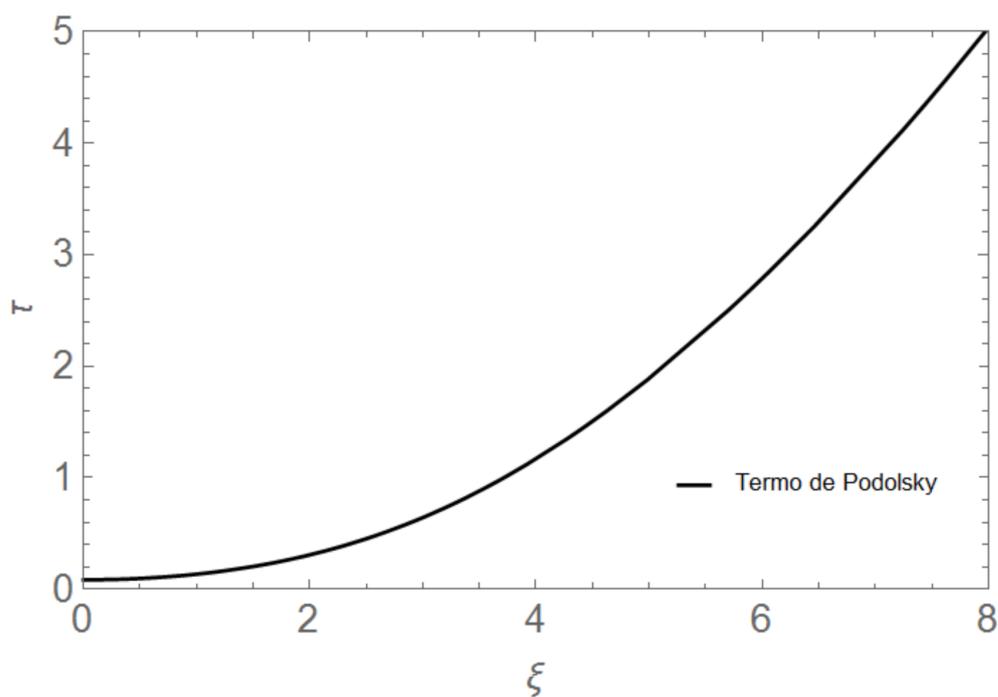


Figura 5 – Gráfico do tempo adimensional τ em função de ξ para Podolsky.
Fonte: Da autora.

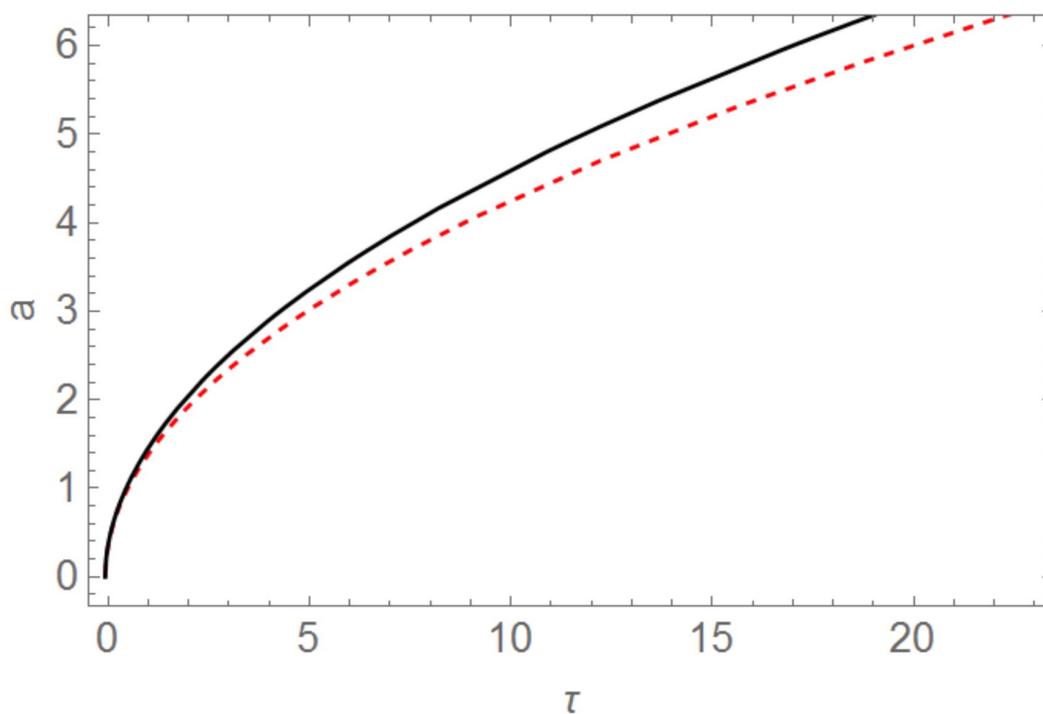


Figura 6 – Fator de escala a em função do tempo cósmico τ para Maxwell (curva vermelha pontilhada) e para Podolsky (curva preta).
Fonte: Da autora.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Segundo (CUZINATTO et al., 2011), a Eletrodinâmica Generalizada é a única extensão possível do eletromagnetismo que possui derivadas de segunda ordem do tensor de campo, tomando o cuidado de preservar a linearidade das equações, sem quebrar as duas simetrias da interação eletromagnética, a saber: a de gauge e a de Lorenz. Abordamos essas questões na Seção 1.2. A teoria de Podolsky prevê a existência de um modo massivo para o fóton. Neste trabalho, perguntamo-nos quais poderiam ser os efeitos gravitacionais para o universo em larga escala advindos desses possíveis modos massivos de radiação.

O principal objetivo desta dissertação foi analisar as diferenças da era da radiação de Podolsky com a era da radiação ordinária na cosmologia de *background* homogêneo e isotrópico. Para tanto, usamos todo o maquinário da mecânica estatística em equilíbrio termodinâmico, pois essa teoria nos possibilita encontrar as equações de estado que complementam as equações de fluido e de Friedmann. Com base nisso, pudemos solucionar a dinâmica cósmica para um gás de fótons massivos no modelo padrão da cosmologia.

Vimos que a teoria de Podolsky afeta a dinâmica cósmica, e isso acontece para ξ entre 0 e 8 (vide gráfico da Fig. 2). Entretanto, essa influência da Eletrodinâmica Generalizada não é pronunciada. De fato, não obtivemos uma dinâmica acelerada primordial que poderia ser interpretada como um período inflacionário baseado em primeiros princípios, por exemplo. Tampouco encontramos um universo com bounce, que seria interessante por prever um efeito atípico do modelo cosmológico padrão. O que ocorre é uma aceleração da expansão cósmica levemente maior do que acontece em uma era da radiação a la Maxwell. Esse efeito pode ser observado no gráfico $w(\xi)$ em conjunto com a equação de Friedmann para a aceleração, Eq. (3.5b):

$$\left(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\right) = -\frac{4\pi G}{3} [\varepsilon(t) + 3P(\varepsilon)].$$

Qualquer material com pressão e densidade de energia positivas, produzirá uma aceleração negativa que é consistente com uma força gravitacional atrativa, na interpretação Newtoniana da interação gravitacional. O gás de fótons massivos é caracterizado por $P = w_{\text{Pod}}\varepsilon$ em que $0,282 < w_{\text{Pod}} < w_{\text{M}} = 1/3$. Logo, por um lado, a aceleração na expansão está garantida para qualquer valor de tempo; e, por outro lado, a radiação de Maxwell é capaz de acelerar o universo em uma taxa menor do que a radiação de Podolsky.

Neste trabalho foi descoberto que a teoria de Podolsky tende à de Maxwell nos limites $\beta m \ll 1$, passado do universo e $\beta m \gg 1$, presente e futuro cósmico (vide Fig. 2). Sendo assim, a teoria de Podolsky representa uma correção à de Maxwell, que é efetiva para a evolução do universo no intervalo $0 \lesssim \xi \lesssim 8$. O intervalo de energia em que Podolsky tem maior influência pode ser calculado através de uma estimativa para massa de Podolsky e do valor de referência do parâmetro utilizado, ξ_{ref} . Escolhemos o valor de $m = 370 \text{ GeV}$

da tabela 2, que corresponde ao menor valor para a massa do fóton de acordo com os vínculos experimentais para o espalhamento Bhabha. Desse modo, Podolsky tem maior efeito em $kT \simeq 130 \text{ GeV}$, i.e., no universo primordial. De acordo com a tabela 3, esse valor de temperatura está relacionado a eventos anteriores à unificação eletrofraca.

O gráfico de $a(\tau)$ na Fig.6 também mostra que a dinâmica de Podolsky diferencia-se pouco da de Maxwell. Com o valor de $w(\xi_{\text{ref}})$ da Fig. 2, é possível calcular a diferença

$$\Delta w \equiv \frac{w_M - w_{\text{Pod}}(\xi_{\text{ref}})}{w_M} = 15,3\%$$

com respeito ao w_M da teoria Maxwelliana. Esse valor mostra que, mesmo no máximo de sua influência para a cosmologia, a Eletrodinâmica Generalizada altera em apenas cerca de 15% a equação de estado para a radiação, *não importa o quão massivo seja o fóton da teoria de Podolsky*.

Nosso modelo é considerado um *toy model*, longe de ser um modelo realista para o universo primordial, pois não levamos em consideração interações, possíveis decaimentos, produções de pares e nem mesmo outras componentes. Apesar de ser um modelo simplista, a cosmologia de Podolsky permite-nos observar como os fótons massivos poderiam influenciar a dinâmica do universo primordial. Com essa vantagem em mente, poderíamos pensar em alguns projetos futuros envolvendo a cosmologia de Podolsky. O primeiro seria estudar o universo com múltiplas componentes, onde uma dessas componentes é a radiação de Podolsky. Para isso, usamos as mesmas equações do capítulo 5 com somas sobre os parâmetros de densidade dos vários possíveis componentes. Por exemplo, logaritmo (3.6) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\frac{da}{d\xi} = -\frac{d\varepsilon_i}{d\xi} \frac{a}{3\varepsilon_i(1+w)},$$

e a equação de Friedmann, Eq. (3.5a):

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\xi} \left(\sum_{i=1}^N \Omega_i(a) + \frac{\Omega_{k0}}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

onde o índice i representa as i -ésima componente que preenchem o universo. O parâmetro Ω_{k0} é denominado parâmetro de curvatura (e é zero para o universo plano que consideramos neste trabalho). Além de considerar outras componentes, é possível pensar em consideramos outros valores para κ (parâmetro de curvatura).

Outro trabalho futuro possível é expandir a nossa análise cosmológica a outros modelos de eletrodinâmica. Muito já foi feito no campo da eletrodinâmicas não-lineares (NOVELLO, 2010), (MEDEIROS, 2012), (AKMANSOY, 2014); (AKMANSOY; MEDEIROS, 2014), e a Ref. (TU; LUO; GILLIES, 2005) lida com a eletrodinâmica de Proca em cosmologia. Ainda assim, pretendemos investigar, dentre os modelos de eletrodinâmica não-maxwelliana, quais os que ainda não tiveram suas implicações cosmológicas analisadas, e implementar esse estudo.

O trabalho (BONIN et al., 2010) encontrou uma correção para a lei de Stefan-Boltzmann devida à eletrodinâmica de Podolsky para o universo atual. As inhomogeneidades da radiação de fundo foram usadas para vincular a massa do fóton da teoria de Podolsky. Nesta dissertação, estendemos a abrangência da cosmologia de Podolsky para qualquer período da evolução do universo. Apesar da abrangência maior, as equações da cosmologia foram todas resolvidas em termos do parâmetro $\xi = m\beta$. A conclusão é: a cosmologia de Podolsky depende do produto $m\beta$, mas não diretamente da massa. Devido a essa característica, deixamos de vincular a massa de Podolsky diretamente, usando um evento cosmológico bem determinado. Talvez essa limitação possa ser superada no futuro.

REFERÊNCIAS

- ACCIOLY, A. et al. Investigations in the lee-wick electrodynamics. *Modern Physics Letters A*, v. 26, n. 26, p. 1985–1994, 2011. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732311036401>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- AKMANSOY, P. N. *Termodinâmica de um Gás de Fótons no Contexto de Eletrodinâmicas Não - Lineares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil, 2014. Citado na página 62.
- AKMANSOY, P. N.; MEDEIROS, L. G. Thermodynamics of a photon gas in nonlinear electrodynamics. *Physics Letters B*, v. 738, p. 317 – 322, 2014. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269314007266>>. Citado na página 62.
- ARFKEN, G.; WEBER, H. H. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. [S.l.]: Elsevier, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 34, 43 e 88.
- BARONE, F. A.; NOGUEIRA, A. A. A conducting surface in lee-wick electrodynamics. *The European Physical Journal C*, v. 75, n. 7, p. 1–11, 2015. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3563-x>>. Citado na página 28.
- BONIN, C. A. *A Quantização da Eletrodinâmica de Podolsky em Equilíbrio Termodinâmico no Formalismo de Matsubara-Fradkin*. Tese (Doutorado) — IFT/UNESP - Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista, SP Paulo, Brasil, 2011. Citado na página 71.
- BONIN, C. A. et al. Podolsky electromagnetism at finite temperature: Implications on the stefan-boltzmann law. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 81, p. 025003, Jan 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.025003>>. Citado 5 vezes nas páginas 19, 23, 28, 50 e 63.
- BUFALO, R.; PIMENTEL, B. M.; SOTO, D. E. Causal approach for the electron-positron scattering in generalized quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 90, p. 085012, Oct 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.085012>>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 56.
- BUFALO, R.; PIMENTEL, B. M.; ZAMBRANO, G. E. R. Renormalizability of generalized quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 86, p. 125023, Dec 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.125023>>. Citado na página 28.
- CAI, Y.-F. et al. Nonsingular cosmology with a scale-invariant spectrum of cosmological perturbations from lee-wick theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 80, p. 023511, Jul 2009. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.023511>>. Citado na página 20.

CUZINATTO, R. R. et al. How can one probe podolsky electrodynamics? *International Journal of Modern Physics A*, v. 26, n. 21, p. 3641–3651, 2011. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X11053961>. Citado 3 vezes nas páginas 19, 28 e 61.

D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. [S.l.]: Oxford University Press Inc., 1992. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

DODELSON, S. *Modern cosmology*. [S.l.]: Academic press, 2003. Citado na página 27.

EINSTEIN, A. Zur quantentheorie der strahlung. *Physikalische Zeitschrift*, v. 18, 1917. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.

ELLIS, G. F.; MAARTENS, R.; MACCALLUM, M. A. *Relativistic cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. Citado na página 27.

FONSECA, M.; PAREDES, A. Is it possible to accommodate massive photons in the framework of a gauge-invariant electrodynamics? *Brazilian Journal of Physics*, scielo, v. 40, p. 319 – 322, 09 2010. ISSN 0103-9733. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-97332010000300011&nrm=iso. Acesso em: 14 maio 2014. Citado na página 26.

FRIEDMANN, A. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, v. 21, n. 1. Citado na página 37.

GALVÃO, C. A. P.; PIMENTEL, B. M. The canonical structure of podolsky generalized electrodynamics. *Canadian Journal of Physics*, v. 66, n. 5, p. 460–466, 1988. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1139/p88-075>. Citado na página 23.

GOLDHABER, A. S.; NIETO, M. M. Terrestrial and extraterrestrial limits on the photon mass. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 43, p. 277–296, Jul 1971. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.43.277>. Citado na página 26.

GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I.; TABLES, O. I. Series and products. *Ryzhik, IM"Table Academic Press, New of Integrals, York*, 1965. Citado 5 vezes nas páginas 35, 83, 84, 85 e 86.

GRIFFITHS, D. *Introduction to Electrodynamics*. Pearson Education, 2014. ISBN 9780321972101. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=J9ygBwAAQBAJ>. Citado na página 21.

JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: Wiley, 1999. Citado na página 19.

LEE, T.; WICK, G. Negative metric and the unitarity of the s-matrix. *Nuclear Physics B*, v. 9, n. 2, p. 209 – 243, 1969. ISSN 0550-3213. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321369900984>. Citado na página 20.

LEE, T.; WICK, G. Unitarity in the $n\theta\theta$ sector of soluble model with indefinite metric. *Nuclear Physics B*, v. 10, n. 1, p. 1 – 10, 1969. ISSN 0550-3213. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321369902752>. Citado na página 20.

- LI, L.-X. Electrodynamics on cosmological scales. *General Relativity and Gravitation*, v. 48, n. 3, p. 1–36, 2016. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-016-2028-3>>. Citado na página 20.
- MARION, J. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Elsevier Science, 2013. ISBN 9781483272818. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Ss43BQAAQBAJ>>. Citado na página 25.
- MEDEIROS, L. G. *Equação de Estado para o Universo Primordial*. Tese (Doutorado) — IFT/UNESP - Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brasil, 2007. Citado na página 84.
- MEDEIROS, L. G. Realistic cyclic magnetic universe. *International Journal of Modern Physics D*, v. 21, n. 09, p. 1250073, 2012. Acesso em: 14 jan. 2016. Citado na página 62.
- NOLTING, W. *Analytische Mechanik*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. v. 2. Citado na página 72.
- NOVELLO, E. G. M. *Eletrodinâmica não linear*. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. Citado na página 62.
- PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, v. 142, p. 419–421, 1965. Citado na página 27.
- PODOLSKY, B. A generalized electrodynamics part i—non-quantum. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 62, p. 68–71, Jul 1942. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.62.68>>. Citado na página 19.
- PODOLSKY, B.; KIKUCHI, C. A generalized electrodynamics part ii—quantum. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 65, p. 228–235, Apr 1944. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.65.228>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- PODOLSKY, B.; SCHWED, P. Review of a generalized electrodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 20, p. 40–50, Jan 1948. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.20.40>>. Citado na página 19.
- PROCA, A.; GOUDSMIT, S. Sur la masse des particules élémentaires. *J. Phys. Radium*, v. 10, n. 5, p. 209–214, 1939. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00233660>>. Acesso em: 14 jan. 2016. Citado 3 vezes nas páginas 19, 26 e 27.
- REIF, F. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. [S.l.]: Waveland Press, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 31, 33, 77 e 79.
- ROMEU, J. A. *Derivation of Friedman Equations*. Dissertação (Mestrado) — Universitat de Barcelona, Barcelona, Espanha, 2014. Citado na página 38.
- RYDEN, B. S. *Introduction to cosmology*. [S.l.]: Addison-Wesley San Francisco USA, 2003. v. 4. Citado 3 vezes nas páginas 27, 39 e 48.
- SABBATA, V. D.; GASPERINI, M. *Introduction to gravitation*. [S.l.]: World scientific, 1985. Citado na página 22.
- SANOJA, A. *Evolução Cosmológica de Perturbações de Densidade Inhomogêneas*. Tese (Doutorado) — UNESP - Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista, SP Paulo, Brasil, 2010. Citado na página 19.

SITTER, W. D. On the relativity of inertia. remarks concerning einstein's latest hypothesis. *Proc. Kkl. Akad. Amsterdam*, v. 19, 1917. Citado na página 38.

SOUZA, C. N. de. *Fundamentos da Cosmologia*. 2012. Publicação interna da UNIFAL-MG. Citado na página 39.

TU, L.-C.; LUO, J.; GILLIES, G. T. The mass of the photon. *Reports on Progress in Physics*, v. 68, n. 1, p. 77, 2005. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0034-4885/68/i=1/a=R02>>. Citado 3 vezes nas páginas 34, 45 e 62.

APÊNDICES

APÊNDICE A – EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA ELETRODINÂMICA

A seguir usamos o métodos variacional para encontrar a Equação de Euler-Lagrange e com ela as equações de Movimento das eletrodinâmicas de Maxwell e Podolsky.

A.1 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DA ELETRODINÂMICA MAXWELLIANA

No vácuo, o eletromagnetismo clássico pode ser deduzido da ação:

$$\mathcal{S} = \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d^4x,$$

onde d^4x é elemento de volume do espaço-tempo. Isso significa que a densidade Lagrangiana de Maxwell é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \quad (\text{A.1})$$

que é uma decorrência direta do fato de

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

ser invariante de *gauge* (BONIN, 2011), pois para uma transformação de *gauge* $A^\nu = A^\nu - \partial^\nu f$, não há variação do tensor eletromagnético:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu f) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu f) \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu A_\mu + \partial_\nu \partial_\mu f \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde f é uma função arbitrária.

A matriz $(\eta^{\nu\sigma})$ é a métrica de Minkowski, que escreve-se:

$$(\eta^{\nu\sigma}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

em coordenadas cartesianas.

O próximo passo para encontrar as equações de Maxwell (1.6) a partir de (A.1) é tratar cada componente do potencial vetor A_μ como um campo independente ($F_{\mu\nu}$ é dado em termos de A_μ) e usar as equações de Euler-Lagrange generalizada para quatro dimensões,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0, \quad (\text{A.4})$$

onde $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x))$. A equação de Euler-Lagrange em mecânica clássica envolve $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i(x), \dot{q}_i(x))$. Em teoria dos campos clássicos (não-quântico), ao invés de usarmos o conceito de coordenadas generalizadas, lidamos com campos contínuos $A_\mu(x)$, onde x está em R^4 . As velocidades $\dot{q}_i(t)$ são equivalentes às derivadas do campo $\partial_\nu A_\mu(x) \equiv \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu}$ com respeito ao tempo e às coordenadas espaciais (NOLTING, 2010).

Encontramos (A.4) pelo princípio da mínima ação:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int_{\Omega} d^4x \delta\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta(\partial_\nu A_\mu) \right] \\ \delta\mathcal{S} &= \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \partial_\nu(\delta A_\mu) \right] \\ \delta\mathcal{S} &= \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right) - \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) \delta A_\mu \right],\end{aligned}$$

onde Ω representa o domínio de integração. Usamos a regra de derivação do produto:

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right) = \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \partial_\nu(\delta A_\mu). \quad (\text{A.5})$$

Então,

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right] \delta A_\mu + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right) dS_\nu, \quad (\text{A.6})$$

onde $\partial\Omega$ é a borda do volume de integração Ω e dS_ν um elemento de área orientado dessa superfície. Como $\delta A_\mu = 0$ sobre $\partial\Omega$, o último termo de (A.6) se anula. Ademais, a condição de mínima ação requer $\delta\mathcal{S} = 0$, ou seja

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right] \delta A_\mu = 0,$$

que é satisfeita para qualquer Ω se o núcleo da integral é identicamente zero. Isso conduz à equação de Euler-Lagrange (A.4).

Para usar (A.1) em (A.4), é conveniente calcular:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \frac{\partial}{\partial A_\alpha} \left(-\frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial A_\alpha} \left[-\frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \right] = 0, \quad (\text{A.7})$$

pois $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu)$, ou seja, $F_{\mu\nu}$ independe explicitamente de A_μ . Também temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} \left[-\frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \right] \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= -\frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \left[(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta) (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= -\frac{1}{4} \left[(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - (\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta) \right] \\ &\quad + (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - (\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = - [\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha] = -F^{\alpha\beta} \quad (\text{A.8})$$

Substituímos (A.7) e (A.8) em (A.4):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0 - \partial_\mu (-F^{\nu\mu}) = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\nu\mu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu (-F^{\mu\nu}) = 0,$$

onde usamos (1.4). Logo,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.9})$$

que é logaritmo (1.6).

logaritmo (1.7) é uma identidade verificada diretamente da definição de $F_{\mu\nu}$, Eq. (1.5). De fato,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} = \\ & = \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) + \partial_\sigma (\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu) + \partial_\rho (\partial_\sigma A_\mu - \partial_\mu A_\sigma) \\ & = (\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma - \partial_\mu \partial_\sigma A_\rho) + (-\partial_\mu \partial_\sigma A_\rho + \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma) + (-\partial_\sigma \partial_\rho A_\mu + \partial_\sigma \partial_\rho A_\mu) = 0, \end{aligned}$$

onde usamos $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Logo, como nlogaritmo (1.7):

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Esta equação é chamada de identidade de Bianchi.

A.2 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DA ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY

Aplicando o princípio da mínima ação,

$$\delta \mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \delta \mathcal{L} (A_\mu, \partial_\nu A_\mu, \partial_\rho \partial_\nu A_\mu) = 0, \quad (\text{A.11})$$

deduzimos a equação de Euler-Lagrange para $\mathcal{L}_P = \mathcal{L} (A_\mu, \partial_\nu A_\mu, \partial_\rho \partial_\nu A_\mu)$. Isso é necessário pois agora a Lagrangiana depende também da derivada segunda do potencial, e já não se pode fazer uso de (A.4). Temos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \delta (\partial_\nu A_\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \partial_\rho \delta (\partial_\nu A_\mu) \\ \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \delta (\partial_\nu A_\mu) + \partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta (\partial_\nu A_\mu) \right] - \left[\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right] \delta (\partial_\nu A_\mu) \\ \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \delta (\partial_\nu A_\mu) + \partial_\rho \left\{ \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right] - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right\} - \left[\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right] \delta A_\mu \\ \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right] \delta (\partial_\nu A_\mu) + \partial_\rho \left\{ \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right] - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right\} \\ \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \partial_\nu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right] \delta A_\mu \right\} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right] \delta A_\mu \\ &+ \partial_\rho \left\{ \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right] - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \partial_\rho \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\mu)} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\rho A_\mu)} \right] \delta A_\mu \right\} + \left[-\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} + \partial_\nu \partial_\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right] \delta A_\mu \\ &+ \partial_\rho \left\{ \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right] - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} + \partial_\nu \partial_\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right] \delta A_\mu \\ &+ \partial_\rho \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\mu)} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\rho A_\mu)} \right] \delta A_\mu + \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right] - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} + \partial_\nu \partial_\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right] \delta A_\mu \\ &+ \partial_\rho \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\mu)} \delta A_\mu - 2\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\rho A_\mu)} \delta A_\mu + \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right] \right\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_\Omega d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} + \partial_\nu \partial_\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right) \delta A_\mu \\ &+ \int_{\partial\Omega} dS_\rho \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\mu)} \delta A_\mu - 2\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\rho A_\mu)} \delta A_\mu + \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right] \right\} \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

onde usamos o teorema de Gauss:

$$\int_\Omega d^4x \partial_\rho V^\rho = \int_{\partial\Omega} dS_\rho V^\rho,$$

sendo V^ρ um vetor, que, para nós, é o termo entre chaves na segunda linha de (A.12).

O termo de superfície em (A.12) anula-se pois $\delta A_\mu = 0$ quando calculado na borda $\partial\Omega$, de modo que a condição $\delta\mathcal{S} = 0$ é satisfeita se

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} + \partial_\rho \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange para uma teoria que depende da segunda derivada do campo.

Utilizando explicitamente a métrica (1.8),

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + \frac{a^2}{2} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \eta^{\zeta\tau} \partial_\mu F_{\rho\sigma} \partial_\zeta F_{\tau\nu}, \quad (\text{A.14})$$

para calcular $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}$, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}$ e $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)}$, e poder utilizar (A.14) em (A.13). Assim, em um procedimento análogo ao feito para Maxwell, temos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0, \quad (\text{A.15})$$

devido ao fato de não haver dependência explícita em A_μ .

Para $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}$, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -F^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.16})$$

Para $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta A_\psi)}$, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta A_\psi)} = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta A_\psi)} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right] + \frac{a^2}{2} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \eta^{\zeta\tau} \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta A_\psi)} \partial_\mu F_{\rho\sigma} \partial_\zeta F_{\tau\nu} \right],$$

e

$$\partial_\rho \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} = a^2 \left(\partial_\rho \partial^\rho \partial^\tau F_\tau{}^\mu - \partial^\mu \partial_\phi \partial^\tau F_\tau{}^\phi \right).$$

Notamos que o último termo se anula. De fato:

$$\partial_\phi \partial^\tau F_\tau{}^\phi = \frac{1}{2} \partial_\phi \partial^\tau F_\tau{}^\phi + \frac{1}{2} \partial_\phi \partial^\tau F_\tau{}^\phi = \frac{1}{2} \partial_\phi \partial^\tau F_\tau{}^\phi - \frac{1}{2} \partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta}$$

Usando o mesmo raciocínio para o índice α do último termo de $\partial_\phi \partial^\tau F_\tau{}^\phi$, temos:

$$\partial_\phi \partial^\tau F_\tau{}^\phi = \frac{1}{2} \partial_\phi \partial^\tau F_\tau{}^\phi - \frac{1}{2} \partial_\phi \partial^\tau F_\tau{}^\phi = 0$$

Logo, ficamos com:

$$\partial_\rho \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} = a^2 \partial_\rho \partial^\rho \partial^\tau F_\tau{}^\mu = a^2 \square \partial^\nu F_\nu{}^\mu = a^2 \square \partial_\nu F^{\nu\mu}, \quad (\text{A.17})$$

onde \square é o operador D'Alembertiano. De acordo com (A.3) $\eta^{00} = +1$; $\eta^{i0} = \eta^{0i} = 0$; $\eta^{ii} = -1$; $\eta^{ik} = 0$ para $i \neq k$. Então:

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2,$$

onde ∇^2 é o Laplaciano e $\eta^{\mu\nu}$ é o inverso da métrica de Minkowski.

Substituímos (A.15), (A.16) e (A.17) em (A.13):

$$-\partial_\nu (-F^{\nu\mu}) + a^2 \square \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0,$$

ou seja,

$$(1 + a^2 \square) \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0. \quad (\text{A.18})$$

que é uma das equações de movimento da eletrodinâmica de Podolsky – Eq. (A.18).

A segunda equação da Eletrodinâmica Generalizada é:

$$\partial_{[\mu} F_{\rho\sigma]} = 0. \quad (\text{A.19})$$

logaritmo (A.19) é a mesma que (A.10): como a definição de $F^{\mu\nu}$ para Podolsky é a mesma de Maxwell, a identidade de Bianchi permanece válida.

APÊNDICE B – CONSIDERAÇÕES SOBRE UM GÁS DE FÓTONS

Este apêndice apresenta o método para passar de uma estatística discreta de partículas não relativísticas para o regime contínuo de partículas relativísticas. É sabido que o fóton apresenta uma distribuição de energia contínua e por isso, é necessário conhecer essa passagem para completar o estudo proposto no presente trabalho.

A partir de agora vamos supor uma partícula não relativística com uma momento \mathbf{p} , e em determinado instante localizada em uma posição \mathbf{r} confinada em um recipiente de volume V . É necessário fazer uma análise do número de estados quânticos possíveis s e suas energias correspondentes ε_s , para cada partícula não interagente. Para isso, iremos desconsiderar por enquanto o efeito das paredes deste recipiente. Utilizando o formalismo da mecânica quântica podemos relacionar essa partícula à sua função de onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$ para posteriormente podermos fazer uso da equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H\Psi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{B.1})$$

onde H é o Hamiltoniano da partícula. Considerando que não há nenhuma força atuando sobre a partícula em questão, a energia potencial será nula e o Hamiltoniano será somente a contribuição da energia cinética (REIF, 2009):

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 = -\frac{1}{2m} \hbar^2 \nabla^2, \quad (\text{B.2})$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano, no espaço euclidiano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{B.3})$$

Usando o *ansatz* e logaritmo (B.2):

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.4})$$

no logaritmo (B.1), onde ω é a frequência, obtemos:

$$-\frac{2m\omega}{\hbar} \psi(\mathbf{r}) = \nabla^2 \psi(\mathbf{r}).$$

Usando (2.1), temos como resultado uma equação de Schrödinger independente do tempo, onde $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$ e $\psi = \psi(\mathbf{r})$, para $\varepsilon = \hbar\omega$:

$$-\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \psi = \nabla^2 \psi, \quad (\text{B.5})$$

ou

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (\text{B.6})$$

logaritmo (B.6) é uma equação de onda e tem soluções da forma mais geral do tipo:

$$\psi = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (\text{B.7})$$

onde \mathbf{k} é o vetor de onda e A é uma constante. Substituindo (B.7) em (B.6), temos:

$$\nabla^2 (Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) + \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0, \quad (\text{B.8})$$

considerando (B.3):

$$A \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}) + \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z}) = \\ & = (ik_x)^2 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} + (ik_y)^2 e^{ik_x x} e^{ik_z z} + (ik_z)^2 e^{ik_x x} e^{ik_y y}, \end{aligned}$$

assim,

$$0 = A \left[(ik_x)^2 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} + (ik_y)^2 e^{ik_x x} e^{ik_z z} + (ik_z)^2 e^{ik_x x} e^{ik_y y} \right] + \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$0 = \left[(ik_x)^2 + (ik_y)^2 + (ik_z)^2 \right] Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$0 = - \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right) Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B.9})$$

$$0 = - \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right) \psi + \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \psi \quad (\text{B.10})$$

A função de onda (B.7) não pode se anular dentro do recipiente em que a partícula está, por isso podemos dividir o logaritmo (B.9) por ψ :

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2, \quad (\text{B.11})$$

por isso, pode-se concluir que a energia ε é função apenas da magnitude do vetor de onda, $k \equiv |\mathbf{k}|$.

Sabendo que:

$$\mathbf{p}\psi = \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \psi = A \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$\mathbf{p}\psi = A\hbar \left[(k_x) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + (k_y) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + (k_z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]$$

$$\mathbf{p}\psi = \hbar\mathbf{k}\psi.$$

ou

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad (\text{B.12})$$

que é a relação de de Broglie. Tanto (B.11) quanto (B.12) são obtidos do fato que ψ deve satisfazer a equação de Schrödinger (B.1).

O próximo passo é considerar como o estado de cada fóton é especificado. Consideremos a eletrodinâmica de Maxwell. Como estamos lidando com uma onda eletromagnética, o campo elétrico \mathbf{E} deve satisfazer uma equação do tipo onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (\text{B.13})$$

O conjunto de soluções para ondas planas é dado por:

$$\mathbf{E} = B e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.14})$$

onde B é uma constante e \mathbf{E}_0 satisfaz a equação de onda independente

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}_0 = 0, \quad (\text{B.15})$$

o que concluímos após substituir (B.14) em (B.13). Sabemos que o vetor de onda satisfaz as condições:

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad k \equiv |\mathbf{k}|. \quad (\text{B.16})$$

Inserindo (B.14) na lei de Gauss no vácuo, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, concluímos que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Assim, o campo elétrico deve ser transversal ao vetor de onda (REIF, 2009). Portanto, para cada \mathbf{k} teremos duas possibilidades para a direção do campo elétrico, sabendo que este deve ser perpendicular à \mathbf{k} , existem dois possíveis fótons correspondentes às duas possibilidades de polarização de \mathbf{E} .

Entretanto, não são todos os valores do vetor de onda que são possíveis, apenas alguns valores discretos que dependem das condições de contorno. Iremos agora considerar um recipiente cúbico de lado L , ou seja, o volume V é igual a L^3 . Assumindo que $L \gg \lambda$, i.e., o lado será muito maior que o comprimento de onda, para $\lambda = 2\pi/k$. Fora desse recipiente não poderá haver partícula, assim, $x \in [0, L]$, $y \in [0, L]$ e $z \in [0, L]$. Portanto, a função de onda ψ deverá satisfazer as condições (REIF, 2009):

$$\begin{cases} \psi(0, y, z) = \psi(L, y, z) = 0, \\ \psi(x, 0, z) = \psi(x, L, z) = 0, \\ \psi(x, y, 0) = \psi(x, y, L) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Considerando a função de onda espacial (B.7), podemos checar as condições acima impostas:

$$\psi(0, y, z) = A e^{i(k_y y + k_z z)} \quad (\text{B.18})$$

e

$$\psi(L, y, z) = A e^{i(k_x L + k_y y + k_z z)}, \quad (\text{B.19})$$

então

$$Ae^{i(k_y y + k_z z)} = Ae^{ik_y y + ik_z z} e^{ik_x L} \Rightarrow 1 = e^{ik_x L} .$$

Usando a equação de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

para $\theta = k_x L$, temos

$$1 = \cos(k_x L) + i \sin(k_x L),$$

a qual é verdadeira se:

$$\cos(k_x L) = 1 \tag{B.20}$$

e

$$i \sin(k_x L) = 0. \tag{B.21}$$

Essas equações são satisfeitas para:

$$k_x L = 2\pi n_x, \tag{B.22}$$

onde n_x são valores inteiros $n_x = 0, 1, 2, 3, \dots$

Consideramos sempre números inteiro positivos para que as ondas estejam sempre propagando no eixo x positivo. Um raciocínio análogo vale para as outras direções espaciais. Assim:

$$\begin{cases} k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \\ k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \\ k_z = \frac{2\pi}{L} n_z. \end{cases} \tag{B.23}$$

A variação das componentes do vetor onda será:

$$\begin{cases} \Delta k_x = \frac{2\pi}{L} \Delta n_x, \\ \Delta k_y = \frac{2\pi}{L} \Delta n_y, \\ \Delta k_z = \frac{2\pi}{L} \Delta n_z. \end{cases} \tag{B.24}$$

No limite termodinâmico, V é muito grande. Logo, $L \gg 1$ e, então:

$$\Delta k_x \ll 1.$$

Isso justifica passarmos aos infinitésimos:

$$\begin{cases} dk_x \rightarrow \frac{2\pi}{L} \Delta n_x, \\ dk_y \rightarrow \frac{2\pi}{L} \Delta n_y, \\ dk_z \rightarrow \frac{2\pi}{L} \Delta n_z; \end{cases} \tag{B.25}$$

ou seja, para um pequeno intervalo \mathbf{k} e $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$, temos:

$$\Delta n_x \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi} \right) dk_x.$$

Nesse ponto é possível reconhecer o número de estados transladados $\rho(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}$ para cada vetor de onda. Dessa forma:

$$\rho(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{L^3}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{k}, \quad (\text{B.26})$$

onde $d^3\mathbf{k}$ é um elemento do espaço \mathbf{k} . A densidade de estados ρ é independente de \mathbf{k} e proporcional ao volume, i.e., o número de estados por unidade de volume é independente do tamanho ou da geometria deste volume V .

Sabendo que $f(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}$ é o número médio de fótons por unidade de volume, com *uma* direção específica de polarização e considerando logaritmo (B.26), existem $(2\pi)^{-3} d^3\mathbf{k}$ estados fotônicos de um tipo por unidade de volume. Usando (2.10) podemos garantir, depois de toda a argumentação acima, que a passagem de um regime discreto para o contínuo ocorre da seguinte maneira:

$$\ln Z(\varepsilon) = - \sum_{\varepsilon_s} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_s}) \rightarrow \ln Z(p) = -g_N V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\mathbf{p}}), \quad (\text{B.27})$$

sendo g_N o número de graus de liberdade internos do fóton. logaritmo (B.27) é a relação (2.11) do Capítulo 2.

APÊNDICE C – INTEGRAIS IMPORTANTES

C.1 INTEGRAL NA FORMA $\int_0^\infty p^2 \ln(1 - e^{-\beta p}) dp$

Rescrevemos a integral

$$\int_0^\infty p^2 \ln(1 - e^{-\beta p}) dp$$

da seguinte forma:

$$\int_0^\infty p^2 \ln(1 - e^{-\beta p}) dp = \frac{1}{3} \int_0^\infty d(p^3) \ln(1 - e^{-\beta p}).$$

Aplicamos integração por partes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_0^\infty d(p^3) \ln(1 - e^{-\beta p}) &= \left[\frac{p^3}{3} \ln(1 - e^{-\beta p}) \right]_0^\infty + \\ &\quad - \frac{1}{3} \int_0^\infty p^3 \frac{\beta}{(e^{\beta p} - 1)} dp, \end{aligned}$$

onde o primeiro termo é zero aplicando os limites de integração. Logo,

$$\frac{1}{3} \int_0^\infty d(p^3) \ln(1 - e^{-\beta p}) = -\frac{1}{3} \int_0^\infty p^3 \frac{\beta}{(e^{\beta p} - 1)} dp.$$

Fazemos com que $s = \beta p$, assim:

$$\frac{1}{3} \int_0^\infty d(p^3) \ln(1 - e^{-\beta p}) = -\frac{1}{3\beta^3} \int_0^\infty \frac{s^3}{(e^s - 1)} ds.$$

Usamos a relação entre a função Gama $\Gamma(z)$ e a função zeta de Riemann $\zeta(z)$ ([GRADSHTEYN; RYZHIK; TABLES, 1965](#)):

$$\Gamma(z) \zeta(z) = \int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{(e^s - 1)} ds \quad (\Re(z) > 1),$$

para $z = 4$, temos:

$$\frac{1}{3} \int_0^\infty d(p^3) \ln(1 - e^{-\beta p}) = -\frac{1}{3\beta^3} \Gamma(4) \zeta(4).$$

Usamos a definição da função Gama ([GRADSHTEYN; RYZHIK; TABLES, 1965](#)):

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\Re(z) > 0), \quad (\text{C.1})$$

encontrando depois da aplicação de várias integrais por partes o seguinte resultado:

$$\Gamma(4) = \int_0^\infty e^{-t} t^3 dt = 6.$$

Assim,

$$\frac{1}{3} \int_0^\infty d(p^3) \ln(1 - e^{-\beta p}) = -\frac{1}{3\beta^3} 6\zeta(4). \quad (\text{C.2})$$

Usamos a definição da função zeta de Riemann ([GRADSHTEYN; RYZHIK; TABLES, 1965](#)):

$$\zeta(z) = \frac{1}{(1 - 2^{1-z}) \Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt, \quad (\Re(z) > 0) \quad (\text{C.3})$$

assim, para $z = 4$, temos:

$$\begin{aligned} \zeta(4) &= \frac{1}{(1 - 2^{-3}) 6} \int_0^\infty \frac{t^3}{e^t + 1} dt \\ \zeta(4) &= \frac{4}{21} \int_0^\infty \frac{t^3}{e^t + 1} dt = \frac{4}{21} \frac{7\pi^4}{120} \\ \zeta(4) &= \frac{4}{21} \int_0^\infty \frac{t^3}{e^t + 1} dt = \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Substituindo (C.4) em (C.2):

$$\frac{1}{3} \int_0^\infty d(p^3) \ln(1 - e^{-\beta p}) = -\frac{\pi^4}{45\beta^3}. \quad (\text{C.5})$$

C.2 INTEGRAL NA FORMA $\int_0^\infty p^2 e^{-k\beta\sqrt{p^2+m^2}} dp$

Para deduzirmos a contribuição de Podolsky na sua forma integral, é necessário aprender como manipular a seguinte integral ([MEDEIROS, 2007](#)):

$$I_e = \int_0^\infty p^2 e^{-k\beta\sqrt{p^2+m^2}} dp. \quad (\text{C.6})$$

Primeiramente, essa integral vem da seguinte:

$$I = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-k\beta\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}},$$

que pode ser reescrita em coordenadas esféricas em forma de integral tripla da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_x dp_y dp_z e^{-k\beta\sqrt{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+m^2}} \\ I &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty p^2 e^{-k\beta\sqrt{p^2+m^2}} \sin\phi dp d\phi d\theta \\ I &= \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi(2) \int_0^\infty p^2 e^{-k\beta\sqrt{p^2+m^2}} dp \\ I &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 e^{-k\beta\sqrt{p^2+m^2}} dp. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Agora vamos chamar a integral que sobrou de uma função de β e m , pois essa integração acontece em p e por isso, o resultado será alguma $f(\beta, m)$. Então,

$$I = \frac{1}{2\pi^2} f(\beta, m),$$

onde

$$f(\beta, m) \equiv \int_0^\infty p^2 e^{-k\beta\sqrt{p^2+m^2}} dp. \quad (\text{C.8})$$

Esse foi o primeiro passo para entender e tentar manipular a integral.

Segundo passo é determinar quem é $f(\beta, m)$ e para isso vamos investigar e manipular a função de Bessel modificada na sua forma integral, pois ela assemelha-se muito com a integral cuja solução queremos buscar. A função de Bessel modificada é dada por (GRADSHTEYN; RYZHIK; TABLES, 1965):

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty \frac{e^{-zx} (x^2 - 1)^\nu}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

Iremos fazer a troca de variáveis:

$$x = \sqrt{\frac{t^2}{m^2} + 1} \Rightarrow dx = \frac{t}{m^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{m^2} + 1}} dt.$$

Substituindo isso em $K_\nu(z)$, temos:

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{\frac{t^2}{m^2}+1}} \left(\frac{t^2}{m^2} + 1 - 1\right)^\nu}{\sqrt{\frac{t^2}{m^2} + 1 - 1}} \frac{t}{m^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{m^2} + 1}} dt \\ K_\nu(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{\frac{t^2}{m^2}+1}} \left(\frac{t^2}{m^2}\right)^\nu}{\frac{t}{m}} \frac{t}{m^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{m^2} + 1}} dt \\ K_\nu(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-z\sqrt{\frac{t^2}{m^2}+1}} \frac{t^{2\nu}}{m^{2\nu}} \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{m^2} + 1}} dt. \end{aligned}$$

Observe que os limites de integração mudam quando fazemos essa troca de variáveis.

Fazendo $z \equiv \beta m$, temos:

$$K_\nu(\beta m) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{\beta m}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-\beta m \sqrt{\frac{t^2}{m^2}+1}} \frac{t^{2\nu}}{m^{2\nu}} \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{m^2} + 1}} dt.$$

Assim:

$$\begin{aligned} K_\nu(\beta m) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{\beta m^2}{2m}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}} \frac{t^{2\nu}}{m^{2\nu}} \frac{1}{\sqrt{t^2 + m^2}} dt \\ K_\nu(\beta m) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{\beta}{2m}\right)^\nu m^{2\nu} \int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}} \frac{t^{2\nu}}{m^{2\nu}} \frac{1}{\sqrt{t^2 + m^2}} dt \\ K_\nu(\beta m) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{\beta}{2m}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2 + m^2}} t^{2\nu} dt. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

O terceiro passo para resolver a integral (C.6) é derivar logaritmo (C.9) em relação a β :

$$\begin{aligned} \frac{dK_\nu(\beta m)}{d\beta} &= \frac{\sqrt{\pi}\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\beta}{2m}\right)^{\nu-1} \left(\frac{1}{2m}\right) \int_0^\infty \frac{e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}} t^{2\nu} dt \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\beta}{2m}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}} t^{2\nu} (-\sqrt{t^2+m^2}) dt \\ \frac{dK_\nu(\beta m)}{d\beta} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \underbrace{\nu \left(\frac{\beta}{2m}\right)^{\nu-1} \left(\frac{\beta}{2m}\right)}_{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^\nu} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}} t^{2\nu} dt \\ &\quad - \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\beta}{2m}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}} t^{2\nu} dt. \end{aligned}$$

Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{dK_\nu(\beta m)}{d(\beta m)} \frac{d(\beta m)}{d\beta} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \frac{\nu}{\beta} \left(\frac{\beta}{2m}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}} t^{2\nu} dt \\ &\quad - \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\beta}{2m}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}} t^{2\nu} dt, \end{aligned}$$

para obtermos algo parecido com a integral que estamos estudando, Eq. (C.6), ν tem que valer 1. Assim,

$$m \frac{dK_1(\beta m)}{d(\beta m)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \frac{\nu}{\beta} \left(\frac{\beta}{2m}\right) \int_0^\infty \frac{e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}} t^2 dt - \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\beta}{2m}\right) \int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}} t^2 dt.$$

Fixando $\nu = 1$ na Eq. (C.9) e comparando com o que temos acima concluímos que:

$$\boxed{m \frac{dK_1(\beta m)}{d(\beta m)} = \frac{1}{\beta} K_1(\beta m) - \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\beta}{2m}\right) \int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}} t^2 dt.} \quad (\text{C.10})$$

Para rescrever a integral do lado direito de (C.10), usaremos a função Gama (também chama de função fatorial). Por definição (GRADSHTEYN; RYZHIK; TABLES, 1965):

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\Re(z) > 0),$$

que, assim como o fatorial, satisfaz a propriedade:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

Na Eq. (C.10) aparece $\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)$, por isso $z = \frac{1}{2}$. Então:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad (\text{C.11})$$

onde

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Pela substituição de variáveis $t = u^2$, temos que $dt = \frac{1}{2}u du$ e, obviamente, $\sqrt{t} = u$. Assim:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u} \frac{1}{2} u du \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u^2} du,\end{aligned}\tag{C.12}$$

que é similar à *integral de Gauss*,

$$I_G \equiv \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du .$$

Como e^{-u^2} é uma função simétrica com respeito à origem $u = 0$, a integral de Gauss pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}I_G &= 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du \\ I_G^2 &= 4 \left(\int_0^\infty e^{-u^2} du \right) \left(\int_0^\infty e^{-u^2} du \right) \\ I_G^2 &= 2 \left(\int_0^\infty e^{-u^2} du \right) \left(\int_0^\infty e^{-w^2} dw \right) \\ I_G^2 &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2-w^2} dudw \\ I_G^2 &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+w^2)} dudw,\end{aligned}$$

em coordenadas polares $r^2 = u^2 + w^2$, onde o Jacobiano é $rdrd\theta$. Logo,

$$I_G^2 = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta,$$

por substituição simples chamando $y = -r^2$, temos $dy = -2rdr$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{I_G^2}{2} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{-\infty} e^y dy d\theta \\ \frac{I_G^2}{2} &= -\frac{1}{2} (2\pi) \left(e^{-r^2} \right)_0^\infty \\ \frac{I_G^2}{2} &= -\pi (0 - 1) \\ \frac{I_G^2}{2} &= \pi,\end{aligned}$$

i.e.,

$$I_G = 2\sqrt{\pi}.\tag{C.13}$$

Substituindo o resultado da função erro (C.13) em (C.12):

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} 2\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}\tag{C.14}$$

Substituindo (C.14) em (C.11):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\tag{C.15}$$

Substituindo o valor da nossa função Gama C.15 na nossa função modificada de Bessel, Eq. (C.10):

$$\begin{aligned} m \frac{dK_1(\beta m)}{d(\beta m)} &= \frac{1}{\beta} K_1(\beta m) - \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\beta}{2m} \right) \int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}} t^2 dt \\ \frac{dK_1(\beta m)}{d(\beta m)} &= \frac{1}{\beta m} K_1(\beta m) - \left(\frac{\beta}{m} \right) \frac{1}{m} \int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t^2+m^2}} t^2 dt. \end{aligned}$$

É possível reconhecer no segundo termo depois da igualdade a integral que estávamos à procura [vide (C.8)]. Então,

$$\boxed{\frac{dK_1(\beta m)}{d(\beta m)} = \frac{1}{\beta m} K_1(\beta m) - \left(\frac{\beta}{m} \right) \frac{1}{m} f(\beta, m)}. \quad (\text{C.16})$$

Para continuarmos as contas, precisaremos lançar mão das relações de recorrência das funções modificadas de Bessel (ARFKEN; WEBER, 2007):

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = \frac{-2\nu}{x} K_\nu(x), \quad (\text{C.17})$$

e

$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2\nu \frac{dK_\nu(x)}{dx}. \quad (\text{C.18})$$

Para $\nu = 1$, a Eq. (C.18) tomará a seguinte forma:

$$K_0(x) + K_2(x) = \frac{-2}{x} \frac{dK_1(x)}{dx},$$

onde $x \equiv \beta m$, na nossa notação, assim:

$$\begin{aligned} K_0(\beta m) + K_2(\beta m) &= -2 \frac{dK_1(\beta m)}{d(\beta m)} \\ \frac{dK_1(\beta m)}{d(\beta m)} &= \frac{-K_0(\beta m) - K_2(\beta m)}{2}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Igualando as Eqs. (C.16) e (C.19):

$$\frac{-K_0(\beta m) - K_2(\beta m)}{2} = \frac{1}{\beta m} K_1(\beta m) - \left(\frac{\beta}{m} \right) \frac{1}{m} f(\beta, m) \quad (\text{C.20})$$

Agora reescrevendo a Eq. (C.17) com $\nu = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{-K_0(\beta m)}{2} + \frac{K_2(\beta m)}{2} &= \frac{K_1(\beta m)}{\beta m} \\ \frac{K_2(\beta m)}{2} &= \frac{K_1(\beta m)}{\beta m} + \frac{K_0(\beta m)}{2}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Substituindo (C.21) em (C.20):

$$\begin{aligned} \frac{-K_0(\beta m)}{2} - \frac{1}{\beta m} K_1(\beta m) + \left(\frac{\beta}{m} \right) \frac{1}{m} f(\beta, m) &= \frac{K_2(\beta m)}{2} \\ \frac{-K_0(\beta m)}{2} - \frac{1}{\beta m} K_1(\beta m) + \left(\frac{\beta}{m} \right) \frac{1}{m} f(\beta, m) &= \frac{K_1(\beta m)}{\beta m} + \frac{K_0(\beta m)}{2} \\ -\frac{K_0(\beta m)}{2} - \frac{K_0(\beta m)}{2} + \left(\frac{\beta}{m^2} \right) f(\beta, m) &= \frac{K_1(\beta m)}{\beta m} + \frac{K_1(\beta m)}{\beta m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-K_0(\beta m) + \left(\frac{\beta}{m^2}\right) f(\beta, m) &= 2 \frac{K_1(\beta m)}{\beta m} \\
\frac{K_0(\beta m)}{2} + \frac{K_1(\beta m)}{\beta m} &= \frac{1}{2\beta m} \left(\frac{\beta^2}{m}\right) f(\beta, m).
\end{aligned}$$

Pela Eq. (C.21):

$$\begin{aligned}
\frac{K_2(\beta m)}{2} &= \frac{1}{2\beta m} \left(\frac{\beta^2}{m}\right) f(\beta, m) \\
K_2(\beta m) &= \left(\frac{\beta}{m^2}\right) f(\beta, m) \\
f(\beta, m) &= K_2(\beta m) \left(\frac{m^2}{\beta}\right). \tag{C.22}
\end{aligned}$$

Com várias manipulações algébricas e conhecimentos de física matemática, foi possível manipular uma função especial e encontrar uma primitiva analítica para um integral sem solução tabelada.

Assim, a integral (C.6), ficará considerando um k qualquer, onde $k \in \mathbb{R}^*$, juntamente com βm :

$$\begin{aligned}
I_e &= \int_0^\infty p^2 e^{-k\beta\sqrt{p^2+m^2}} dp = K_2(k\beta m) \left(\frac{m^2}{k\beta}\right) \\
I_e &= \beta m^4 K_2(k\beta m) \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\beta^2 m^2}\right) \\
I_e &= \beta m^4 \frac{1}{k} \frac{K_2(k\beta m)}{(\beta m)^2}. \tag{C.23}
\end{aligned}$$