

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

DANILO JOSÉ DE LIMA

**MONOPOLOS MAGNÉTICOS NA  
ELETRODINÂMICA DE ORDEM  
SUPERIOR**

Poços de Caldas/MG  
2018

DANILO JOSÉ DE LIMA

MONOPOLOS MAGNÉTICOS NA  
ELETRODINÂMICA DE ORDEM  
SUPERIOR

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alfenas.

Área de concentração: Física de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Cássius Anderson Miquele de Melo.

Poços de Caldas/MG  
2018

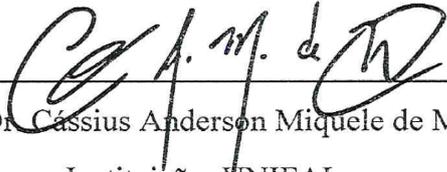
**DANILO JOSÉ DE LIMA**

**MONOPOLOS MAGNÉTICOS NA  
ELETRODINÂMICA DE ORDEM SUPERIOR**

A banca examinadora abaixo-assinada,  
aprova a Dissertação apresentada como  
parte dos requisitos para obtenção do  
título de mestre em Física, pelo  
Programa de Pós-Graduação em Física  
da Universidade Federal de Alfenas.

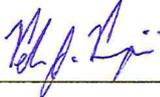
Área de Concentração: Física de  
Partículas e Campos

Aprovada em: 13 de setembro de 2018.



---

Prof. Dr. Cassius Anderson Miquelle de Melo  
Instituição: UNIFAL



---

Prof. Dr. Pedro José Pompéia  
Instituição: ITA



---

Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto  
Instituição: UNIFAL

Dedico este trabalho a minha companheira  
Udélis, minha família, meus amigos e à todas  
as pessoas curiosas.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha companheira que muito me ajudou, incentivou e acreditou em mim, que teve paciência e muito se esforçou para que se tornasse possível esta obra, pois sem seu carinho e compreensão não chegaria aqui. Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Cássius Anderson Miquele de Melo, pela sua grande paciência, dedicação e disponibilidade. Sem dúvida ele foi o verdadeiro responsável pelo meu desenvolvimento, por abrir portas para um novo mundo na física e que instiga a minha curiosidade.

Meus agradecimentos também vão aos coordenadores da escola EliteCol e pré vestibular onde trabalho, que me ajudaram nessa empreitada, e em particular agradeço ao Felipe por poucas, mas assertivas palavras, pelo esforço em possibilitar um horário de trabalho que maximizasse minha disponibilidade para os estudos. Agradeço também à direção, pois dela veio a contribuição logística para realizar esta obra. Agradeço aos amigos no trabalho por conversas, seja na área da física ou na área motivacional, com os quais pude tirar energia para prosseguir. Aos companheiros que, estando em situação análoga, foram firmes e serviram como inspiração para que eu continuasse nessa empreitada.

Agradeço também aos membros do Programa de Pós-Graduação em Física, em especial aos docentes que ministraram as aulas que contribuíram à minha formação e principalmente àqueles que contribuíram diretamente com o desenvolvimento do presente trabalho, sendo eles o Prof. Dr. Fernando Gonçalves Gardim, Prof. Dr. Cássius Anderson Miquele de Melo e o Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto. Também agradeço aos amigos que conheci nesta jornada, aos funcionários desta instituição que permitem que tudo isso seja possível e a todas as pessoas que de alguma forma estão ligadas à instituição.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à minha família, que possibilitou chegar até aqui, em especial aos meus pais Maria e José que permitiram que eu tivesse acesso ao ensino superior e que acreditaram em mim. Ao meu pai que me ajudou financeiramente em minha graduação e que talvez seja o responsável, mesmo que não tenha consciência disso, de ter plantado em mim a vontade de querer saber mais e mais sobre como as coisas no mundo funcionam.

Heinrich Heine

*“Assim perguntamos sem parar,  
Até um punhado de terra  
Cobrir a nossa boca  
Mas isso será uma resposta?”*

## RESUMO

As equações de Maxwell formam um paradigma que descrevem bem os fenômenos elétricos e magnéticos na física clássica. Duas equações de Maxwell podem ser obtidas a partir da invariância de calibre, impondo uma dependência entre o campo elétrico e magnético: impomos uma dependência entre o campo elétrico e os potenciais vetor e escalar e uma dependência entre o campo magnético e o potencial vetor. Outro par de equações de Maxwell podem ser obtidas a partir da lagrangiana de Maxwell. As equações de Maxwell possuem uma propriedade de simetria discreta entre os campos elétrico e magnético quando trabalhamos com as equações para o vácuo e uma simetria contínua entre campo magnético e elétrico desde que as equações sejam modificadas introduzindo o conceito de cargas e correntes magnéticas. Se propormos uma mudança na lagrangiana, tornando-a dependente também de derivadas do tensor de Faraday, obtemos as equações da dita eletrodinâmica de Podolsky. Estas equações não preservam a simetria entre propriedades magnéticas e elétrica tal qual as equações de Maxwell. Nossa proposta aqui é procurar uma simetria dual generalizada na eletrodinâmica de Podolsky que preserve tanto a simetria de calibre quanto a dual, tal como existe na eletrodinâmica de Maxwell.

**Palavras-chave:** Eletrodinâmica de Podolsky. Eletrodinâmica de ordem superior. Equações de Maxwell. Simetria de Calibre. Monopolos magnéticos.

## ABSTRACT

Maxwell equations paradigm describes all electric and magnetic phenomena in classical physics. Two of Maxwell equations can be obtained from gauge invariance by imposing a dependence of electric and magnetic fields on the potential. The other pair of equations can be obtained from Maxwell's Lagrangian. Maxwell equations have a discrete symmetry involving electric and magnetic fields in vacuum and a continuous symmetry provided that the equations are modified by introducing the concept of magnetic currents and charges. If we change the Lagrangian, making it also dependent on the derivative of the Faraday tensor, one obtains the equations of Podolsky electrodynamics. Such equations do not preserve the dual symmetry between magnetic and electric fields. Our aim is to propose a generalized symmetry in Podolsky electrodynamics that preserves both symmetries gauge dual.

**Keywords:** Podolsky electrodynamics. High order electrodynamics. Maxwell equations. Gauge symmetry. Magnetic monopoles.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Quantização do momento angular . . . . .	26
Figura 2 – Esfera centrada em um monopolo magnético . . . . .	28
Figura 3 – Linha de Dirac . . . . .	29

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	ELETRODINÂMICA DE ORDEM SUPERIOR . . . . .	12
2.1	A eletrodinâmica de Maxwell . . . . .	12
2.2	A eletrodinâmica de Podolsky . . . . .	14
3	EQUAÇÕES DE MAXWELL . . . . .	17
3.1	Equações de Maxwell sem fontes . . . . .	17
3.2	Liberdade de calibre em Maxwell . . . . .	18
3.3	Simetria dual das equações de Maxwell . . . . .	20
4	SIMETRIA DUAL COM CARGAS MAGNÉTICAS . . . . .	24
4.1	Cargas magnéticas . . . . .	24
4.2	Potencial vetor para cargas magnéticas . . . . .	27
4.3	Simetria dual contínua das equações de Maxwell com fontes . . . . .	30
4.4	Equações de Maxwell na notação tensorial . . . . .	32
4.5	A lagrangiana de Maxwell . . . . .	37
4.6	Simetria dual contínua na notação tensorial . . . . .	38
5	ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY . . . . .	41
5.1	A eletrostática de Podolsky . . . . .	41
5.2	A lagrangiana de Podolsky . . . . .	42
5.3	Simetria dual no vácuo na eletrodinâmica de Podolsky . . . . .	44
5.4	Simetria dual na presença de cargas magnéticas . . . . .	47
5.5	Forma alternativa da simetria dual . . . . .	48
5.6	Hodge generalizado . . . . .	50
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	52
	REFERÊNCIAS . . . . .	54

## 1 INTRODUÇÃO

As equações de Maxwell formam um paradigma que descrevem bem os fenômenos elétricos e magnéticos na física clássica. Duas equações de Maxwell podem ser obtidas a partir da invariância de calibre, impondo uma dependência entre o campo elétrico e magnético: impomos uma dependência entre o campo elétrico e os potenciais vetor e escalar e uma dependência entre o campo magnético e o potencial vetor. Outro par de equações de Maxwell podem ser obtidas a partir da lagrangiana de Maxwell.

As equações de Maxwell possuem uma propriedade de simetria discreta entre os campos elétrico e magnético quando trabalhamos com as equações para o vácuo e uma simetria contínua entre campo magnético e elétrico desde que as equações sejam modificadas introduzindo o conceito de cargas e correntes magnéticas.

As equações de Maxwell envolvem derivadas de primeira ordem para os campos magnético e elétrico ou de segunda ordem para os potenciais vetor e escalar sendo a abordagem mais tradicional, como se observa diversas bibliografias (GRIFFITHS, 1999; HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2003; PANOFSKY; PHILLIPS, 2005; REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982). As eletrodinâmicas que descrevem as relações entre grandezas magnéticas e elétricas utilizando derivadas de ordens maiores são chamadas de eletrodinâmicas de ordem superior, e geralmente tratadas em cursos de pós graduação, tal como (FRENKEL, 2005). Normalmente, mesmo em cursos de pós graduação não é comum serem tratadas equações diferenciais de ordem superior, mesmo em livros tradicionais tais como em (JACKSON, 2012; LANDAU; LIFSHITZ, 2004).

Vamos estudar um caso que envolve derivadas de terceira ordem para os campos elétrico e magnético ou quarta ordem para os potenciais vetor e escalar. Em particular, esta eletrodinâmica foi estudada e proposta por Podolsky (PODOLSKY, 1942) e por esta razão chamaremos de eletrodinâmica de Podolsky.

Vamos estudar a eletrodinâmica de Maxwell, verificar que ela possui uma simetria dual contínua que relaciona os campos magnéticos e elétricos quando estivermos trabalhando com as equações no vácuo e, quando reescrita em notação tensorial, veremos que as mesmas equações de Maxwell possuem simetria dual contínua agora para uma transformação que relaciona os tensores de Faraday e um o Hodge. Para termos simetrias nas equações de Maxwell na presença de cargas deveremos introduzir a noção de monopolos magnéticos, proposta pela primeira vez por Curie (CURIE, 1894) e desenvolvida em 1932 por Dirac (DIRAC, 1931) no qual ele relaciona a quantização da carga elétrica com a existência de monopolos magnéticos. Atualmente, sabemos que as GUT (*Grand Unification Theory* – Teorias da Grande Unificação) não só preveem a existência de cargas magnéticas no início da formação do universo como elas requerem que esses monopolos tenham existido, embora seja um consenso de que as energias envolvidas sejam muito grande e

portanto é pouco provável que sejam encontrados.

Tendo como norteador as equações de Maxwell, cujo desenvolvimento é feito há mais de um século, procuramos analisar as implicações da eletrodinâmica de Podolsky na quantização da carga elétrica, seguindo as ideias de Dirac, bem como procurar uma simetria contínua tal como faremos para Maxwell. Uma consequência necessária, que será mostrada no final deste trabalho, é que para mantermos as transformações das equações de Maxwell tal como as apresentadas na notação tensorial, devemos mudar a definição do Hodge, encontrando uma transformação única.

A busca na natureza por simetrias costumam fornecer-nos algumas implicações muito úteis, assim podemos dizer que o objetivo principal deste trabalho foi sendo modificado, mas acabou culminando por ser a procura de uma relação de simetria que mantém as transformações duais apresentadas para Maxwell, considerando um Hodge generalizado.

## 2 ELETRODINÂMICA DE ORDEM SUPERIOR

Se propormos uma mudança na lagrangiana de Maxwell de forma adequada, tornando-a dependente também de derivadas do tensor de Faraday, obtemos as equações da eletrodinâmica de Podolsky. Estas equações não preservam a simetria entre propriedades magnéticas e elétrica tal qual as equações de Maxwell.

A eletrodinâmica de Podolsky apresenta algumas vantagens em relação à eletrodinâmica de Maxwell, sem uma notável importância seria sua maior precisão. Como a diferença entre essas duas eletrodinâmicas é apenas um parâmetro  $a$  que, quando nulo, a eletrodinâmica de Podolsky se torna idêntica à eletrodinâmica de Maxwell, por esta razão torna-se importante conhecermos um pouco mais sobre a eletrodinâmica de Maxwell, que pode ser entendida um caso mais geral da eletrodinâmica de Podolsky.

Uma razão de não utilizarmos as equações de Podolsky no lugar das equações de Maxwell é a maior dificuldade que ela nos trás quando vamos aplicá-las, uma vez que ela envolve derivadas parciais de uma ordem a mais que as equações de Maxwell. Além disso, a eletrodinâmica de Podolsky, embora do ponto de vista teórico seja capaz de explicar algumas coisas de forma mais natural que a eletrodinâmica de Maxwell, ainda carece de resultados experimentais, enquanto as equações de Maxwell condiz muito bem com a experiência, principalmente em aplicações industriais e comerciais. Vamos então começar estudando a eletrodinâmica de Maxwell, desenvolvida há mais de 100 anos.

### 2.1 A eletrodinâmica de Maxwell

Podemos sintetizar os trabalhos realizados no estudo da eletricidade e do magnetismo até meados do século XIX em quatro equações que, na forma diferencial, se apresentam como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4)$$

A equação (1) é a Lei de Gauss, que relaciona o campo elétrico  $\mathbf{E}$  e a densidade de carga elétrica  $\rho$ , é uma implicação da Lei de Coulomb:

$$\mathbf{F} = q' \mathbf{E} \quad (5)$$

sendo

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad (6)$$

o campo elétrico  $\mathbf{E}$  produzido pela carga  $q$  a uma distância  $r$  desta. A carga  $q'$  é a carga de prova que sente uma força  $\mathbf{E}$ .

A Lei de Gauss para a carga elétrica pode ser escrita na forma integral: o fluxo total que atravessa uma superfície fechada que envolve a carga elétrica é proporcional à quantidade de carga elétrica no interior da superfície,  $q_{int}$ , ou seja:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q_{int}$$

sendo  $d\mathbf{S}$  o elemento da área em torno da qual estamos integrando.

Em todo este trabalho utilizaremos o sistema de unidades Gaussiano e neste caso  $4\pi\epsilon_0 = 1$  e  $\mu_0\epsilon_0 = c^{-2}$ .

A equação (2) surgiu devido à não observação de monopolos magnéticos, ou seja, a integral de superfície do fluxo magnético em torno de qualquer ponto é nula:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} d\tau = 0.$$

sendo  $d\tau$  um elemento de volume.

A não observação de monopolos magnéticos é muito antiga (ASSIS, 1995) sendo a lei de Coulomb datada do fim do século XVII (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2003). Por outro lado as Leis de Faraday e Ampère são mais recentes sendo que a primeira, equação (4), representa uma relação pura entre a variação do campo magnético e um campo elétrico e a segunda de uma relação entre uma densidade de corrente  $\mathbf{J}$  e um campo magnético, equação (3). Estas observações só foram possíveis depois da humanidade ser capaz de produzir correntes elétricas constantes e por tempo considerável com a invenção de pilhas (ASSIS, 1995), inclusive Ampère se interessou pela eletricidade depois de tomar conhecimento da experiência de Oersted que mostrava que uma bússola poderia ser desviada devido à presença de um fio percorrido por uma corrente elétrica.

Coube a Maxwell resumir as equações já conhecidas na sua forma diferencial como apresentadas nas equações de (1) à (3), bem como verificar que a última se encontrava incompleta. Sua incompletude fica mais fácil de perceber se imaginarmos um capacitor sendo carregado: pode-se verificar certa descontinuidade na corrente elétrica, entretanto mesmo na região entre as placas do capacitor, como por exemplo quando este está sendo

carregado, pode-se verificar a existência de um campo magnético. Concluiu-se então que a equação obtida por Ampère requer um termo a mais que deve ser proporcional à variação do campo elétrico na região entre as placas do capacitor ( $\partial \mathbf{E}/\partial t$ ) e este termo ficou conhecido como **corrente de deslocamento**.

A lei de Ampère corrigida fica então:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (7)$$

É interessante notar que na época em que foram formuladas as equações de Maxwell, confirmar experimentalmente a corrente de deslocamento seria algo bem improvável, uma vez que para que a corrente de deslocamento  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  seja da ordem de grandeza próxima às correntes usuais, a frequência da variação do campo elétrico deve ser da ordem de  $10^6 \text{ s}^{-1}$ . Apenas em 1888 que Hertz foi capaz de determinar experimentalmente as ondas eletromagnéticas sendo assim possível demonstrar a validade da equação Ampère-Maxwell (7) (ASSIS, 1995).

Temos então as quatro equações de Maxwell, na presença de cargas, inclusive com corrente de deslocamento, porém no vácuo, ou seja, sem interação com a matéria:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho & (a) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (b) \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} & (c) \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (d) \end{array} \right. \quad (8)$$

Observe que aqui algumas leis do eletromagnetismo estão implícitas (tais como a lei de Coulomb, Faraday-Newman, Ampère, Gauss e Biot-Savat) além da equação da continuidade para cargas elétricas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{J} \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

A ausência de cargas magnéticas na Lei de Faraday, equação (4), dado que não temos a corrente magnética tal como na equação de Ampère-Maxwell. Apenas por analogia, poderíamos dizer que o termo  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  seria o equivalente à corrente de deslocamento de Maxwell, porém agora se referindo a uma corrente magnética.

## 2.2 A eletrodinâmica de Podolsky

As equações de Maxwell (8) formam um conjunto de quatro equações diferenciais de primeira ordem para os campos elétrico e magnético. Chamamos de eletrodinâmica de ordem superior a eletrodinâmica que trabalha com equações diferenciais de ordem dois ou

mais para os campos elétricos e magnéticos sendo uma delas a eletrodinâmica de Podolsky (PODOLSKY, 1942) que propõe as seguintes equações diferenciais (que chamamos de equações de Maxwell modificadas):

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - a^2 \square) \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ (1 - a^2 \square) \left( \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (10)$$

sendo  $a$  uma constante e  $\square$  o operador D'Alembertiano

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (11)$$

Note que se  $a$  for nulo no sistema (10), recuperamos as equações de Maxwell. Sabemos que as equações de Maxwell apresentam grandes aplicações práticas e com bastante precisão, assim podemos inferir que esta constante deve ser pequena sendo a eletrodinâmica de Podolsky um refinamento da eletrodinâmica de Maxwell.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - a^2 \square) \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ (1 - a^2 \square) \left( \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{para } a \rightarrow 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \left( \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Em particular, se a distância envolvida no problema for  $d \gg a$ , recuperamos as equações de Maxwell. Este desenvolvimento será feito na seção 5.5, mas um desenvolvimento mais detalhado pode ser encontrado em (CUZINATTO; MELO; POMPEIA, 2007).

No caso eletrostático, o potencial elétrico de Podolsky pode ser inferido do potencial de Yukawa e generalizado para o caso eletrodinâmico e quando a distância entre cargas elétricas tendem a zero, a força entre elas tende a um valor finito igual a  $\frac{q_1 q_2}{2a^2}$ , diferindo da lei de Coulomb no qual a força tende a infinito quando a distância entre as cargas tende a zero (ACCIOLY; MUKAI, 1998). Apesar da eletrodinâmica de Maxwell funcionar muito bem em nosso cotidiano, em física de altas energias pode ser importante levar em conta a interação entre cargas a curtas distâncias, tornando importante o uso das equações da eletrodinâmica de Podolsky, pois apenas a pequenas distâncias a eletrodinâmica de Podolsky diverge do resultado da eletrodinâmica de Maxwell.

Esta eletrodinâmica de segunda ordem pôde explicar o fator 4/3 na teoria de Abrahaam-Lorentz, resultado este que a eletrodinâmica de Maxwell não explica naturalmente, sendo necessárias algumas hipóteses adicionais (FRENKEL, 1996; FRENKEL; SANTOS, 1999). A quantização da eletrodinâmica de Podolsky resultou em energia finita

para o fóton na aproximação a *1-loop* e é a única teoria de gauge  $U(1)$  de ordem dois com equações lineares. Estes resultados positivos que condizem com resultados experimentais e que em escala macroscópica recupera as equação de Maxwell servem de motivação para estudarmos tal eletrodinâmica (CUZINATTO; MELO; POMPEIA, 2007).

Veremos que o par de equações de Podolsky que não envolvem cargas elétricas podem ser obtidas da invariância de calibre, pois elas são idênticas às equações de Maxwell. O par de equações que envolvem cargas elétricas, e que por isso são modificadas na eletrodinâmica de Podolsky, serão obtidas a partir de uma lagrangiana, tal como será apresentado também para Maxwell.

### 3 EQUAÇÕES DE MAXWELL

Como já mencionado, as equações de Maxwell possuem grande conformidade com a experimentação e, por esta razão, se faz importante estudarmos elas primeiro. Veremos uma derivação das equações de Maxwell que não envolvem cargas elétricas a partir da invariância de calibre e do par que envolvem cargas elétricas a partir de uma lagrangiana. Deixaremos esta última para a seção seguinte onde introduziremos a notação tensorial e estudaremos a invariância das equações de Maxwell quando impusermos a existência de cargas elétricas.

#### 3.1 Equações de Maxwell sem fontes

As quatro equações de Maxwell no vácuo (sem densidade de cargas elétricas  $\rho$  e sem densidade de corrente elétrica  $\mathbf{J}$ ) expressam a relação entre campo magnético e campo elétrico no vácuo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & (a) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (b) \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (c) \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (d). \end{array} \right. \quad (12)$$

Podemos verificar, por exemplo, existência de ondas eletromagnéticas a partir deste conjunto de equações. Para verificar isso derivamos parcialmente em relação ao tempo a equação (12-c), substituímos no resultado encontrado a equação (12-d) e usamos a identidade

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

obtendo, com auxílio das equações (12-a) e (12-b), a relação:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow$$

$$\square \mathbf{E} = 0. \quad (13)$$

Isto é, o campo elétrico varia no espaço e no tempo obedecendo à equação de onda. Podemos fazer de forma similar para o campo magnético:

$$\square \mathbf{B} = 0. \quad (14)$$

Note que estamos trabalhando apenas no vácuo, isto é, as equações apresentadas em (12) são válidas apenas na ausência de fontes, bem como as equações acima.

### 3.2 Liberdade de calibre em Maxwell

Vamos trabalhar com as equações de campo apenas no “vácuo”, isto é, haverá cargas elétricas e magnéticas, mas não teremos interações como absorção, reflexão e outros fenômenos, ou seja, não precisamos nos preocupar com a interação com a matéria, permitindo-nos trabalhar apenas com os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Com base na definição do campo magnético  $\mathbf{B}$  a partir do potencial vetor  $\mathbf{A}$  e do campo elétrico a partir dos potenciais elétrico  $\phi$  e vetor  $\mathbf{A}$  podemos escrever:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (15)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (16)$$

Segundo o teorema de Helmholtz, um campo vetorial pode ser determinado se soubermos o seu rotacional e o seu divergente (FLEMING, 2001). Como o rotacional do potencial vetor é o campo indução magnética, sendo que este último pode ser determinado experimentalmente, restaria saber o seu divergente para que ele possa ser determinado completamente. Assim, podemos utilizar a condição do gauge de Lorenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (17)$$

e com isso  $\mathbf{A}$  fica determinado.

As equações (15) e (16) possuem uma liberdade para a escolha de quem é o potencial escalar  $\phi$  e o potencial vetor  $\mathbf{A}$ : a isso damos o nome de liberdade de calibre ou liberdade de gauge. Como exemplo, como o campo elétrico depende do gradiente do potencial escalar, é fácil verificar que se somarmos uma constante  $b$  ao potencial escalar, o campo elétrico não muda.

Na realidade, há uma liberdade para o potencial vetor também. Seja então um campo escalar  $\lambda$  qualquer, o potencial escalar e o potencial vetor podem ser trocados desde que se respeite a seguinte relação:

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \lambda. \end{cases} \quad (18)$$

No exemplo anterior, se escolhêssemos  $\lambda = -bt$  teríamos um caso em que se respeita a simetria de Gauge, pois

$$\mathbf{E} = -\nabla \left( \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-bt) \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla - bt) = -\nabla - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}$$

Tomemos o rotacional da (15) e substituindo (16), temos:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left( -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

que é a quarta equação de Maxwell. A segunda equação de Maxwell é facilmente obtida tomando o divergente do campo magnético em (16) e lembrando que o divergente de um rotacional é zero:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Podemos então dizer que as equações de Maxwell que não envolvem cargas elétricas possuem o que chamamos de simetria de calibre.

Em particular, podemos trabalhar no gauge de Lorenz e verificar que as relações apresentadas nas equações (15) e (16), bem como (17), estão em acordo com as equações de Maxwell. Vamos então escrever as equações de Maxwell, na presença de cargas elétricas, em função dos potenciais.

Começemos pela equação (8-a):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \Rightarrow \\ \nabla \cdot \left( -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 4\pi\rho \Rightarrow \\ -\nabla^2\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= 4\pi\rho \Rightarrow \\ -\nabla^2\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= 4\pi\rho \Rightarrow \\ \square\phi &= 4\pi\rho. \end{aligned} \tag{19}$$

A equação (8-b) é uma identidade, uma vez que o divergente de um rotacional é zero:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \tag{20}$$

Da equação (8-c) se obtém:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla\phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ -\nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \square \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{aligned} \tag{21}$$

Por fim, da equação (8-d) temos:

$$\begin{aligned}
 -\nabla \times \mathbf{E} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \\
 -\nabla \times \left( -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}). \tag{22}
 \end{aligned}$$

Esta última relação mostra que, de fato, a equação  $-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  condiz com as definições anteriores de potenciais escalar e vetor.

Podemos então resumir da seguinte maneira:

- as equações de Maxwell que não envolvem fontes (equações 8-b e 8-d) são consequências diretas da simetria de calibre;
- as equações de Maxwell que envolvem fontes (equações 8-a e 8-c) podem ser reescritas em função dos potenciais vetor e escalar. No caso de escolhermos a condição do gauge de Lorenz, elas podem ser escritas como apresentado nas equações (19) e (21).

Podemos ver que as equações de Maxwell são equações que envolvem derivadas de primeira ordem apenas dos campos elétricos e magnéticos, mas se introduzirmos os potenciais vetor e escalar, vemos que as equações de Maxwell passam a ter derivadas de segunda ordem dos potenciais vetor e escalar. Podemos escrever as equações (8-a) e (8-c) na eletrodinâmica de Podolsky e verificarmos que surgirão termos envolvendo derivadas de quarta ordem dos potenciais vetor e escalar. Este par de equações modificadas tornam-se

$$\begin{cases} (1 - a^2 \square) \square \phi = 4\pi \rho \\ (1 - a^2 \square) \square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{cases} \tag{23}$$

Vale lembrar que estamos trabalhando com as equações de Podolsky no gauge de Lorenz generalizado mas em outro gauge as equações podem ser diferentes, tais como o gauge de Coulomb e o gauge de radiação. No caso das equações de Podolsky, devemos trabalhar com um gauge generalizado, em particular (GALVAO; PIMENTEL, 1988) trabalha no gauge generalizado de Lorentz.

### 3.3 Simetria dual das equações de Maxwell

As equações de Maxwell sem fontes (12) possuem uma simetria conhecida como simetria dual que surge quando trocamos de forma adequada o campo magnético pelo

campo elétrico e o elétrico pelo magnético conforme:

$$\begin{cases} \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}. \end{cases} \quad (24)$$

Substituindo a relação discreta (24) nas equações de Maxwell sem fonte (12) voltamos a recuperá-las. Vejamos então:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot (-\mathbf{B}) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial (-\mathbf{B})}{\partial t} \\ -\nabla \times (-\mathbf{B}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{cases} \quad (25)$$

Recuperamos portanto as equações de Maxwell sem fontes (12), logo podemos ver que as equações de Maxwell possuem certa simetria com relação a uma troca discreta entre campos elétricos e magnéticos.

Mas o que esta simetria nos mostra afinal? Se estivermos trabalhando no vácuo, na ausência de cargas elétricas portanto, não podemos diferir o que é campo elétrico e o que é campo magnético. É como se perdêssemos a identidade de cada campo, não sabendo portanto qual a natureza de cada um. Isso no entanto não é surpreendente, afinal os estudos sobre campo elétrico e magnético surgiram do estudo de suas fontes (corpos eletrizados e materiais com propriedades magnéticas). Em outras palavras, nós identificamos o campo elétrico a partir da fonte de campo elétrico ou daquilo que interage de uma forma específica com o campo elétrico e o mesmo vale para fontes de campos magnéticos como ímãs.

Para exemplificar melhor, podemos dizer que um campo elétrico produz uma força em uma carga elétrica estática e um campo magnético produz uma força sobre uma fonte de campo magnético, tal como um ímã. Assim, podemos dizer que na matéria, essa simetria é perdida uma vez que podemos dizer quem é o campo elétrico e quem é o campo magnético.

Podemos no entanto ir um pouco além, ainda no vácuo, imaginando que se não podemos dizer quem é o campo elétrico e quem é o magnético, por que um certo campo não poderia ser, na realidade, uma mistura de outros dois campos que inicialmente chamamos de campos magnéticos e elétricos? Por exemplo, sejam as equações de Maxwell para o vácuo (12) e a seguinte transformação:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}' \cos \xi + \mathbf{B}' \sin \xi, \\ \mathbf{B} = -\mathbf{E}' \sin \xi + \mathbf{B}' \cos \xi. \end{cases} \quad (26)$$

Dizemos que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são campos que inicialmente chamamos de elétrico e magnético, ou melhor, que são campos elétrico e magnético respectivamente para um observador A. Em outra situação, dois outros campos  $\mathbf{E}'$  e  $\mathbf{B}'$  foram chamados de campos elétrico e magnético, respectivamente, segundo um outro observador B. Podemos apresentar uma relação entre eles: dizemos que o campo elétrico  $\mathbf{E}$  definido por um observador A é na verdade a mistura dos campos elétrico  $\mathbf{E}'$  e magnético  $\mathbf{B}'$  “visto” pelo outro observador B.

Tentemos substituir esta transformação nas equações de Maxwell no vácuo para ver o que vamos obter:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \xi \nabla \cdot \mathbf{E}' + \sin \xi \nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 \\ -\sin \xi \nabla \cdot \mathbf{E}' + \cos \xi \nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 \\ -\sin \xi \nabla \times \mathbf{E}' + \cos \xi \nabla \times \mathbf{B}' = \cos \xi \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \sin \xi \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \\ -\cos \xi \nabla \times \mathbf{E}' - \sin \xi \nabla \times \mathbf{B}' = -\sin \xi \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \cos \xi \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}; \end{array} \right.$$

multiplicando a primeira equação por  $\cos \xi$  e a segunda por  $-\sin \xi$  e somando ambas obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = 0; \quad (27)$$

multiplicando a primeira por  $\sin \xi$  e a segunda por  $\cos \xi$  e somando obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B}' = 0; \quad (28)$$

multiplicando a terceira equação por  $\cos \xi$  e a quarta por  $-\sin \xi$  e somando ambas obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t}; \quad (29)$$

e, por fim, multiplicando a terceira por  $\sin \xi$  e a quarta por  $\cos \xi$  e somando obtemos

$$-\nabla \times \mathbf{E}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}. \quad (30)$$

Note que as equações de número (27) a (30) são as equações de Maxwell sem fontes para o observador B. Podemos dizer que as equações de Maxwell se mantêm sob uma transformação contínua dos campos elétrico e magnéticos, pois elas são as mesmas, independentemente de quem sejam os campos elétrico e magnético. Podemos dizer, portanto,

que as equações de Maxwell no vácuo apresentam uma simetria dual contínua (e discreta para  $\xi = -\pi/2$ , como no caso abordado anteriormente).

Poderíamos tentar verificar se tal simetria existe na presença de cargas elétricas, no entanto, com base na discussão anterior, podemos argumentar que não existe, uma vez que na presença de cargas elétricas podemos dizer que ela identifica quem é o campo magnético e quem é o campo elétrico, pois ela interage de forma diferente com cada um dos campos.

Se tentarmos substituir (24) ou (26) em (8) não verificaremos uma simetria tal como obtida no item anterior. Isso porque apesar, da simetria entre os campos, teremos grandezas elétricas que não possuem correspondentes magnéticos: são eles as cargas elétricas e a densidade de corrente elétrica.

Por outro lado, se propusermos a existência de cargas magnéticas poderemos propor uma simetria entre cargas elétricas e magnéticas. Mas antes disso veremos um pouco sobre a proposta de existência monopolos magnéticos.

## 4 SIMETRIA DUAL COM CARGAS MAGNÉTICAS

A simetria dual nas equações de Maxwell é recuperada na presença de cargas elétricas se assumirmos a existência de cargas magnéticas (monopolos magnéticos) e a partir de agora chamaremos de carga magnética de  $q_m$  e carga elétrica de  $q_e$ . Como queremos estudar a simetria dual em eletrodinâmica de ordem superior, e neste caso também se faz necessário assumir a existência de tais monopolos, fica evidente a importância de se discutir quais as implicações teóricas para esta hipótese e nesta seção teremos uma breve discussão sobre a hipótese de existência de cargas magnéticas. Veremos como Dirac relacionou a existência de cargas magnéticas com uma possível explicação para a quantização da carga elétrica e também quais as complicações que esta hipótese traz para o potencial vetor.

### 4.1 Cargas magnéticas

Vimos que as equações de Maxwell possuem simetria dual discreta e contínua quando trabalhamos no vácuo. Se tentarmos impor uma simetria dual para as equações de Maxwell na presença de carga elétrica é fácil verificar que estas não possuem simetria, seja ela contínua ou discreta. Tentemos isso para o primeiro par de equações.

Fazendo a substituição da transformação dual contínua do sistema (26) nas equações (8-a) e (8-b) e procedemos com combinações lineares como anteriormente, encontramos:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{E}' \cos \xi + \mathbf{B}' \sin \xi) = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot (-\mathbf{E}' \sin \xi + \mathbf{B}' \cos \xi) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{E}' \cos^2 \xi + \mathbf{B}' \sin \xi \cos \xi) = 4\pi\rho \cos \xi \\ \nabla \cdot (-\mathbf{E}' \sin^2 \xi + \mathbf{B}' \cos \xi \sin \xi) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}' = 4\pi\rho \cos \xi \\ \nabla \cdot \mathbf{B}' = 4\pi\rho \sin \xi \end{cases}$$

ou seja, não recuperamos a simetria dual e o mesmo se espera das outras duas equações.

Por esta razão vamos supor a possibilidade de se ter na natureza monopolos magnéticos, ou seja, supomos a existência de um “ímã” que contenha apenas um polo norte ou sul e chamaremos este polo de carga magnética, em contraposição à carga elétrica.

Na história, há registros de que os gregos conheciam alguns efeitos elétricos e magnéticos por volta de 600 a. C., porém foi William Gilbert (1540-1603) quem distinguiu claramente estes dois fenômenos e estudos posteriores também possibilitaram distinguir a

existência de dois tipos de cargas (positiva e negativa). Estabelecer uma lei matemática que quantifica as forças elétricas e magnéticas além da unificação do magnetismo e da eletricidade (eletromagnetismo) só se tornou possível entre 1700 e 1890 com trabalhos como o de Ampère, Faraday, Oersted, Maxwell e outros (ASSIS, 1995).

Sabia-se de experiências práticas que ao quebrar um ímã com um dipolo magnético numa linha imaginária que separaria o polo norte do polo sul não se obteria dois polos, norte e sul separados, mas sim dois dipolos cada um com um polo norte e um sul. Devido às experiências de Oersted e explicações dada por Ampère, pode-se supor que o campo magnético deve existir devido a um movimento equatorial de cargas elétricas (SANTOS, 1982), apesar disso, ainda assim, algumas pessoas aceitavam razoável a hipótese de haver na natureza as cargas magnéticas.

Em 1974 t' Hooft e Polyakov descobriram que a existência de monopolos magnéticos é necessária em certa quebra espontânea da teoria de gauge (HOOFT, 1974; POLYAKOV, 1996), e embora haja alguns experimentos cujos resultados foram interpretados como se tivesse sido observado um monopolo magnético (CABRERA, 1982; CAPLIN et al., 1986; PRICE et al., 1975), posteriormente esse resultado foi reconsiderado (PARKER, 1970; PRICE et al., 1978; HUBER et al., 1990) e nenhum monopolo até o presente momento foi detectado (NAKAMURA; GROUP et al., 2010). Entretanto, a ideia de Dirac sobre a quantização da carga elétrica é talvez um dos argumentos mais notáveis em favor da existência de monopolos magnéticos. Dirac publicou em 1931 (DIRAC, 1931) um trabalho que sugere uma explicação do porquê cargas elétricas são encontradas sempre quantizadas na natureza.

Se supusermos a existência de um monopolo magnético de carga magnética  $q_m$  que produz um campo elétrico  $\mathbf{B}$  cujo comportamento seja parecido ao de um campo elétrico devido a uma carga  $q_e$ , isto é, proporcional ao inverso do quadrado da distância, então podemos escrever uma lei semelhante à lei de Coulomb:

$$\mathbf{F} = q'_m \mathbf{B}, \quad (31)$$

sendo

$$\mathbf{B} = \frac{q_m}{r^3} \mathbf{r}, \quad (32)$$

de tal forma que uma carga magnética positiva corresponda a um monopolo magnético norte e uma carga negativa a um monopolo magnético sul.

Se estudarmos a interação entre esta carga magnética e uma carga elétrica, tal como fez Dirac, veremos que a densidade de momento dos campos será dada por

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c}$$

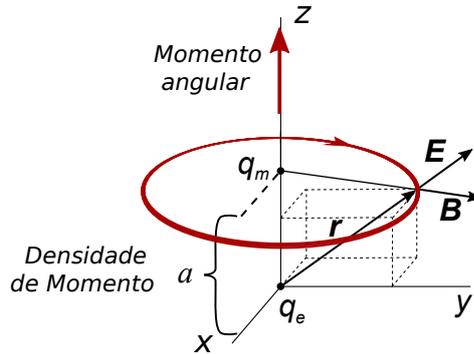
produzindo um momento angular no eixo que contém as duas cargas dado por

$$\mathbf{L} = \int \left[ \mathbf{r} \times \left( \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c} \right) \right] dv = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})] dv$$

conforme representado na figura 1. Observe que utilizamos a relação, conhecida algumas vezes na literatura como BAC - CAB (GRIFFITHS, 1999):

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Figura 1 – Quantização do momento angular



Fonte: Do autor.

Integrando por partes nas três direções separadamente veremos que o momento angular resultante se encontra na direção do eixo que se encontram as cargas, separadas de uma distância  $a$ , conforme a figura (1). Assumindo este eixo como sendo o eixo  $z$  então o momento angular será dado por

$$\mathbf{L} = L_z \hat{k} = -\frac{q_m q_e}{c} \hat{k}.$$

Observando que este resultado independe da separação  $a$  entre as cargas, considerando que o momento angular seja quantizado e um múltiplo inteiro de  $\hbar/2$  e considerando a existência de um monopolo magnético  $q_m$  temos:

$$\begin{cases} L_z = -\frac{q_m q_e}{c} \\ L_z = n \frac{\hbar}{2} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow$$

$$q_e = \frac{nc\hbar}{2q_m}, \quad (33)$$

isto é, para uma dada carga magnética, vemos que a carga elétrica é quantizada.

Dirac sugeriu que a existência de monopolos magnéticos poderia apontar uma possível explicação para a quantização da carga elétrica (DIRAC, 1931). É, no entanto, importante observar que a massa desses monopolos é calculável sendo seu valor da ordem de  $10^{14} m_{próton}$ , valor consideravelmente grande para nossos aceleradores de partículas,

embora mesmo assim haja experimentos nessa linha (ACHARYA et al., 2017). Se considerarmos  $n = 1$ ,  $q_e = e$  e  $c\hbar = 137e^2$  temos uma estimativa para o menor valor da carga magnética:

$$q_e = \frac{n c \hbar}{2 q_m} \Rightarrow e = \frac{137 e^2}{2 q_m} \Rightarrow$$

$$q_m \approx 68,5 e.$$

## 4.2 Potencial vetor para cargas magnéticas

Para começar a entender algumas dificuldades que surgem quando se admite a existência de monopolos com o intuito de obter uma simetria nas equações de Maxwell, comecemos pela definição apresentada anteriormente para o campo magnético a partir do potencial vetor dado pela equação (16) e integremos numa região onde supostamente existe um monopolo magnético. Calculamos a integral em um volume que contenha este monopolo:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Calculemos esta integral em uma esfera cujo centro está na origem e lá se encontra uma carga magnética conforme a figura (2). Consideremos um orifício circular nesta esfera, sendo  $\delta$  o raio desse orifício. Usando o teorema de Stokes e considerando que  $\delta \rightarrow 0$  temos:

$$\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot \int d\mathbf{l} = 0 \quad (34)$$

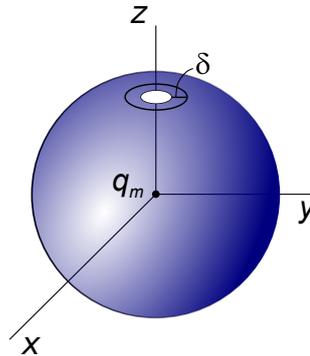
Note que podemos remover o potencial vetor de dentro da integral, pois ele será constante na região em que estamos integrando: uma circunferência de raio infinitesimal. E com isso vemos que

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

que contradiz nossa hipótese inicial da existência de uma carga magnética, pois considerando o teorema de Gauss, essa integral deve ser proporcional à carga magnética em seu interior:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q_m.$$

Figura 2 – Esfera centrada em um monopolo magnético



Fonte: Do autor.

Indicaremos duas formas de se resolver esta inconsistência:

1. **Primeiro caso:** supor que a equação (16) esteja incompleta e que na verdade  $\mathbf{B}$  depende de mais algumas grandezas, sugerindo um comportamento similar ao do campo elétrico;
2. **Segundo caso:** supor que a equação (16) esteja correta. No entanto, para isso ser verdade, o potencial vetor deve possuir singularidades que formam as chamadas linhas de Dirac.

#### **Primeiro caso: dois novos potenciais**

Começamos discutindo a possibilidade de  $\mathbf{B}$  depender de outros termos além do potencial vetor. Para isso, vejamos nossa definição anterior de campo elétrico e magnético, equações (15) e (16), a partir dos potenciais vetor e escalar.

Como  $\mathbf{B}$  é um rotacional puro, fica evidente que seu divergente é nulo, no entanto  $\mathbf{E}$  possui divergente não nulo, assim podemos supor que o campo magnético deva ser descrito por algo semelhante ao campo elétrico. Isso porque se o divergente de  $\mathbf{B}$  for nulo, então na região considerada não deve haver monopolos. A simetria entre as cargas nos sugere também uma simetria entre os potenciais, e por isso vamos supor a existência de um potencial escalar  $\psi$  associado a uma carga magnética e um potencial vetor  $\mathbf{W}$  em contraposição ao potencial vetor  $\mathbf{A}$ . Isso nos sugere que os campos elétricos e magnéticos possam ser representados da seguinte maneira:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{W}, \quad (35)$$

$$\mathbf{B} = -\nabla\psi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{A}. \quad (36)$$

Esta alternativa gera algumas implicações que não serão discutidas aqui, mas podem ser vistas em diversas fontes como, por exemplo (MIGNACO, 2001). Dentre elas, fica evidente que  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  pode ser não nulo.

### Segundo caso: singularidade no potencial vetor

Outra alternativa é considerar que o potencial vetor produzido por uma carga magnética é um campo que contém singularidades, conforme apresentamos brevemente a seguir com base no trabalho de Frenkel (FRENKEL, 2005). Essa singularidade permite que a integral (34) não se anule se integrarmos em torno de uma circunferência de raio infinitesimal, mas que contenha a singularidade.

Como exemplo, se o potencial vetor para esta carga, em coordenadas esféricas, for da forma (FRENKEL, 2005)

$$\mathbf{A} = -q_m \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (37)$$

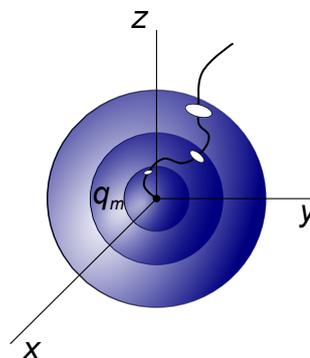
então seu rotacional é

$$\mathbf{B} = q_m \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (38)$$

o que permite que nossas discussões anteriores continuem válidas, agora sem a necessidade de introduzirmos um novo potencial vetor e um novo potencial escalar. Note que  $\mathbf{A}$ , segundo a equação (37), é singular ao longo do eixo  $z$  positivo, pois aí  $\theta = \pi/2$  e  $\sin \theta = 0$ .

A sequência de pontos singulares é chamada de linha de Dirac, representada na figura (3), e no nosso exemplo, considerando o potencial vetor (37), se encontra no eixo vertical para  $z > 0$ . Outras discussões mais detalhadas também podem ser encontradas em (FRENKEL, 2005).

Figura 3 – Linha de Dirac



Fonte: Do autor.

### 4.3 Simetria dual contínua das equações de Maxwell com fontes

Se tentarmos uma simetria dual contínua (26) para as equações de Maxwell com fontes vemos que ela não é satisfeita a menos que seja escolhido o parâmetro  $\xi = 0$ , ou seja, substituimos  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$  e  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}'$ . Vimos portanto que a simetria dual contínua só funciona para o vácuo, pois a carga elétrica contém informação que possibilita identificar qual campo é elétrico e qual é magnético.

No entanto, se supormos a existência de cargas magnéticas  $q_m$  (monopolos magnéticos) que se contrapõem às elétricas  $q_e$  de modo que podemos falar em densidade de carga elétrica  $\rho_e$ , densidade de carga magnética  $\rho_m$ , densidade de corrente elétrica  $\mathbf{J}_e$  e também de densidade de corrente magnética  $\mathbf{J}_m$  podemos dizer que a identidade de quem é campo elétrico e quem é campo magnético novamente é perdida, pois como poderíamos separar quem é carga magnética de quem é carga elétrica, a não ser por uma definição?

Na prática, encontramos apenas um tipo de carga que chamamos de carga elétrica, portanto, do ponto de vista experimental, podemos dizer que sabemos identificar quem é carga elétrica e quem é carga magnética pelo simples fato de que uma é observada e outra não. Apesar disso, se supusermos, tal como apresentados nas equações (31) e (32), a existência de cargas magnéticas, e que vale uma lei semelhante à lei de Coulomb, podemos ter uma sugestão para explicarmos o porque a carga elétrica ser quantizada.

Apesar da criatividade humana sugerir há muito tempo a existência de tais monopolos desde Curie (CURIE, 1894), nada foi confirmado até o momento, embora alguns resultados controversos possam sugerir sua existência (CABRERA, 1982; PRICE et al., 1975).

Assim sendo, vamos modificar as equações de Maxwell (8) adicionando cargas magnéticas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e & (a) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_m & (b) \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_e & (c) \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_m & (d). \end{array} \right. \quad (39)$$

Chamaremos o conjunto de equações (39) de equações de Maxwell com monopolos magnéticos.

Voltamos à ideia de que temos dois observadores, A e B, onde um escreve as equações de Maxwell com as grandezas eletromagnéticas sem linha (A) e o outro com as grandezas com linha (B). Podemos verificar que partindo das equações de Maxwell para o observador A e substituindo a transformação (26) e (40) recuperamos as equações de Maxwell para o observador B, isto é, verificaremos que as equações de Maxwell com fontes elétricas e magnéticas possuem simetria dual.

Apresentemos as relações entre as grandezas magnéticas para A e para B:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_e = \rho'_e \cos \xi + \rho'_m \sin \xi \\ \rho_m = -\rho'_e \sin \xi + \rho'_m \cos \xi \\ \mathbf{J}_e = \mathbf{J}'_e \cos \xi + \mathbf{J}'_m \sin \xi \\ \mathbf{J}_m = -\mathbf{J}'_e \sin \xi + \mathbf{J}'_m \cos \xi. \end{array} \right. \quad (40)$$

Novamente, entende-se que um observador A, ao medir, por exemplo, uma densidade de carga  $\rho_e$ , ela pode ser interpretada por uma mistura entre cargas elétricas  $\rho'_e$  e magnéticas  $\rho'_m$  segundo um observador B.

Substituindo as transformações duais (26) e (40) nas equações (39-a) e (39-b), temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_m \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E}' \cos \xi + \nabla \cdot \mathbf{B}' \sin \xi = 4\pi\rho'_e \cos \xi + 4\pi\rho'_m \sin \xi \\ -\nabla \cdot \mathbf{E}' \sin \xi + \nabla \cdot \mathbf{B}' \cos \xi = -4\pi\rho'_e \sin \xi + 4\pi\rho'_m \cos \xi. \end{array} \right. \quad (41)$$

Multiplicando a primeira equação por  $\cos \xi$  e a segunda por  $\sin \xi$  e subtraindo as equações obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' (\cos^2 \xi + \sin^2 \xi) = 4\pi\rho'_e (\cos^2 \xi + \sin^2 \xi) \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = 4\pi\rho'_e \quad (42)$$

isto é, recuperamos equação (39-a).

Multiplicando agora a primeira equação do sistema (41) por  $\sin \xi$  e a segunda por  $\cos \xi$  e somando as equações obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}' = 4\pi\rho'_m, \quad (43)$$

recuperando a equação (39-b). Note no entanto que se acrescentarmos a carga magnética perdemos a simetria de calibre, conforme discutido anteriormente. Agora faremos o mesmo para a terceira e quarta equações (39-c e 39-d), substituindo as transformações duais e trabalhando de forma análoga à feita até aqui, recuperamos novamente as equações de Maxwell com fontes magnéticas:

$$\nabla \times \mathbf{B}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}'_e \quad (44)$$

e

$$-\nabla \times \mathbf{E}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}'_m. \quad (45)$$

Assim, fica verificado que as equações de Maxwell possuem simetria dual contínua quando consideramos cargas magnéticas, além das já conhecidas cargas elétricas, pois as equações de Maxwell se tornam as mesmas para os observadores A e B.

Agora, vamos introduzir a notação tensorial e verificar tal simetria nesta nova notação.

#### 4.4 Equações de Maxwell na notação tensorial

Vamos agora introduzir as quantidade quadridimensionais. Primeiro, vamos generalizar o potencial vetor para o potencial-quadrivetor utilizando a seguinte notação:

$$A_\mu = (\phi, -\mathbf{A}) \quad (46)$$

para o covariante e para o contravariante:

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}). \quad (47)$$

De forma geral utilizaremos os índices gregos para representarmos os quadrivetores sendo que um índice grego pode variar de 0 a 3 ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), sendo  $\mu = 0$  correspondendo à parte temporal e  $\mu = 1, 2, 3$  à parte espacial. Para representarmos os vetores tridimensionais vamos utilizar sub-índices latinos, isto é, para o potencial vetor, por exemplo, não utilizaremos a notação cujos índices denotam a direção  $x, y, z$  tal como

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z),$$

mas daremos preferência para o uso de índices

$$\mathbf{A} = A_i = (A_1, A_2, A_3). \quad (48)$$

Portanto, quando nos referirmos a vetores no espaço tridimensional, independentemente da base escolhida (podendo o sistema ser cartesiano ou não) vamos representá-los com índices latinos. Assim,  $A_i$  por exemplo denota o potencial vetor enquanto que  $A_\mu$  denota o potencial quadrivetor (ou quadripotencial) generalizado.

Quando ajudar na clareza do que se expressa aqui, vamos continuar com o uso de índices  $x, y, z$ , principalmente quando falarmos do campo elétrico e magnético. Note também que nestes casos,  $x, y, z$  corresponderão respectivamente a 1, 2, 3, assim, como exemplo:

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (B_1, B_2, B_3) = B_i$$

e

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = (E_1, E_2, E_3) = E_i.$$

Vamos trabalhar apenas na métrica de Minkowsky (espaço plano) com assinatura  $(+, -, -, -)$ . Em notação matricial podemos representar  $\eta_{\mu\nu}$  por  $(\eta)_{co}$  e  $\eta^{\mu\nu}$  por  $(\eta)_{contra}$ :

$$(\eta)_{co} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\eta)_{contra} \quad (49)$$

Note que podemos transformar um tensor quadridimensional covariante em um contravariante e vice-versa utilizando-se do tensor métrico  $\eta^{\mu\nu}$ , pois:

$$A_\mu \eta^{\mu\nu} = A^\nu$$

e

$$A^\mu \eta_{\mu\nu} = A_\nu.$$

Podemos verificar também que

$$(\eta)_{co} \cdot (\eta)_{contra} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

e portanto

$$(\eta)_{co} \cdot (\eta)_{contra} \cdot (\eta)_{co} = \mathbf{1} (\eta)_{co} = (\eta)_{co} \mathbf{1} = (\eta)_{co} = (\eta)_{contra} = (\eta)_{contra} \cdot (\eta)_{co} \cdot (\eta)_{contra},$$

ou em termos de índices

$$\eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\nu} = \eta_{\mu\nu}.$$

Partindo da ideia de representar as equação de Maxwell a partir do potencial escalar e do potencial vetor, isto é, apenas do potencial quadrivetor  $A_\mu$ , definimos o tensor de Faraday covariante como se segue

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (50)$$

e de forma similar para o contravariante

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (51)$$

o operador diferencial covariante

$$\partial_\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (52)$$

e o contravariante

$$\partial^\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (53)$$

Note que  $\partial^\mu \partial_\mu = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\nabla^2 \right) = \square$ , por isso definimos o D'Alembertiano conforme (11). Generalizamos também a corrente e a carga elétricas definindo-se o quadri-vetor corrente elétrica contravariante

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J}) \quad (54)$$

e covariante

$$J_\mu = (c\rho, -\mathbf{J}). \quad (55)$$

Utilizando as relações anteriores, podemos obter o tensor de Faraday covariante que, na representação matricial, pode ser escrito como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \Rightarrow (F)_{co} = \begin{pmatrix} 0 & +E_1 & +E_2 & +E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & +B_2 \\ -E_2 & +B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & +B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

e o contravariante:

$$\eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu} = F^{\mu\nu} \Rightarrow (F)_{contra} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ +E_1 & 0 & -B_3 & +B_2 \\ +E_2 & +B_3 & 0 & -B_1 \\ +E_3 & -B_2 & +B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Vemos aqui que o tensor de Faraday é antissimétrico ( $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$  e  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ ) e por isso possui diagonal nula quando em notação matricial.

As equações de Maxwell sem fonte podem ser escritas na notação de índices. Para o par que não envolve cargas elétricas, pode-se escrever:

$$\partial^\gamma F^{\alpha\beta} + \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} = 0. \quad (58)$$

Para verificar esta relação notamos que se qualquer par de índices forem iguais, então a equação acima é naturalmente nula. Vejamos o caso em que  $\gamma = \alpha$ :

$$\partial^\alpha F^{\alpha\beta} + \partial^\alpha F^{\beta\alpha} + \partial^\beta F^{\alpha\alpha} = \partial^\alpha F^{\alpha\beta} + \partial^\alpha (-F^{\alpha\beta}) + 0 = \partial^\alpha (F^{\alpha\beta} - F^{\alpha\beta}) = 0. \quad (59)$$

Como o tensor de Faraday, seja na forma contravariante (56) como na forma covariante (57), é antissimétrico, ou seja  $F^{\beta\alpha} = -F^{\alpha\beta}$ , podemos resumir a equação (58) utilizando o símbolo de Levi-Civita:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\beta F^{\mu\nu} = 0 \quad (60)$$

sendo  $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$  um tensor totalmente antissimétrico tal que

$$-\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{para } \alpha=0, \beta=1, \mu=2, \nu=3 \text{ ou qualquer permutação par} \\ -1 & \text{para permutação ímpar} \\ 0 & \text{se quaisquer dois índices forem iguais} \end{cases} . \quad (61)$$

Antes de continuarmos e apresentamos as duas equações de Maxwell remanescentes em notação de índices, veremos como é possível ver a equivalência da equação (60) com as duas equações de Maxwell sem fonte, isto é, as equações (8-b) e (8-d).

Para tanto, vamos desenvolver a equação (60) escolhendo o índice  $\alpha = 0$ , obtendo portanto que:

$$\begin{aligned} \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial x}(-B_x) + \frac{\partial}{\partial y}(-B_y) + \frac{\partial}{\partial z}(-B_z) &= 0 \Rightarrow \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Agora fazendo o mesmo para  $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_x &= 0 \Rightarrow \\ -(\nabla \times \mathbf{E})_x &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_x. \end{aligned} \quad (63)$$

Agora para  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 3$  temos, respectivamente, as seguintes relações:

$$\begin{aligned} -(\nabla \times \mathbf{E})_y &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_y, \\ -(\nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_z. \end{aligned}$$

Estas três últimas relações nos permitem concluir que

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (64)$$

Continuando agora com o próximo par de equações de Maxwell, ou seja, as equações (8-a) e (8-c), veremos que elas são completamente equivalentes à

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \quad (65)$$

escrita em notação de índices, sendo  $J^\beta$  a quadricorrente. Vejamos que as equações de Maxwell que envolve fontes podem ser obtidas somando em  $\alpha$  para cada valor de  $\beta$ . Começando com  $\beta = 0$ :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \frac{4\pi}{c} J^0 \Rightarrow \\ 0 + \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z &= \frac{4\pi}{c} c\rho \Rightarrow \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned} \quad (66)$$

Recuperamos a equação (8-a). Fazendo agora  $\beta = 1$  obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \frac{4\pi}{c} J^1 \Rightarrow \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_x + \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y &= \frac{4\pi}{c} J_x \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_x + \frac{4\pi}{c} J_x \Rightarrow \\ (\nabla \times \mathbf{B})_x &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_x + \frac{4\pi}{c} J_x. \end{aligned} \quad (67)$$

Se fizermos  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$  obtemos, respectivamente:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_y = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_y + \frac{4\pi}{c} J_y \quad (68)$$

e

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_z + \frac{4\pi}{c} J_z. \quad (69)$$

Isto é, obtemos a equação (8-c):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (70)$$

Assim, podemos resumir as quatro equações de Maxwell em apenas duas equações utilizando a notação de índices, sendo que a equação (71-b) representa as duas equações de Maxwell sem fontes e a equação (71-a) as duas equações de Maxwell com fontes:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\beta F^{\mu\nu} = 0 & (a) \\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta & (b). \end{cases} \quad (71)$$

#### 4.5 A lagrangiana de Maxwell

No final do século XVIII, Lagrange desenvolveu a chamada mecânica analítica onde se assumia a existência de uma função escalar  $L$  chamada de *função de Lagrange* ou simplesmente *lagrangiana*, a partir da qual, juntamente com leis da física como auxílio (como a segunda lei de Newton, para a mecânica), poderia se extrair a equação de movimento. Apesar de inicialmente pensada para se tratar problemas mecânicos, a função de Lagrange pôde ser generalizada para além da mecânica podendo ser aplicada também no eletromagnetismo, neste caso com auxílio da força de Lorentz.

Podemos obter o par de equações de Maxwell que dependam das cargas elétricas (71-a) a partir da lagrangiana, equação (72) abaixo, enquanto as equações sem fontes (71-b) podem ser obtidas a partir das definições do campo elétrico e magnético conforme (15) e (16). Se tomarmos  $J^\mu = 0$  obtemos as equações de Maxwell para o vácuo.

Vamos então determinar as equações de Maxwell a partir da lagrangiana:

$$L = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}J^\mu A_\mu \quad (72)$$

e usando a equação Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} = \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}. \quad (73)$$

Como o tensor de Faraday é escrito em função das derivadas parciais do quadri-potencial vetor, o lado esquerdo da equação Euler-Lagrange é imediato e nos fornece

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c}J^\mu. \quad (74)$$

O lado direito da equação Euler-Lagrange pode ser obtido primeiramente derivando a lagrangiana em relação à derivada do potencial vetor. Para isso devemos escrever a lagrangiana em função das derivadas do potencial vetor:

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{16\pi}\eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma} - \frac{1}{c}J^\mu A_\mu = \\ & -\frac{1}{16\pi}\eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\sigma}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda) - \frac{1}{c}J^\mu A_\mu \end{aligned} \quad (75)$$

Derivando em relação à  $\partial_\beta A_\alpha$ :

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = -\frac{1}{16\pi}\eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\sigma}(\delta_\mu^\beta\delta_\nu^\alpha F_{\lambda\sigma} - \delta_\nu^\beta\delta_\mu^\alpha F_{\lambda\sigma} + \delta_\lambda^\beta\delta_\sigma^\alpha F_{\mu\nu} - \delta_\sigma^\beta\delta_\lambda^\alpha F_{\mu\nu}) + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = -\frac{1}{4\pi}F^{\beta\alpha}.$$

Portanto, o termo à direita da equação de Euler-Lagrange, fazendo trocas de índices, é:

$$\partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\nu\mu} \quad (76)$$

e ao igualar com a equação (74) obtemos:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad (77)$$

Ou seja, este é o par de equações de Maxwell obtida a partir da lagrangiana (72) e que portanto depende das cargas elétricas. O par de equações de Maxwell que não envolvem cargas elétricas podem ser obtidas, como já vimos, impondo a simetria de gauge. Vamos verificar se a simetria abordada anteriormente é facilmente aplicável quando em notação tensorial.

#### 4.6 Simetria dual contínua na notação tensorial

Podemos verificar a simetria contínua dual (26) e (40) na notação tensorial. Para isso, partimos das equações (71):

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\beta F^{\mu\nu} = 0 & (a) \\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta & (b) \end{cases} .$$

Vimos que cada uma destas equações tensoriais contém, na verdade, um par de equações de Maxwell, sendo que a segunda contém as equações de Maxwell sem fonte (71-a) e a primeira as equações de Maxwell com fontes (71-b). A simetria dual contínua só faz sentido quando adicionamos cargas magnéticas e para isso vamos escrever o vetor densidade de corrente magnética quadridimensional de forma semelhante às equações (54) e (55):

$$G^\mu = (c\rho_m, \mathbf{J}_m) \quad (78)$$

e

$$G_\mu = (c\rho_m, -\mathbf{J}_m) \quad (79)$$

onde utilizaremos  $\mathbf{J}_m$  para designarmos a densidade de corrente magnética e  $\rho_m$  para a densidade de carga magnética. Portanto se faz necessário mudarmos a notação da quadricorrente elétrica, adicionando sub-índices para indicar a densidade de carga elétrica  $\rho_e$  e o vetor densidade de corrente elétrica  $\mathbf{J}_e$ , ou seja, as equações (54) e (55) serão substituídas por:

$$J^\mu = (c\rho_e, \mathbf{J}_e) \quad (80)$$

e

$$J_\mu = (c\rho_e, -\mathbf{J}_e). \quad (81)$$

Antes de prosseguirmos vamos definir um novo tensor que nos será útil para trabalharmos com cargas magnéticas na notação tensorial ao qual chamaremos de Hodge  $\tilde{F}^{\mu\nu}$ . Obtemos o Hodge contravariante  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  a partir do tensor de Faraday contravariante  $F^{\mu\nu}$  fazendo a substituição  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$  e  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ . De forma similar obtemos o Hodge covariante fazendo a mesma substituição no tensor de Faraday covariante. Isto é

$$\left(\tilde{F}\right)_{co} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ +B_1 & 0 & +E_3 & -E_2 \\ +B_2 & -E_3 & 0 & +E_1 \\ +B_3 & +E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

para o contravariante e

$$\left(\tilde{F}\right)_{contra} = \begin{pmatrix} 0 & +B_1 & +B_2 & +B_3 \\ -B_1 & 0 & +E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & +E_1 \\ -B_3 & +E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (83)$$

para o covariante. Note que não temos um mapeamento do tipo  $F \rightarrow \tilde{F}$  e  $\tilde{F} \rightarrow -F$  assim, por isso não ser verdade, preferimos não chamar  $\tilde{F}$  de tensor dual, embora algumas vezes este termo é usado na literatura.

Podemos obter o tensor dual de Faraday a partir das relações

$$\star F^{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \quad (84)$$

e

$$\star F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}. \quad (85)$$

Chamamos o Hodge também de operador estrela  $\star$ , porém deixaremos esta nomenclatura e símbolo para quando falarmos do Hodge generalizado.

Para encontrarmos as equações com monopolos magnéticos, devemos fazer um processo similar ao que fizemos com as equações de Maxwell, ou seja, devemos substituir as quadricorrentes  $J^\mu \rightarrow G^\mu$  e  $G^\mu \rightarrow -J^\mu$  nas equações que envolvam cargas elétricas para obter as equações que envolvam cargas magnéticas.

Sendo assim, podemos reescrever a equação  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = (4\pi/c)J^\mu$  com as trocas descritas anteriormente, obtendo-se

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} G^\mu. \quad (86)$$

Para uma simetria discreta completa, as equações de Maxwell na forma tensorial devem ser recuperadas sob a prescrição  $J \rightarrow G$  e  $G \rightarrow -J$  em conjunto com  $F \rightarrow \tilde{F}$  e  $\tilde{F} \rightarrow -F$ . Propomos uma transformação contínua para os elementos dos tensores de

Faraday e dual de Faraday bem como para os quadrivetores corrente de forma análoga à anterior, quando em notação vetorial:

$$\begin{cases} F^{\mu\nu} = F'^{\mu\nu} \cos \xi + \tilde{F}'^{\mu\nu} \sin \xi \\ \tilde{F}^{\mu\nu} = -F'^{\mu\nu} \sin \xi + \tilde{F}'^{\mu\nu} \cos \xi \\ J^\mu = J'^\mu \cos \xi + G'^\mu \sin \xi \\ G^\mu = -J'^\mu \sin \xi + G'^\mu \cos \xi. \end{cases} \quad (87)$$

Com isso, as equações de Maxwell com fontes magnéticas e elétricas podem ser escritas, na notação tensorial, como:

$$\begin{cases} \partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \\ \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} G^\mu. \end{cases} \quad (88)$$

Substituindo (87) nas equações (88) e (86) temos:

$$\begin{cases} \partial_\nu (F'^{\nu\mu} \cos \xi + \tilde{F}'^{\nu\mu} \sin \xi) = \frac{4\pi}{c} (J'^\mu \cos \xi + G'^\mu \sin \xi) \\ \partial_\nu (-F'^{\nu\mu} \sin \xi + \tilde{F}'^{\nu\mu} \cos \xi) = \frac{4\pi}{c} (-J'^\mu \sin \xi + G'^\mu \cos \xi). \end{cases} \quad (89)$$

Multiplicando a primeira equação por  $\sin \xi$  e a segunda por  $\cos \xi$  e somando as equações obtemos:

$$\partial_\nu \tilde{F}'^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} G'^\mu. \quad (90)$$

que é a segunda equação do sistema (88).

Agora, multiplicando a primeira equação por  $\cos \xi$ , a segunda por  $\sin \xi$  e subtraindo a segunda da primeira obtemos:

$$\partial_\nu F'^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J'^\mu. \quad (91)$$

que é a primeira equação do sistema (88).

Isto é, as equações se mantêm, também na sua forma tensorial, portanto temos a simetria dual contínua aplicável e a transformação dual discreta pode ser obtida a partir da seleção  $\xi = \pi/2$ .

## 5 ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY

Quando lidamos com problemas envolvendo questões microscópicas, a eletrodinâmica de Podolsky nos mostra promissora, uma vez que ela possui termos de correção para Maxwell, quando em pequenas distâncias. Além disso, como mencionado anteriormente, trás resultados finitos para a força quando antes tínhamos divergências, explica naturalmente o fator  $4/3$  (GRATUS; PERLICK; TUCKER, 2015) da teoria de Abrahaam-Lorentz além de ser a única teoria de gauge  $U(1)$  de ordem dois com equações lineares. Ela pode ser obtida a partir do potencial de Yukawa utilizando transformações de referenciais, obtendo então as equações (10), conforme apresentado por Accioly (ACCIOLY; MUKAI, 1998). Utilizando a notação tensorial, vamos escrever a lagrangiana de Podolsky e mostrar que obtemos as equações de Podolsky.

Como visto para Maxwell, podemos escrever uma lagrangiana que envolva o tensor de Faraday. Motivado por trabalhos como os de Ostrogradski, que havia generalizado a lagrangiana adicionando termos de derivadas de ordem superior, Podolsky adicionou termos de derivadas superiores na lagrangiana de Maxwell (ACCIOLY; MUKAI, 1998; CUZINATTO; MELO; POMPEIA, 2007; FRENKEL, 1996; FRENKEL; SANTOS, 1999; PODOLSKY, 1942).

### 5.1 A eletrostática de Podolsky

Em geral, quando se inicia os estudos a eletrodinâmica de Maxwell, costuma-se iniciar com a lei de Coulomb na eletrostática, a partir daí obter as equações para o campo eletrostático e o potencial eletrostático. Por fim, a partir de uma mudança de referencial, pode-se inferir as equações de Maxwell para a eletrodinâmica.

Para compreender melhor que a eletrodinâmica de Podolsky possui resultados diferentes da eletrodinâmica de Maxwell quando trabalhamos com distâncias pequenas comparadas com o parâmetro  $a$ , começaremos com o potencial de Yukawa e veremos, de forma abreviada, que se pode deduzir as equações para a força e para o campo elétrico. A partir de uma mudança de referencial, podemos então inferirmos as equações de Podolsky para a eletrodinâmica (ACCIOLY; MUKAI, 1998).

Esta abordagem é interessante pois nos mostra que, diferentemente da lei de Coulomb, a eletrodinâmica de Podolsky implica em uma força finita para a interação entre duas cargas pontuais. Começemos então com o potencial eletrostático de Podolsky:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \rho_e(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{[1 - e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/a}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (92)$$

sendo  $\mathbf{r}$  a posição onde estamos determinando o potencial  $\phi(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{r}'$  a posição da carga

$q_e = d\tau\rho_e(\mathbf{r}')$  contida no volume  $d\tau$  em  $\mathbf{r}'$ . Para uma carga pontual, esta integral nos fornece:

$$\phi(\mathbf{r}) = q'_e \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right), \quad (93)$$

cujo divergente nos dá o campo elétrico em  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q'_e \left( \frac{1 - e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|a} \right) \hat{r}. \quad (94)$$

Observe o potencial de Yukawa  $\frac{e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  no potencial elétrico. Se colocarmos uma carga de prova  $q_e$  no ponto onde calculamos o campo elétrico, vemos que a força elétrica é dada por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q_e q'_e \left( \frac{1 - e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|a} \right) \hat{r}. \quad (95)$$

Observe que se  $a = 0$  na equação do campo voltamos ao potencial de Coulomb. Além disso, se tomarmos o limite  $\lim_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow a} \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , vemos que ele tende a um valor finito que corresponde à:

$$\lim_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow a} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q_e q'_e}{2a^2} \hat{r}.$$

Note que a lei de Coulomb prevê uma força que tende a infinito quando a distância de separação de duas cargas pontuais tende a zero. Por fim, impondo uma mudança de referencial, como discutido em (ACCIOLY; MUKAI, 1998), obtemos as equações de Podolsky como descritas em (10).

Vemos então que um potencial tipo Yukawa para as cargas elétricas implica na eletrodinâmica de Podolsky. Vamos agora partir de uma lagrangiana que depende do tensor de campo (tensor de Faraday), da quadricorrente e de derivadas do tensor de campo e mostrar que ela nos fornece os mesmos resultados. A essa lagrangiana damos o nome de lagrangiana de Podolsky.

## 5.2 A lagrangiana de Podolsky

A Lagrangiana de Podolsky é

$$L = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu - \frac{a^2}{8\pi} \partial^\mu F_{\mu\nu} \partial_\omega F^{\omega\nu} \quad (96)$$

Alguns resultados são iguais aos obtidos para a lagrangiana de Maxwell (novamente, fazendo trocas de índices mudos de forma conveniente), como as equações (74) e (76):

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c} J^\mu, \quad (97)$$

$$\partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{4\pi}{c} \partial_\nu F^{\nu\mu}. \quad (98)$$

Agora iniciemos a derivação em relação à terceira parte da equação Euler-Lagrange, que passa a ser:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} + \partial_\rho \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} = 0 \quad (99)$$

Substituindo o potencial vetor na Lagrangiana, obtemos:

$$L = -\frac{1}{16\pi} \eta^{\lambda\mu} \eta^{\nu\sigma} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda) - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu - \frac{a^2}{8\pi} \eta^{\mu\nu} \eta^{\xi\sigma} (\partial_\nu (\partial_\mu A_\sigma - \partial_\sigma A_\mu)) \partial_\omega (\partial_\gamma A_\xi - \partial_\xi A_\gamma) \eta^{\mu\omega}.$$

Calculando  $\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta A_\zeta)}$  obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta A_\zeta)} &= -\frac{a^2}{8\pi} \eta^{\mu\nu} \eta^{\gamma\omega} \eta^{\xi\sigma} (\delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\zeta \partial_\omega F_{\gamma\xi} - \delta_\nu^\alpha \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\zeta \partial_\omega F_{\gamma\xi} + \\ &\quad \delta_\omega^\alpha \delta_\gamma^\beta \delta_\xi^\zeta \partial_\nu F_{\mu\nu} - \delta_\omega^\alpha \delta_\xi^\beta \delta_\gamma^\zeta \partial_\nu F_{\mu\nu}) \Rightarrow \\ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta A_\zeta)} &= -\frac{a^2}{4\pi} \left( \eta^{\beta\alpha} \partial_\omega F^{\omega\zeta} - \eta^{\zeta\alpha} \partial_\omega F^{\omega\beta} \right). \end{aligned} \quad (100)$$

Finalmente calculamos  $\partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta A_\zeta)}$ :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta A_\zeta)} &= -\frac{a^2}{4\pi} \left( \partial_\alpha \partial^\alpha \partial_\omega F^{\omega\zeta} - \partial^\zeta \partial_\beta \partial_\omega F^{\omega\beta} \right) \Rightarrow \\ \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta A_\zeta)} &= -\frac{a^2}{4\pi} \partial_\alpha \partial^\alpha \partial_\omega F^{\omega\zeta} = -\frac{a^2}{4\pi} \square \partial_\omega F^{\omega\zeta}. \end{aligned} \quad (101)$$

Note que o termo  $\partial^\zeta \partial_\beta \partial_\omega F^{\omega\beta}$  na última passagem se anula, uma vez que trata-se da contração de um objeto simétrico com um antissimétrico.

Com isso, obtemos a seguinte relação:

$$-\frac{1}{c} J^\mu + \frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{a^2 \square}{4\pi} \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0. \quad (102)$$

que pode ser reescrita:

$$(1 - a^2 \square) \partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu. \quad (103)$$

Note que obtemos apenas duas equações de Podolsky a partir da lagrangiana: sendo estas as equações que envolvem cargas elétricas. Por outro lado, as duas outras equações que faltam são idênticas às equações de Maxwell, por esta razão sabemos que as equações faltantes possui simetria de gauge conforme discutimos anteriormente:

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0.$$

### 5.3 Simetria dual no vácuo na eletrodinâmica de Podolsky

É fácil ver que não temos mais a simetria dual contínua neste caso, devido ao operador D'Alembertiano. Para verificarmos isso, vamos escrever as equações da eletrodinâmica de Podolsky no vácuo e tentarmos aplicar as duas primeiras equações de (87). Assim, as equações de Podolsky no vácuo são:

$$\begin{cases} (1 - a^2 \square) \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0 \\ \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \end{cases} . \quad (104)$$

Note que a primeira equação tensorial veio da lagrangiana enquanto que a segunda equação é idêntica às equações de Maxwell que não envolvem cargas elétricas. Esta equação, assim como as equações de Maxwell, possuem simetria de gauge e não foram obtidas a partir da lagrangiana.

Fazendo tais substituições:

$$\begin{cases} \cos \xi (1 - a^2 \square) \partial_\nu F^{\nu\mu} + \sin \xi (1 - a^2 \square) \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \\ -\sin \xi \partial_\nu F^{\nu\mu} + \cos \xi \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \end{cases} . \quad (105)$$

Como  $\xi$  é uma constante ela não é afetada pelo divergente  $\partial_\nu$  e também podemos inverter a ordem entre o D'Alembertiano e o divergente uma vez que estamos falando de derivadas parciais de funções. Multiplicamos a primeira equação por  $\cos \xi$ , a segunda por  $\sin \xi$  e subtraímos a segunda da primeira e obtemos:

$$\begin{cases} \cos^2 \xi (1 - a^2 \square) \partial_\nu F^{\nu\mu} + \sin \xi \cos \xi (1 - a^2 \square) \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \\ -\sin^2 \xi \partial_\nu F^{\nu\mu} + \sin \xi \cos \xi \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \end{cases} \quad - \quad (106)$$

$$\frac{\partial_\nu F^{\nu\mu} - \cos^2 \xi a^2 \square \partial_\nu F^{\nu\mu} - \sin \xi \cos \xi a^2 \square \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0}{\Rightarrow \partial_\nu F^{\nu\mu} - a^2 \square \partial_\nu (F^{\nu\mu} \cos^2 \xi + \tilde{F}^{\nu\mu} \sin \xi \cos \xi) = 0.} \quad (107)$$

Vemos que esta substituição não nos faz recuperar nenhuma das equações de Podolsky, mesmo assim, tentaremos obter a outra equação de Podolsky, agora multiplicando a primeira por  $\sin \xi$  e a segunda por  $\cos \xi$  e somando ambas, obtemos:

$$\begin{cases} \sin \xi \cos \xi (1 - a^2 \square) \partial_\nu F^{\nu\mu} + \sin^2 \xi (1 - a^2 \square) \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \\ -\sin \xi \cos \xi \partial_\nu F^{\nu\mu} + \cos^2 \xi \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \end{cases} \quad + \quad (108)$$

$$\frac{-\sin \xi \cos \xi a^2 \square \partial_\nu F^{\nu\mu} + \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} - \sin^2 \xi a^2 \square \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0,}{\Rightarrow \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} - a^2 \square \partial_\nu (F^{\nu\mu} \sin \xi \cos \xi + \tilde{F}^{\nu\mu} \sin^2 \xi) = 0.} \quad (109)$$

Assim podemos concluir que as equações de Podolsky, não se transformam de maneira similar às equações de Maxwell e podemos perceber que isso se deve ao termo

com o D'Alembertiano  $(1 - a^2\Box)$ . Podemos tentar outra substituição, como apresentado em (110), incluindo o operador  $(1 - a^2\Box)$ , mas obteríamos equações diferentes das equações de Podolsky.

$$\begin{cases} F^{\nu\mu} = F'^{\nu\mu} \cos \xi + (1 - a^2\Box)\tilde{F}'^{\nu\mu} \sin \xi \\ \tilde{F}^{\nu\mu} = -F'^{\nu\mu} \sin \xi + (1 - a^2\Box)\tilde{F}'^{\nu\mu} \cos \xi. \end{cases} \quad (110)$$

Vamos então definir uma transformação inversa ao operador  $(1 - a^2\Box)$  cuja representação será  $(1 - a^2\Box)^{-1}$ , ou seja, um operador que nos forneça a identidade:

$$(1 - a^2\Box)(1 - a^2\Box)^{-1} = (1 - a^2\Box)^{-1}(1 - a^2\Box) = \mathbf{1}. \quad (111)$$

É importante tomarmos cuidado aqui com a interpretação sobre o que é este operador inverso  $(1 - a^2\Box)^{-1}$ . Podemos interpretá-lo inicialmente em termos da série de Taylor representando-o primeiramente como:

$$(1 - a^2\Box)^{-1} = \frac{1}{(1 - a^2\Box)} \quad (112)$$

e expandir este objeto em termos da série de Taylor:

$$\frac{1}{(1 - a^2\Box)} = 1 + a^2\Box + a^4\Box^2 + a^6\Box^3 + a^8\Box^4 + \dots \quad (113)$$

Aplicando o operador  $(1 - a^2\Box)$  nos termos desta expansão temos:

$$(1 - a^2\Box)(1 + a^2\Box)^{-1} = (1 - a^2\Box)(1 + a^2\Box + a^4\Box^2 + a^6\Box^3 + a^8\Box^4 + \dots) \Rightarrow$$

$$(1 - a^2\Box)(1 + a^2\Box)^{-1} =$$

$$(1 + a^2\Box + a^4\Box^2 + a^6\Box^3 + a^8\Box^4 + \dots) - (a^2\Box + a^4\Box^2 + a^6\Box^3 + a^8\Box^4 + a^{10}\Box^5 + \dots) = 1$$

conforme obtemos em (111). Como dito,  $(1 - a^2\Box)^{-1}$  é um operador, assim (112) serve apenas de motivação para expandi-lo em termos de potências do operador  $\Box$  entendendo-se que  $\Box^n$  corresponde ao operador  $\Box$  aplicado  $n$  vezes.

Portanto, podemos entender o operador inverso como sendo  $(1 - a^2\Box)^{-1}$  como sendo <sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Também podemos entender o operador inverso  $(1 - a^2\Box)$  em termos das funções de Green. Assim, se os operadores atuarem em uma função  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  podemos defini-lo de modo que

$$(1 - a^2\Box)(1 - a^2\Box)^{-1}f(x) = \int d^4x' \delta^4(x - x')f(x')$$

e o operador inverso pode ser definido em termos das funções e Green  $G$  de modo que

$$(1 - a^2\Box)^{-1}f(x) = \int d^4x' G(x - x')f(x')$$

$$(1 - a^2\Box) = 1 + a^2\Box + a^4\Box^2 + a^6\Box^3 + a^8\Box^4 + \dots$$

Um operador sempre atua em um objeto, assim a identidade (111) deve ser entendida como sendo os operadores atuando em uma função, ou seja, ela poderia ser melhor escrita como:

$$(1 - a^2\Box)(1 - a^2\Box)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = (1 - a^2\Box)^{-1}(1 - a^2\Box)\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$$

onde  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  é função da posição  $\mathbf{r}$  e do tempo  $t$ .

Isso é suficiente para propormos uma nova transformação dual na eletrodinâmica de Podolsky. Uma possibilidade, que pode ser obtida por inspeção, é:

$$\begin{cases} F^{\nu\mu} = F'^{\nu\mu} \cos \xi + (1 - a^2\Box)^{-1} \tilde{F}'^{\nu\mu} \sin \xi \\ \tilde{F}^{\nu\mu} = -(1 - a^2\Box) F'^{\nu\mu} \sin \xi + \tilde{F}'^{\nu\mu} \cos \xi, \end{cases} \quad (114)$$

pois, se substituirmos estas equações nas equações de Podolsky temos:

$$\begin{cases} (1 - a^2\Box)\partial_\nu[F'^{\nu\mu} \cos \xi + (1 - a^2\Box)^{-1} \tilde{F}'^{\nu\mu} \sin \xi] = 0 \\ \partial_\nu[-(1 - a^2\Box)F'^{\nu\mu} \sin \xi + \tilde{F}'^{\nu\mu} \cos \xi] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \partial_\nu[(1 - a^2\Box)F'^{\nu\mu} \cos \xi + \tilde{F}'^{\nu\mu} \sin \xi] = 0 \\ \partial_\nu[-(1 - a^2\Box)F'^{\nu\mu} \sin \xi + \tilde{F}'^{\nu\mu} \cos \xi] = 0. \end{cases} \quad (115)$$

Como  $\xi$  é uma constante e estamos falando de derivadas parciais, então obtemos:

$$\begin{cases} \cos \xi(1 - a^2\Box)\partial_\nu F'^{\nu\mu} + \sin \xi \partial_\nu \tilde{F}'^{\nu\mu} = 0 \\ -\sin \xi(1 - a^2\Box)\partial_\nu F'^{\nu\mu} + \cos \xi \partial_\nu \tilde{F}'^{\nu\mu} = 0, \end{cases} \quad (116)$$

multiplicamos a primeira equação por  $\cos \xi$ , a segunda por  $\sin \xi$  e subtraímos a segunda da primeira obtemos:

$$\begin{cases} \cos^2 \xi(1 - a^2\Box)\partial_\nu F'^{\nu\mu} + \sin \xi \cos \xi \partial_\nu \tilde{F}'^{\nu\mu} = 0 \\ -\sin^2 \xi(1 - a^2\Box)\partial_\nu F'^{\nu\mu} + \sin \xi \cos \xi \partial_\nu \tilde{F}'^{\nu\mu} = 0 \end{cases} \quad -$$

$$\frac{\quad}{(1 - a^2\Box)\partial_\nu F'^{\nu\mu} = 0.} \quad (117)$$

Esta é uma das equações de Podolsky. Se agora multiplicarmos a primeira por  $\sin \xi$  e a segunda por  $\cos \xi$ , somando ambas encontramos:

$$\begin{cases} \sin \xi \cos \xi(1 - a^2\Box)\partial_\nu F'^{\nu\mu} + \sin^2 \xi \partial_\nu \tilde{F}'^{\nu\mu} = 0 \\ -\sin \xi \cos \xi(1 - a^2\Box)\partial_\nu F'^{\nu\mu} + \cos^2 \xi \partial_\nu \tilde{F}'^{\nu\mu} = 0 \end{cases} \quad +$$

$$\frac{\quad}{\partial_\nu \tilde{F}'^{\nu\mu} = 0.} \quad (118)$$

Recuperamos a segunda equação de Podolsky sem fontes, isto é, recuperamos (104).

#### 5.4 Simetria dual na presença de cargas magnéticas

Como vimos em Maxwell, podemos verificar se a simetria dual surge nas equações de Podolsky com cargas elétricas e magnéticas. Primeiramente vamos escrever as equações de Podolsky com carga magnética:

$$\begin{cases} (1 - a^2 \square) \partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \\ \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} G^\mu. \end{cases} \quad (119)$$

Da mesma forma que fizemos para Maxwell, devemos propor uma transformação dual tanto para o tensor de Faraday e seu dual como para as quadricorrentes magnéticas e elétricas. Sejam estas transformações a seguir:

$$\begin{cases} F^{\nu\mu} = \cos \xi F'^{\nu\mu} + (1 - a^2 \square)^{-1} \sin \xi \tilde{F}'^{\nu\mu} \\ \tilde{F}^{\nu\mu} = -(1 - a^2 \square) \sin \xi F'^{\nu\mu} + \cos \xi \tilde{F}'^{\nu\mu} \\ J^\mu = \cos \xi J'^\mu + \sin \xi G'^\mu \\ G^\mu = -\sin \xi J'^\mu + \cos \xi G'^\mu. \end{cases} \quad (120)$$

Substituindo-se a transformação (120) em (119) obtemos:

$$\begin{cases} (1 - a^2 \square) \partial_\nu [\cos \xi F'^{\nu\mu} + (1 - a^2 \square)^{-1} \sin \xi \tilde{F}'^{\nu\mu}] = \frac{4\pi}{c} [\cos \xi J'^\mu + \sin \xi G'^\mu] \\ \partial_\nu [-(1 - a^2 \square) \sin \xi F'^{\nu\mu} + \cos \xi \tilde{F}'^{\nu\mu}] = \frac{4\pi}{c} [-\sin \xi J'^\mu + \cos \xi G'^\mu], \end{cases} \quad (121)$$

Multiplicando a primeira equação por  $\cos \xi$ , a segunda por  $-\sin \xi$  e somando, ambas as equações obtemos:

$$(1 - a^2 \square) \partial_\nu F'^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J'^\mu.$$

Se agora multiplicarmos a primeira equação de (121) por  $\sin \xi$ , a segunda por  $\cos \xi$  e somarmos as equações obtemos

$$\partial_\nu \tilde{F}'^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} G'^\mu.$$

Isto é, recuperamos a forma das equações de Podolsky com cargas magnéticas (119).

É importante notar que, quando introduzimos a hipótese sobre a existência de monopólos magnéticos, discutimos brevemente a linha de Dirac, ou a existência de dois potenciais ou mesmo a simetria de gauge, nós estávamos trabalhando unicamente com o primeiro par de equações de Podolsky. Agora vimos que o Hodge afeta o segundo par de equações de Podolsky, portanto o Hodge não interferirá nos resultados anteriormente discutidos como o que relacionam a quantização da carga elétrica, por exemplo.

Veremos a seguir que há outras escolhas possíveis para o Hodge. Iniciaremos este estudo sem a necessidade de nos preocuparmos como isso afeta qualquer discussão anterior.

## 5.5 Forma alternativa da simetria dual

Como vimos anteriormente, definimos o tensor de Faraday dual  $\tilde{F}^{\nu\mu}$  (Hodge) a partir do tensor de Faraday  $F^{\nu\mu}$  e a prescrição  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$  e  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ . Mas esta também pode ser escrito através do tensor de Levi-Civita conforme equação (84) para o contravariante, ou (85) para a versão covariante. Uma proposta dada por (BRANDT; FRENKEL; MCKEON, 2016) sugere que o Hodge seja definido a partir do  $\tilde{F}^{\nu\mu}$  conforme:

$$\star F^{\nu\mu} \equiv (1 - a^2 \square) \tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta} (1 - a^2 \square) F_{\alpha\beta}. \quad (122)$$

Chamemos então  $\tilde{F}^{\nu\mu}$  de tensor dual de Faraday e  $\star F^{\nu\mu}$  de Hodge generalizado, podemos então reescrever as equações de Podolsky, inicialmente no vácuo, como se segue:

$$\begin{cases} (1 - a^2 \square) \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0 \\ (1 - a^2 \square)^{-1} \partial_\nu (\star F^{\nu\mu}) = 0 \end{cases}. \quad (123)$$

Como vimos, podemos escrever o tensor de Faraday em função do quadripotencial vetor, mas podemos tentar escrever o novo tensor  $\star F^{\nu\mu}$  em função de um novo quadrivetor potencial  $\star F^{\nu\mu} = \partial^\nu \Lambda^\mu - \partial^\mu \Lambda^\nu$ , conforme feito em (BRANDT; FRENKEL; MCKEON, 2016), e a partir da lagrangiana escrita em função do Hodge verificar que esse novo quadripotencial  $\Lambda$  é o multiplicador de Lagrange. Este novo Hodge juntamente com as equações de transformação dual utilizadas em Maxwell (87) não recuperam as equações de Podolsky (123).

Entretanto, com  $r \gg a$  (sendo  $r$  as distâncias típicas consideradas no problema em questão), vemos que as equações de Podolsky se tornam idênticas às equações de Maxwell. Por outro lado, se verificarmos a solução das equações de Podolsky, feita a substituição da transformação dual (123), veremos que a solução será exata a menos de termos da ordem de  $e^{(-r/a)}$ , isto é, será solução se  $a \ll r$ , que é justamente o caso em que temos apenas as equações de Maxwell.

No caso do potencial, o cálculo do limite é simples:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \phi(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \left( q'_e \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right) = \frac{q'_e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

no entanto para o cálculo da força teremos uma indeterminação:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \left( q_e q'_e \left( \frac{1 - e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|a} \right) \hat{\mathbf{r}} \right),$$

cuja solução obtemos pelo teorema do L'Hoptal:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \left( q_e q'_e \left( \frac{e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a}}{2a^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \right) = \frac{q_e q'_e}{2a^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Em outras palavras, a tentativa de modificar o Hodge e manter as transformações duais de Maxwell para Podolsky, mostra-se imprecisa da mesma ordem que Maxwell é

impreciso em relação a Podolsky no sentido que ao verificar as soluções somente se é recuperada a simetria quando fazemos  $a = 0$ . Detalhes destes cálculos podem ser obtidos em (BRANDT; FRENKEL; MCKEON, 2016). Por outro lado, se quisermos manter a precisão de Podolsky, então se faz necessário modificar as relações de transformação dual acrescentando operadores na transformação.

Como um caso particular, notemos que para a transformação dual proposta em (120), com  $J^\mu = 0$  e  $G^\mu = 0$ , não temos como caso particular a prescrição  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$  e  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ , uma vez que se escolhermos  $\xi = \pi/2$  teríamos  $F^{\nu\mu} \rightarrow \tilde{F}^{\nu\mu}$  e  $\tilde{F}^{\nu\mu} \rightarrow -(1 - a^2\Box)F^{\nu\mu}$ , mas por analogia esperaríamos  $F^{\nu\mu} \rightarrow \tilde{F}^{\nu\mu}$  e  $\tilde{F}^{\nu\mu} \rightarrow -F^{\nu\mu}$ .

Podemos tentar diversas transformações duais sendo que uma possível transformação dual entre  $F^{\nu\mu}$  e  $\star F^{\nu\mu}$ , obtida por inspeção, pode ser:

$$\begin{cases} F^{\nu\mu} = \cos \xi F'^{\nu\mu} + (1 - a^2\Box)^{-2} \sin \xi \star F'^{\nu\mu} \\ \star F^{\nu\mu} = -(1 - a^2\Box)^2 \sin \xi F'^{\nu\mu} + \cos \xi \star F'^{\nu\mu} \end{cases} \quad (124)$$

Substituindo esta nova transformação dual nas equações de Podolsky (123), procedendo de forma similar à feita tanto para Maxwell como para Podolsky, obtemos:

$$\begin{cases} (1 - a^2\Box)\partial_\nu F'^{\nu\mu} = 0 \\ (1 - a^2\Box)^{-1}\partial_\nu \star F'^{\nu\mu} = 0, \end{cases} \quad (125)$$

que são as equações de Podolsky recuperadas. Lembre-se que já foi discutida, no capítulo 4, que as grandezas com linha e sem linha representam pontos de vistas diferentes para o que seria campo elétrico, magnético, cargas magnética e elétrica e agora, de forma generalizada, para o que seria o tensor de Faraday e o que seria o Hodge do tensor de Faraday. O que importa é que a relação que estes dois tensores possuem independe de como eles foram definidos.

É interessante notar que a transformação sugerida (124) não é a única possível. Duas alternativas, que serão obtidas de casos particulares discutidos mais adiante, podem ser:

$$\begin{cases} F^{\nu\mu} = (1 - a^2\Box)^2 \cos \xi F'^{\nu\mu} + (1 - a^2\Box) \sin \xi \star F'^{\nu\mu} \\ \star F^{\nu\mu} = -(1 - a^2\Box)^4 \sin \xi F'^{\nu\mu} + (1 - a^2\Box)^3 \cos \xi \star F'^{\nu\mu} \end{cases} \quad (126)$$

e

$$\begin{cases} F^{\nu\mu} = (1 - a^2\Box)^{-2} \cos \xi F'^{\nu\mu} + (1 - a^2\Box)^{-2} \sin \xi \star F'^{\nu\mu} \\ \star F^{\nu\mu} = -\sin \xi F'^{\nu\mu} + \cos \xi \star F'^{\nu\mu}. \end{cases} \quad (127)$$

Note que ambas as transformações recuperam as equações de Podolsky com o Hodge. Observe que há portanto uma certa liberdade na escolha da transformação.

A liberdade aqui apresentada para a formulação da transformação dual contínua é observada também nas equações de Podolsky sem o Hodge, assim a modificação do

Hodge não nos apresentou, até aqui, nenhum ganho final, sendo apenas uma formulação alternativa.

## 5.6 Hodge generalizado

É importante diferenciar a transformação dual discreta que nos permite obter o tensor  $\tilde{F}^{\nu\mu}$ , a partir do  $F^{\nu\mu}$ , da transformação dual contínua (87). Sendo assim, esta nova visão da simetria dual requer que mudemos o Hodge e a transformação dual, enquanto que nossa proposta anterior sugere mudarmos apenas a transformação dual contínua mantendo assim a definição usual de Hodge.

Com a mudança da definição do Hodge para uma versão generalizada poderíamos supor que teríamos um ganho, simplificando a transformação dual, o que poderia por si só ser uma justificativa para essa generalização.

Instigados por esta possibilidade poderíamos generalizar o Hodge para uma dependência de grau  $n$  com o operador  $(1 - a^2\Box)$ , isto é:

$$\star F^{\nu\mu} \equiv (1 - a^2\Box)^n \tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta} (1 - a^2\Box)^n F_{\alpha\beta}. \quad (128)$$

Tentemos uma transformação dual mais geral, algo como:

$$\begin{cases} (1 - a^2\Box) \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0 \\ (1 - a^2\Box)^{-n} \partial_\nu \star F^{\nu\mu} = 0, \end{cases} \quad (129)$$

o que sugere que as equações de Podolsky sejam modificadas para

$$\begin{cases} F^{\nu\mu} = (1 - a^2\Box)^A \cos \xi F'^{\nu\mu} + (1 - a^2\Box)^B \sin \xi \star F'^{\nu\mu} \\ \star F^{\nu\mu} = -(1 - a^2\Box)^C \sin \xi F'^{\nu\mu} + (1 - a^2\Box)^D \cos \xi \star F'^{\nu\mu}. \end{cases} \quad (130)$$

Se procedermos como anteriormente, substituindo a transformação (130) na equação (129), mas agora impondo que as equações de Podolsky (129) serão recuperadas, com as trocas  $F \rightarrow F'$ ,  $\tilde{F} \rightarrow \tilde{F}'$  e  $\star F \rightarrow \star F'$ , veremos que os expoentes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  devem obedecer as seguintes relações:

$$\begin{cases} B + 1 = -n + D \\ A + 1 = -n + C. \end{cases} \quad (131)$$

Note, por fim, que na solução (124) em particular obtemos, para o sistema (130),

os seguintes valores para os expoentes dos operadores:

$$n = 1 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \\ C = 2 \\ D = 0 \end{cases} \quad (132)$$

o que respeita a condição (131).

No presente trabalho, usamos em grande parte o Hodge como o  $\tilde{F}^{\nu\mu}$ , isto é, trabalhamos com a escolha  $n = 0$  do Hodge generalizado na equação (128) e quando tentamos uma transformação dual na equação de Podolsky, como na equação (120), e a escolha de  $C = -B = 1$  e  $A = D = 0$ . Esta escolha para o Hodge é mais comum na bibliografia e por isso esta foi escolhida aqui, sendo portanto necessário a mudança na escolha da transformação dual.

Vale ressaltar que, como vimos na seção anterior, a definição de Hodge afeta a segunda equação do par de equações de Podolsky, não afetando a equação que relaciona-se com a carga elétrica e portanto não afeta a questão da quantização da carga elétrica. No entanto, se quisermos manter a transformação dual de Maxwell podemos impor que os expoentes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sejam todos nulos: com isso obtemos  $n = -1$ . Assim a escolha do Hodge deveria ser

$$\star F^{\nu\mu} = (1 - a^2 \square)^{-1} \tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta} (1 - a^2 \square)^{-1} F_{\alpha\beta} \quad (133)$$

para permitir que a transformação dual de Maxwell (87) seja válida aqui (Ao contrário se escolhermos  $n = 0$  então  $\star F^{\nu\mu} = \tilde{F}^{\nu\mu}$ ).

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A eletrodinâmica de Maxwell vem se mostrando bastante consistente com as observações, tendo, sem dúvida alguma, uma importância muito grande para a descrição dos eventos eletromagnéticos. Como sabemos, duas das equações de Maxwell possuem simetria de gauge – equações (8-b) e (8-d) – e podem ser obtidas a partir de um calibre adequado, enquanto as outras duas podem ser obtidas a partir de uma lagrangiana – (8-a) e (8-c).

Além destas simetrias, se considerarmos as equações de Maxwell sem qualquer fonte (carga elétrica ou corrente elétrica), percebemos que há uma outra simetria: a simetria dual que nos permite a prescrição  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$  e  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ . Podemos estender esta simetria discreta para uma simetria contínua, a partir de um parâmetro livre  $\xi$ . Esta simetria não aparece nas equações com fonte, apenas surgindo nas equações sem fontes, porém ela pode ser estendida para as equações com cargas desde que supomos a existência de cargas magnéticas, bem como correntes magnéticas.

A hipótese de existência de monopolos magnéticos abre muitas possibilidades devido a dificuldades que ela adiciona nas equações de Maxwell como, por exemplo, não ter mais, a priori, simetria de calibre. Uma série de desdobramentos, como descontinuidade do potencial vetor (linhas de Dirac) ou a introdução de novos potenciais vetor e escalar, gera algumas diferentes interpretações sobre as implicações da existência dos monopolos, porém uma simetria dual contínua surge. Com esta simetria podemos, a partir de duas equações de Maxwell, obter as outras duas.

Apesar do sucesso da eletrodinâmica de Maxwell, alguns resultados apresentados pela eletrodinâmica de Podolsky são bem mais assertivos, tal como ser capaz de explicar o fator  $4/3$  na teoria de Abrahama-Lorentz ou mesmo resultar em um valor finito para a força quando a distância entre duas cargas elétricas são pequenas. Apesar de alguns sucessos teóricos, determinar a validade experimental das equações de Podolsky apresenta certa dificuldade, uma vez que esta eletrodinâmica se diferencia de forma significativa da eletrodinâmica de Maxwell para distâncias inferiores a um fator  $a$  (CUZINATTO et al., 2011).

A simetria dual contínua em Podolsky teve que ser modificada, de forma que, assim como em Maxwell, com apenas um par de equações e a simetria obtemos todas as quatro equações. Introduzimos um Hodge generalizado e vimos finalmente que é possível manter uma simetria dual, tal como em Maxwell, escolhendo adequadamente um Hodge.

Escolher um Hodge qualquer, a partir do Hodge generalizado, não implica em qualquer mudança a respeito das consequências da existência de monopolos magnéticos, pelo menos não a respeito da teoria da quantização de Dirac. Isso porque as equações utilizadas para estudar o monopolo de Dirac foram as duas que não possuem relação com

o Hodge, assim seus resultados permanecem os mesmos.

Existem inúmeros desdobramentos possíveis para a eletrodinâmica de Podolsky e muitos desafios experimentais. Adicionado a isso, a existência de monopolos magnéticos, hipótese necessária para se obter a simetria contínua nas equações de Podolsky e Maxwell, na presença de fontes, não foi verificada até o momento. Embora seja provável a sua inexistência, possui limites experimentais calculados teoricamente bem acima do que somos capazes de realizar em laboratório. Apesar disso, vemos que a existência de monopolos não acarretaria a necessidade de modificarmos a teoria, sendo que poderia ajudar a entender melhor alguns resultados experimentais, como a quantização da carga elétrica.

Assim, ficam inúmeros trabalhos possíveis nesta área, seja na física teórica – por exemplo, o quadripotencial adicional para a parte magnética das cargas – como na experimental, tal como determinar a validade da eletrodinâmica de Podolsky.

## REFERÊNCIAS

- ACCIOLY, A.; MUKAI, H. One and the same route: two outstanding electrodynamicisms. *Brazilian Journal of Physics*, v. 28, n. 1, p. 35–43, 1998.
- ACHARYA, B. et al. Search for magnetic monopoles with the MoEDAL forward trapping detector in 13 TeV proton-proton collisions at the LHC. *Physical Review Letters*, v. 118, n. 6, p. 061801, 2017.
- ASSIS, A. K. *Eletrodinâmica de Weber: Teoria, aplicações e exercícios*. Campinas: Ed. da Unicamp, 1995.
- BRANDT, F.; FRENKEL, J.; MCKEON, D. Dual symmetry in a generalized Maxwell theory. *Modern Physics Letters A*, v. 31, n. 32, p. 1650184, 2016.
- CABRERA, B. First results from a superconductive detector for moving magnetic monopoles. *Physical Review Letters*, v. 48, n. 20, p. 1378, 1982.
- CAPLIN, A. et al. Observation of an unexplained event from a magnetic monopole detector. *Nature*, v. 321, n. 6068, p. 402, 1986.
- CURIE, P. Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnétisme libre. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, v. 3, n. 1, p. 415–417, 1894.
- CUZINATTO, R. et al. How can one probe podolsky electrodynamicisms? *International Journal of Modern Physics A*, v. 26, n. 21, p. 3641–3651, 2011.
- CUZINATTO, R.; MELO, C. de; POMPEIA, P. Second order gauge theory. *Annals of Physics*, v. 322, n. 5, p. 1211–1232, 2007.
- DIRAC, P. A. M. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London A*, v. 133, n. 821, p. 60–72, 1931.
- FLEMING, H. Two theorems by Helmholtz. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 23, n. 2, p. 155–158, 2001.
- FRENKEL, J. 4/3 problem in classical electrodynamicisms. *Physical Review E*, v. 54, n. 5, p. 5859, 1996.
- FRENKEL, J. *Princípios de eletrodinâmica clássica*. São Paulo: Edusp, 2005.
- FRENKEL, J.; SANTOS, R. The self-force of a charged particle in classical electrodynamicisms with a cutoff. *International Journal of Modern Physics B*, v. 13, n. 03, p. 315–324, 1999.
- GALVAO, C. A.; PIMENTEL, B. The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamicisms. *Canadian Journal of Physics*, v. 66, n. 5, p. 460–466, 1988.
- GRATUS, J.; PERLICK, V.; TUCKER, R. W. On the self-force in Bopp–Podolsky electrodynamicisms. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 48, n. 43, p. 435401, 2015.

- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. Nova Jersey: Prentice Hall, 1999.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentals of Physics*. Nova Jersey: WILEY, 2003.
- HOOFT, G. t. Magnetic monopoles in unified theories. *Nuclear Physics B*, v. 79, n. CERN-TH-1876, p. 276–284, 1974.
- HUBER, M. et al. Limit on the flux of cosmic-ray magnetic monopoles from operation of an eight-loop superconducting detector. *Physical Review Letters*, v. 64, n. 8, p. 835, 1990.
- JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2012.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Teoria do campo*. São Paulo: Hemus, 2004.
- MIGNACO, J. A. Electromagnetic duality, charges, monopoles, topology,... *Brazilian Journal of Physics*, v. 31, n. 2, p. 235–246, 2001.
- NAKAMURA, K.; GROUP, P. D. et al. Review of particle physics. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, v. 37, n. 7A, p. 075021, 2010.
- PANOFSKY, W. K.; PHILLIPS, M. *Classical electricity and magnetism*. North Chelmsford: Courier Corporation, 2005.
- PARKER, E. N. The origin of magnetic fields. *The Astrophysical Journal*, v. 160, p. 383, 1970.
- PODOLSKY, B. A generalized electrodynamics part i - non-quantum. *Physical Review*, v. 62, n. 1-2, p. 68, 1942.
- POLYAKOV, A. M. Particle spectrum in quantum field theory. In: *30 Years Of The Landau Institute – Selected Papers*. Singapura: World Scientific, 1996. p. 540 – 541.
- PRICE, P. et al. Evidence for detection of a moving magnetic monopole. *Physical Review Letters*, v. 35, n. 8, p. 487, 1975.
- PRICE, P. et al. Further measurements and reassessment of the magnetic-monopole candidate. *Physical Review D*, v. 18, n. 5, p. 1382, 1978.
- REITZ, J.; MILFORD, F.; CHRISTY, R. *Fundamentos da teoria eletromagnética, tradução R. B. Sander e C.* Rio de Janeiro: [s.n.], 1982.
- SANTOS, R. P. *Alguns aspectos da teoria clássica do monopolo magnético de Dirac*. 70 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Espírito Santo, Espírito Santo, 1982.