UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

GABRIEL GOMIDES PIVA

EFEITOS DA TOPOLOGIA DA REDE EM DINÂMICAS SOCIAIS

LAVRAS – MG

2018

GABRIEL GOMIDES PIVA

EFEITOS DA TOPOLOGIA DA REDE EM DINÂMICAS SOCIAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Fabiano Lemes Ribeiro
Orientador

Profa. Dra. Angélica Sousa da Mata
Coorientadora

LAVRAS – MG

2018

Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos

da Biblioteca Universitária da UFLA

Piva, Gabriel Gomides
Efeitos da Topologia da Rede em Dinâmicas Sociais / Efeitos da Topologia da Rede em Dinâmicas Sociais / Gabriel Gomides Piva. – Lavras : UFLA, 2018.
81 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)-Universidade Federal de Lavras–Universidade Federal de Lavras, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Fabiano Lemes Ribeiro.
Bibliografia.

1. Redes Complexas. 2.Dinâmica Social. 3.Modelo do Votante. I.Ribeiro, Fabiano. II. da Mata, Angélica Sousa. III. Título

GABRIEL GOMIDES PIVA

EFEITOS DA TOPOLOGIA DA REDE EM DINÂMICAS SOCIAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 06 de Julho de 2018.

Prof. Dr. Fabiano Lemes Ribeiro UFLA
Profa. Dra. Angélica Sousa da Mata UFLA
Profa. Dra. Tatiana Cardoso Ramos UFLA
Prof. Dr. Fabricio Luchesi Forgerini UFSB

Prof. Dr. Fabiano Lemes Ribeiro
Orientador

Angélica Sousa da Mata
Profa. Dra. Angélica Sousa da Mata
Co-Orientadora

LAVRAS – MG
2018

Dedico o texto à Tatiane Gomides Piva e meus pais

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, é importante agradecer à UFLA, ao Programa Institucional de Bolsas da UFLA que financiou a bolsa de mestrado e às agências de fomento CAPES, FAPEMIG, que, graças à elas, temos cluster de computação de alto desempenho. Todos esses elementos foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Talvez um dos maiores desafios desta tese foi escrever os agradecimentos a todos que foram primordiais nessa trajetória em poucas páginas e palvras, mas como a rotina constante desta vida é sempre superar os desafios, este é mais um a ser enfrentado. Acima de tudo, devo agradecimentos à minha família, em especial, aos pais e à minha irmã, cujo nome está na dedicatória desta dissertação. Graças ao apoio e ao amor deixado por eles, pude continuar o mestrado nesta universidade.

Agradeço também ao Fabiano Lemes Ribeiro, orientador desta dissertação, que já me acolheu desde o dia do processo seletivo do mestrado. Fabiano sempre trouxe sugestões bastante atualizadas, com ideias de inovação e modernidade. Não só na orientação, mas também em nossas conversas à respeito das afinidades musicais e literárias.

À Angélica Sousa da Mata, coorientadora desta dissertação, que sempre esteve disposta a atender qualquer tipo de dúvidas e que me acolheu durante a ida do Fabiano para Londres. Sua ajuda foi crucial para o desenvolvimento deste trabalho. Não só na questão profissional, mas pessoal também. Trata-se de uma pessoa sempre compreensiva e que se preocupa pessoalmente com seu orientado.

Aos colegas, que, além de compartilhar informações sobre suas respectivas áreas, sempre tiveram uns aos outros como família.

Ao corpo docente, em especial à Tatiana Ramos Cardoso, membro desta banca, cuja contribuição em outros trabalhos é crucial para o desenvolvimento do departamento.

Por fim, devo agradecer à banca desta dissertação pela sua disponibilidade em participar da defesa desta dissertação.

RESUMO

Ferramentas de Física Estatística e de Sistemas Complexos têm sido amplamente utilizadas para modelar sistemas com uma grande quantidade de elementos que são considerados como microscópicos gerando fenômenos macroscópicos não triviais. Um exemplo é o modelo do votante que consiste em estudar, dentre varias outras coisas, o consenso de opiniões entre pessoas numa dinâmica de votação. Os agentes do sistema são pessoas dotadas de uma opinião (A ou B, por exemplo) e, por meio da interação com os seus contatos na rede, podem mudar de opinião e o estado de equilíbrio é atigindo quando todas as pessoas passam a ter a mesma opinião, isto é, chegam ao consenso. Este modelo já foi amplamente estudado em redes regulares, cuja solução analítica é conhecida e também em redes complexas heterogêneas, nas quais teorias de campo médio e simulações numéricas mostram o comportamento não trivial deste modelo e como a heterogeneidade da rede influencia na dinâmica. Nosso objetivo é investigar como outras características mais realistas de redes sociais, como distância geográfica, afinidade política e/ou econômica e também a habilidade de convencer as pessoas, poderiam influenciar na dinâmica do modelo. Nossos resultados mostram que, a transição topológica na rede devido à inclusão da distância geográfica entre os nós altera, significativamente a dinâmica do modelo do votante. Observamos que a relação entre o tempo de consenso e o tamanho do sistema muda de comportamento a medida em que a distância espacial interfere cada vez mais na distribuição de conectividade. Nosso trabalho possui um forte apelo para descrever situações reais, por isso, mostraremos alguns resultados em redes reais, como o Facebook, rede de colaboração de Atores, etc.

Palavras-chave: Modelo do Votante, Dinâmica Social, Redes Complexas, Redes Reais

ABSTRACT

Statistical physics and Complex Systems tools has been widely used for modeling several systems with a large number of elements that interact with each other ,and whose interaction causes non-trivial phenomena . An example is the voter model that consists of studying, among others properties, opinion consensus in a voting dynamics. The agents to system can represent people that have opinion (A or B, for instance) and, throught the interaction with networkscontacts, they can change their opinion and equilibrium states is reached when all peoples have the same opinion, i.e., consensus is achieved. Such a model has already widely studied in lattices networks, whose solution is known and also in heterogeneous substrates, in which the mean field theories and numerical simulations show a non-trivial behavior and how the network heterogeneity influences in the voter dynamics. Our goal is investigate how other features more realistics in present social networks can influence the dynamics of voter model. We include in our model the geographic distance among the nodes, political and economic affinity and also ability to convince others. Our preliminary results show that the geographic distance modifies the connectity distribuition of the network and this change influencies directly the behavior of consensus time as function of size of system. Our work has a strong appeal to describe real situations.

Keywords: Voter Model, Social Dynamics, Complex Networks, Real Networks

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – As pontes de Köningsberg da Rússia. 12
Figura 2.2 – Representação em grafos das pontes de Köningsberg. 13
Figura 2.3 – Distribuições das redes homogênea e heterogênea 15
Figura 2.4 – Matriz de adjacência. 16
Figura 2.5 – Grafo completo com $N = 11$ sítios e $L_{max} = 55$ 17
Figura 2.6 – Coeficiente de agregação 19
Figura 2.7 – Correlação de graus nos regimes 21
Figura 2.8 – Distribuição de graus para as redes **(A)** colaboração de atores... 23
Figura 2.9 – Distribuição de conectividade da rede Barabàsi-Albert. 25
Figura 2.10 – Correlação de graus da rede Barabàsi-Albert de tamanho $N = 10^4$... 26
Figura 2.11 – Distribuição de conectividade da rede Bianconi-Barabàsi... 27
Figura 2.12 – Distribuição da rede de afinidade... 29
Figura 2.13 – Distribuição de conectividade para diferentes α_G... 32
Figura 2.14 – Distribuição de conectividade do modelo de Nunes *et. al.* 34
Figura 2.15 – Distribuição de conectividade do modelo de Brito *et. al.* 34
Figura 3.1 – Rede estrela 37
Figura 3.2 – As diferentes redes regulares $d-$ dimensionais. 38
Figura 3.3 – Tempo de Consenso para as redes unidimensional e Barabàsi-Albert. 46
Figura 3.4 – Probabilidade de saída para a rede unidimensional e BA 46
Figura 4.1 – Correlação de grau das redes com Métrica 49
Figura 4.2 – Coeficiente de Pearson em Função de α_A. 50
Figura 4.3 – Modelo do Votante na rede BA com métrica. 51
Figura 4.4 – Aproximação de campo médio heterogênea na rede BA com métrica 52
Figura 4.5 – Probabilidade de saída para a rede BA com métrica. 53
Figura 4.6 – Modelo do Votante na rede de afinidade com métrica. 53
Figura 4.7 – Aproximação de campo médio homogênea na rede de Afnidade com Métrica. 54
Figura 4.8 – Probabilidade de saída em uma rede de afinidade com métrica. 55
Figura 4.9 – Modelo do Votante na rede de Bianconi-Barabàsi com métrica. 56
Figura 4.10 – Aproximação de campo médio homogênea na rede Bianconi-Barabàsi com Métrica 57
Figura 4.11 – Probabilidade de saída para rede Bianconi-Barabàsi com Métrica. 58

Figura 4.12 – Tempo de consenso em função de α_A. 58
Figura 4.13 – Influência do expoente da distância espacial (α_A) 59
Figura 4.14 – Comparação do tempo de consenso. 59
Figura 5.1 – Distribuição de conectividade da rede dos perfil de figuras públicas. 62
Figura 5.2 – Distribuição de conectividade das redes de pefil de companias do *Facebook*. 63
Figura 5.3 – Distribuição de conectividade das redes de diferentes perfis de Facebook. . 64
Figura 5.4 – Correlação de graus da rede do perfil de companias. 65
Figura 5.5 – Correlação de graus para rede de perfil político. 66
Figura 5.6 – Correlação de graus para rede de perfil de figura pública. 67
Figura 5.7 – Distribuição de conectividade de redes reais. 68
Figura 5.8 – Correlação de Graus de redes reais 69
Figura 5.9 – Magnetização média em função do passo de tempo t na rede de perfil político 69
Figura 1 – Grafo bipartido completo $K_{a,b}$. Referência: (SOOD, 2005), adaptado. . . . 80

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9
2 AS REDES COMPLEXAS 12
2.1 Conceitos e Definições Básicas 12
2.2 Modelos de Redes 21
2.2.1 Redes Aleatórias 21
2.2.2 O Modelo de Barabàsi-Albert 23
2.2.3 Modelo de Barabàsi-Bianconi 26
2.2.4 Modelo de Afinidade 27
2.3 Redes com Métrica Espacial 30
2.3.1 Modelo Natal 30
2.3.2 Outros modelos com Métrica 32
3 MODELO DO VOTANTE EM REDES COMPLEXAS 36
3.1 Definições Básicas 36
3.2 Modelo do Votante na Rede Regular 38
3.3 Aproximação de Campo Médio em Redes Heterogêneas 40
3.3.1 Aproximação de Campo Médio Simples 41
3.3.2 Aproximação de Campo Médio Heterogênea de Pares 44
3.4 Simulações Numéricas 45
4 O MODELO DO VOTANTE EM REDES COMPLEXAS COM MÉTRICA . 48
4.1 Correlação de Graus das Redes com Métrica 48
4.2 Modelo do Votante nas Redes com Métrica Espacial 50
5 ANÁLISE EM REDES REAIS 61
5.1 Distribuição de Conectividade e correlação de graus 61
6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS 71
REFERÊNCIAS 74
APENDICE A – Estatística Não Extensiva de Tsallis 78
APENDICE B – Modelo do Votante no Grafo Bipartido. 80

1 INTRODUÇÃO

A Física Estatística tem atraído atenção de muitos pesquisadores por ser uma ferramenta que pode ser implementada em diversas outras áreas de conhecimento como Biologia (SCHNEIDER; MARTINS; AGUIAR, 2016), Sociologia (CROKIDAKIS; FORGERINI, 2010), Epidemiologia (COTA; MATA; FERREIRA, 2018) e Economia (OBIZHAEVA; WANG, 2013). Podemos aplicar as técnicas da física estatística para estudar diversos sistemas que envolvem constituintes elementares e, cujas interações dão origem a fenômenos coletivos. Por isso, tem crescido o número de trabalhos envolvendo modelagem computacional de sistemas interdisciplinares, utilizando os métodos da Física Estatística. (RIBEIRO et al., 2017; RIBEIRO; SANTOS; MATA, 2017; MOGHADAS et al., 2017; MATA; FERREIRA, 2013; DORNELAS; RAMOS; ANTENEODO, 2018; MOINET; PASTOR-SATORRAS; BARRAT, 2018)

Tradicionalmente, estudamos os constituintes como partículas que obedecem à leis físicas bem definidas. Quando estendemos nossos estudos a outros sistemas distantes do domínio da Física tradicional, isso não acontece, pois os interagentes mais elementares podem possuir comportamentos não triviais. Um exemplo mais claro é o estudo de fenômenos sociais. A unidade elementar de uma sociedade é um ser humano e não conseguimos modelar seu comportamento por uma lei física quando a análise é feita de forma individual. Por outro lado, a sociedade como um todo pode ser caracterizada por alguns comportamentos coletivos (BUCHANAN, 2007). Cabe então à Física Estatística usar uma abordagem para compreender os fenômenos macroscópicos dos comportamentos sociais, relacionando-os aos efeitos coletivos que surgem via interação de indivíduos.

Uma dificuldade surge quando buscamos entender as dinâmicas sociais utilizando a Física Estatística. Por exemplo, em teoria cinética dos gases (CALLEN, 1998), átomos ou moléculas podem ser considerados como simples objetos elementares de estudo por possuir comportamentos bem conhecidos porém com efeitos macroscópicos não triviais devido ao grande número de interagentes. Já em um sistema social, diferentemente de átomos e moléculas, as pessoas possuem diferenças de comportamentos de tal modo que não é possível conhecer precisamente a dinâmica em unidades individuais nem na interação entre elas em pequena escala. No entanto, em grande escala surgem padrões regulares como o consenso de opiniões em uma dinâmica simples de votação, por exemplo. Como esses agentes possuem comportamentos não triviais, é impossível descrever a dinâmica social em pequena escala com o uso de poucos parâmetros e leis simples. Porém, em escala macroscópica, podemos desprezar detalhes microscópi-

cos uma vez que eles não alteram significativamente a dinâmica de coletividade. Mencionamos os fenômenos sociais, mas isso também se aplica a outros sistemas que envolvem interagentes com comportamentos não triviais, como, por exemplo, no modelo proposto por Clifford (CLIFFORD; SUDBURY, 1973), que consiste em modelar a disputa entre duas espécies em um território limitado. Dizemos que o sistema entra em equilíbrio ou consenso quando apenas uma das espécies consegue sobreviver e domina todo o território. A formação de linguagem por competição (CARIDI et al., 2013) também é um exemplo de interação entre agentes, pessoas, que dá origem a um fenômeno não trivial: o surgimento de uma linguagem dominante. Na maioria dos sistemas, os comportamentos macroscópicos importantes de serem analisados estão relacionados com características universais, determinadas por leis de conservação e propriedades de simetria. Quando um conjunto de modelos compartilham as mesmas propriedades de simetria independente dos detalhes macroscópicos das regras da dinâmica, podemos dizer que eles pertencem à mesma classe de universalidade (HENKEL; PLEIMLING, 2011). Todos os exemplos que foram citados acima pertencem à mesma classe de universalidade do modelo do Votante, processo dinâmico que é assunto principal desta dissertação.

O modelo do votante é um modelo estocástico formado por uma população de agentes que pode estar em diferentes estados. Por exemplo, numa dinâmica de eleição, cada indivíduo poderia estar em um estado A, B, C representando respectivamente, a intenção de votar nos candidatos A, B, C. Através da dinâmica de interação os agentes copiam estados de seus vizinhos. A questão básica de qualquer modelo estocástico desse tipo é: qual a probabilidade de se chegar a um equilíbrio (consenso, no jargão de dinâmica social)? É possível chegar a uma situação final onde elementos com diferentes estados podem coexistir? Como o equilíbrio é alcançado e qual o tempo gasto para atingí-lo?

O tipo de interação entre os elementos do sistema e a topologia da rede na qual o sistema é modelado influenciam diretamente no estado final da dinâmica e também na maneira como este estado final é atingido. Já existem diversos estudos que analisaram a influência da dimensão em redes regulares (FRACHEBOURG; KRAPIVSKY, 1996; CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009) e a heterogeneidade de redes complexas (SOOD, 2005; SOOD; ANTAL; REDNER, 2008; VÁZQUEZ; PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2002; PUGLIESE; CASTELLANO, 2009) na determinação do consenso no modelo do votante.

A implementação do modelo do votante se torna interessante quando usamos as redes heterogêneas como substrato e a resposta do sistema são comportamentos não-triviais emergen-

tes. Por esse motivo, as soluções analíticas não são diretas e devem ser construídas por aproximações de campo médio. Por isso a maioria dos trabalhos investigam o modelo do votante em redes complexas descorrelacionadas (SOOD, 2005; SOOD; ANTAL; REDNER, 2008), como na rede de Barabàsi-Albert (BARABÁSI; ALBERT, 1999). Porém, a maioria das redes reais, além de serem heterogêneas, podem apresentar outras propriedades relevantes como correlação entre os elementos do sistema. Além disso, na natureza é possível encontrar sistemas em que a distância espacial entre os agentes exerça um papel importante. Outras propriedades também poderiam ser consideradas, como a afinidade entre os elementos do sistema ou ainda a influência que eles exercem uns sobre os outros. Modelos de redes complexas mais recentes incluem esses parâmetros (SOARES et al., 2005; BRITO, 2012; NUNES et al., 2017). Este trabalho propõe as seguintes contribuições: usar essas redes como substrato do modelo do votante e analisar como o comportamento macroscópico pode ser influenciado pela distância espacial e pelas outras propriedades aqui mencionadas. Além disso, vamos fazer uma comparação com as redes reais.

O texto está dividido da seguinte maneira: os primeiros dois capítulos tratam de uma revisão de literatura sobre redes complexas e do modelo do votante. No capítulo 2 revisamos alguns conceitos básicos de redes complexas e mostramos diferentes topologias de redes incluindo a métrica espacial. No terceiro capítulo explicamos a implementação do modelo do votante e reproduzimos alguns cálculos analíticos da literatura utilizando a aproximação de campo médio. Também mostramos simulações em redes regulares e na rede de Barabàsi-Albert para comparar com os resultados analíticos. No quarto capítulo apresentaremos os resultados inéditos e originais do modelo do votante em redes complexas incluindo novas propriedades como a métrica espacial, afinidade, etc. Vamos comparar com os resultados analíticos já previstos na literatura com objetivo de checar seus limites de validade. No quinto capítulo faremos uma breve comparação das redes reais com as redes estudadas ao longo deste trabalho. Por fim, no último capítulo, apresentamos as conclusões e perspectivas do trabalho. [1]

[1] É importante ressaltar que todas as simulações dos capítulos 2 e 3 são originais. Porém não fazem parte dos resultados principais da dissertação pois reproduzem resultados já conhecidos na literatura.

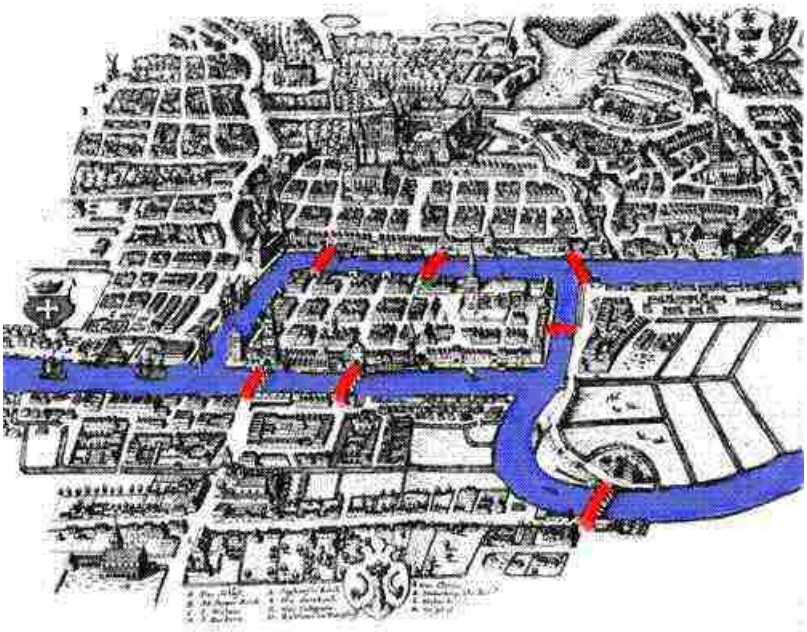
2 AS REDES COMPLEXAS

Reservamos este capítulo para abordar os conceitos básicos em teoria de redes complexas. Para estudá-las, faz-se necessário o entendimento de algumas propriedades gerais e também mostrar exemplos de redes complexas que apresentam diferentes topologias.

2.1 Conceitos e Definições Básicas

A teoria de grafos surgiu com o matemático Leonard Euler em 1735 (DOROGOVTSEV; MENDES, 2004) ao resolver o seguinte problema: se partirmos do centro da cidade de Königsberg (Rússia) como podemos atravessar sete pontes (Figura 2.1) passando apenas uma vez por cada uma delas?

Figura 2.1 – As pontes da antiga cidade de Köningsberg na Rússia. [1]

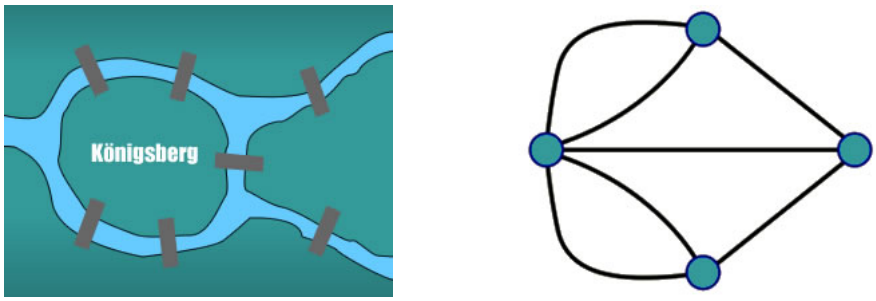


O problema requer uma abstração matemática. Para tanto, Euler o representou de uma maneira simplificada através de um mapa, esquematizado como na figura 2.2, onde os vértices correspondem às diferentes partes da cidade e as arestas às pontes, sem considerar a distância real. Esta representação é denominada *grafo*. Assim, o problema consiste em determinar se existe um caminho onde é possível chegar a todos os nós (ou vértices) passando apenas uma vez por cada uma das arestas, retornando ao ponto de origem.

[1] Figura extraída da referência <http://www.uc.pt/fctuc/dmat>. Último acesso: 01/03/2018.

Se a solução deste problema existe, ela deve estar relacionada com as propriedades intrínsecas de um grafo. A mais imediata é o número de arestas (pontes) de cada vértice, que denotaremos daqui por diante como *grau*. A solução deste problema só é possível se o grafo é euleriano. Segundo o teorema de Euler-Hierholzer (HIERHOLZER; WIENER, 1873), um grafo conexo G é dito euleriano se todos os vértices possuem grau par. Por exemplo, se um vértice possui exatamente duas ligações, é possível entrar por uma ponte e sair por outra. Se o número de ligações for maior que dois, mas um número par, a solução continua a mesma. Por outro lado, é impossível atravessar uma ponte apenas uma vez partindo de vértices com grau ímpar a menos que o caminho termine antes, isto é, que não atravessamos todas as pontes. Neste caso o grafo conexo não é euleriano. Com isso, Euler conseguiu mostrar que não existe um caminho no qual se atravessa todas as pontes apenas uma vez. (CALDARELLI, 2007).

Figura 2.2 – Representação em grafos das pontes de Köningsberg. A figura da esquerda representa o centro da antiga cidade russa de Königsberg e à direita está a representação em formato de grafo onde os pontos (vértices) são as partes da cidade e as arestas são as pontes. [2]



Em termos mais gerais, *rede* é qualquer sistema que admite uma representação abstrata por meio de grafos onde os vértices representam os elementos (frequentemente encontrados na literatura com o termo *agentes*) e as arestas as ligações ou interações entre esses elementos. As redes podem ser usadas como substratos em sistemas complexos com grandes quantidades de indivíduos que interagem entre si. (BARRAT; BARTHELEMY; VESPIGNANI, 2008). Por isso, a ciência de redes tem sido usada em campos interdisciplinares como a Biologia, Física, Computação, Sociologia, Economia etc. [3].

Para descrever as redes, lançamos mão dos conceitos básicos em teoria de grafos, como faremos a seguir. Grafos são compostos por um conjunto não vazio de vértices V, um conjunto de arestas E e é construído pela seguinte relação: $E \rightarrow P(V)$, onde P associa a aresta E a um elemento de V. Esse conjunto possui uma dimensão de N vértices. Sendo assim, iremos de-

[2] Figuras extraídas da referência <http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-o-enigma-das-pontes-de-konigsberg-que-instigou-geometria.html>

[3] Ref: <http://networksciencebook.com/chapter/2>

signar o tamanho do sistema com N correspondentes vértices (GALHARDO, 2006; BARRAT; BARTHELEMY; VESPIGNANI, 2008).

Uma identidade fundamental e simples para reconhecer a estrutura topológica de rede é a distribuição de conectividade, $P(k)$, pois o grau de conectividade k é a medida mais utilizada em sistemas reais uma vez que ele apresenta um papel importante em processos dinâmicos, como veremos no capítulo 3. A distribuição $P(k)$ é dada pela probabilidade de sortear um sítio aleatoriamente e ele possuir grau k. Em uma rede de tamanho N, a distribuição pode ser construída pelo histograma normalizado [4]

$$P(k) = \frac{N_k}{N}, \tag{2.1}$$

onde N_k é a quantidade de sítios com grau k.

Além da distribuição $P(k)$, podemos calcular os n-ésimos momentos dessa distribuição (BARRAT; BARTHELEMY; VESPIGNANI, 2008) da seguinte forma:

$$\langle k^n \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k^n P(k). \tag{2.2}$$

Para diferentes ordens, o $n-$ésimo momento assume uma grandeza específica. O primeiro momento define a conectividade média e o segundo está relacionado com a variância:

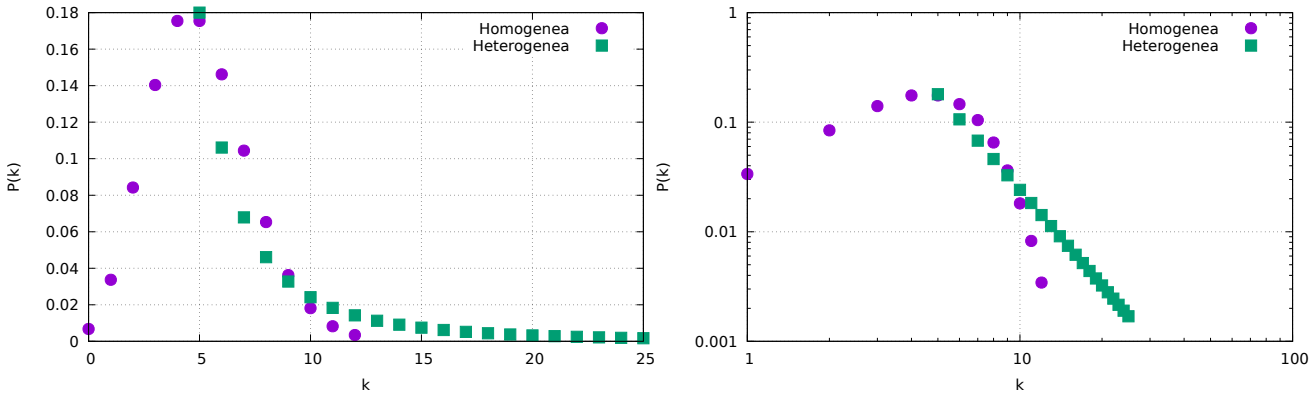
$$\sigma_k = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2} \tag{2.3}$$

que define uma escala típica na distribuição. Podemos usar o primeiro e o segundo momento para categorizar as redes em duas classes(como veremos na equação 2.7): a primeira é composta pelas *redes homogêneas* com distribuição de Poisson. No limite assintótico de k a distribuição cai rapidamente para zero, ou seja, não existem nós muito conectados, chamados *hubs*. A segunda classe abriga as *redes heterogêneas* com distribuições tipo lei de potência, dadas por $P(k) \sim k^{-\gamma}$ (PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2007). A heterogeneidade se dá com a maioria de sítios menos conectados e com poucos sítios mais conectados (daqui por diante, denotaremos como *hub*). A figura 2.3 mostra a diferença de comportamento dessas duas classes. Estes sítios *hubs* aparecem na rede com uma probabilidade pequena mas significativa, princi-

[4] Ref: <http://networksciencebook.com/chapter/2>. Histograma normalizado é a distribuição de probabilidade de N_k nós possuir grau k.

palmente porque desempenham um papel importante no estudo de processos dinâmicos como propagação de doenças ou informações (ZHANG et al., 2010).

Figura 2.3 – Distribuições das redes homogênea e heterogênea na escala linear (esquerda) e log-log (direita). Ambas as distribuições tem grau médio $\langle k \rangle = 5$.



Como as distribuições são funções bem comportadas, podemos, para simplicidade de cálculos, substituir a soma discreta da equação (2.2) pela integral

$$\langle k^n \rangle = \int_m^{k_c} k^n P(k) dk \tag{2.4}$$

onde m é o grau mínimo possível da rede e k_c o grau máximo (BARRAT; BARTHELEMY; VESPIGNANI, 2008). Usando este método e a expressão (2.3), a variância da distribuição de Poisson é finita e a rede possui uma escala típica dada por $\sigma_k \approx \langle k \rangle^{1/2}$. Por este motivo, redes homogêneas também recebem a nomenclatura de *redes com escala*. No caso da rede heterogênea, o primeiro e segundo momentos são, respectivamente:

$$\langle k \rangle = A \lim_{k_c \to \infty} \int_m^{k_c} kP(k) = A \lim_{k_c} \int_m^{k_c} k^{1-\gamma} = A \lim_{k_c \to \infty} \left. \frac{k^{2-\gamma}}{2-\gamma} \right|_m^{k_c} \approx \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2} m \tag{2.5}$$

$$\langle k^2 \rangle = A \lim_{k_c \to \infty} \int_m^{k_c} k^{2-\gamma} \approx \lim_{k_c \to \infty} k_c^{3-\gamma} \tag{2.6}$$

No limite assintótico acima, para valores de $2 < \gamma < 3$ o segundo momento diverge e, consequentemente, $\sigma_k \to \infty$. Isso significa que não existe uma escala típica para redes heterogêneas. À partir daqui usaremos, portanto, a nomeclatura *redes livres de escala* para designá-las.

A heterogeneidade da rede pode ser caracterizada por um parâmetro κ

$$\kappa = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \tag{2.7}$$

Como o segundo momento diverge, $\kappa \to \infty$ descreve redes livres de escala e κ finito ($\kappa \sim \langle k \rangle$) redes homogêneas. Na prática sistemas reais são finitos e podemos considerar que $\kappa >> \langle k \rangle$ caracterizam redes heterogêneas. (PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2007).

O parâmetro κ é relevante para estudar processos dinâmicos. Mostraremos ao longo deste trabalho que ele aparece no modelo do votante para estudar o tempo de consenso, que está relacionado com a heterogeneidade da rede (SOOD; ANTAL; REDNER, 2008). Além deste exemplo, um outro interessante é o modelo epidêmico em redes descorrelacionadas, onde o parâmetro κ está relacionado ao limiar epidêmico, um valor crítico na transição de fase entre a fase endêmica, onde existe uma fração de indivíduos infectados e a fase absorvente, onde a epidemia não sobrevive. (PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2001).

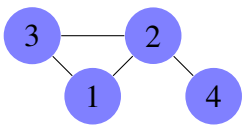
Uma outra identidade usada para estudar as redes é a matriz de adjacência A_{ij} que relaciona as ligações entre os sítios. Através dessa estrutura, podemos ter uma descrição mais completa de uma rede, uma vez que é necessário mapear as ligações e os sítios para estudar um dado problema. Matematicamente, a matriz de adjacência é dada por (BARRAT; BARTHELEMY; VESPIGNANI, 2008):

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \ j \text{ aponta para } i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Apenas em redes não-direcionadas A_{ij} é simétrica, ou seja, $A_{ij} = A_{ji}$ (figura 2.4).

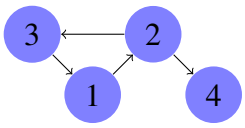
Figura 2.4 – Matriz de adjacência. Em (a) temos a representação de uma rede não-direcionada e sua respectiva matriz de adjacência. Em (b) a mesma representação para uma rede direcionada.

(a)



$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)



$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de adjacência também é útil para determinar outras identidades das redes. Uma delas é a conectividade, que se relaciona com os elementos desta matriz como:

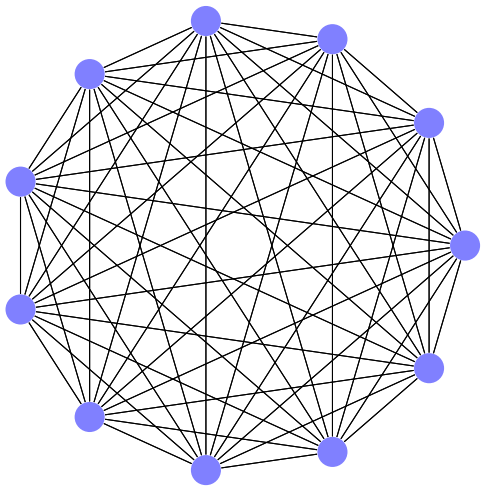
$$k_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} = \sum_{j=1}^{N} A_{ji} \tag{2.9}$$

para redes não-direcionadas.

As redes reais variam na quantidade de sítios N e no número de ligações. A maioria delas possuem um número grande de interagentes, mas não são grafos completos (figura 2.5), rede onde cada sítio se conecta com todos os outros existentes. A quantidade total de arestas em um grafo completo é dada por: (THOMAS, 2007)

$$L_{max} = \frac{N(N-1)}{2}. \tag{2.10}$$

Figura 2.5 – Grafo completo com $N = 11$ sítios e $L_{max} = 55$. Todos os elementos da matriz de adjacência são $A_{ij} = 1$, exceto para a diagonal principal.



Em redes reais temos $L << L_{max}$. Por exemplo, a rede de internet possui uma quantidade $N = 192244$ de pontos de acessos, a maioria deles conectados a um computador central. O total de conexões é $L = 609066 << L_{max}$, em que $L_{max} \approx 1,8 \times 10^{10}$ se todos os pontos fossem conectados entre si. Assim, dizemos que as redes reais são esparsas. Consequentemente, a matriz de adjacência também é esparsa, ou seja, temos poucos elementos $A_{ij} = 1$ [5]. Essa propriedade possui a vantagem de não ser necessário o armazenamento de todas as informações em uma matriz, uma vez que a maioria dos elementos são nulos. Então para estudar computacionalmente o

[5] Dados retirados da fonte:<http://networksciencebook.com/2real-networks>. Última data de acesso: 01/03/2018

problema, basta que as informações sejam armazenadas em uma lista que contém a informação dos sítios conectados. Isso economiza no gasto de memória computacional, mas, por outro lado, o gasto de tempo na verificação dos dados é feita em tempo constante se usarmos a matriz de adjacência.

Menor Caminho Médio e Coeficiente de Agregação *(Clustering)*

Uma das propriedades importantes encontrada em redes é o caminho que conecta dois vértices quaisquer definindo a distância entre eles. Neste caso, não trata-se da distância euclideana, mas de quantos vértices precisam ser visitados para chegar ao vértice desejado. A distância entre os vértices i e j é o número de ligações que existe no menor caminho que os conecta, d_{ij}. Caso dois vértices estejam desconectados, $d_{ij} = \infty$. Para calcular d_{ij} usamos o algoritmo de busca em largura (do inglês *Breadth-First Search - BFS*) que consiste em partir do vértice raiz i e explorar todos os vértices vizinhos. Então, para cada um desses vértices mais próximos, exploramos os seus vértices vizinhos inexplorados e assim por diante, até que ele encontre o alvo j da busca. (CORMEN et al., 2009). A distância d_{ij} é a quantidade de vértices acessados da raíz até o alvo.

Em redes, uma definição de distância se dá pelo menor caminho médio, definido como a média dos menores caminhos d_{ij} entre os sítios i e j da rede

$$\langle d \rangle = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1, i \neq j}^{N} d_{ij}. \tag{2.11}$$

onde o termo de coeficiente $1/N(N-1)$ leva em conta todos os possíveis caminhos entre os pares de vértice. Na maioria das redes aleatórias, o menor caminho médio escala com o logaritmo do tamanho da rede N ($\langle d \rangle \sim \log(N)$). Em outras palavras, o fato de dois vértices estarem conectados por meio de um caminho pequeno é o que chamamos de efeito de mundo pequeno (BARRAT; BARTHELEMY; VESPIGNANI, 2008; MATA et al., 2011; GALHARDO, 2006).

O coeficiente de agregação, do inglês *"clustering coefficient"*, mede a capacidade de um sítio se conectar com um grupo de outros que estão conectados entre si. Para entender melhor o significado, usamos o jargão "o amigo do meu amigo também é meu amigo". Dado um nó i com grau k_i, define-se matematicamente o coeficiente de agregação como (BARRAT;

BARTHELEMY; VESPIGNANI, 2008)

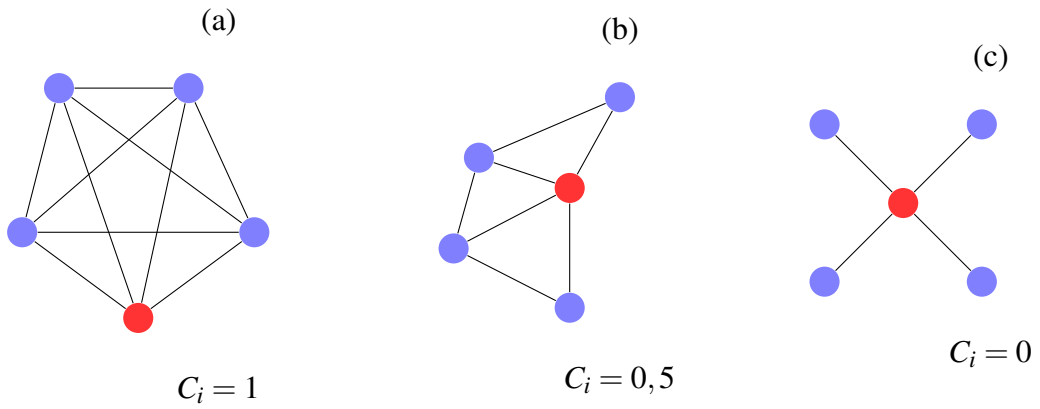
$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i-1)} \tag{2.12}$$

onde L_i é o total de ligações entre os vizinhos de i e $k_i(k_i-1)$ é o número máximo de ligações que os vizinhos do nó i poderiam ter entre eles. Por exemplo, na figura 2.6-(a) o sítio i que está destacado (em vermelho) possui grau $k_i = 4$ e o total de arestas que não se conectam com i é $L_i = 6$. Portanto, pela expressão (2.12), temos $C_i = 1$. Já na figura 2.6-(c), os vizinhos de i não possuem arestas entre si. Logo, $C_i = 0$. Assim, valor de C_i é compreendido entre os extremos

- $C_i = 1$ quando todos os vizinhos de i se conectam entre si (Figura 2.6-(a)).
- $C_i = 0$ quando nenhum dos vizinhos de i se conectam entre si (Figura 2.6-(c)).

No caso de $C_i = 0,5$ (Figura 2.6-(b)) dois vizinhos podem estar conectados ou não a uma probabilidade equivalente (50% para cada caso).

Figura 2.6 – Coeficiente de agregação para grafos com um sítio i de grau $k_i = 4$ (em azul). O nó observado se conecta com todos os demais (em vermelho). (a) $C_i = 1$ pois os vizinhos dos nós em destaque estão todos conectados entre si (b) $C_i = 0,5$, metade dos vizinhos se conectam entre si e o resto está desconectado (c) os sítios vizinhos não se conectam entre si $C_i = 0$.



É mais usual caracterizar uma rede com o coeficiente médio de agregação dado por

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i \tag{2.13}$$

cuja interpretação é a probabilidade de dois vizinhos de um sítio aleatoriamente escolhido serem vizinhos também.

Correlação de Grau

Uma outra medida importante usada para caracterizar as redes é a correlação de graus que é dada pela probabilidade condicional $P(k|k')$ de que um vértice com grau k esteja conectado a um vértice de grau k'. No entanto, o cálculo desta função para dados empíricos ou mesmo em redes sintéticas é bastante complicado. Uma quantidade mais prática que fornece a mesma informação é a do grau médio dos vizinhos mais próximos (do inglês, "*nearest neighbors*") do sítio i, dado por (PASTOR-SATORRAS; VÁZQUEZ; VESPIGNANI, 2001):

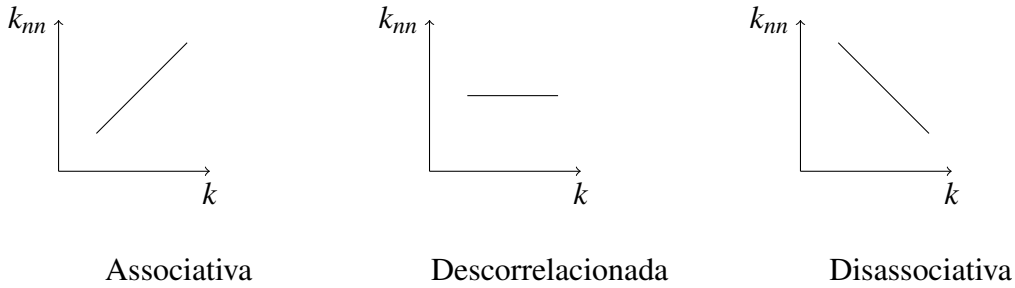
$$k_{nn,i} = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in \nu(i)} k_j \tag{2.14}$$

onde a soma é realizada nas vizinhanças do sítio i, $\nu(i)$. A partir dos graus médios $k_{nn,i}$ é possível determinar uma correlação dada por (VÁZQUEZ; PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2002)

$$k_{nn}(k) = \frac{1}{N_k} \sum_{i/k_i=k} k_{nn,i} \tag{2.15}$$

onde N_k é a frequência do grau k e a soma é corrente nos vértices i com grau $k_i = k$. Para diferentes estruturas topológicas de rede teremos um regime específico de $k_{nn}(k)$. Quando k_{nn} não depende do grau k, ou seja, é constante para qualquer grau k, não existe uma correlação na rede. Caso exista correlação, veremos com mais detalhes que, dependendo do regime, sítios mais conectados tendem a se ligar com outros sítios mais conectados e menos conectados se conectam com sítios de menor grau k. Isso recebe o nome de *associatividade* e a correlação de grau é crescente. Mas também há casos em que sítios mais conectados se conectam com menos ou vice-versa. Nesse caso temos a *disassociatividade*, cujo comportamento é decrescente (Figura 2.7). Como exemplo ilustrativo, líderes de corporações que são bastante conhecidos (ou seja, com maior conexão com as pessoas de diferentes empresas) tendem a fechar negócio com outros líderes de corporação. Aqui temos uma associatividade. Por outro lado, sistemas autônomos de internet que são menos conectados tendem a se conectar com os que são mais acessados, um exemplo de disassociatividade (PASTOR-SATORRAS; VÁZQUEZ; VESPIGNANI, 2001).

Figura 2.7 – Correlação de graus nos regimes associativo (conexão de *hub* com *hub* ou sítio pouco conectado com outro sítio pouco conectado), descorrelacionado (não importa os graus entre os vizinhos) e disassociativo (*hub* com pouco conectado ou vice-versa).



O nível de correlação pode ser medido pelo coeficiente de Pearson, ou coeficiente de associatividade, dado por (NEWMAN, 2003; BARRAT; BARTHELEMY; VESPIGNANI, 2008):

$$r = \frac{\sum_e j_e k_e / E - [\sum_e (j_e + k_e)/(2E)]^2}{[\sum_e (j_e^2 + k_e^2)/(2E)] - [\sum_e (j_e + k_e)/(2E)]^2}, \tag{2.16}$$

onde j_e e k_e são os graus dos nós da extremidade da aresta e e E é a quantidade total de arestas. O coeficiente de Pearson varia no intervalo entre -1 (rede perfeitamente disassociativa) e 1 (rede perfeitamente associativa) sendo nulo quando a rede é descorrelacionada. Após esta síntese de medidas de caracterização de redes, apresentamos os modelos de redes mais estudados na literatura.

2.2 Modelos de Redes

2.2.1 Redes Aleatórias

O grafo aleatório é o exemplo mais simples de redes aleatórias. São construídos da seguinte maneira: suponha um conjunto de n vértices, cada vértice se conecta com seus vizinhos aleatoriamente a uma probabilidade p. Essa ideia foi introduzida por Solomonoff e Rapoport em 1951 (SOLOMONOFF; RAPOPORT, 1951). Posteriormente, o estudo foi sistematizado por Erdös & Renyi (ERDÖS; RÉNYI, 1959) o que deu créditos à nomenclatura "Grafos de Erdös-Renyi ". Os autores denotaram por $G_{n,p}$ o conjunto de grafos gerados a uma probabilidade $p^m(1-p)^{m-L}$ em que $L = \frac{1}{2}n(n-1)$ é a quantidade máxima de arestas.

Para o conjunto completo de vértices consideramos agora que existem vértices conectados a uma probabilidade p^k para k arestas e desconexos a $(1-p)^{N-k-1}$, sendo o total, nesse

caso, de $N-k-1$ sítios. A probabilidade de que o $i-simo$ nó possua k vértices é

$$P(k_i = k) = \begin{pmatrix} N-1 \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{N-k-1}. \tag{2.17}$$

No limite de $N \to \infty$, usando a expansão de Taylor, temos:

$$P(k_i = k) \approx e^{-pN} \frac{(pN)^k}{k!}$$

sabendo que $pN = \langle k \rangle$,

$$P(k_i = k) \approx e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \tag{2.18}$$

Em redes maiores é mais conveniente usar a distribuição de Poisson (equação 2.18). Mas tanto esta quanto a ditribuição binomial mostram que o valor mais provável de k é $\langle k \rangle$. Usando a expressão (2.18), a variância σ_k do grau k é uma função bem comportada que depende do grau médio, dado por:

$$\sigma_k \approx \langle k \rangle^{1/2}. \tag{2.19}$$

Por (2.19), dizemos que a rede aleatória é uma rede com escala ou homogênea, isto é, os graus possíveis dos sítios estão compreendidos no intervalo $\langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$. O coeficiente de agregação é próximo de zero para redes aleatórias grandes. O coeficiente de agregação é definido por:

$$C = \frac{1}{N} \sum_i C_i = p = \frac{\langle k \rangle}{N} \tag{2.20}$$

A rede de Erdös-Renyi possui uma propriedade de mundo pequeno. Quando medimos o menor caminho médio, usando a expressão (2.11), obtemos

$$\langle d \rangle \sim \frac{\ln N}{\ln(\langle k \rangle)} \tag{2.21}$$

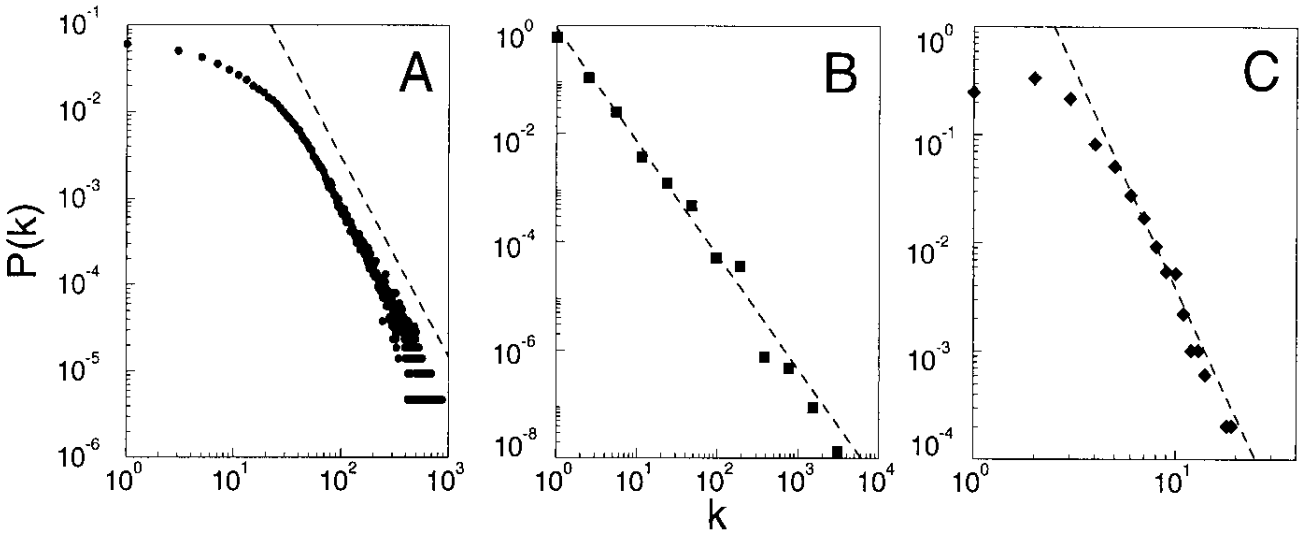
Diversos sistemas que envolvem interagentes (sítios) e suas interações (ligações) podem ser descritos por redes. As redes sociais envolvem pessoas e interações entre elas. Essas relações podem ser matrimoniais, de amizade ou até relações corporativas entre as empresas. Outro exemplo é a rede "WWW"é composta por sites que se conectam entre si, sendo as páginas os sítios e os hiperlinks as ligações. Já nas redes de distribuição de energia, os sítios são as torres de transmissão conectadas por fios.

Dados da distribuição de conectividade em redes reais (figura 2.8) mostram comportamento similar a um decaimento em lei de potência do tipo

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \tag{2.22}$$

onde γ é um expoente de escala. Dadas essas evidências, é inconsistente descrevê-las usando o modelo de Erdös-Rényi. Por este motivo, faz-se necessário lançar mão de outros modelos capazes de descrever as chamadas redes heterogêneas. A seguir, vamos mostrar alguns modelos que foram propostos na tentativa de captar melhor as características de redes reais.

Figura 2.8 – Distribuição de graus para as redes **(A)** colaboração de atores com tamanho $N = 212250$ e conectividade média $\langle k \rangle$=28,78. **(B)** WWW, $N = 325729$, $\langle k \rangle = 5,46$. **(C)** Redes de Distribuição de Energia $N = 54941$, $\langle k \rangle = 2,67$. Os gráficos estão na escala log-log. Os expoentes de escala são, respectivamente: $\gamma_{ator} = 2,3$, $\gamma_{WWW} = 2,1$ e $\gamma_{DE} = 4$.Fonte: (BARABÁSI; ALBERT, 1999)



2.2.2 O Modelo de Barabàsi-Albert

Diversos problemas da natureza são modelados por meio de sistemas que interagem entre si de forma dinâmica (o tamanho da rede cresce) e aleatória, como por exemplo, sites de busca referenciando outros sites. Os sites são representados pelos sítios e o acesso a outros sites são as ligações. Atores que compõem um elenco também pode ser um bom exemplo, dentre outros.

Para explicar de maneira mais simples esse tipo de fenômeno a implementação mais usada é a construção da rede proposta por Barabàsi-Albert (BARABÁSI; ALBERT, 1999). Os autores formularam o seguinte modelo:

- O sistema começa com m_0 sítios conectados entre si.
- Com o passar do tempo, os novos sítios inseridos na rede (indexados por i) se conectam aos já existentes, preferencialmente com os mais conectados a uma probabilidade $\Pi(k_i)$ que depende linearmente do seu grau k_i, isto é

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \tag{2.23}$$

onde $\sum_j k_j$ é a soma sobre todos os graus k de cada sítio j. Um exemplo real prático mais simples de vizualizar essa modelagem é a rede de amizade, onde pessoas mais populares têm mais facilidade em fazer novas ligações que as menos populares.

A rede Barabàsi-Albert (BA) é mais roubusta para modelar alguns sistemas reais já mostrados aqui anteriormente, pois apresenta uma propriedade que as outras redes aleatórias não apresentavam: a probabilidade de um nó escolhido aleatoriamente ter grau k decai como uma lei de potência (expressão (2.22)).

Barabàsi e Albert mostraram analiticamente que o modelo produzia uma rede sem escala, com distribuição (BARABÁSI; ALBERT, 1999)

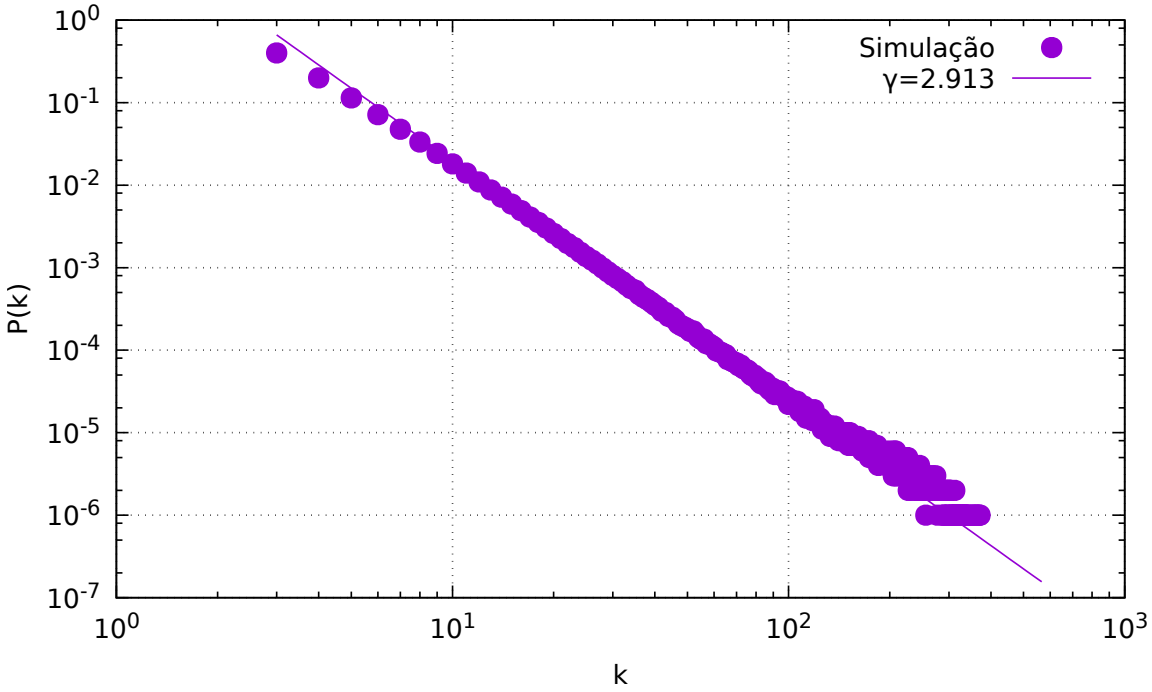
$$P(k) \approx 2m_0^2 k^{-\gamma} \tag{2.24}$$

quando $N \to \infty$, sendo N o número total de nós da rede. O expoente de escala é $\gamma \sim 3$ independente de m_0 (figura 2.9). Konstantin Klemm e Víctor M. Eguíluz (KLEMM; EGUILUZ, 2002) relacionam o efeito de mundo pequeno com redes livres de escala ao mostrar que elas são altamente agregadas, e que o coeficiente de agregação da rede cresce com o seu tamanho de forma dinâmica, isto é,

$$\langle C \rangle = \frac{m_0}{8} \frac{(\ln(N))^2}{N}. \tag{2.25}$$

Por outro lado, o menor caminho médio para as redes BA é bastante reduzido e possui um regime de crescimento mais lento em relação à rede aleatória de Erdös-Renyi. O menor caminho

Figura 2.9 – Distribuição de conectividade da rede Barabàsi-Albert. Resultado da simulação numérica de uma rede com tamanho $N = 10000$ e $m_0 = 3$ usando o algoritmo de construção e a expressão (2.23). A distribuição obtida é $P(k) \sim k^{-2.913\pm0.02}$. O gráfico está na escala log-log.



médio na rede BA é dado por: (BOLLOBÁS; RIORDAN, 2003)

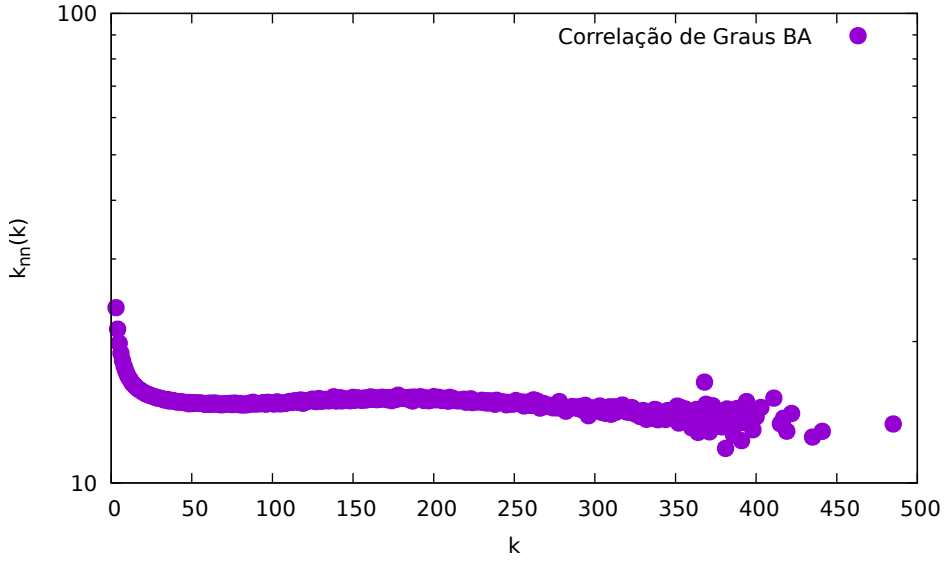
$$\langle d \rangle \sim \frac{\log N}{\log \log N}, \tag{2.26}$$

ou seja, há um efeito de mundo pequeno forte nesta rede.

Uma característica interessante a ser analisada é a correlação de graus. A rede Barabàsi-Albert é fracamente disassociativa, ou seja, praticamente descorrelacionada como mostra a figura 2.10. Isso indica que, o mecanismo de conexão preferencial interfere apenas na conectividade dos novos nós, isto é, os nós que foram adicionados mais recentemente. Esses nós tem uma maior probablidade de se conectarem aos *hubs*, gerando uma correlação disassociativa para valores pequenos de k. Porém, à medida que o grau de conectividade aumenta, a rede se torna praticamente descorrelacionada.

As redes reais são, em geral, livres de escala e seus expoentes variam no intervalo $2 < \gamma < 3$ (figura 2.8). Nesse sentido, o modelo BA é limitado, apesar de diversos modelos ser bem descritos por ele, pois seu expoente de escala é fixo ($\gamma \sim 3$). Mostraremos a seguir que outras características podem ser adicionadas ao modelo para torná-lo mais realista.

Figura 2.10 – Correlação de graus da rede Barabàsi-Albert de tamanho $N = 10^4$. Resultado obtido com 10^4 amostras. O gráfico está na escala log no eixo y.



2.2.3 Modelo de Barabàsi-Bianconi

O modelo BA original produz uma rede livre de escala com a presença de sítios mais privilegiados mas não leva em conta a competitividade. Tal característica se deve a facilidade que alguns sitios tendem a adquirir novos vizinhos de forma mais rápida, sem que dependa apenas da sua idade. O *Facebook*, por exemplo, se tornou um dos sites mais visitados em pouco tempo quando comparamos com o site de busca da *Google*. Isto pode acontecer com outras páginas da WWW. Um outro exemplo ilustrativo é o crescimento de corporações de empresas onde algumas mais novas concentram mais serviços que outras mais antigas. Todos os exemplos citados possuem um fator intrínseco em comum que faz diferença na competitividade: a *atratividade* (do inglês *fitness*). Na prática, atratividade seria, por exemplo, a facilidade de um indivíduo se tornar mais popular devido a uma característica que lhe dá destaque. Em redes, é a tendência de um nó se tornar *hub* de forma mais rápida.

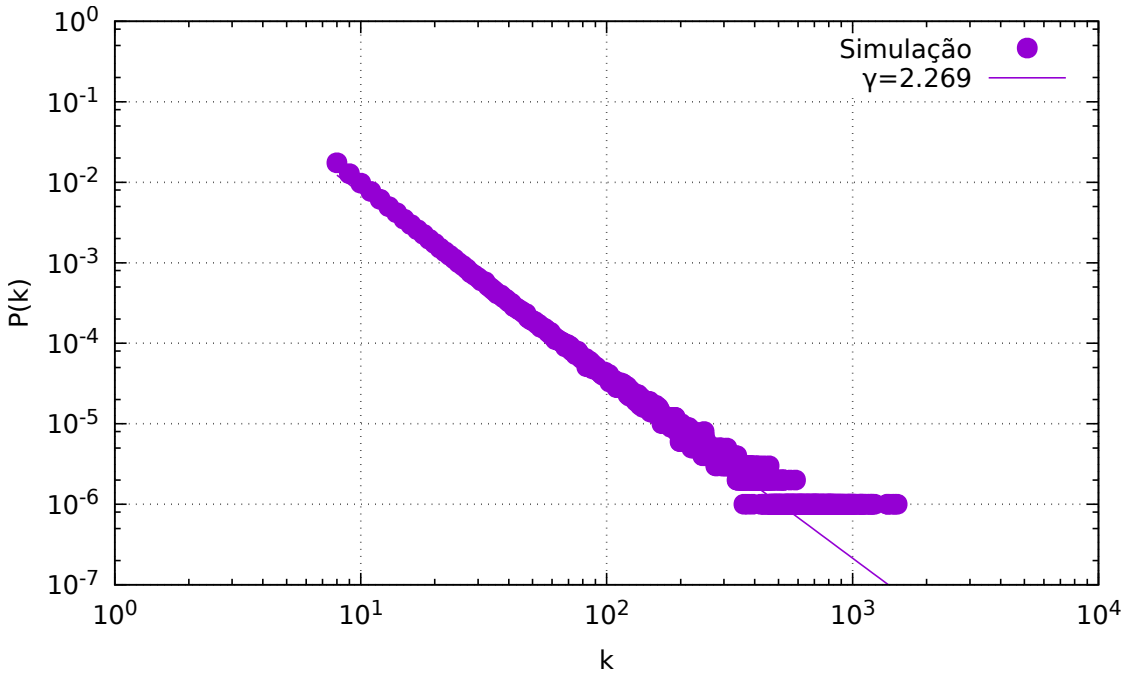
O caráter competitivo em certos nós foi observado em redes reais por Barabàsi e Bianconi que, posteriormente propuseram um modelo alternativo ao de Barabàsi-Albert, incluindo agora o fator de atratividade η_i de cada sítio i (BIANCONI; BARABÁSI, 2001). O algoritmo de construção usado é parecido ao da rede BA, porém cada sítio se conecta a um nó já existente na rede com uma probabilidade que, além de depender da conectividade k, é proporcional à atratividade η_i de. A escolha de η_i é dada por uma distribuição uniforme $\rho(\eta_i)$ entre 0 e 1

(BIANCONI; BARABÁSI, 2001), e a probabilidade de conexão é definida por:

$$\Pi(k_i) = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j} \tag{2.27}$$

Quando o parâmetro de atratividade é imposto, a rede continua livre de escala a uma distribuição com decaimento em lei de potência, mas o expoente de escala muda em relação à rede BA (figura 2.11). De acordo com a literatura, $\gamma \sim 2,25$ no limite termodinâmico. Além disso, surge a presença de sítios privilegiados mais concentrados e, consequentemente, a formação de *outliers* ou *super hubs*.

Figura 2.11 – Distribuição de conectividade da rede Bianconi-Barabàsi com $m_0 = 3$ e $N = 10^4$ e 100 amostras. O gráfico está na escala log-log.



2.2.4 Modelo de Afinidade

Entendemos como afinidade a tendência em relacionar-se. Os constituintes podem estabelecer vínculos de diversas formas, mas a mais simples e evidente de todas é a semelhança entre eles. Pessoas tendem a se aproximar por partilhar as mesmas características, como gosto musical, time de futebol, religião, área de estudos ou trabalho, etc. Em estudos de modelos sociais, observou-se que a tendência das pessoas se relacionarem cresce à medida que partilham certa afinidade.

Para descrever essa característica em redes reais, Almeida *et. al.* (ALMEIDA, 2010) propuseram um modelo introduzindo um parâmetro que leva em conta a característica ou qualidade intrínseca de um nó. Denotaremos esse parâmetro por β_i. A afinidade pode ser medida por um parâmetro $\mathscr{A}_{ij}$ que é o módulo da diferença entre as qualidades de um nó i com outro j, isto é, $\mathscr{A}_{ij} = |\beta_i - \beta_j|$. Quanto menor for $\mathscr{A}_{ij}$, maior a afinidade entre os interagentes e a tendência em se ligar. Baseado nessa ideia, o algoritmo proposto é o seguinte:

- Inicia-se com m_0 sítios conectados entre si, assim como o primeiro passo da construção da rede de Barabàsi-Albert, mas introduzindo uma característica β_i escolhida aleatoriamente por meio de uma distribuição $p(\beta)$ uniforme no intervalo $[0,1]$.

- Para cada passo de tempo, adiciona um sítio que se liga a outros m_0 já presentes na rede. Cada sítio j se liga preferencialmente a um outro i proporcionalmente a seu grau k_i e a afinidade entre i e j a uma probabilidade

$$\Pi(k_i) = \frac{(1-\mathscr{A}_{ij})k_i}{\sum_n (1-\mathscr{A}_{in})k_n} \tag{2.28}$$

- O procedimento do segundo item é repetido até a rede atingir um tamanho N estabelecido.

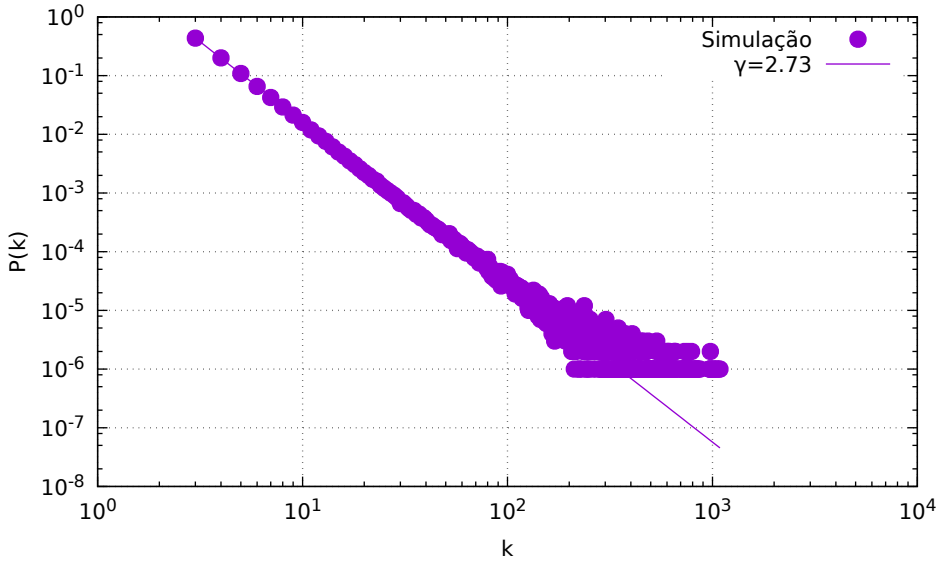
O resultado dessa implementação também é uma rede livre de escala com distribuição em lei de potência. A disputa entre grau de conectividade e afinidade entre os sítios implica na alteração do expoente de escala comparado ao do modelo de BA, com um valor característico $\gamma \sim 2,75$. Vale observar que o valor de γ no modelo de Afinidade está entre o obtido no modelo de Barabàsi-Albert($\gamma = 3,0$) e Bianconi-Barabàsi ($\gamma = 2,25$). Esses resultados podem ser compreendidos analisando *hubs*. Os nós com potencial a se tornarem *hub* no modelo de Bianconi-Barabàsi podem ser inseridos na rede desde os seus primeiros estágios de desenvolvimento se já tiverem um alto fator de atratividade. Assim, expoente γ para a rede gerada no modelo Bianconi-Barabàsi é menor como consequência da democratização, isto é o sítio tem tendência a ser de maior grau não só pela idade, mas também por já ser inserido com alto fator de atratividade e por, possivelmente, se tornar *hub* independente do tempo com que já está inserido na rede.

No modelo de afinidade, lembramos que as características β dos sítios são distribuídas uniformemente no intervalo $[0,1]$. Isso significa que todos os valores entre 0 e 1 tem a mesma chance de serem sorteados. Dada a possibilidade de alguns dos sítios j da rede possuir um valor

de característica intermediário, isto é, $\eta_j = 0,5$ desde os primeiros estágios de desenvolvimento eles podem se tornar *hubs* pois possuem afinidade tanto com sítios de parâmetros acima desse valor quanto os de parâmetro abaixo deste valor intermediário. Por outro lado, a afinidade é dada pelo módulo da diferença entre os parâmetros de característica e dada essa simetria é provável um mesmo sítio i possuir o mesmo valor de afinidade com os demais j. Vamos considerar, por exemplo, o caso em que $\eta_j = 0,3$ e $\eta_i = 0,5$. A afinidade seria a mesma caso outro sítio tivesse um valor de característica $\eta_j = 0,7$, ou s $\mathscr{A}_{ij} = 0,2$. Se esses valores são iguais, então pela expressão (2.28) o que decide a conexão preferencial é o grau de conectividade (ALMEIDA, 2010).

Dada a simetria no módulo da diferença entre as características na rede de afinidade, é mais provável o valor de $\mathscr{A}_{ij}$ se repetir na rede de afinidade do que o valor de η_i na rede de Bianconi-Barabàsi. Assim, a regra de conexão preferencial na rede de afinidade é mais ditada pelo grau de conectividade. Por isso, o expoente da rede de afinidade é mais próximo do valor para a rede BA.

Figura 2.12 – Distribuição da rede de afinidade.Gráfico feito na escala log-log de uma rede de tamanho $N = 10^4$ e $m_0 = 3$ conexões por passo, 1000 amostras.



As redes de Almeida *et. al.* (ALMEIDA, 2010) são apropriadas para modelar interações sociais ou qualquer sistema que leva em conta a similaridade entre os constituintes. Casamentos ou relações de amizade, por exemplo, são produtos de relações entre pessoas que partilham semelhanças.

2.3 Redes com Métrica Espacial

2.3.1 Modelo Natal

Os modelos estudados até aqui não levam em conta a distância espacial entre os agentes mas em alguns sistemas, essa grandeza pode desempenhar um papel importante. Por exemplo, no modelo de cidades proposto por Ribeiro *et. al.* (RIBEIRO et al., 2017), os autores observaram como a distância euclideana influencia no potencial das cidades e em leis de escala para medir indicadores socioeconômicos e de infra-estrutura.

Introduzindo a distância euclideana em redes livres de escala, Soares D. J. B. *et. al.* (SOARES et al., 2005) mostrou que é possível unir ciência das redes com a Mecânica Estatística não-extensiva de Tsallis (GELL-MANN; TSALLIS, 2004). A dinâmica de conexão preferencial acontece de acordo com a conectividade e também com a menor distância entre os agentes.

Para construir o modelo, consideramos um plano coordenado e contínuo, onde cada sítio é inserido nele. O primeiro nó é adicionado a uma distância arbitrária da origem e os demais isotropicamente distribuídos a uma probabilidade $P_G(r) \propto r^{-(2+\alpha_G)}$, que depende da distância do centro de massa r a cada inserção. O expoente α_G (índice G denota a palavra em inglês *"growth"* que siginifica crescimento) é responsável pelo crescimento da rede, isto é, define o quão próximos ou distantes entre si cada sítio é disposto. Para calcular r, basta fazer $r = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j r_j$ onde m_j é a massa do nó j, r_j é a distância de j em relação à origem e $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$ é a massa total. Considerando que a rede tenha N sítios, cada um com massa $m_j = 1$, temos

$$r = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} r_j.$$

Cada sítio novo i se conecta a um preexistente j seguindo uma regra de conexão preferencial que depende da distância entre eles, r_{ij} e do grau de conetividade, ou seja,

$$P_A(k_i) = \frac{k_i r_{ij}^{-\alpha_A}}{\sum_j k_j r_{ij}^{-\alpha_A}}. \tag{2.29}$$

A expressão (2.29) mostra que cada sítio inserido se conecta com o mais próximo e com maior conectividade. Os parâmetros de distância e conectividade competem entre si para se estabelecer a ligação dos sítios. O expoente α_A (índice A usado para designar a palavra em inglês *"attachment"* que significa conexão) controla a influência da distância espacial entre os sítios

na conexão preferencial. Caso $\alpha_A = 0$, recuperamos a rede do modelo BA que não leva em conta a distância espacial.

O modelo é construído pelo algoritmo:

- Um sítio $i = 1$ é adicionado a uma distância arbitrária da origem no plano contínuo.
- Um segundo sítio $i = 2$ é colocado a uma distância r aleatória ao sítio (agora $j = 1$) segundo a distribuição
$$P_G(r) \propto r^{-(2+\alpha_G)}.$$
- A cada passo com a inserção dos demais sítios, o centro de massa é calculado e o sítio é adicionado ao plano à distância r do centro de massa de acordo com a distribuição $P_G(r)$. Cada nó inserido se conecta preferencialmente segundo a expressão (2.29).
- O procedimento anterior se repete até a rede atingir um tamanho N estabelecido.

Resultados numéricos mostram que o parâmetro α_G não influencia no comportamento da distribuição de conectividade $P(k)$ gerado (Figura 2.13) pois dá conta apenas da distribuição de distância em relação ao centro de massa e não influencia na regra de conexão preferencial. Por outro lado, à medida com que α_A muda, a distribuição de conectividade assume comportamentos diferentes (figura 2.13). Daí surge a conexão com a Mecânica Estatística não-extensiva de Tsallis (ver Apêndice A), pois

$$P(k) = P(0)e_q^{-k/L} \tag{2.30}$$

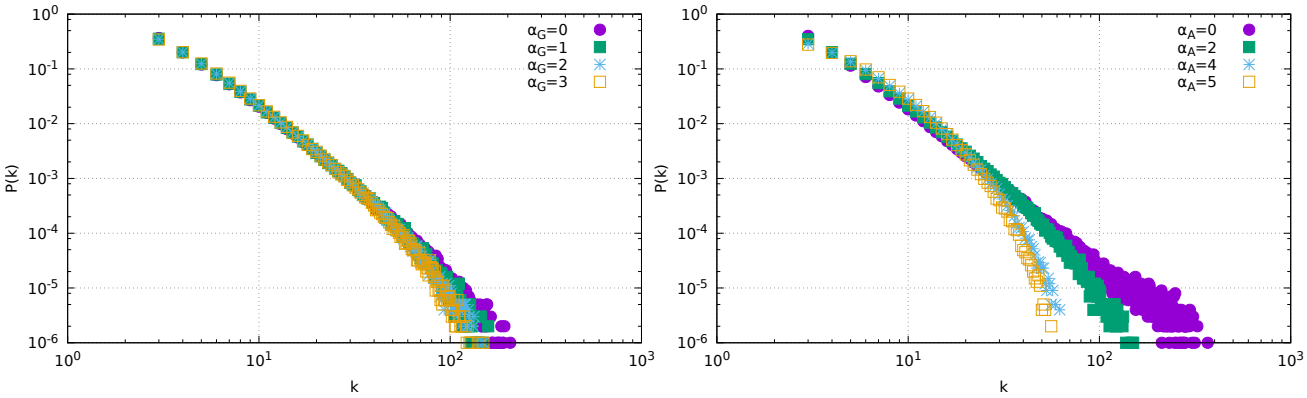
em que $L > 0$ é o número característico de ligações, P(0) é uma constante a ser normalizada, q é o índice entrópico e $e_q(x)$ é a *q-exponencial* definida por

$$e_q^x = [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} \quad (e_1^x = e^x). \tag{2.31}$$

Quando a métrica é introduzida na dinâmica, o sistema entra em uma classe de interação a longo alcance, o que explica o resultado da distribuição (equação (2.30)) e a conexão com a estatística de Tsallis. Como α_A altera a distribuição de conectividade, a topologia de rede muda quando variamos esse parâmetro, isto é, sua heterogeneidade também é alterada. Existem dois casos extremos:

- $\alpha_A \to 0$ a rede é heterogênea;

Figura 2.13 – Distribuição de conectividade para diferentes α_G e $\alpha_A = 2$ (gráfico à esquerda), diferentes α_A e $\alpha_G = 2$ (à direita) em uma rede de tamanho $N = 10^4$. Variando α_G a distribuição não é alterada significativamente. Já para α_A, há transição topológica. Os gráficos estão na escala log-log. Resultado obtido com 100 amostras.



- $\alpha_A \to \infty$ a rede é homogênea.

Na literatura, alguns autores (BRITO, 2012; SOARES et al., 2005) usam o termo "transição topológica de fase"para descrever o comportamento de mudança topológica da rede.

2.3.2 Outros modelos com Métrica

Observando a relevância da distância espacial em modelos de redes livres de escala em sistemas reais, alguns autores introduziram essa grandeza em outras redes complexas já conhecidas, além da Barabàsi-Albert. Dentre eles, podemos citar o modelo de Afinidade com métrica, proposto por Brito *et. al.* (BRITO, 2012) e Bianconi-Barabàsi, também com a métrica, mas para uma dimensão d generalizada, proposto por Nunes *et. al.* (NUNES et al., 2017).

Anteriormente citamos um trabalho sobre cidades (RIBEIRO et al., 2017) como motivação para explicar o papel da distância euclideana na dinâmica de certos sistemas e, nesse contexto, tratar o modelo de BA com métrica. Mas as cidades também podem ser estudadas em termos do parâmetro η juntamente com a distância euclideana. Poderíamos pensar, por exemplo, em pontos onde o comércio é mais forte e pode atrair mais setores de serviço para as proximidades locais. Então o fator de influência no modelo Ribeiro faria o papel do parâmetro de atratividade da rede, pensando nos setores como sítios que se conectam às principais empresas. Nesse contexto, a modelagem matemática da rede Bianconi-Barabàsi com métrica é a mais apropriada.

Estudos recentes analisam o efeito de formação dos pólos sociais por similaridades em vários contextos sociodemográficos, como religião, raça, classe social etc. A proximidade geo-

gráfica, apesar da tecnologia que permite interações de longo alcance, atua como um forte fator de influência para construção dos laços sociais locais (BISGIN; AGARWAL; XU, 2010). Nesse sentido, é mais conveniente usar a rede com afinidade e métrica construída no modelo de Brito *et. al.* (BRITO, 2012).

Os algoritmos usados para construir ambos modelos são os mesmos mostrados anteriormente impondo agora a métrica espacial através da função

$$P_G = r^{-(\alpha_G+2)}. \tag{2.32}$$

As regras de conexão preferencial tanto para a rede Bianconi-Barabàsi quanto para a de Afinidade, ambos agora com métrica são, respectivamente:

$$\Pi(k_i) = \frac{\eta_i k_i r_{ij}^{-\alpha_A}}{\sum_j \eta_j k_j r_{ij}^{-\alpha_A}} \quad \text{e} \quad \Pi(k_i) = \frac{(1-\mathscr{A}_{ij}) k_i r_{ij}^{-\alpha_A}}{\sum_j (1-\mathscr{A}_{ij}) k_j r_{ij}^{-\alpha_A}}. \tag{2.33}$$

Já foi mostrado em seções anteriores que quando a métrica é imposta o sistema entra na classe de interação de longo alcance e é descrito pela estatística de Tsallis, seguindo a distribuição de conectividade dada pela equação (2.30). O mesmo acontece quando ela é introduzida nas redes de Bianconi-Barabàsi e no modelo de Afinidade. Os dois trabalhos, (NUNES et al., 2017), (BRITO, 2012) também demonstraram por resultados a transição topológica de fase através da dependência do índice entrópico q com α_A e de κ com o mesmo parâmetro. No limite de α_A tendendo ao infinito as redes se tornam mais homogêneas e possuem uma escala caracterizada pelo valor médio de k. No caso extremo $\alpha_A = 0$, elas são livres de escala sem levar em conta a métrica espacial. Recuperamos as topologias geradas pelos modelos Bianconi-Barabàsi e de afinidade, lembrando que o expoente de escala da primeira é menor que o da segunda. O parâmetro α_G não altera significativamente a distribuição de conectividade (figuras 2.14 e 2.15).

Neste capítulo mostramos as propriedades e os modelos de redes que vão desde a homogênea até a heterogênea. Os modelos de redes heterogêneas são variações do modelo de Barabàsi-Albert, introduzindo alguns parâmetros como o de atratividade η e de afinidade $\mathscr{A}$ nas regras de conexão preferencial. A topologia se torna interessante quando a métrica espacial é introduzida. Redes com métrica espacial são homogêneas em um caso particular ($\alpha_A \to \infty$) e heterogêneas para outro caso particular ($\alpha_A = 0$). Essas redes passam a fazer parte da classe de sistemas descritos pela Estatística de Tsallis devido às interações entre os agentes de longo

Figura 2.14 – Distribuição de conectividade do modelo de Nunes *et. al.* (NUNES et al., 2017) para diferentes α_G e $\alpha_A = 2$(gráfico à esquerda), diferentes α_A e $\alpha_G = 2$ (à direita) em uma rede de tamanho $N = 10^4$. Variando α_G a distribuição não é alterada significativamente. Já para α_A, há transição topológica de fase. Os gráficos estão na escala log-log. Resultado obtido com 100 amostras.

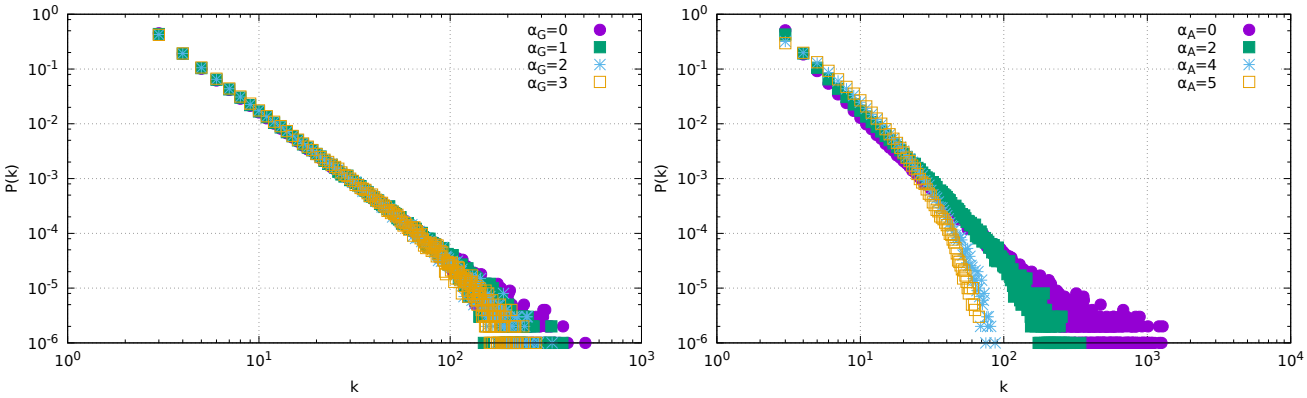
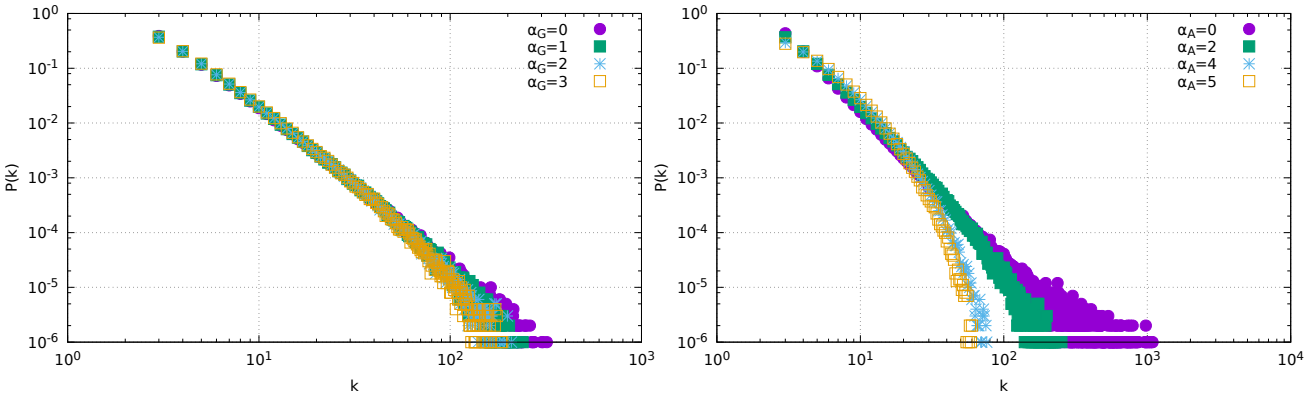


Figura 2.15 – Distribuição de conectividade do modelo de Brito *et. al.* (BRITO, 2012) para diferentes α_G e $\alpha_A = 2$(gráfico à esquerda), diferentes α_A e $\alpha_G = 2$ (à direita). Variando α_G a distribuição não é alterada significativamente. Já para α_A, há transição topológica de fase. Os gráficos estão na escala log-log e se ajustam à distribuição da estatística de Tsallis. Resultado gerado com 100 amostras



alcance. As topologias de rede desempenham um papel muito relevante no estudo de processos dinâmicos. Diversos trabalhos na literatura já mostraram a influência da heterogeneidade da rede em processos dinâmicos. Porém, ainda não se levou em consideração como os outros parâmetros (afinidade, atratividade e métrica) influenciam na dinâmica de modelos conhecidos na literatura, como por exemplo, o modelo do votante. Esse é o nosso principal objetivo deste trabalho e nossos resultados originais se encontram no capítulo 4. Mas antes disso, vamos descrever o modelo do votante no próximo capítulo implementando-o em redes regulares e na rede BA já bem estudados na literatura.

3 MODELO DO VOTANTE EM REDES COMPLEXAS

No capítulo anterior apresentamos modelos já conhecidos de redes complexas, desde as mais básicas que não levam em conta a métrica espacial até os modelos mais recentes, onde a distância euclideana é inserida. Para analisar a interferência das topologias dessas redes em processos dinâmicos, escolhemos o Modelo do Votante. Reservamos este capítulo para abordar os fundamentos básicos deste modelo. Mostraremos alguns exemplos das implementações já conhecidas em redes regulares e na de Barabàsi-Albert.

3.1 Definições Básicas

A denominação modelo do votante vem da interpretação natural das regras em termos da dinâmica de opiniões (CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009), entretanto não se limita à dinâmica social e pode ser investigado em outros sistemas estocásticos. Um exemplo é a dinâmica de populações proposta por Clifford (CLIFFORD; SUDBURY, 1973). O modelo do votante foi considerado pela primeira vez como modelo de competição de espécies a partir do trabalho de (CLIFFORD; SUDBURY, 1973), e recebeu esta alcunha de (HOLLEY; LIGGETT, 1975).

Seu algoritmo é extremamente simples: considera-se que cada agente é dotado de uma opinião binária $s = \pm 1$. A cada interação um agente i e seu vizinho j são escolhidos ao acaso e i toma a mesma opinião de j, isto é, $s_i = s_j$. O tempo é adicionado de 1 unidade após N interações, onde N é o número de agentes do sistema. A regra de atualização implica que cada agente copia a informação de seu vizinho e é repetida até que o consenso seja alcançado, ou seja, todos os agentes possuem a mesma opinião $s = 1$ ou $s = -1$. Observa-se uma dinâmica de dois níveis e o problema pode ser estudado de forma análoga ao modelo de Ising, na ausência de um campo externo. A tendência em atingir o consenso é análoga à magnetização. A dinâmica do votante em uma dimensão acontece da mesma maneira que no modelo de Glauber. (CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009).

O modelo de Glauber à temperatura zero (GLAUBER, 1963) é similar ao de Ising em uma dimensão. Trata-se também em uma dinâmica de dois níveis, com estados de spin $s_i = \{\pm 1\}$, mas a atualização consiste em selecionar aleatoriamente um agente i a cada passo de tempo e computar um campo local. Se o campo local for negativo, $s_i = -1$, caso contrário, $s_i = 1$. Se o campo é nulo, a variável s_i muda seu estado. (CASTELLANO et al., 2005). Assim como no modelo do votante, a dinâmica cessa quando o equilíbrio é atingido (todos os

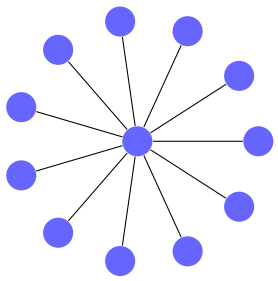
estados iguais). Em temperaturas finitas o estado ditado pelo equilíbrio termodinâmico é bem conhecido, o que não acontece quando a temperatura é zero.

Existem três versões do modelo do votante que são usualmente estudadas: o *votante direcionado* o qual o agente é selecionado aleatoriamente e adota o estado de seu vizinho sorteado como mencionamos anteriormente. O *votante reverso* onde a ordem de seleção é contrária: o vizinho sorteado copia o estado do primeiro agente selecionado aleatoriamente. Um caso intermediário é o votante via atualização de *links* (SUCHECKI, 2005) que consiste em selecionar a ligação entre dois agentes e sortear qual deles irá adotar o estado do seu vizinho. A magnetização média é dada por:

$$\langle m(t) \rangle = \frac{\langle \sum_i s_i(t) \rangle}{N} \tag{3.1}$$

em que $\langle . \rangle$ representa a média sobre as amostragens. Dizemos que a magnetização média é conservada quando a média de m sobre as amostragens não muda para diferentes instantes t. (SUCHECKI; EGUILUZ; MIGUEL, 2004). Em topologias regulares as três dinâmicas coincidem mas quando a rede é heterogênea algumas diferenças aparecem: o tempo de consenso T_N escala com N^{ν}, cujo expoente ν muda dependendo das versões do modelo do votante devido ao número de ligações e da probabilidade de atualização. Vamos considerar, por exemplo, uma rede estrela com N nós, onde $N-1$ se conecta a um *hub*. (Figura 3.1). A probabilidade de atualização do *hub* em um único passo de tempo é de $1/N$ para o modelo direcionado, $1/2$ para o votante por atualização de *links* e $1-1/N$ para o modelo do votante reverso. Como o *hub* é o sítio mais importante na dinâmica, ele influencia no tempo de consenso, dependendo dessas probabilidades de atualização e somente para o votante com atualização de *links* a magnetização média se conserva a qualquer instante de tempo. (CASTELLANO, 2005).

Figura 3.1 – Rede estrela: todos os nós se conectam ao *hub*.



A probabilidade de saída E_+ é definida como a probabilidade de alcançar o consenso com *spin* $s=1$ dado que a densidade inicial de *spin-up* é σ_+. Devido ao fato da magnetização média ser conservada em um limite assintótico de tempo (SUCHECKI; EGUILUZ; MIGUEL,

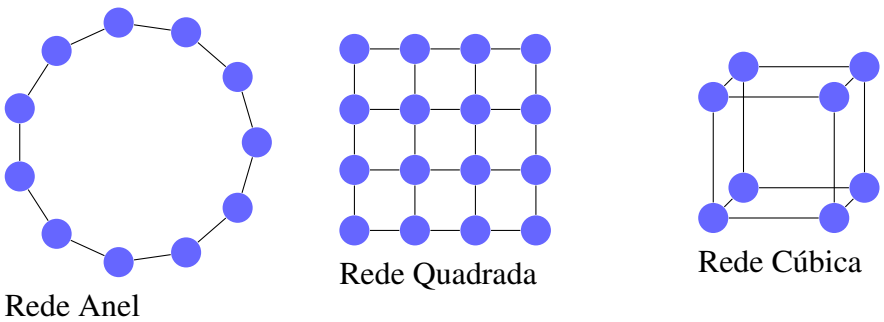
2004), a probabilidade de saída se comporta como (ver apêndice B):

$$E_+ = \sigma_+. \tag{3.2}$$

3.2 Modelo do Votante na Rede Regular

O modelo do votante em redes regulares $d-$dimensional pode ser construído partindo de um hipercubo de modo a generalizar a dimensão da rede regular. Redes regulares são redes em que os nós possuem o mesmo grau de conectividade. Em uma dimensão são no geral redes do tipo anel, em duas dimensões temos uma rede quadrada e em três dimensões, redes cúbicas (Figura 3.2). Em todas as redes, devemos utilizar as condições de contorno para evitar os efeitos de borda.

Figura 3.2 – As diferentes redes regulares $d-$ dimensionais.



O desenvolvimento do modelo do votante em redes regulares segue uma abordagem utilizando a equação mestra. Considerando que um agente i possui estado de *spin* $s_i = \pm 1$ e a configuração de estado é dada pelo conjunto $S = \{s_i, i = 1, ..., N\}$, a taxa de transição para um agente i mudar de estado em uma superfície de dimensão arbitrária d é dada por: (FRACHEBOURG; KRAPIVSKY, 1996; GRACIA; MIGUEL; EGUILUZ, 2011)

$$W_i(S) = \frac{d}{4}\left(1 - \frac{1}{2d} s_i \sum_j s_j\right). \tag{3.3}$$

Aqui o pré-fator de escala de tempo $d/4$ é escolhido por conveniência e a soma em j corre sob todos os $2d$ vizinhos mais próximos. A probabilidade do sistema estar na configuração S no tempo t é dada pela equação mestra:

$$\frac{dP(S,t)}{dt} = \sum_i [W_i(S^i)P(S^j,t) - W_i(S)P(S,t)] \tag{3.4}$$

onde S^i é igual a S exceto pelo spin s_i que mudou de estado. Pelo fato das taxas de transição entre os estados ser dada por equações do tipo (3.3), as equações para as funções de correlação de qualquer ordem $\langle s_i ... s_l \rangle = \sum_S P(S,t) s_i ... s_l$ são fechadas e podem ser resolvidas exatamente pois não depende de funções de correlação de ordem superior. A equação para o valor médio do estado de um agente i é dada por: (FRACHEBOURG; KRAPIVSKY, 1996; CASTELLANO; FORTUNATO; LORETO, 2009; GRACIA; MIGUEL; EGUILUZ, 2011)

$$\frac{d\langle s_i \rangle}{dt} = \Delta_i \langle s_i \rangle, \tag{3.5}$$

onde Δ_i é o operador discreto de Laplace. Somando sobre todos i do conjunto, observamos que a magnetização média é conservada. A função de correlação de dois agentes obedece a

$$\frac{d\langle s_i s_l \rangle}{dt} = (\Delta_i + \Delta_l) \langle s_i s_l \rangle. \tag{3.6}$$

A estrutura dessas equações, bem como as funções de correlação de ordem mais alta, são similares em qualquer dimensão às funções de correlação do modelo de Ising em uma dimensão a temperatura zero de Glauber (GLAUBER, 1963) que é equivalente ao modelo do votante em uma dimensão. Essas equações podem ser resolvidas via transformada de Laplace. A densidade média em que dois nós ligados estejam em estados diferentes ou densidade de *links* ativos, isto é, a densidade de interface é $\langle \rho(t) \rangle = (1 - \langle s_i s_{i+1} \rangle)/2$ (FRACHEBOURG; KRAPIVSKY, 1996). Resolvendo a equação 3.6, obtemos:

$$\langle \rho(t) \rangle \sim \begin{cases} t^{-(2-d)/2} & d < 2 \\ 1/\ln(t) & d = 2 \\ a - bt^{-d/2} & d > 2 \end{cases} \tag{3.7}$$

onde a e b são constantes. A expressão diz que para $d <= 2$ a densidade de *links* ativos vai para zero no limite termodinâmico. O mesmo não acontece para $d > 2$. Nesse caso, a densidade de interface converge para a constante a, que é finita e positiva. Através dessa equação, podemos extrair o tempo necessário para que a ordem seja alcançada na rede $d-$ dimensional (COX,

1989), isto é, o tempo de consenso:

$$T_N \sim \begin{cases} N^2 & d < 2 \\ N\ln(N) & d = 2 \\ N & d > 2 \end{cases} . \tag{3.8}$$

Uma questão muito interessante e não-trivial é a maneira como o sistema atinge o equilíbrio partindo de uma configuração inicial completamente desordenada. Para tempos curtos, pequenos domínios ordenados são formados. À medida que a dinâmica evolui ocorre o que chamamos processo de *coarsening* desses domínios que vão aumentando cada vez mais e, consequentemente, diminuindo o número de interfaces (*links* ativos). Isto faz com que seja formado um grande domínio (do tamanho N da rede). Isso acontece para $d \leq 2$ (veja a expressão (3.7)). Já para $d > 2$ o sistema converge assintoticamente para uma densidade finita de interfaces e o consenso não é atingido pois os domínios com opiniões opostas coexistem indefinidamente no tempo (BRAY, 1994). Porém se mapearmos o modelo do votante em um modelo de caminhante aleatório que se aglutinam quando se encontram, vemos que para $d > 2$, interfaces ativas se difundindo tem uma probabilidade finita de se encontrarem e se aniquilarem. Assim o sistema também acaba atingindo o consenso. (LIGGETT, 1985; LIGGETT, 2013; CLIFFORD; SUDBURY, 1973). Em redes heterogêneas, o modelo do votante não apresenta solução analítica. Por isso, é necessário recorrer a aproximações de campo médio para obtermos uma estimativa do tempo de consenso.

3.3 Aproximação de Campo Médio em Redes Heterogêneas

Em redes complexas não existe uma solução analítica para o modelo do votante pois as funções de correlação $\langle s_i s_j \rangle$ não são fechadas, ou seja, dependem sempre de termos de ordem superior. Por isso é necessário fazer uma aproximação desprezando, em algum momento, essa correlação entre os spins. A aproximação mais simples despreza tais correlações da seguinte maneira:

$$\langle s_i s_j \rangle = \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \tag{3.9}$$

ou seja, estamos considerando que os estado do spin i não depende do estado de spin do vizinho j. Obviamente essa é uma aproximação rudimentar, mas que funciona em muitos casos. (PASTOR-SATORRAS et al., 2015).

A aproximação de campo médio heterogênea que leva em conta o grau de conectividade dos nós analisando a variação da densidade de nós com *spin-up* que possui grau k (SOOD, 2005). Na tentativa de considerar a correlação dinâmica entre os spins (PUGLIESE; CASTELLANO, 2009) resolveram analisar a densidade de *links* ativos entre os nós com grau k e k', ou seja, $\langle s_k s_{k'} \rangle$, propondo assim uma aproximação de campo médio heterogênea de pares. No entanto, ambas as aproximações heterogêneas simples e de pares desprezam a correlação de grau, ou seja, considera apenas redes descorrelacionadas, onde a probabilidade condicional $P(k|k')$ de um nó com grau k estar conectado com um nó de grau k' pode ser desmembrada da seguinte maneira: (PASTOR-SATORRAS et al., 2015)

$$P(k|k') = \frac{k'P(k')}{\langle k \rangle}. \tag{3.10}$$

A seguir mostramos com mais detalhes ambas aproximações.

3.3.1 Aproximação de Campo Médio Simples

Para introduzir essa abordagem, começamos por calcular o tempo de consenso através do método proposto por Sood e Redner (SOOD, 2005). Em redes heterogêneas consideramos que todos os sítios de grau k são equivalentes e não possuem correlação de grau. Vamos denotar a densidade de nós com *spin-up* que possui grau k como ρ_k^+. A convenção de sinal é a seguinte: $+$ é o estado $s = +1$ e $-$ o estado $s = -1$ Considerando que a dinâmica começa com uma densidade inicial ρ_k^+, fórmula de recursão para o cálculo do tempo de consenso é dada por (SOOD, 2005):

$$\begin{aligned} T_N(\{\rho_k^+\}) = \sum_k \mathbf{P}(k; \mp \to \pm)[T_N(\rho_k^+ + \delta_k) + \delta t] \\ + \sum_k \mathbf{Q}(\{\rho_k^+\})[T_N(\{\rho_k^+\}) + \delta t] \end{aligned} \tag{3.11}$$

em que $\mathbf{P}(k; \mp \to \pm)$ é a probabilidade de um nó com grau k mudar de um estado para outro a cada passo de atualização, $\mathbf{Q}$ é a probabilidade do nó não mudar de estado, $\delta_k = 1/n_k$ trata da mudança em ρ_k^+ quando um nó de grau k muda de estado, e n_k é a fração de nós com grau k.

Um nó é escolhido a uma probabilidade $1/N$ em que N é o número total de nós, logo a probabilidade que ele mude de estado é: (SOOD, 2005)

$$\mathbf{P}(k;\mp \to \pm) = \sum_{x:\substack{k_x=k \\ s_x=\mp}} \frac{1}{N} \sum_{y:s_y=\pm} \frac{1}{k} A_{xy}, \tag{3.12}$$

onde A_{xy} é a matriz de adjacência dos nós x e y. A primeira soma é sobre todos os nós x com grau $k_x = k$ e *spin* $s_X = \mp$ e a segunda soma é a probabilidade de um nó x com grau k escolher um vizinho de *spin* s_y, contrário a um spin s_x. Considerando redes descorrelacionadas, a matriz de adjacência pode ser reescrita como $A_{xy} = k_x k_y / \langle k \rangle N$, ou seja, substituímos a matriz de adjacência pela probabilidade de que exista uma aresta entre um nó x de grau k_x e um nó y de grau k_y (SOOD, 2005). Substituindo na segunda soma da equação (3.12) para os *spin-up* e *spin-down*, (SOOD, 2005) fazemos:

$$\begin{aligned} \sum_{y:s_y=+} \frac{1}{k_y} \frac{k_x k_y}{\langle k \rangle N} &= \frac{1}{\langle k \rangle N} \sum_{\substack{y \\ s_y=+}} k_y = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_j j n_j \rho_j^+ \equiv \omega \\ \frac{1}{\langle k \rangle N} \sum_{\substack{y \\ s_y=-}} k_y &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_j j n_j (1-\rho_j^+) \equiv 1-\omega. \end{aligned} \tag{3.13}$$

A primeira soma nos fornece a densidade de nós com *spin-up* (ou down) com grau $k_x = k$. Logo, a expressão (3.12) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k,- \to +) &= n_k \omega (1-\rho_k^+) \\ \mathbf{P}(k,+ \to -) &= n_k (1-\omega) \rho_k^+ \end{aligned} \tag{3.14}$$

e a probabilidade de não mudar de estado é

$$\mathbf{Q}(\{\rho_k^+\}) = 1 - [\mathbf{P}(k,- \to +) + \mathbf{P}(k,+ \to -)]. \tag{3.15}$$

Usando as expressões (3.14) em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} -\delta t = &\sum_k n_k [\omega (1-\rho_k^+)(T(\rho_k^+ + \delta_k) - T(\{\rho_k^+\}))] \\ &+ \sum_k n_k [(1-\omega)\rho_k^+ (T(\rho_k^+ - \delta_k) - T(\{\rho_k^+\}))]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Expandindo a expressão (3.16) até a segunda ordem:

$$N\delta t = \sum_k (\rho_k^+ - \omega)\partial_k T_N - \sum_k \frac{\omega + \rho_k^+ - 2\omega\rho_k^+}{2Nn_k}\partial_k^2 T_N \tag{3.17}$$

onde ∂_k é a derivada em relação a k. Sood e Redner (SOOD, 2005) consideraram que $\omega = \rho_k^+$ para tempo longos e que a transformação da derivada em relação a k para deriavada em relação a ω é feita usando $\partial_k \omega = P(k)k/\langle k\rangle$. Logo, a expressão (3.17) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{N}\sum_k \left(\frac{k^2}{\langle k\rangle^2}P(k)\right)\omega(1-\omega)\partial_\omega^2 T_N = -1 \tag{3.18}$$

e a solução desta equação é dada por (SOOD, 2005):

$$T_N = -\frac{N\langle k\rangle}{\kappa}\left[(1-\omega)\ln(1-\omega) + \omega\ln\omega\right] \tag{3.19}$$

onde κ é o parâmetro de heterogeneidade da rede (expressão (2.7)). Em uma rede livre de escala finita, o grau máximo de uma rede é $k_c \sim N^{1/(\gamma-1)}$, lembrando que γ é o expoente de escala. (DOROGOVTSEV; MENDES, 2002). Sood usa esse valor como sendo o grau máximo em redes finitas de tamanho N (SOOD, 2005). Usando esse valor nas expressões (2.5), (2.6), e o valor de ω na expressão (3.19), obtemos um tempo de consenso que escala com o tamanho da rede definido por (SOOD, 2005; GRACIA; MIGUEL; EGUILUZ, 2011):

$$T_N \sim \begin{cases} N & \gamma > 3 \\ N/\ln N & \gamma = 3 \\ N^{(2\gamma-4)/(\gamma-1)} & 2 < \gamma < 3 \\ (\ln N)^2 & \gamma = 2 \\ \mathscr{O}(1) & \gamma < 2 \end{cases} \cdot \tag{3.20}$$

Na rede de Barabàsi-Albert com $\gamma \approx 3$, o tempo de consenso é $T_N \sim N^{0.88}$, cresce mais lentamente com N que em redes regulares.

3.3.2 Aproximação de Campo Médio Heterogênea de Pares

A aproximação de campo médio heterogênea de pares consiste em considerar a correlação em pares dos spins s_k e $s_{k'}$ desprezando apenas as correlações de ordem superior. Essa função de correlação pode ser construída em função de uma densidade de *links* ativos que depende do grau k de um nó e k' do seu vizinho, $\rho_{k,k'}$. Sabendo que $P(k)$ é a distribuição de graus da rede, usamos $Q_k = P(k)k/\langle k \rangle$ como sendo a distribuição de graus dos vizinhos de um nó de grau k' escolhido aleatoriamente ou $Q_{k'}$ a distribuição de graus dos vizinhos de um nó de grau k sorteado aleatoriamente, ou seja, desprezamos a correlação de grau. Vamos denotar como $\rho_k = \sum_k Q_k \rho_{k,k'}$ a densidade de *links* ativos que depende do grau k de um nó. Portanto, a densidade total de *links* ativos é (PUGLIESE; CASTELLANO, 2009)

$$\rho = \sum_{k,k'} Q_k Q_{k'} \rho_{k,k'}. \tag{3.21}$$

Para calcular a taxa de variação da densidade total de *links* ativos no tempo, basta derivar a expressão (3.21) em relação a t

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{k,k'} Q_k Q_{k'} \frac{d\rho_{k,k'}}{dt} = \left(2\rho - 2\frac{\pi}{\langle k \rangle}\right) - \frac{4}{1-m^2}\left(\rho_2^* - \frac{\pi_2^*}{\langle k \rangle}\right) \tag{3.22}$$

onde $\pi = \sum_k P(k)\rho_k$, $\pi_2^* = \sum_k P(k)\rho_k^2$ e $\rho_2^* = \sum_k Q(k)\rho_k^2$. Os cálculos do último resultado acima podem ser vistos com mais detalhes na referência (PUGLIESE; CASTELLANO, 2009). O consenso é atingido quando $d\rho_{k,k'}/dt = 0$. Calculando $\rho_{k,k'}$ na fase quase-estacionária: (PUGLIESE; CASTELLANO, 2009)

$$\rho_{k,k'} = \frac{\rho_k \frac{k-1}{k} + \rho_{k'} \frac{k'-1}{k'}}{\frac{2}{1-m^2}\left(\rho_k \frac{k-1}{k} + \rho_{k'} \frac{k'-1}{k'}\right) + \frac{1}{k} + \frac{1}{k'}}. \tag{3.23}$$

Observe que para a densidade de *links* ativos temos uma dependência parabólica com a magnetização, $(1-m^2)$.

O valor de ρ_k presente na equação (3.23) permite calcular o tempo de consenso usando o formalismo da referência (SOOD; ANTAL; REDNER, 2008) através da equação de Kolmogorov, onde expressamos as probabilidades de transição L_k e R_k em termos da densidade ρ_k. A probabilidade que o número de nós com *spin-up* e grau k aumente para 1 na fase quase

estacionária é:

$$R_k = P(k)(1-\sigma_k)\sum_{k'}[Q_{k''}\rho_{k,k'}/(2-\sigma_k)] = P(k)\frac{\rho_k}{2} \tag{3.24}$$

. A probabilidade L_k que o número de *spin-up* é reduzido é a mesma, $R_k = L_k$. Sabendo que $\omega = \sum_k Q_k\sigma_k$ e usando essas expressões, o tempo de consenso é dado por (PUGLIESE; CASTELLANO, 2009)

$$T_N = -\tau\left[(1-\omega)\ln(1-\omega) + \omega\ln\omega\right] \tag{3.25}$$

onde

$$\tau = \frac{N\langle k\rangle^2}{2\sum_k P_k k^2 \rho_k}. \tag{3.26}$$

. Obtemos o tempo de consenso para o modelo do votante direcionado.

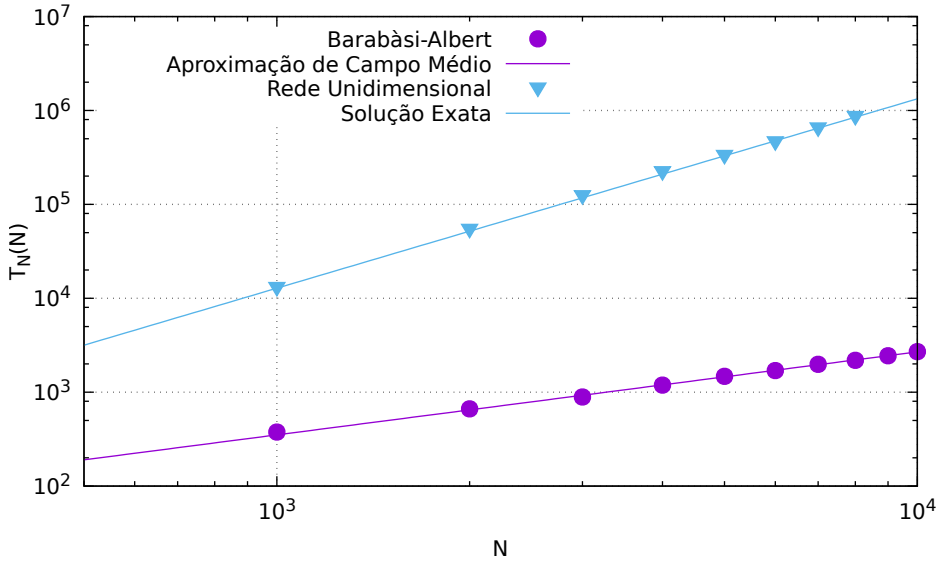
3.4 Simulações Numéricas

Para investigar os resultados numericamente também calculamos o tempo de consenso através da simulação do modelo do votante. Para comparar com os resultados teóricos, usamos uma rede unidimensional (que possui solução analítica exata) e a rede BA (solução aproximada via teoria de campo médio). O algoritmo que usamos para implementar o modelo do votante foi o seguinte:

- Atribui-se aleatoriamente os valores ± 1 aos N nós da rede.
- Realiza-se N sorteios. Para cada sorteio, um agente i e seu vizinho j são escolhidos aleatoriamente. O agente escolhido adota o mesmo estado de seu vizinho, isto é, $s_i = s_j$.
- O passo de tempo Δt é acrescido de uma unidade $\Delta t = \Delta t + 1$.
- O procedimento do segundo item é repetido até que todos os sítios estejam no mesmo estado (consenso).

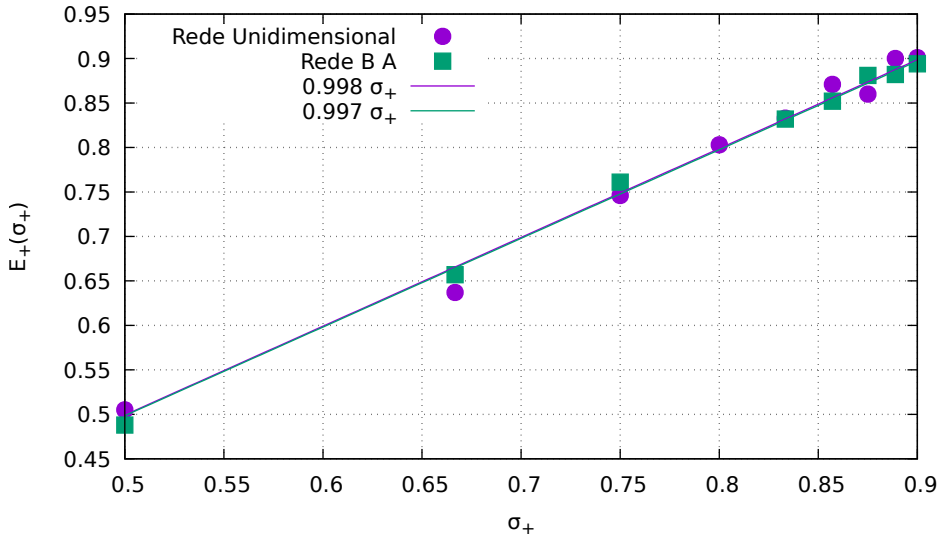
Os dados numéricos para a rede de Barabàsi-Albert, com tempo de consenso próximo de $T_N \sim N^{0.88}$ e para a rede unidimensional com valor próximo de $T_N \sim N^2$, satisfazem com uma boa precisão aos resultados analíticos. No caso da rede de Barabàsi-Albert é suficiente usar a aproximação de campo médio simples e os dados numéricos estão de acordo com o tempo de consenso previsto por Sood e Redner (SOOD, 2005) (ver figura 3.3).

Figura 3.3 – Tempo de Consenso para as redes unidimensional e Barabàsi-Albert. Cálculo realizado com 1000 amostras e densidade inicial de nós com *spin-up* $\sigma_+ = 0,5$. Tempos de consenso ajustados: $T_N \sim N^{0,88\pm0,01}$ para a rede BA e $T_N \sim N^{2,02\pm0,03}$ O gráfico está em escala log-log.



A questão da conservação de magnetização média também pode ser analisada numericamente, através da probabilidade de saída. Vale lembrar que a rede heterogênea conserva magnetização média para tempos longos o que explica o comportamento linear da probabilidade de saída da rede de Barabàsi-Albert. Por outro lado, a rede unidimensional sempre conserva a magnetização média (figura 3.4).

Figura 3.4 – Probabilidade de saída para a rede unidimensional e BA. A simulação da dinâmica é realizada numa rede de tamanho $N = 7000$ e 1000 amostras.



Nosso próximo objetivo é implementar o modelo do votante nas redes complexas com métrica e analisar as aproximações de campo médio apresentadas neste capítulo. É importante salientar que a correlação de graus deve ser investigada para implementar essas aproximações. A seguir, começaremos por analisar a correlação de graus em redes complexas com métrica.

4 O MODELO DO VOTANTE EM REDES COMPLEXAS COM MÉTRICA

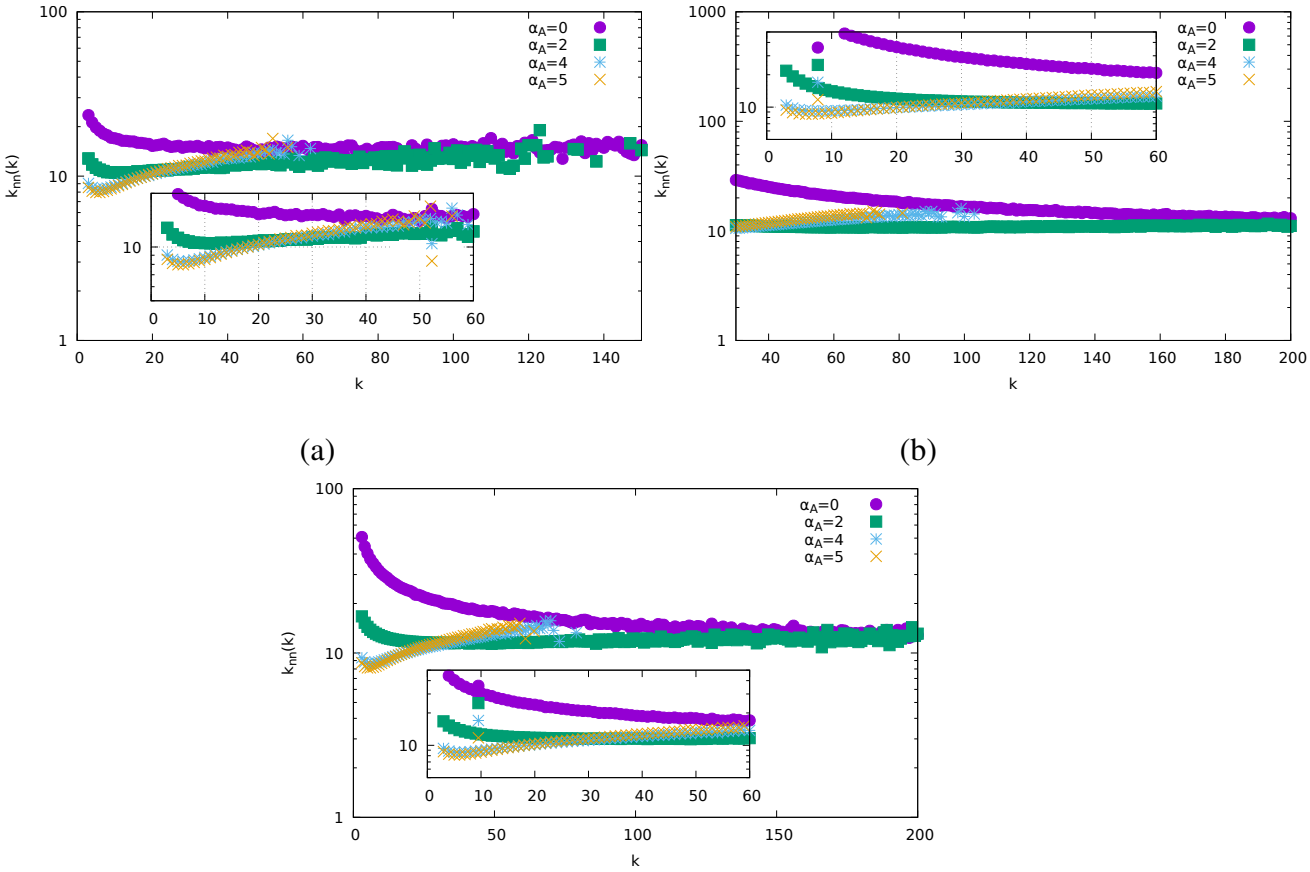
No capítulo 2 estudamos o modelo do votante em topologias de redes regulares e heterogêneas e,no capítulo posterior, a maneira com que as topologias afetam na dinâmica. Mostramos que as redes regulares possuem uma escala de tempo com o tamanho do sistema diferente das redes heterogêneas . Esses resultados foram mostrados por meio das soluções exatas para as redes regulares, aproximações de campo médio heterogênea simples e de pares e por dados gerados por simulações computacionais para compararmos com os resultados analíticos . Em redes heterogêneas, podemos prever analiticamente o tempo de consenso usando as duas aproximações de campo médio mostradas no capítulo anterior pois a maioria das redes heterogêneas são praticamente descorrelacionadas. Além do tempo de consenso, outras propriedades levadas em conta são a densidade de interface, probabilidades de saída e de sobrevivência. Através delas, mostramos que a dinâmica conserva a magnetização para média tempos longos.

Reservamos este capítulo para mostrar os resultados inéditos e originais. Nosso objetivo é implementar o modelo do votante nas redes com métrica de modo a analisar os efeitos destas topologias e a validade das aproximações de campo médio para a previsão do tempo de consenso. É importante investigar as correlações de graus dessas redes e de que maneira elas influenciam na dinâmica do modelo do votante. A seguir, mostraremos os resultados computacionais e a comparação com a aproximação de campo médio heterogênea. É importante ressaltar que todos os resultados, exceto o tempo de consenso para rede Bianconi-Barabàsi com métrica, foram obtidos com 10^3 realizações porque é essa amostragem é a mínima capaz de gerar resultados sem flutuações. Os cálculos na rede Bianconi-Barabàsi requer um maior número de amostras.

4.1 Correlação de Graus das Redes com Métrica

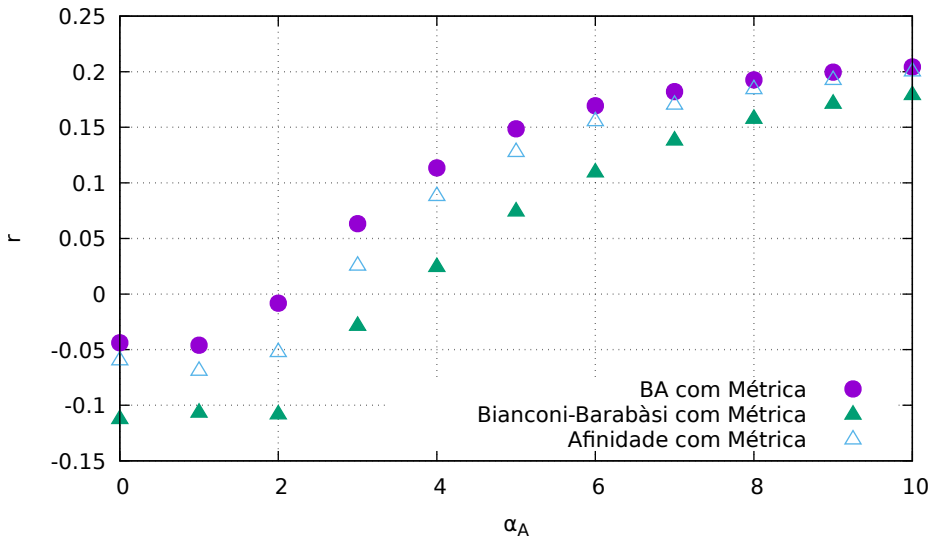
O resultado da correlação de graus para a rede de Barabàsi-Albert discutido no capítulo anterior sugere que esta rede é fracamente disassociativa para graus k pequenos e praticamente desorrelacionada em graus maiores. Próximo passo consiste em avaliar o comportamento da correlação de graus nas redes com métrica espacial (figura 4.1). O comportamento se torna mais interessante em redes onde a métrica espacial é inserida. A figura 4.1 mostra uma transição de redes quase descorrelacionadas, quando elas são heterogêneas ($\alpha_A = 0$) para redes praticamente associatvas quando se torna mais homogênea ($\alpha_A \leq 5$). Diferenças em α_G não alteram significativamente o comportamento da correlação. Essa transição de comportamento

Figura 4.1 – Correlação de grau das redes (a) BA com métrica (b) Bianconi-Barabàsi com métrica (c) Afinidade com métrica para $\alpha_G = 2$. Gráfico na escala log no eixo y.



na correlação de graus é melhor observada por meio do coeficiente de correlação r em função de α_A (figura 4.2). Para valores de $\alpha_A < 2$ o coeficiente de Pearson é próximo de zero e isso significa que quando a métrica espacial é menos importante as redes são quase descorrelacionadas. Esse comportamento muda com a transição topológica da rede, cujo valor crítico é $\alpha_A = 2$ e a rede tende a ser associativa. O nível de associatividade parece saturar em valores grandes de α_A. Esse resultado sugere que a transição na correlação de grau é diretamente influenciada pela transição topológica da rede.

Figura 4.2 – Coeficiente de Pearson em Função de α_A das redes com a métrica espacial.



Essa correlação positiva de graus mostrada na figura 4.1 pode afetar a correlação dos estados de *spin*, que por sua vez pode influenciar na validade da aproximação de campo médio usada para calcular o tempo de consenso. Essa aproximação se mostrou válida em redes descorrelacionadas , conforme mostrado no capítulo anterior (SOOD, 2005; PUGLIESE; CASTELLANO, 2009). O próximo passo é observar essas aproximações nas redes complexas com métrica à medida que variamos α_A. Além dessa análise, vamos verificar o papel da topologia de rede na dinâmica.

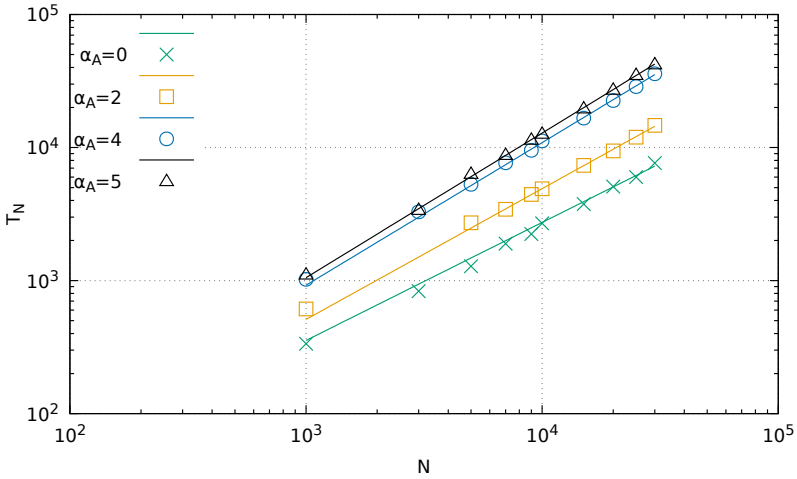
4.2 Modelo do Votante nas Redes com Métrica Espacial

Rede BA com métrica

Usando a mesma metodologia de implementação já apresentada no capítulo anterior, estendendo-a para as redes complexas com métrica começando pela rede BA com métrica.

Como mostram os resultados (figura 4.3), o tempo de consenso continua seguindo um regime de lei de potência com o tamanho da rede do tipo $T_N \sim N^{\nu}$. No caso particular $\alpha_A = 0$, recuperamos a rede Barabàsi-Albert e o tempo de consenso próximo do previsto para esta rede, com $\nu = 0.88$ (SOOD; ANTAL; REDNER, 2008). Variando α_A, observa-se um comportamento do tempo de consenso próximo do linear com o tamanho da rede. Isso acontece devido à redução dos *hubs* que influenciavam em peso na dinâmica. Como a tendência da rede é se tornar mais próxima à homogênea, elas tendem a possuir grau k próximo de $\langle k \rangle$ e mais tempo demora a atingir o consenso. Enquanto os *hubs* influenciariam mais vizinhos na rede heterogênea que os outros que se encontram na rede, os nós que possuem, a maioria aproximadamente $\langle k \rangle$ vizinhos na rede homogênea influenciariam quase a mesma quantidade de vizinhos por passo. Assim, o consenso é atingido mais lentamente.

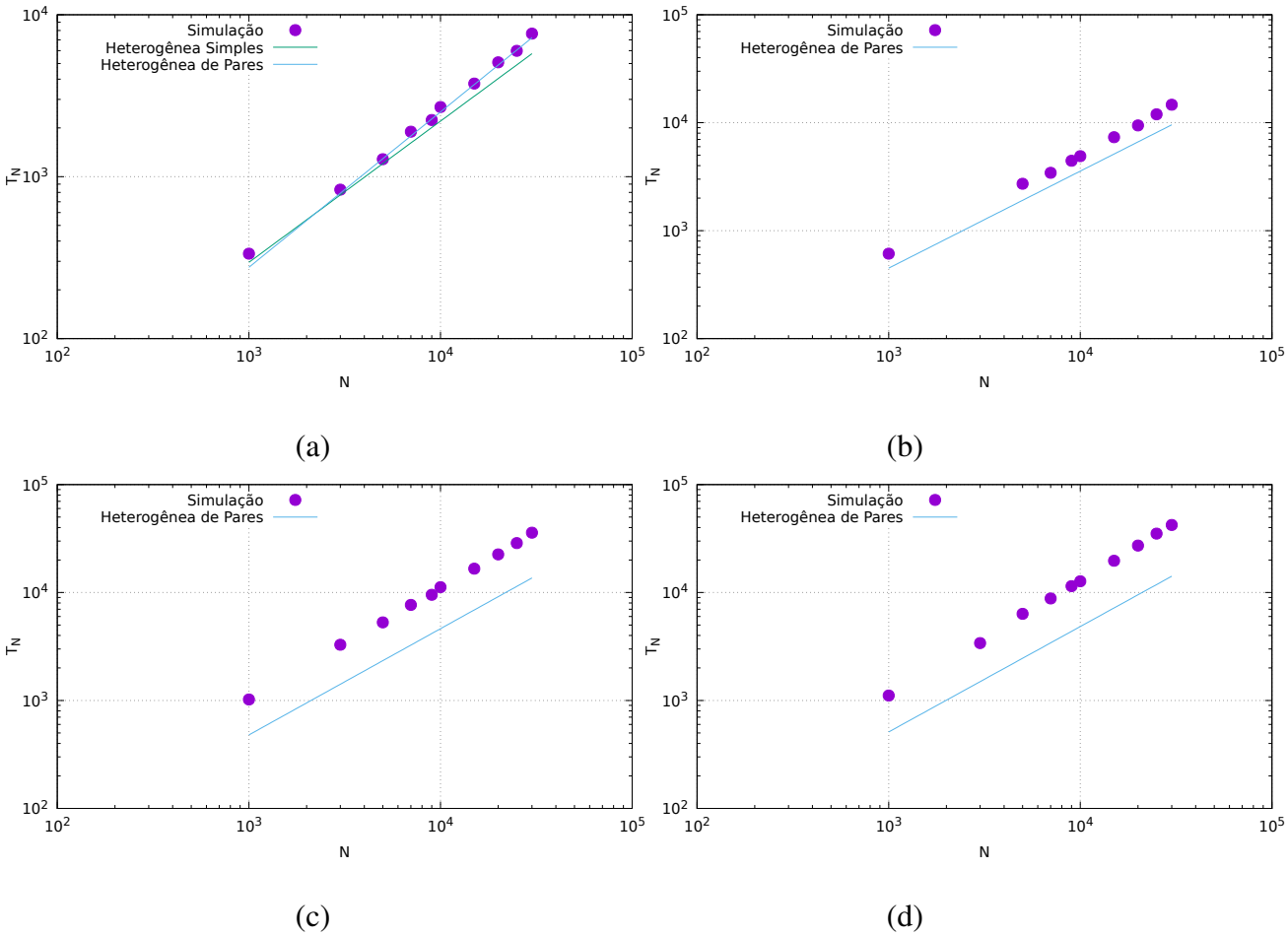
Figura 4.3 – Modelo do Votante na rede BA com métrica usando densidade inicial de *spin-up* $\sigma_+ = 0,5$ Cálculo realizado para 10^3 amostras. O gráfico está na escala log-log. Ajustes: $\alpha_A = 0 \rightarrow T_N = N^{0,88\pm0,02}$, $\alpha_A = 2 \rightarrow T_N \sim N^{0.99\pm0,04}$, $\alpha_A = 4 \rightarrow T_N \sim N^{1,07\pm0,05}$, $\alpha_A = 5 \rightarrow T_N \sim N^{1,08\pm0,01}$.



A aproximação de campo médio heterogênea parece razoável quando $\alpha_A = 0$ (figura 4.4 -(a)) principalmente com a aproximação heterogênea de pares. A partir de $\alpha_A = 2$, essas aproximações não se ajustam aos dados obtidos da simulação. A correlação de graus tende a ser positiva nas redes onde $\alpha_A \neq 0$, então a probabilidade condicional $P(k,k')$ não pode ser quebrada como na equação (3.10). Além disso, a rede está se tornando mais homogênea, o que interfere também no tempo de consenso, pelo mesmo motivo da explicação da figura 4.3. Na figura 4.4, usamos apenas a aproximação heterogênea de pares para comparar com os dados computacionais quando $\alpha_A \neq 0$, pois seu comportamento é semelhante ao da aproximação de campo médio simples.

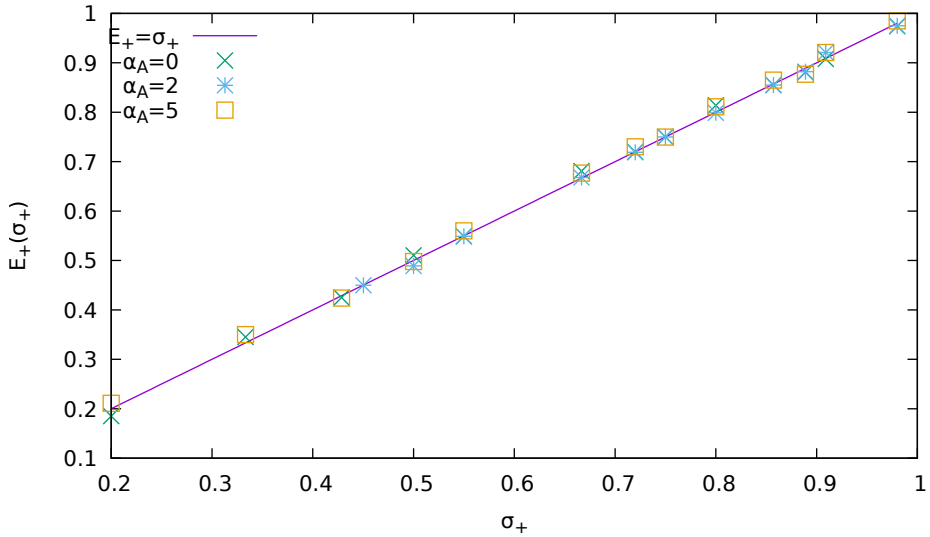
A aproximação de campo médio parece não descrever os resultados da simulação quantitativamente quando $\alpha_A > 0$, mas podem descrever bem do ponto de vista qualitativo. Observe que a reta do tempo de consenso da aproximação de campo médio é paralela à reta do tempo de consenso da simulação.

Figura 4.4 – Aproximação de campo médio heterogênea na rede BA com métrica para diferentes α_A e $\alpha_G = 2$, densidade inicial de *spin-up* $\sigma_+ = 0.5$. Gráficos na escala log-log. Cálculos da simulação feitos com 10^3 amostras. As aproximações de campo médio de simples e de pares são semelhantes no caso $\alpha_A \neq 0$. Ajustes da aproximação de campo médio (a) $\alpha_A = 0$, aproximação simples: $T_N \sim N^{0,87\pm0,02}$ e de pares: $T_N \sim N^{0,89\pm0,05}$ (b) $\alpha_A = 2$, ajuste da aproximação: $T_N \sim N^{0,90\pm0,02}$ (c) $\alpha_A = 4$, ajuste da aproximação: $T_N \sim N^{0,98\pm0,04}$ (d) $\alpha_A = 5$, ajuste da aproximação: $T_N \sim N^{0,977\pm0,01}$.



A conservação da magnetização média pode ser avaliada pela probabilidade de saída (Figura 4.5) que apresenta um comportamento próximo do linear com a densidade inicial σ_+ para qualquer uma dessas redes.

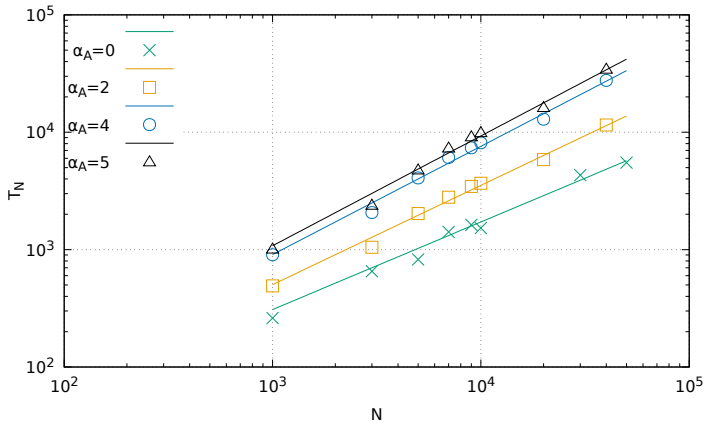
Figura 4.5 – Probabilidade de saída para a rede BA com métrica. Cálculos realizados para redes de tamanho $N = 10^4$ e 10^3 amostras.



Rede de Afinidade com Métrica

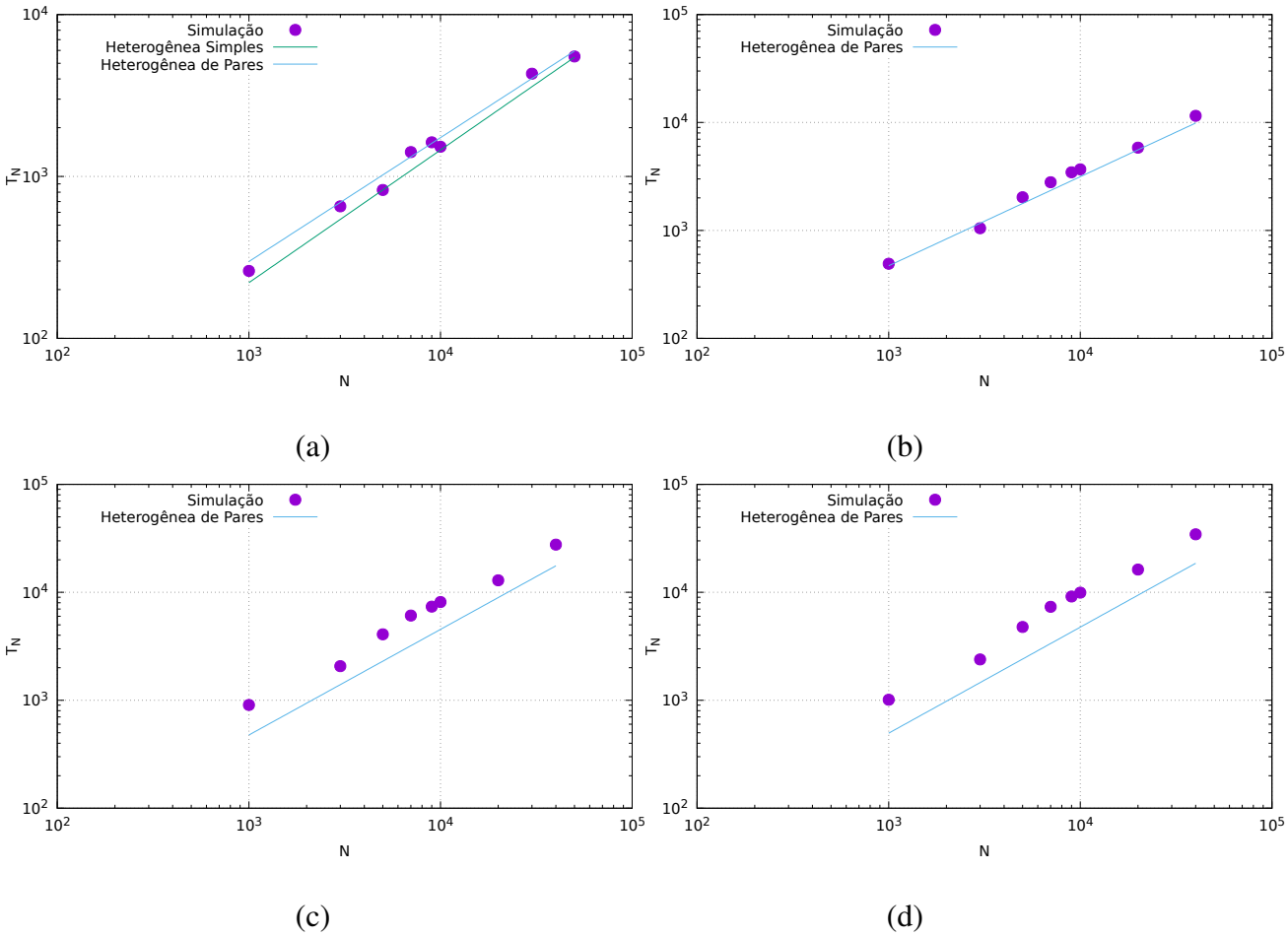
Nosso próximo passo é implementar o modelo do votante nas redes de afinidade com métrica da referência (BRITO, 2012). O resultado sugere que a propriedade de afinidade da rede tem um papel importante na influência das opiniões (figura 4.6). Observe que o expoente de escala do tempo de consenso com o tamanho do sistema é menor quando $\alpha_A = 0$, ou seja, nesta rede o consenso é alcançado mais facilmente pois a escala do tempo de consenso com a potência do tamanho da rede é menor. Com o aumento de α_A, o regime do tempo de consenso se aproxima novamente do linear com N.

Figura 4.6 – Modelo do Votante na rede de afinidade com métrica. Teste realizado em 10^3 amostras e densidade inicial de *spin-up* $\sigma_+ = 0,5$ e $\alpha_G = 2$. Ajustes para $\alpha_A = 0 \rightarrow T_N \sim N^{0,76\pm0,04}$, $\alpha_A = 2 \rightarrow T_N \sim N^{0.85\pm0,03}$, $\alpha_A = 4 \rightarrow T_N \sim N^{0,92\pm0,04}$, $\alpha_A = 5 \rightarrow T_N \sim N^{0,94\pm0,03}$.



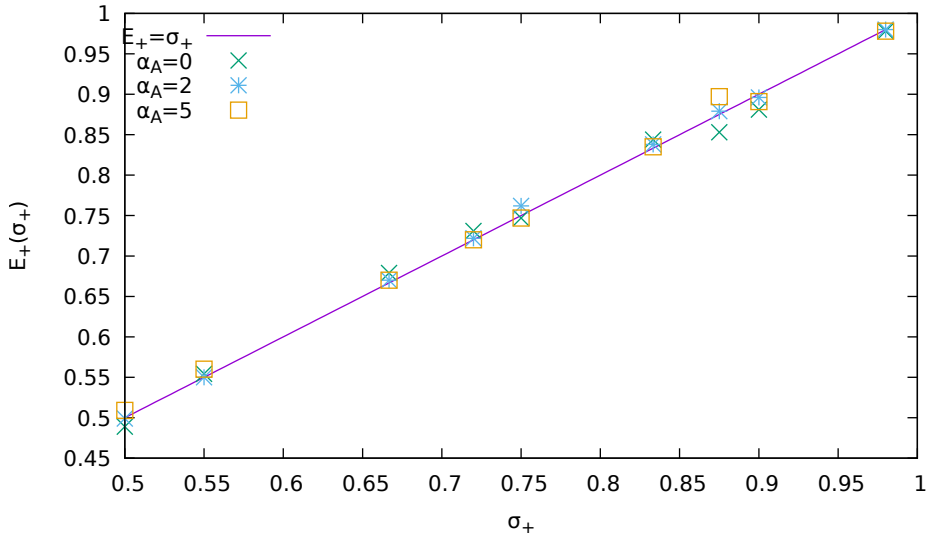
As aproximações de campo médio heterogêneas parecem razoáveis na rede heterogênea do modelo de afinidade, pois elas são quase descorrelacionadas. Elas ainda podem ser usadas caso $\alpha_A \leq 2$ (figura 4.7- (a) e (b)). Nos outros casos (figura 4.7- (c) e (d)) segue o mesmo comportamento observado anteriormente: as aproximações heterogêneas simples e de pares são bem próximas entre si e não são coincidentes com os resultados computacionais. Plotamos a aproximação de campo médio heterogênea simples apenas quando $\alpha_A = 0$ pois nos outros casos elas são praticamente iguais.

Figura 4.7 – Aproximação de campo médio homogênea na rede de Afnidade com Métrica para diferentes α_A e $\alpha_G = 2$ e densidade inicial de *spin-up* $\sigma_+ = 0.5$. Gráficos na escala log-log. Cálculos dos dados computacionais obtidos com 10^3 amostras. Ajustes das aproximações de campo médio heterogêneas: (a) $\alpha_A = 0$, $T_N \sim N^{0,82\pm0,03}$ para aproximação simples e $T_N \sim N^{0,76\pm0,03}$ para heterogênea de pares (b) $\alpha_A = 2$, $T_N \sim N^{0,83\pm0,02}$ (c) $\alpha_A = 4$, $T_N \sim N^{0,97\pm0,04}$ (d) $\alpha_A = 5$, $T_N \sim N^{0,98\pm0,04}$.



Nestas redes há também a conservação de magnetização média pois a probabilidade de saída tem um comportamento praticamente linear com a densidade σ_+, independentemente de α_A e α_G. Observamos claramente isso na simulação de uma rede de afinidade com um tamanho $N = 7000$ (figura 4.8).

Figura 4.8 – Probabilidade de saída em uma rede de afinidade com métrica de tamanho $N = 7000$ para diferentes valores de α_A e $\alpha_G = 2$. Cálculo realizado sobre 10^3 amostras.



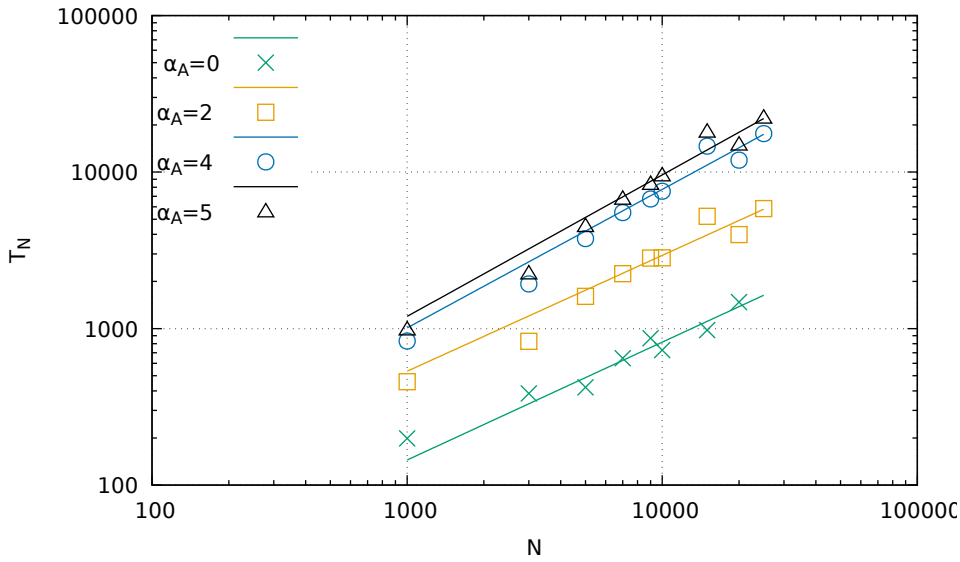
Rede Bianconi-Barabàsi com Métrica

Analisamos a dinâmica do votante na rede Bianconi-Barabàsi com métrica. Os dados da simulação mostram que o tempo de consenso neste caso também escala com uma potência de N (figura 4.9). Aqui a dinâmica é influenciada pelo parâmetro de atratividade η, de modo que o expoente é menor e a dinâmica acontece de uma maneira mais rápida devido à presença de *super-hubs* que influenciam a maioria dos outros sítios e o consenso acontece mais facilmente que nas outras redes.

As aproximaçoes de campo médio heterogêneas na rede Bianconi Barabàsi com métrica também são consistentes quando comparadas aos dados computacionais (figura 4.10) quando $\alpha_A = 0$ e $\alpha_A = 2$, onde novamente a aproximação heterogênea de pares apresenta resultados mais próximos aos dados da simulação, mas no caso $\alpha_A = 5$, observa-se uma notória diferença entre a simulação e as aproximações heterogêneas simples e de pares e uma proximidade entre as duas aproximações. Essa diferença entre os valores pode estar relacionada com a correlação associativa de graus em α_A maiores.

Outro comportamento comum de todas as redes é a conservação de magnetização média (Figura 4.11), pois a probabilidade de saída também é praticamente linear com a densidade inicial σ_+. Logo, nesta rede também há conservação de magnetização média.

Figura 4.9 – Modelo do Votante na rede de Bianconi-Barabàsi com métrica. Teste realizado em 10^4 amostras, densidade inicial de *spin-up* $\sigma_+ = 0,5$ e $\alpha_G = 2$. Ajustes para $\alpha_A = 0 \rightarrow T_N \sim N^{0,73\pm0,01}$, $\alpha_A = 2 \rightarrow T_N \sim N^{0.86\pm0,01}$, $\alpha_A = 4 \rightarrow T_N \sim N^{0,96\pm0,01}$, $\alpha_A = 5 \rightarrow T_N \sim N^{1,08\pm0,01}$.



Nos três modelos de rede observamos que há uma conservação de magnetização média no limite assintótico de tempo quando estudamos o modelo do votante, pois as probabilidades de saída possuem comportamento linear com a densidade inicial de *spin-up*.

Um comportamento interessante que mostramos é o tempo de consenso que muda à medida com que variamos α_A. A figura 4.12 mostra isso com mais detalhes. O resultado sugere que, quanto mais a distância euclideana é considerada, isto é, quanto maior α_A , a dinâmica demora mais tempo para atingir o consenso. Quando acontece a transição topológica, isto é, $\alpha_A = 2$, o regime de tempo de consenso também sofre uma transição de comportamento e aumenta de forma expressiva para $\alpha_A > 2$. Mas o tempo de consenso parece saturar para valores maiores de α_A, quando se varia este expoente. Os *hubs* facilitam o processo de consenso. À medida com que α_A aumenta, o número de *hubs* diminui e, consequentemente, o tempo de consenso aumenta. Porém, para α_A muito grande ($\alpha_A > 8$), a rede se torna homogênea e a maioria dos nós possui grau $k \sim \langle k \rangle$ independentemente da distância espacial. Então o tempo de consenso não muda, quando α_A varia. Incluindo outros parâmetros, como a atratividade e afinidade, o tempo para alcançar o consenso é menor, mas também segue este comportamento de transição.

A mudança de comportamento na relação do tempo de consenso com o tamanho da rede é diretamente influenciado pela topologia de rede, isto é, pela distribuição de conectividade que muda à medida que variamos α_A. Isso é refeltido na mudança do expoente de escala ν

Figura 4.10 – Aproximação de campo médio homogênea na rede Bianconi-Barabàsi com Métrica para diferentes α_A e $\alpha_G = 2$ e densidade inicial de *spin-up* $\sigma_+ = 0.5$. Gráficos na escala log-log. Cálculos dos dados computacionais obtidos com 10^4 amostras. Ajustes das aproximações de campo médio heterogênea: (a) $\alpha_A = 0$, $T_N \sim N^{0,67\pm0,02}$ para aproximação simples e $T_N \sim N^{0,69\pm0,05}$ para heterogênea de pares (b) $\alpha_A = 2$, $T_N \sim N^{0,84\pm0,03}$ (c) $\alpha_A = 4$, $T_N \sim N^{0,983\pm0,04}$ $\alpha_A = 5$, $T_N \sim N^{1,03\pm0,04}$.

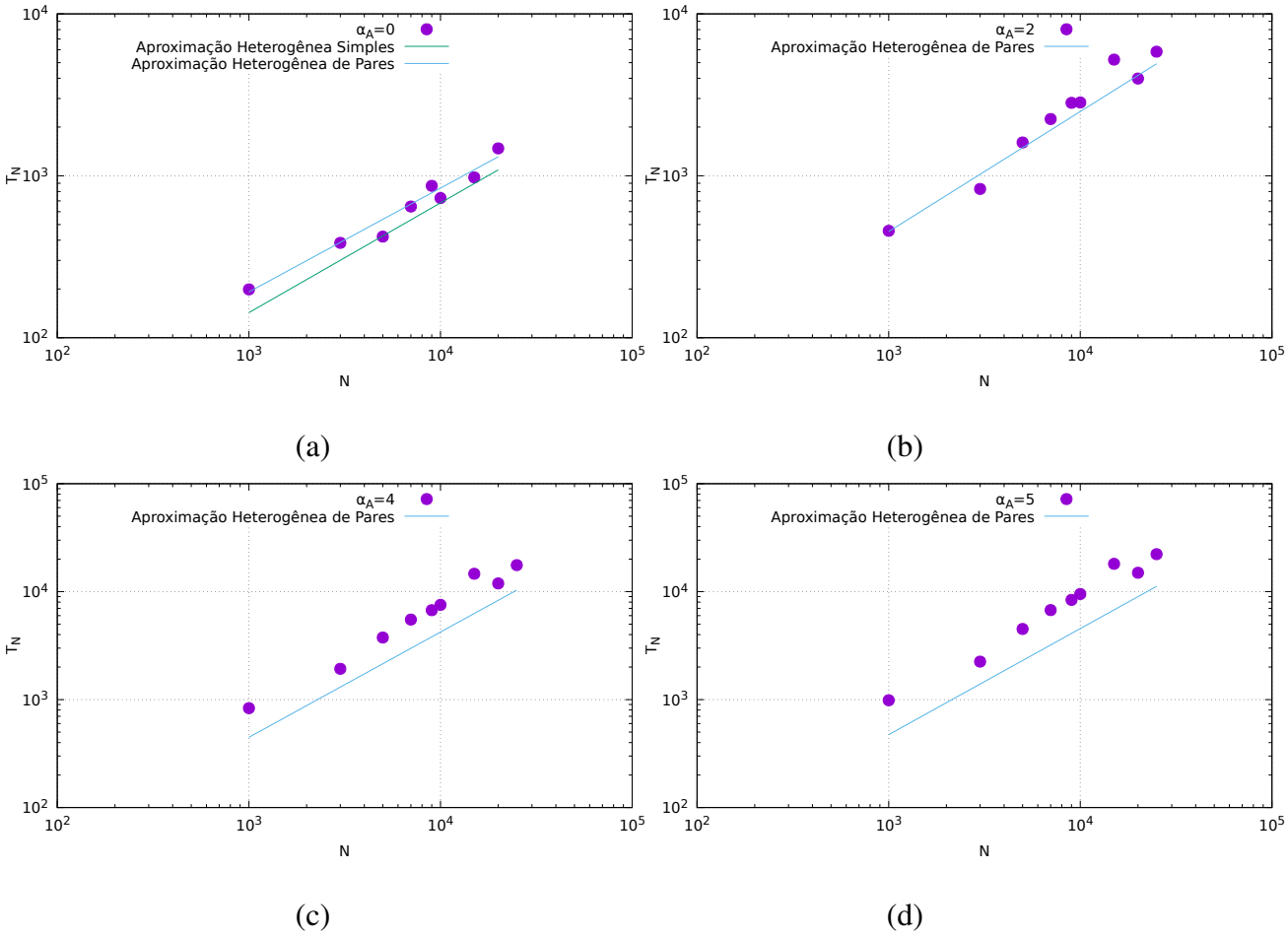


Figura 4.11 – Probabilidade de saída para rede Bianconi-Barabàsi com Métrica de tamanho $N = 10^4$. Cálculo realizado sob 10^3 amosrtas.

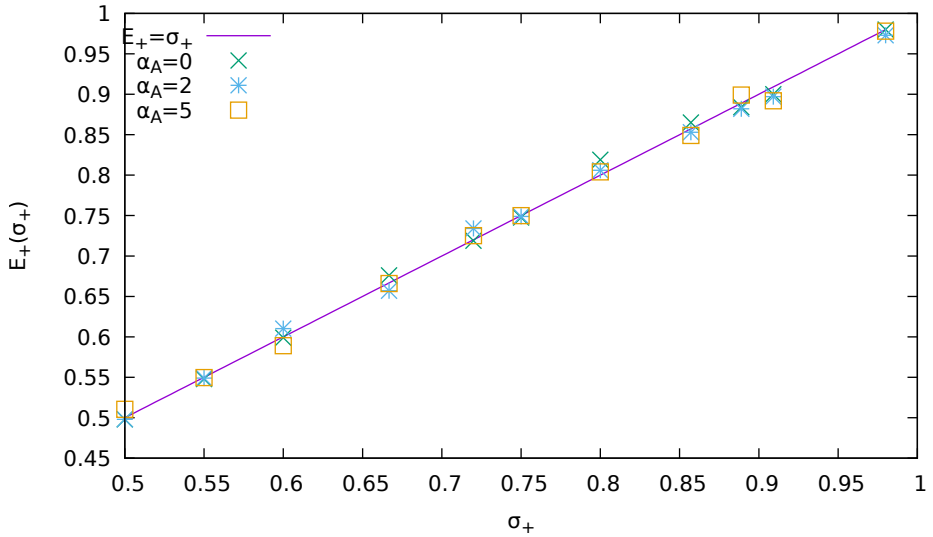
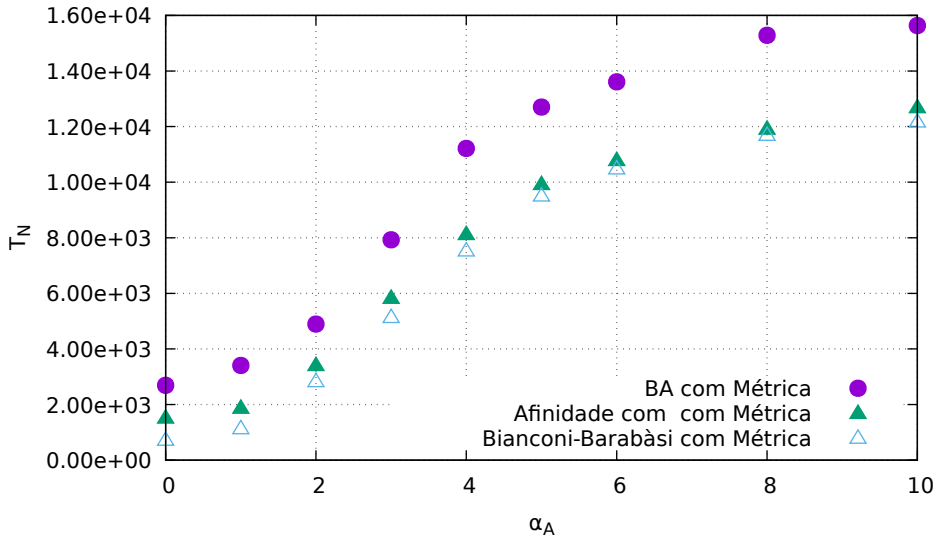


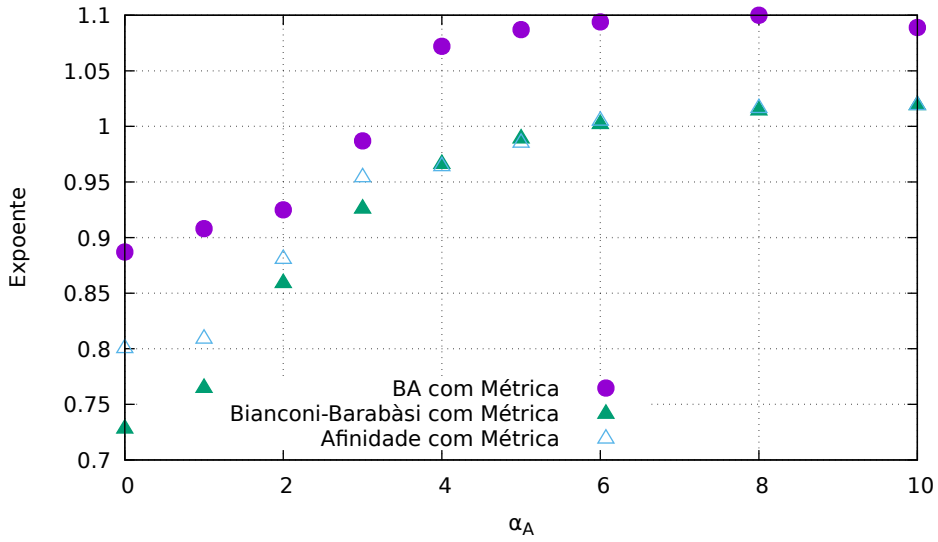
Figura 4.12 – Tempo de consenso em função de α_A para redes de tamanho fixo $N = 10^4$. Cálculos sob 10^3 amostras.



A figura 4.13 mostra que esse expoente também sofre uma mudança quando a rede sofre uma transição de fase. A mudança expressiva acontece a partir de $\alpha_A = 2$, mas o expoente não varia muito quando $\alpha_A \geq 4$, dada a reduzida quantidade de *hubs* quanto mais se considera a distância espacial. Nas outras redes, o tempo necessário para a dinâmica alcançar o consenso é menor, mas também possui um comportamento refletido pela transição topológica. Com a inclusão dos parâmetros de afinidade e atratividade, essas redes possuem mais *hub*, quando são heterogêneas. No caso de α_A maior, ainda não podemos afirmar o motivo do tempo de consenso ser menor,

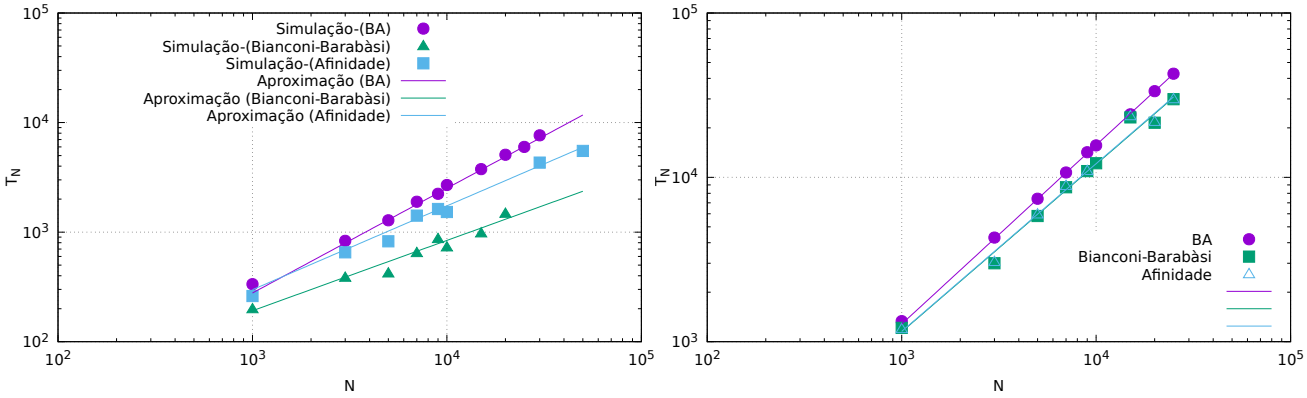
mas, se observarmos, essas redes são menos homogêneas que a rede BA com métrica. Assim, pode ser por isso que o tempo de consenso é menor.

Figura 4.13 – Influência do expoente da distância espacial (α_A) no expoente de escala do tempo de consenso com o tamanho da rede.



Como mostrado na figura 4.14 (a), quando não incluimos a métrica, é nítida a diferença de comportamento para os diferentes tipos de rede. Isso mostra que características de afinidade e atratividade influenciam significativamente a dinâmica do modelo do votante. Porém, quando a métrica desempenha papel bastante relevante (α_A grande), as redes ficam praticamente homogêneas e essas características parecem não influenciar de maneira significativa a dinâmica (veja a figura 4.14 (b)).

Figura 4.14 – Comparação do tempo de consenso nas redes (a) sem a métrica espacial ($\alpha_A = 0$) (b) com a métrica espacial ($\alpha_A = 10$). Gráficos na escala log-log.



(a) (b)

As aproximações de campo médio heterogênea de pares se ajustam bem aos dados computacionais das redes sem métrica, que são praticamente descorrelacionadas. Por outro lado, quando $\alpha_A \neq 0$, ou seja, a métrica espacial é incluída, as aproximações de campo médio não se ajustam quantitativamente aos dados da simulação, apenas quanlitativamente. Isso pode ser devido ao fato dessas redes se tornarem associativas.

A incompatibilidade dos dados computacionais com a teoria de campo médio também pode ser explicada, provavelmente, pela formação de domínios ordenados durante o processo de *coarsening*. Dada a distância euclideana, possíveis domínios do mesmo *spin* podem ser formados e a medida com que o tempo vai aumentando esses domínios também aumentam diminuindo assim a densidade de interfaces (*links* ativos) na rede. Assim o consenso é atingido quando esse domínio atinge o tamanho da rede (*coarsening*), de maneira semelhante ao que acontece em uma rede quadrada. Essa explicação é dada com base no aumento expressivo do tempo de consenso com α_A, mostrado na figura 4.12. Este parâmetro está relacionado com a influência da distância espacial na regra de conexão preferencial e espera-se que a medida que aumentamos o valor de $\alpha_A \to \infty$, recuperamos o regime de uma rede praticamente regular e homogênea.

5 ANÁLISE EM REDES REAIS

Nos capítulos anteriores estudamos as propriedades dos modelos de redes mais recentes. Na tentativa de aproximá-los das redes reais, os autores destes modelos teóricos incluíram parâmetros como a distância geográfica (SOARES et al., 2005), atratividade (NUNES et al., 2017; BIANCONI; BARABÁSI, 2001) e afinidade (ALMEIDA, 2010; BRITO, 2012) na regra de ligação preferencial. Como proposta deste trabalho, implementamos o modelo do votante nessas redes sintéticas afim de observar os efeitos das topologias na evolução da dinâmica. Resultados interessantes mostraram que os parâmetros de afinidade e atratividade influenciam na dinâmica do votante quando a distância euclideana é irrelevante, mas à medida com que se considera mais a distância, essas características parecem não influenciar de forma significativa. Portanto, a distância geográfica assume um papel importante no efeito da topologia de rede na evolução do processo dinâmico.

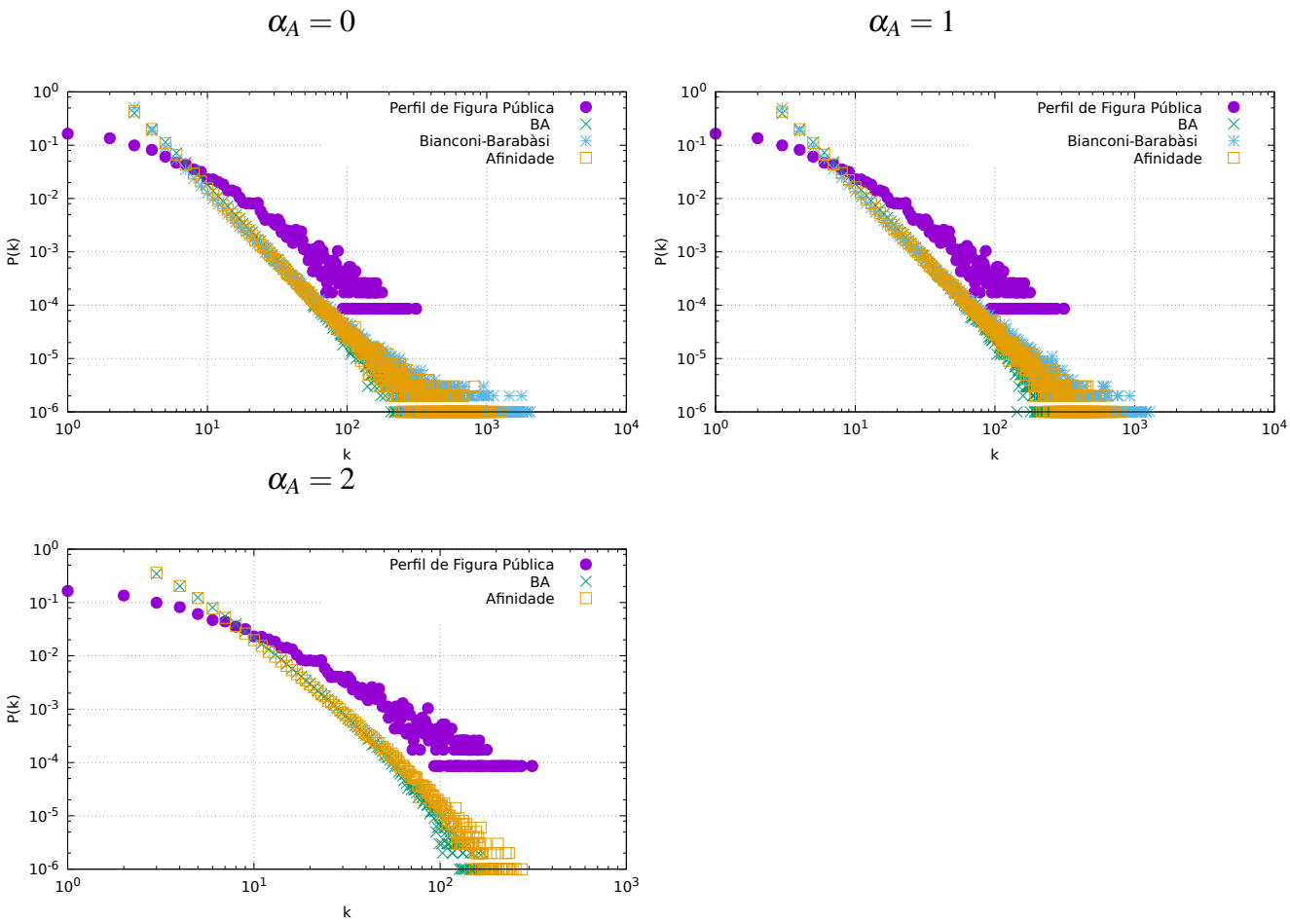
Esses modelos de rede parecem capazes de explicar um sistema real de maneira mais simples e aproximada com a inclusão dessas características, mas não podemos dizer que descrevem a realidade, pois a interação social, por exemplo, necessita de mais parâmetros para uma descrição completa. Afim de observar a sua relevância , a proposta deste capítulo é comparar as propriedades dessas redes sintéticas com as propriedades das redes reais, obtidas por meio das coletas de dados fornecidos pela *internet*. A rede real usada é a do *Facebook* com diferentes tipos de perfis: político, figura pública e de companias. Usando esses dados, implementamos o modelo do votante direcionado nessas redes e compararmos com os resultados de redes sintéticas.

5.1 Distribuição de Conectividade e correlação de graus

Em redes sintéticas, vimos que a distância euclideana é uma grandeza que assume um papel importante na distribuição de conectividade e na correlação de graus das redes de conexão preferencial. Nos casos em que a distância euclideana é irrelevante, as redes tendem a ser heterogêneas, enquanto que, quanto mais relevante é a distância, mais homogênea é a rede. Lidamos até agora com redes sintéticas, mas isso também acontece com as redes reais. Pessoas podem se relacionar pelo *Facebook* independentemente das barreiras geográficas. Isso leva a pensar que a distância entre os indivíduos não interfere na relação entre eles. Por outro lado, dados empíricos (GOLDENBERG; LEVY, 2009) mostraram que, mesmo sem a interferência

da geografia, pessoas tendem a formar laços no perfil do *Facebook* com outras pessoas que já se conhecem pessoalmente, ou seja, que estão mais próximas geograficamente.

Figura 5.1 – Distribuição de conectividade da redes de perfil de figuras públicas. Rede de tamanho $N = 11565$. Gráficos na escala log-log. Dados coletados do site SNAP[1]: Stanford Network Analysis Project.

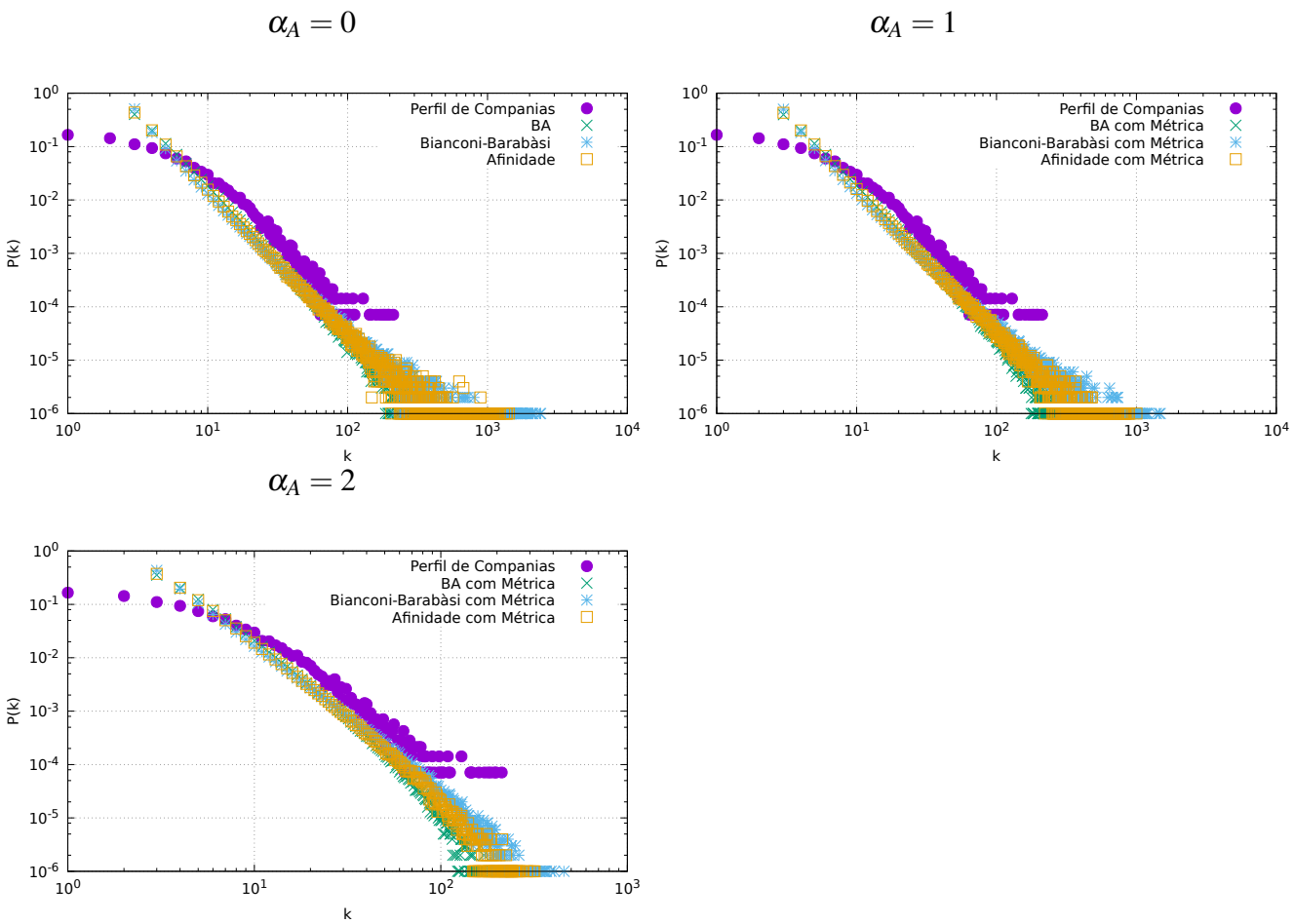


As redes dos diferentes tipos de perfis do *Facebook*, como por exemplo, de figuras públicas, de tamanho $N = 11565$, de políticos, cujo tamanho é $N = 5908$ e de companias, de tamanho $N = 14113$ seguem distribuições de conectividade parecidas (ver figuras 5.1, 5.2 e 5.3). Esses dados foram coletados do site SNAP: Stanford Network Analysis Project, uma plataforma que fornece os dados de redes reais sociais.

Usamos as redes de Barabàsi-Albert, Bianconi-Barabàsi e de Afinidade, primeiro sem levar em conta a métrica espacial e, posteriormente, incluindo a distânca euclideana, para comparar com as redes reais com $\alpha_A = 0$ (regra de conexão preferencial sem a inclusão da distância), $\alpha_A = 1$ (regra de conexão preferencial incluindo a distância). As redes sintéticas parecem ter um comportamento $P(k)$ próximo da distribuição de conectividade das redes do *Facebook*, mas

[1] <https://snap.stanford.edu/data/>

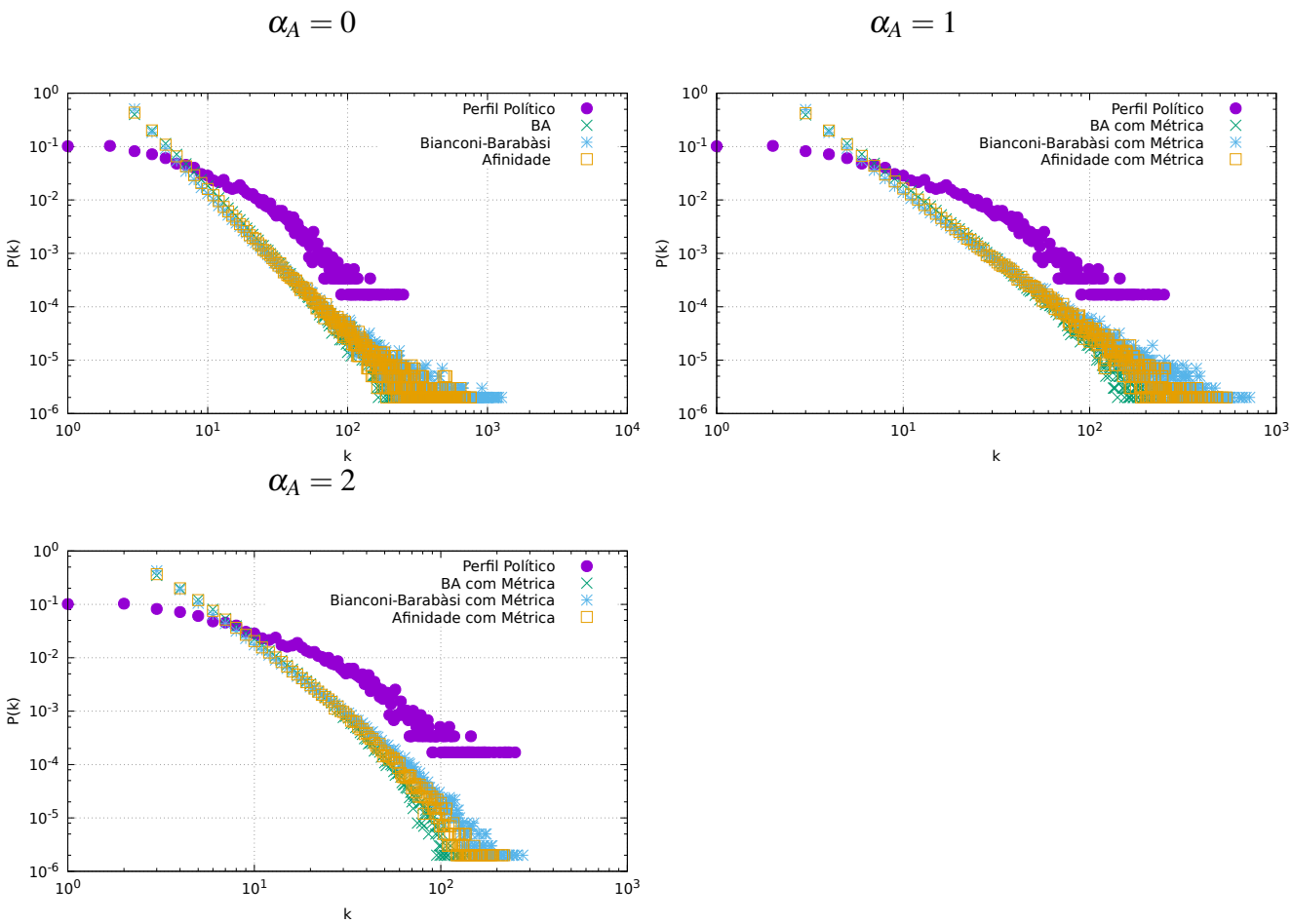
Figura 5.2 – Distribuição de conectividade das redes do perfil de companias. Rede de tamanho $N = 14113$ Gráficos na escala log log. Dados coletados do site SNAP: Stanford Network Analysis Project.



um detalhe a ser investigado é se esse comportamento se aproxima mais das distribuições em redes onde a métrica é levada em conta.

A correlação de graus das redes do *Facebook* parece ser crescente e isso pode ser uma evidência que é possível descrevê-las por uma dessas redes sintéticas que incluem a distância euclideana. Observe que, para $\alpha_A \neq 0$, o comportamento é mais próximo da correlação de graus das redes reais. Entretanto, em alguns tipos de perfis específicos. As figuras 5.4, 5.5 e 5.6 mostram esses comportamentos. As redes Bianconi-Barabàsi e Afinidade, ambas incluindo a métrica espacial, possuem comportamentos da correlação que se ajustam melhor aos dados reais. Isso pode ser comprovado pelo coeficiente de Pearson, que é $r \approx 0,018$ para a rede de perfil político, $r \approx 0,012$ para a rede de companias e $r \approx 0,20$ em perfil de figuras públicas. Quando $\alpha_A = 3$ na rede de Afinidade com Métrica e $\alpha_A = 4$ na rede Bianconi-Barabàsi, os valores do coeficiente de correlação são dados por $r \approx 0,026$ e $r \approx 0,025$, respectivamente, e esses resultados são mais próximos dos valores de r da rede de perfil político. A rede Barabàsi-

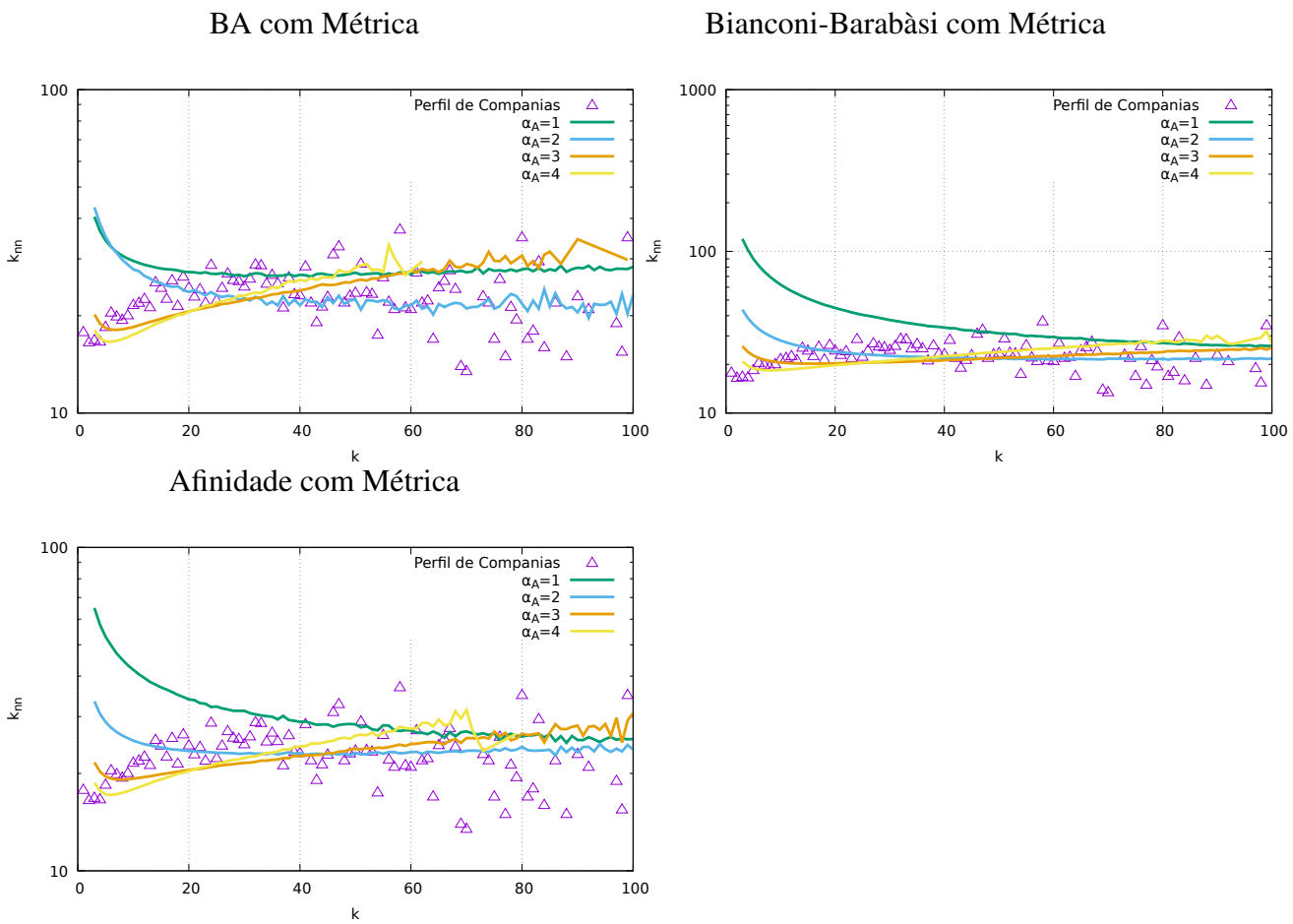
Figura 5.3 – Distribuição de conectividade da rede de perfil político do Facebook. Redes de tamanho $N = 5908$ Gráficos na escala log log. Dados coletados do site SNAP: Stanford Network Analysis Project.



Albert com métrica não descreve bem essa situação, pois valor mais próximo é de $r \approx 0,06$. No perfil de companias a correlação mais próxima acontece também para $\alpha_A = 3$ nas redes de Afinidade com Métrica e Bianconi Barabàsi, mas os valores são um pouco mais distantes. Por outro lado, o coeficiente de Pearson das redes de Afinidade e Barabàsi-Albert com métrica quando $\alpha_A = 10$ é $r0,20$, que é próximo do valor de r da rede de perfil de figuras públicas. Isso mostra que a métrica é mais importante na correlação de graus dos sítios dessa rede.

A seguir, vamos apresentar as propriedades de algumas redes reais coletadas de um material suplementar da Nature (RADICCHI, 2015). Elas possuem um tamanho muito grande (algumas da ordem $N \sim 10^5$). Então os cálculos em redes sintéticas para a distribuição de conectividade e da correlação de graus, cujos resultados seriam usados para comparar com as redes reais, requerem um maior custo de tempo computacional. Sendo assim, limitamos a analisar apenas os comportamentos das distribuições e das correlações de graus dessas redes.

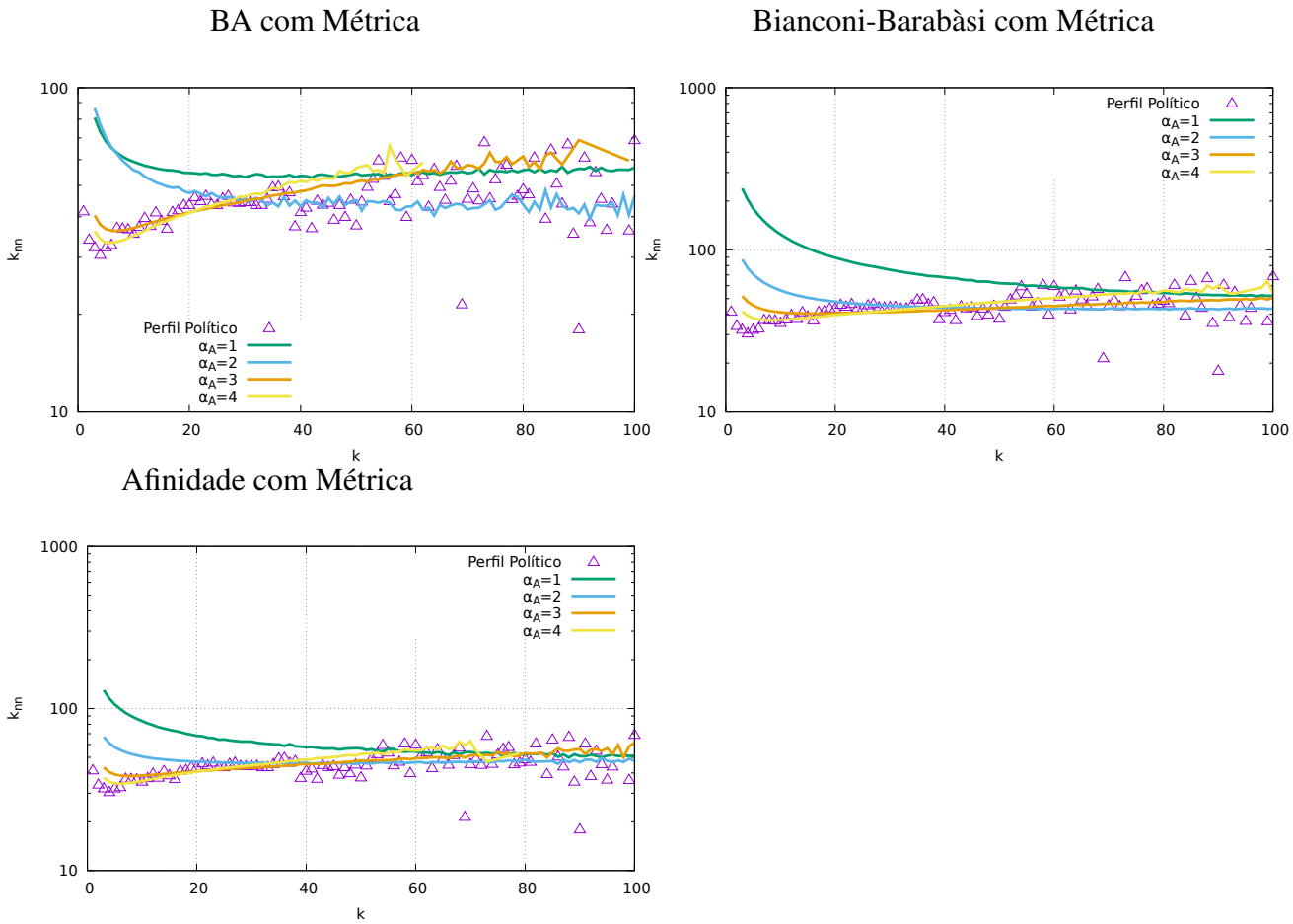
Figura 5.4 – Correlação de graus da rede do perfil de companias do *Facebook*. Rede de tamanho $N = 14113$. Dados coletados do site SNAP: Stanford Network Analisys Project. Gráficos na escala $\log(y)$.



As características desses comportamentos parecem próximas de redes em que a distância euclideana é levada em conta na regra de conexão preferencial, assim como acontece nas redes do *Facebook*. A distribuição de graus tende a aproximar da distribuição de Poisson, mas com uma cauda ainda longa, e as correlações de graus são associativas. Este comportamento é similar das redes sintéticas onde a distância euclideana é considerada, mostradas anteriormente, mas é um detalhe ainda a ser investigado com mais cuidado.

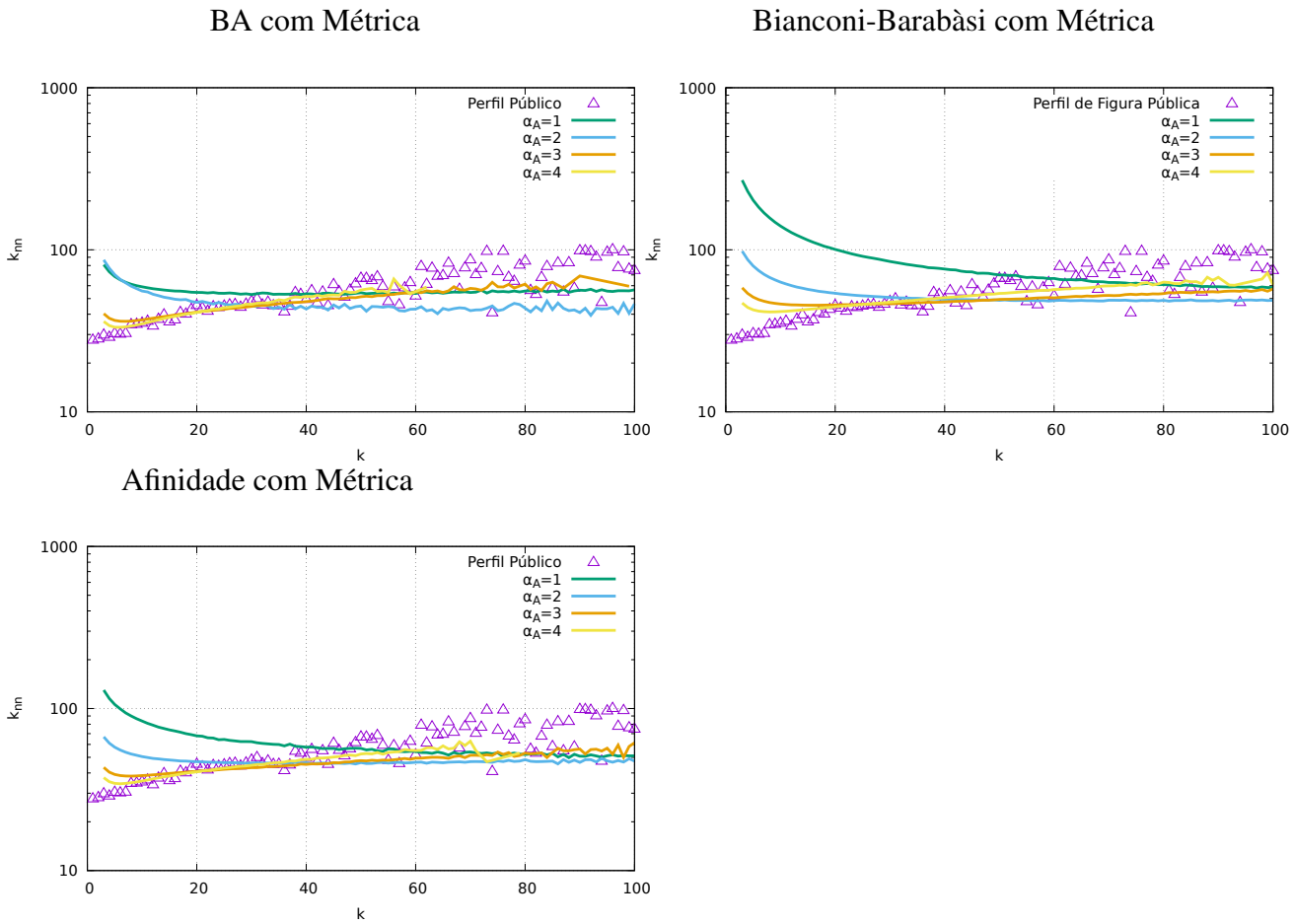
As figuras 5.7 e 5.8 mostram as distribuções e correlações de graus de três redes reais coletadas de um material suplementar da Nature (RADICCHI, 2015): redes de atores, redes de colaboração da biblioteca digital DBLP (do inglês "Digital Bibliography & Library Project") e de um grupo de matéria condensada nos anos de 1995 a 2005. Nas redes da colaboração de atores, um provável argumento é que artistas próximos à uma mesma central de gravação tendem a colaborar profissionalmente. A correlação de graus é crescente para artistas pouco conectados, mas parece que em um determinado grau de conectividade, a rede se torna descor-

Figura 5.5 – Correlação de graus para rede de perfil político do *Facebook*. Dados coletados do site SNAP:Stanford Network Analisys Project.Gráficos na escala $\log(y)$



relacionada. Isso indica que artistas com menos colaboração tendem a se conectar enquanto que artistas com mais colaboração tendem a se conectar também até que, para um determinado grau de colaborações, não importa quantas colaobrações cada um possui. A rede DBLP parece mais heterogênea na distribuição. Se for analisar de acordo com as redes sintéticas, dizemos que não há tanta influência da distância nesse caso, mas ela ainda existe. A correlação de graus ainda é associativa para graus $k < 200$ (Figura 5.8). O DBLP é um repositório de ciência da computação localizado na Universität Trier, Alemanha. Dada a proximidade de culturas, linguagem e comunicação, os grupos são formados com maior probabilidade a uma distância pequena. A interpretação da correlação de graus é a mesma para a redes de atores: colaboradores pouco conectados se conectam com outros pouco conectados e mais conectados com mais conectados até que isso passa a importar menos. A rede de grupos de matéria condensada parece também ser influenciada pela distância euclideana, com uma distribuição entre lei de potência e Poisson. É também uma rede quase associativa, mas com um comportamento de saturação na correlação de graus para graus maiores. Colaboradores com mais colaboradores em artigos de matéria

Figura 5.6 – Correlação de graus para rede de perfil de figura pública *Facebook*. Dados coletados do site SNAP:Stanford Network Analisys Project. Gráficos na escala $\log(y)$



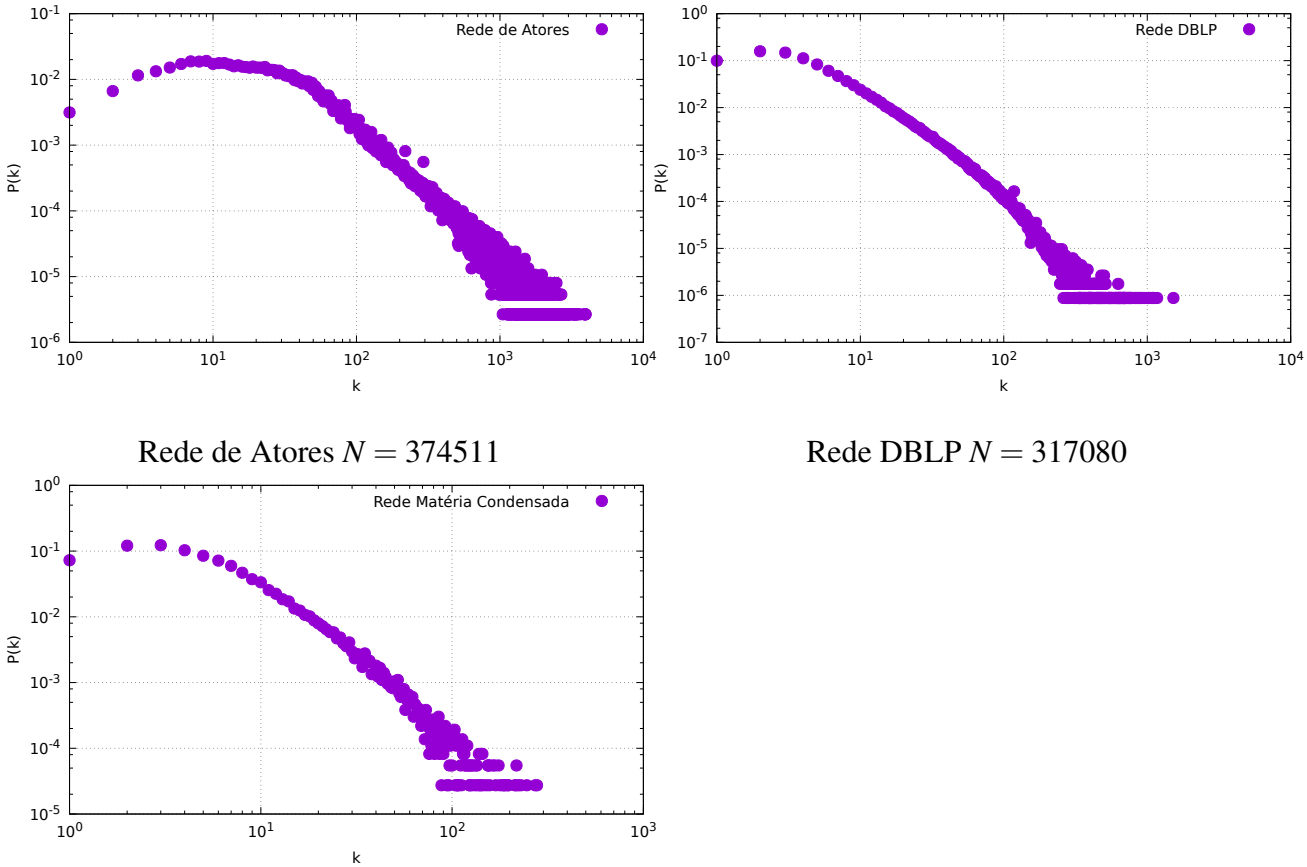
condensada tendem a se conectar, mas à partir de um determinado grau, um autor com muitas colaborações colabora tanto com outros grandes pesquisadores quanto com pesquisadores pouco conectados.

De modo a averiguar com mais detalhe o efeito dessas topologias de redes reais, nosso objetivo é analisar o efeito dessas topologias de redes reais no modelo do votante. A análise é feita por meio da magnetização média, pois não é possível analisar o tempo de consenso para vários tamanhos diferentes nas redes reais, pois ela possui alguns grupos desconectados de outros demais quando escolhemos um tamanho menor que o da rede completa. O tempo de consenso será analisado por uma tabela para comparar com as redes sintéticas.

Modelo do Votante em Redes Reais

Nosso próximo passo é implementar o modelo do votante em redes reais e comparar com as redes sintéticas de mesmo tamanho, primeiro, sem considerar a métrica espacial e pos-

Figura 5.7 – Distribuição de conectividade de algumas redes reais. Gráficos na escala log-log



Rede de Atores $N = 374511$

Rede DBLP $N = 317080$

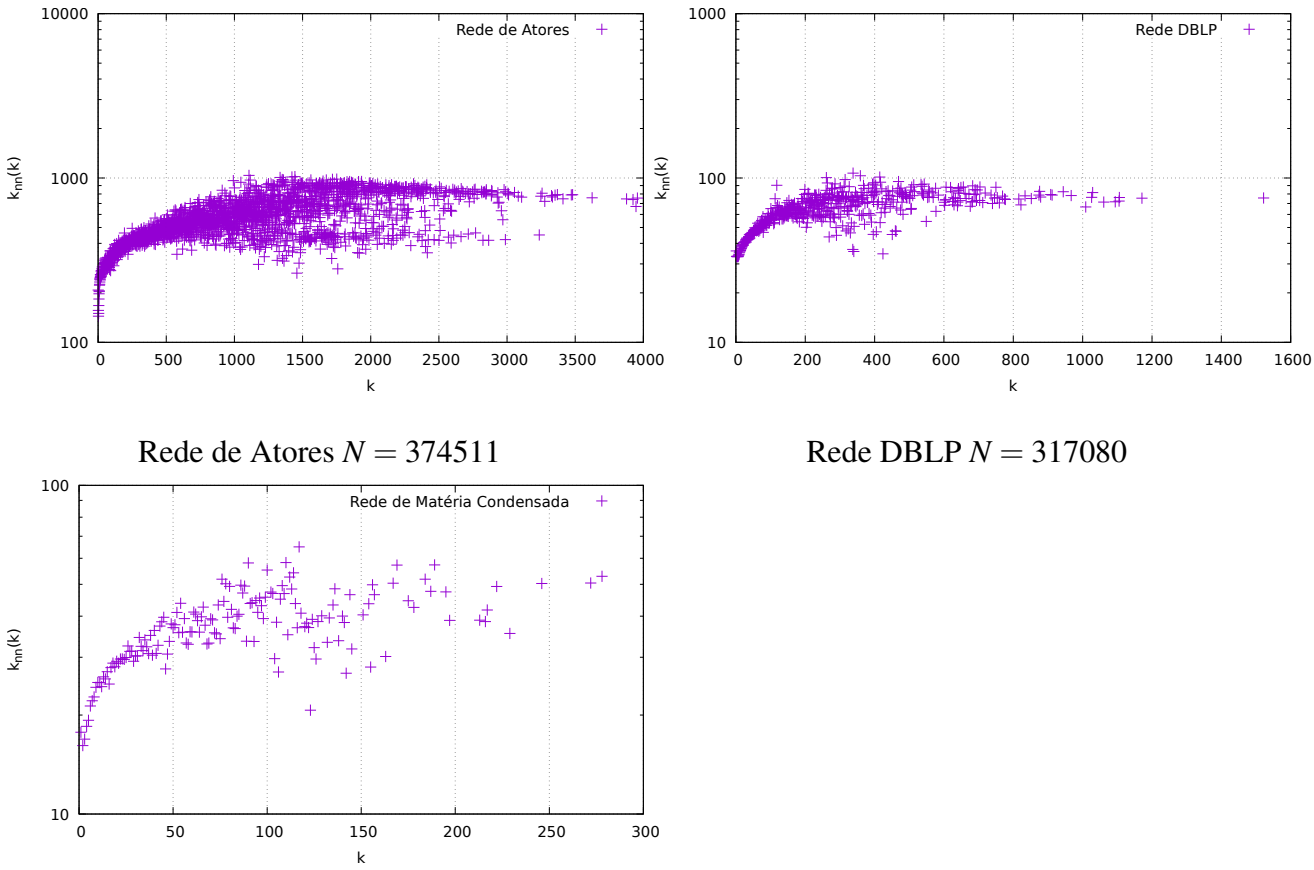
Rede de Matéria Condensada $N = 27519$

teriormente, incluindo a métrica. A figura 5.9 mostra a comparação da magnetização média das redes sintéticas com a rede de perfil político do Facebook em função do passo de tempo de Monte Carlo.

Em todos os casos, a magnetização média é conservada e em um determinado tempo (tempo de consenso), se estabiliza quando o consenso é alcançado. Em redes livres de escala ($\alpha_A = 0$), o tempo de consenso é menor que na rede real e a magnetização se conserva mais rapidamente. Neste caso, o comportamento mais próximo da magnetização na rede do Facebook é o da rede Barabàsi-Albert. Por outro lado, quando a métrica é incluída ($\alpha_A = 1$), o comportamento da magnetização em redes sintéticas parece mais próximo do seu comportamento na rede de perfil político do Facebook. Isso mostra que redes sintéticas com métrica descrevem melhor o modelo do votante. O resultado mais consistente é o da rede de Afinidade com métrica.

A seguir comparamos o tempo de consenso das redes sintéticas para $\alpha_A = 1$ com o das redes de perfis do Facebook (tabelas 5.1 e 5.2).

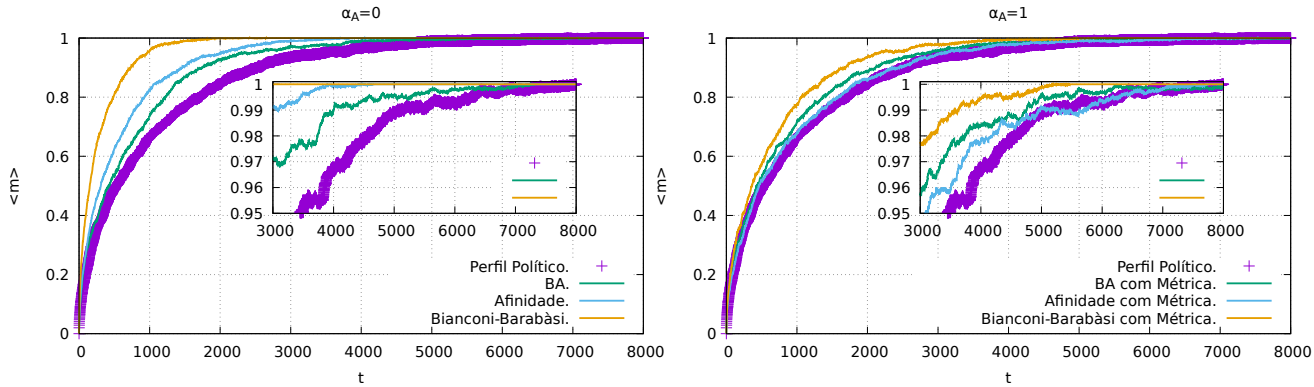
Figura 5.8 – Correlação de graus de algumas redes reais. Gráficos na escala log(y)



Rede de Atores $N = 374511$ Rede DBLP $N = 317080$

Rede de Matéria Condensada $N = 374511$

Figura 5.9 – Magnetização média na rede de perfil político versus redes sintética.



Conforme o esperado, o tempo de consenso aumenta com o tamanho das redes reais. A rede sintética cujos tempos de consenso são mais próximos dos valores das redes de perfis político e de companias no Facebook é a de afinidade com métrica pois apresentam erros relativos menores (ver tabela 5.2). É razoável dizer que a afinidade entre as pessoas influencia mais no consenso entre elas. Entretanto, o resultado mais próximo do modelo do votante em da rede de

Tabela 5.1 – Tempo de consenso nas redes de diferentes perfis do Facebook e em redes sintéticas de diferentes tamanhos. BA-M: Barabàsi-Albert com Métrica; A-M: Afinidade com Métrica; BB-M: Barabàsi Bianconi com Métrica

Tempo de Consenso					
Perfil	N	Real	BA-M	A-M	BB-M
Político	5908	1815,51	1433,87	1645,01	1165,00
Figura Pública	11565	2153,19	4359,14	3246,97	1747,89
Companias	14113	4097,91	5650,36	4409,94	3197,04

figuras públicas é o apresentado pela rede Bianconi-Barabàsi com métrica e a propriedade de atratividade (pessoas mais influentes do Facebook) tende a ser mais famosas que outras. Mas isso não podemos afirmar sem um resultado empírico consistente.

Tabela 5.2 – Erro relativo entre o tempo de consenso das redes reais e sintéticas. BA-M: Barabàsi-Albert com Métrica; A-M: Afinidade com Métrica; BB-M: Barabàsi Bianconi com Métrica.

Erro Relativo (%)			
Perfil	BA-M	A-M	BB-M
Político	21,02	9,39	35,83
Figura Pública	102,45	50,80	18,82
Companias	37,88	7,61	21,98

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação, estudamos a influência das topologias de redes complexas com métrica em propriedades do modelo do votante, como o tempo necessário para atingir o consenso, probabilidade de saída, usando como base teórica as aproximações de campo médio heterogêneas. Primeiramente, fizemos uma revisão sobre as redes complexas reportando algumas propriedades importantes no trabalho proposto, como a correlação de grau. Posteriormente, revisamos os modelos mais básicos de redes homogêneas e heterogêneas e introduzimos as redes complexas com métrica espacial (SOARES et al., 2005; NUNES et al., 2017; BRITO, 2012) apresentando algumas propriedades peculiares como distrbuições que obedecem à estatística de Tsallis (TSALLIS, 1999). Outra propriedade importante que observamos é a transição topológica influenciada pela distância espacial entre os elementos, onde redes construídas com maior influência da distância espacial tendem a ser homogêneas e, por outro lado quando a distância não influencia muito na regra de conexão preferencial, as redes tendem a ser heterogêneas. Além da distância espacial e da ligação preferencial devido exclusivamente ao grau de conectividade, consideramos outras características relevantes em redes sociais. Tal ligação preferencial poderia ocorrer devido à habilidade intrínseca dos nós receberem mais conexões (BIANCONI; BARABÁSI, 2001) ou ainda devido à afinidade entre eles (ALMEIDA, 2010).

Como motivação para investigar mais detalhadamente essas redes, escolhemos, como processo dinâmico para extrair informações à respeito da influência da topologia de redes, o modelo do votante, que pode apresentar comportamentos não triviais quando usamos como substrato as redes complexas. Antes de implementar em redes com a métrica espacial, reproduzimos os resultados do modelo do votante em redes regulares e na rede heterogênea de Barabàsi-Albert (BARABÁSI; ALBERT, 1999). Primeiro vimos que é possível encontrar uma solução analítica quando a dinâmica acontece em redes regulares. Explicamos por meio da densidade de interface o processo de consenso nas redes $d-$ dimensionais (GRACIA; MIGUEL; EGUILUZ, 2011). Depois mostramos que nas redes complexas as soluções analíticas são obtidas por meio das aproximações de campo médio. Aqui usamos a aproximação de campo média heterogênea, impondo a dependência da dinâmica com o grau de conectividade. Usamos duas aproximações heterogêneas: a simples (SOOD, 2005), que consiste em desprezar a correlação entre pares de spins e a de pares que despreza apenas as correlações de trincas ou superiores (PUGLIESE; CASTELLANO, 2009). Comparamos os dados das simulações com os resultados analíticos do modelo do votante na rede unidimensional e de Barabàsi-Albert. O tempo de

consenso escala com uma lei de potência do tamanho N de maneira diferente para as diferentes topologias.

Antes de tratarmos dos resultados do modelo do votante nas redes com métrica espacial e outras propriedades, analisamos a correlação de grau para investigar a validade das aproximações de campo médio heterogêneas. Em todas os três modelos de redes foi observado o comportamento da transição de uma correlação fracamente disassociativa para fortemente associativa, quando aumentamos α_A. Posteriormente, estudamos o modelo do votante nas redes complexas com métrica. O tempo de consenso nessas redes também escala com uma lei de potência de N, com expoentes menores na rede Bianconi-Barabàsi. Isso pode ser explicado pela influência dos *super-hubs* que influenciam a maioria dos elementos da rede. Comparamos esses dados computacionais com as aproximações de campo médio heterogênea e observa-se que elas são válidas apenas quando a distância espacial não é considerada ou tem pouca influência na regra de conexão preferencial, isto é, $\alpha_A \leq 2$. Porém, elas são úteis para descrever como o tempo de consenso escala com N para todas as redes, pelo menos de maneira qualitativa. Além do tempo de consenso, outra propriedade do modelo do votante foi observada como a probabilidade de saída. A probabilidade de saída também apresenta um comportamento universal linear com a densidade inicial de *spin-up*, indicando que há conservação de magnetização média. Por fim, comparamos as redes sintéticas estudadas neste trabalho com as redes reais e vimos que, em redes como o *Facebook*, a distância euclideana influencia na topologia (GOLDENBERG; LEVY, 2009). O fato do *Facebook* ser um meio de comunicação eletrônica sem barreiras geográficas leva-nos a pensar que esta rede é livre de escala, mas, comparando as distribuições de conectividade das redes sintéticas em que a distância euclideana é levada em conta com as distribuições de graus das redes reais, observamos que elas parecem próximas entre si, mas é um detalhe a ser estudado com mais cautela. Por outro lado, essa aproximação poderia melhorar um pouco mais, se os parâmetros de afinidade e atratividade fossem incluídos juntos na regra de conexão preferencial. Pessoas se relacionam entre si por suas afinidades e também pelas habilidades que atraem outras pessoas, como por exemplo, alguns artistas musicais. Posteriormente, analisamos as correlações de graus e observamos um comportamento de associatividade para graus menores, mas uma saturação em graus maiores. Esse comportamento também foi observado em outras redes, como DBLP, grupos de matéria condensada e rede de atores. Em todas essas redes os resultados são próximos das redes sintéticas com métrica espacial. O capítulo anterior se encerra com a implementação do modelo do votante em redes reais e a comparação

com os resultados de redes sintéticas de mesmo tamanho. Por meio da magnetização e das tabelas de tempo de consenso comparados entre os valores de redes sintéticas e redes reais, mostramos que a distância euclideana influencia no processo dinâmico e redes sintéticas com métrica descrevem melhor situações realistas.

Um possível argumento para a não-validade da aproximação de campo médio é a correlação de grau, lembrando que as redes com métrica apresentam uma transição de correlação não trivial. Como perspectiva, vamos recorrer a uma teoria de campo médio simples ou de pares chamada de *quenched mean field*. Nesta aproximação não precisamos quebrar a correlação de grau entre os nós da rede, pois analisamos a conexão dos nós diretamente através da matriz de adjacência. Tal abordagem já foi usada para se estudar a transição de fase em modelos epidêmicos (MATA; FERREIRA, 2013). Uma outra questão a ser avaliada é a formação de domínios de *spins* ordenados por *coarsening*, pois dado que essas redes possuem distância euclideana, é possível a formação de *clusters* com o mesmo *spin*, o que pode influenciar na incompatibilidade dos dados das simulações com as teorias de campo médio. Outra parte de nossas perspectivas é estudar mais detalhadamente as redes reais e tentar construir um novo modelo que leva em conta os parâmetros de atratividade e afinidade em uma mesma regra de conexão preferencial.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. L. d. **Dinâmica e estrutura de redes complexas no modelo de afinidade**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010.

BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999.

BARRAT, A.; BARTHELEMY, M.; VESPIGNANI, A. **Dynamical processes on complex networks**. [S.l.]: Cambridge university press, 2008.

BIANCONI, G.; BARABÁSI, A.-L. Competition and multiscaling in evolving networks. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 54, n. 4, p. 436, 2001.

BISGIN, H.; AGARWAL, N.; XU, X. Investigating homophily in online social networks. In: IEEE. **Web Intelligence and Intelligent Agent Technology (WI-IAT), 2010 IEEE/WIC/ACM International Conference on**. [S.l.], 2010. v. 1, p. 533–536.

BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. M. Mathematical results on scale-free random graphs. **Handbook of graphs and networks: from the genome to the internet**, Wiley-Vch Weinheim, Germany, p. 1–34, 2003.

BRAY, A. Aj bray, adv. phys. 43, 357 (1994). **Adv. Phys.**, v. 43, p. 357, 1994.

BRITO, S. G. d. A. **Contribuição ao estudo de redes complexas: modelo de afinidade com métrica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2012.

BUCHANAN, M. The social atom. **Bloomsbury, New York, NY, USA**, 2007.

CALDARELLI, G. **Scale-free networks: complex webs in nature and technology**. [S.l.]: Oxford University Press, 2007.

CALLEN, H. B. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. [S.l.]: AAPT, 1998.

CARIDI, I. et al. Schelling-voter model: An application to language competition. **Chaos, Solitons & Fractals**, Elsevier, v. 56, p. 216–221, 2013.

CASTELLANO, C. Effect of network topology on the ordering dynamics of voter models. In: AIP. **AIP Conference Proceedings**. [S.l.], 2005. v. 779, n. 1, p. 114–120.

CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. **Reviews of modern physics**, APS, v. 81, n. 2, p. 591, 2009.

CASTELLANO, C. et al. Comparison of voter and glauber ordering dynamics on networks. **Physical review E**, APS, v. 71, n. 6, p. 066107, 2005.

CLIFFORD, P.; SUDBURY, A. A model for spatial conflict. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 60, n. 3, p. 581–588, 1973.

CORMEN, T. H. et al. **Introduction to algorithms**. [S.l.]: MIT press, 2009.

COTA, W.; MATA, A. S.; FERREIRA, S. C. Robustness and fragility of the susceptible-infected-susceptible epidemic models on complex networks. **arXiv preprint arXiv:1804.08422**, 2018.

COX, J. T. Coalescing random walks and voter model consensus times on the torus in zd. **The Annals of Probability**, JSTOR, p. 1333–1366, 1989.

CROKIDAKIS, N.; FORGERINI, F. L. Consequence of reputation in the sznajd consensus model. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 374, n. 34, p. 3380–3383, 2010.

DORNELAS, V.; RAMOS, M.; ANTENEODO, C. Impact of network randomness on multiple opinion dynamics. **arXiv preprint arXiv:1801.02184**, 2018.

DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. Evolution of networks. **Advances in physics**, Taylor & Francis, v. 51, n. 4, p. 1079–1187, 2002.

DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. The shortest path to complex networks. **arXiv preprint cond-mat/0404593**, 2004.

ERDÖS, P.; RÉNYI, A. On random graphs, i. **Publicationes Mathematicae (Debrecen)**, v. 6, p. 290–297, 1959.

FILHO, A. d. M. Conexão entre as redes complexas e estatística de kaniadakis e busca eficiente das propriedades críticas do processo epidêmico difusivo 1d. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.

FRACHEBOURG, L.; KRAPIVSKY, P. Exact results for kinetics of catalytic reactions. **Physical Review E**, APS, v. 53, n. 4, p. R3009, 1996.

GALHARDO, C. E. C. **Redes Neurais Atratoras em Topologias Complexas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal Fluminense, 2006.

GELL-MANN, M.; TSALLIS, C. **Nonextensive entropy: interdisciplinary applications**. [S.l.]: Oxford University Press, 2004.

GLAUBER, R. Rj glauber, j. math. phys. 4, 294 (1963). **J. Math. Phys.**, v. 4, p. 294, 1963.

GOLDENBERG, J.; LEVY, M. Distance is not dead: Social interaction and geographical distance in the internet era. **arXiv preprint arXiv:0906.3202**, 2009.

GRACIA, J. F.; MIGUEL, M. S.; EGUILUZ, V. M. Updating rules and the voter model. 2011.

HENKEL, M.; PLEIMLING, M. **Non-Equilibrium Phase Transitions: Volume 2: Ageing and Dynamical Scaling Far from Equilibrium**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.

HIERHOLZER, C.; WIENER, C. Über die möglichkeit, einen linienzug ohne wiederholung und ohne unterbrechung zu umfahren. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 6, n. 1, p. 30–32, 1873.

HOLLEY, R. A.; LIGGETT, T. M. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. **The annals of probability**, JSTOR, p. 643–663, 1975.

KLEMM, K.; EGUILUZ, V. M. Growing scale-free networks with small-world behavior. **Physical Review E**, APS, v. 65, n. 5, p. 057102, 2002.

LIGGETT, T. M. **Interacting particle systems, volume 276 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]**. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 1985.

LIGGETT, T. M. **Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes**. [S.l.]: springer science & Business Media, 2013. v. 324.

MATA, A. S.; FERREIRA, S. C. Pair quenched mean-field theory for the susceptible-infected-susceptible model on complex networks. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 103, n. 4, p. 48003, 2013.

MATA, A. S. d. et al. Transições de fases em um processo de reação-difusão em metapopulações heterogêneas. Universidade Federal de Viçosa, 2011.

MOGHADAS, S. M. et al. Asymptomatic transmission and the dynamics of zika infection. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 5829, 2017.

MOINET, A.; PASTOR-SATORRAS, R.; BARRAT, A. Effect of risk perception on epidemic spreading in temporal networks. **Physical Review E**, APS, v. 97, n. 1, p. 012313, 2018.

NEWMAN, M. E. Mixing patterns in networks. **Physical Review E**, APS, v. 67, n. 2, p. 026126, 2003.

NUNES, T. C. et al. Role of dimensionality in preferential attachment growth in the bianconi–barabási model. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, IOP Publishing, v. 2017, n. 9, p. 093402, 2017.

OBIZHAEVA, A. A.; WANG, J. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. **Journal of Financial Markets**, Elsevier, v. 16, n. 1, p. 1–32, 2013.

PASTOR-SATORRAS, R. et al. Epidemic processes in complex networks. **Reviews of modern physics**, APS, v. 87, n. 3, p. 925, 2015.

PASTOR-SATORRAS, R.; VÁZQUEZ, A.; VESPIGNANI, A. Dynamical and correlation properties of the internet. **Physical review letters**, APS, v. 87, n. 25, p. 258701, 2001.

PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks. **Physical Review E**, APS, v. 63, n. 6, p. 066117, 2001.

PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. **Evolution and structure of the Internet: A statistical physics approach**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

PUGLIESE, E.; CASTELLANO, C. Heterogeneous pair approximation for voter models on networks. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 88, n. 5, p. 58004, 2009.

RADICCHI, F. Percolation in real interdependent networks. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 11, n. 7, p. 597, 2015.

RIBEIRO, F. L. et al. A model of urban scaling laws based on distance dependent interactions. **Royal Society open science**, The Royal Society, v. 4, n. 3, p. 160926, 2017.

RIBEIRO, F. L.; SANTOS, R. V. dos; MATA, A. S. Fractal dimension and universality in avascular tumor growth. **Physical Review E**, APS, v. 95, n. 4, p. 042406, 2017.

SCHNEIDER, D. M.; MARTINS, A. B.; AGUIAR, M. A. de. The mutation–drift balance in spatially structured populations. **Journal of theoretical biology**, Elsevier, v. 402, p. 9–17, 2016.

SOARES, D. J. et al. Preferential attachment growth model and nonextensive statistical mechanics. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 70, n. 1, p. 70, 2005.

SOLOMONOFF, R.; RAPOPORT, A. Connectivity of random nets. **The bulletin of mathematical biophysics**, Springer, v. 13, n. 2, p. 107–117, 1951.

SOOD, V. V. sood and s. redner, phys. rev. lett. 94, 178701 (2005). **Phys. Rev. Lett.**, v. 94, p. 178701, 2005.

SOOD, V.; ANTAL, T.; REDNER, S. Voter models on heterogeneous networks. **Physical Review E**, APS, v. 77, n. 4, p. 041121, 2008.

SUCHECKI, K. K. suchecki, vm eguíluz, and m. san miguel, europhys. lett. 69, 228 (2005). **Europhys. Lett.**, v. 69, p. 228, 2005.

SUCHECKI, K.; EGUILUZ, V. M.; MIGUEL, M. S. Conservation laws for the voter model in complex networks. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 69, n. 2, p. 228, 2004.

THOMAS, L. P. **Mathematics All Around**. [S.l.]: Pearson/Addison Wesley, 2007.

TSALLIS, C. Nonextensive statistics: theoretical, experimental and computational evidences and connections. **Brazilian Journal of Physics**, SciELO Brasil, v. 29, n. 1, p. 1–35, 1999.

VÁZQUEZ, A.; PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. Large-scale topological and dynamical properties of the internet. **Physical Review E**, APS, v. 65, n. 6, p. 066130, 2002.

VIEIRA, A. R.; ANTENEODO, C. Threshold q-voter model. **Physical Review E**, APS, v. 97, n. 5, p. 052106, 2018.

ZHANG, H. et al. Hub nodes inhibit the outbreak of epidemic under voluntary vaccination. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 12, n. 2, p. 023015, 2010.

APÊNDICE A – Estatística Não Extensiva de Tsallis

A mecânica estatística extensiva estuda a entropia de dois subsistemas como sendo a soma individual da entropia de cada sistema. É também conhecida como entropia de Boltzmann-Gibbs (BG). Essa abordagem descreve melhor as interações entre esses sistemas sem levar em conta a distância entre eles, isto é, interações de curto alcance. Não obstante, a maioria dos sistemas interagem por longo alcance (interação gravitacional, força de Coulomb) e a estatística extensiva não consegue descrever satisfatoriamente essa situação.

Tsallis em sua abordagem generalizou a mecânica estatística estendendo para sistemas de interação de longo alcance em 1988, através de uma entropia generalizada que inclui o termo da entropia de (BG). O caso particular recai na estatística tradicional, quando as interações são de curto alcance. A nomenclatura *estatística não-extensiva* veio da ausência de correlações, mas ultimamente tem se mostrado que sistemas fortemente correlacionados são extensivos. Recentemente, Tsallis tem encontrado diversas aplicações de sua abordagem na física de plasma, astrofísica e, em especial, sistemas complexos. (BRITO, 2012)

A entropia generalizada de Tsallis é dada por

$$S_q = \frac{k_B}{q-1}\left(1-\sum_i p_i^q\right) \tag{1}$$

onde k_B é a constante de Boltzmann q é o índice entrópico que controla a não-extensividade do sistema, p_i é a probabilidade de encontrar o sistema no estado i . Quando $q = 1$, retornamos à estatística de Boltzmann-Gibbs. A expressão (1) pode ser escrita em termos do $q-$logaritmo

$$S_q = p_i^q = -k_B \sum_i p_i^q \ln_q(p_i) \tag{2}$$

em que

$$\ln_q(x) = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}, \forall(x,q) \tag{3}$$

O valor de $q = 1$ recupera o logaritmo padrão, isto é, $\ln_1(x) = \ln(x)$. A inversa do $q-$logaritmo é a $q-$exponencial dada por

$$e_q(x) = [1+(1-q)x]^{-1/(1-q)}, \forall(x,q) \tag{4}$$

se $[1+(1-q)x] > 0$ e 0 caso contrário. Quando $q = 1$, a $q-$exponencial retorna à exponencial padrão. (BRITO, 2012).

Na mecânica estatística tradicional a entropia é uma função contínua, monotonicamente crescente, aditiva sob os subsistemas e diferenciável, segundo o terceiro postulado da Termodinâmica. O formalismo de Tsallis viola esse postulado. A entropia de Gibbs-Boltzman obedece à regra de aditividade $S(A+B) = S(A) + S(B)$. A de Tsallis obedece à esta regra: (TSALLIS, 1999)

$$S_q(A+B) = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q)\frac{S_q(A)}{k_B}\frac{S_q(B)}{k_B} \tag{5}$$

onde o terceiro termo da expressão é o termo de não aditividade. Quando $q = 1$ o terceiro postulado da Termodinâmica não é violado. Podemos reescrever a expressão (5) da seguinte maneira:

$$S_q(A+B) = S_q(A)\left[1 + \frac{1}{2}(1-q)S_q(B)\right] + S_q(B)\left[1 + \frac{1}{2}(1-q)S_q(A)\right] \tag{6}$$

No caso de $q = 1$, a ideia de sistema isolado é obedecida, mas quando $q \neq 1$, os fatores de aditividade apresentam termos cruzados de entropias dos diferentes sistemas A e B e o princípio de sistemas isolados é quebrado. Esse comportamento indica que um sistema sente a presença do outro sem necessariamente estar acoplado, pois não se trata mais de sistemas isolados.

Soares *et.al* (SOARES et al., 2005) mostrou que é possível associar redes livres de escala com a $q-$exponencial através da distribuição $P(k)$. Segundo (FILHO, 2011), a maioria dessas redes obedecem à uma lei de potência do tipo

$$P(k) = (k_0 + k)^{-\gamma} \tag{7}$$

Se $k_0 \equiv \frac{L}{q-1}$ e $\gamma = \frac{1}{1-q}$, obtemos a distribuição (BRITO, 2012)

$$P(k) = P_0 e_q^{-k/L} \tag{8}$$

onde P_0 é uma constante de normalização da distribuição e L é um parâmetro de ajuste da distribuição, ligado ao número característico de ligações da rede.

Estudos tem mostrado com grande êxito o uso da mecânica estatística não-extensiva de Tsallis na descrição de fenômenos complexos (GELL-MANN; TSALLIS, 2004; VIEIRA; ANTENEODO, 2018) principalmente naqueles onde aparece correlação de longo alcance e dimensão fractal, duas características presentes nos modelos de redes apresentadas na seção 2.9.

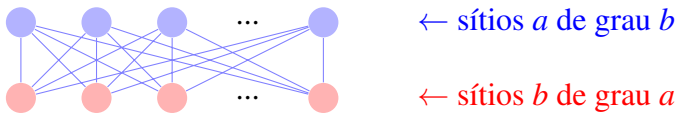
APÊNDICE B – Modelo do Votante no Grafo Bipartido.

Uma das propriedades básicas do modelo do votante é a probabilidade de saída E_+, isto é, a probabilidade em que a dinâmica termine com todos os *spins-up*, em função da densidade inicial de *spin-up*, σ_+, ou seja, $E_+ = E_+(\sigma_+)$. Dado que a dinâmica conserva a magnetização média (valor esperado sobre todas as realizações de amostragem ou diferentes condições iniciais) e que o único estado final possível é o consenso, a probabilidade de saída é linear com a densidade inicial de *spin-up* (SOOD, 2005; SUCHECKI; EGUILUZ; MIGUEL, 2004), ou seja,

$$E_+(\sigma_+) = \sigma_+. \tag{9}$$

Na tentativa de explicar esse comportamento de uma maneira mais simples, Sood e Readner (SOOD, 2005) usaram um grafo completo e bipartido, isto é, um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos a e b tais que todas as arestas conectam um vértice em a a um vértice em b (Figura 1). O grafo bipartido completo pode ser representado por um conjunto $K_{a,b}$ com $N = a + b$ vértices particionados em dois subgrafos a e b.

Figura 1 – Grafo bipartido completo $K_{a,b}$. Referência: (SOOD, 2005), adaptado.



Seja $N_{a,b}$ o número de *spin-up* dos respectivos subgrafos. A cada atualização, esse número varia de acordo com as expressões abaixo (SOOD, 2005):

$$\begin{aligned} dN_a &= \frac{a}{a+b}\left[\frac{a-N_a}{a}\frac{N_b}{b} - \frac{b-N_b}{b}\frac{N_a}{a}\right], \\ dN_b &= \frac{b}{a+b}\left[\frac{b-N_b}{b}\frac{N_a}{a} - \frac{a-N_a}{a}\frac{N_b}{b}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Na equação (10), $dN_{a,b}$ descreve a variação de *spin-up* dada a interação dos spins do subgrafo a com b ou vice-versa. O primeiro termo entre colchetes descreve quantos nós de *spin-down* no subgrafo mudaram para *spin-up* devido à interação com nós do *spin-up* do subgrafo b. O segundo termo é o número de nós do *spin-up* no subgrafo a que mudou para *spin-down* (por isso o negativo) devido à interação com nós de *spin-down* no subgrafo b. O mesmo raciocínio pode ser usado para dN_b.

Na dinâmica do votante, o incremento de passo de tempo corresponde a $dt = 1/N$. A expressão (10) pode ser reescrita em termos das densidades de *spin-up*, $\sigma_a = N_a/a$ e $\sigma_b = N_b/b$ da seguinte maneira (SOOD, 2005):

$$\begin{aligned} dN_a &= adt[(1-\sigma_a)\sigma_b - \sigma_a(1-\sigma_b)] \quad \therefore \frac{d\sigma_a}{dt} = \sigma_b - \sigma_a \\ dN_b &= bdt[(1-\sigma_{+,b})\sigma_a - \sigma_b(1-\sigma_a)] \quad \therefore \frac{d\sigma_b}{dt} = \sigma_a - \sigma_b \end{aligned} \tag{11}$$

Integrando a equação (11) em um intervalo de tempo $[0,t]$, a solução fornece a densidade de *spin-up* em um instante de tempo t, dada por:

$$\sigma_{a,b}(t) = \frac{1}{2}[\sigma_{a,b}(0) - \sigma_{b,a}(0)]e^{-2t} + \frac{1}{2}[\sigma_a(0) + \sigma_b(0)] \tag{12}$$

Enquanto a soma das densidades, $\sigma_a + \sigma_b$, é conservada, a magnetização média não é a menos que a regra de atualização dos *spins* seja feita por seleção de *links* (SUCHECKI; EGUILUZ; MIGUEL, 2004). Por outro lado, quando a dinâmica se aproxima do equilíbrio (consenso), o valor da densidade de *spin-up* $\sigma(\infty) = \frac{1}{2}[\sigma_a(0) + \sigma_b(0)]$ e a conservação de magnetização média é recuperada.

Como a soma da densidade final de *spin-up* é conservada, $\sigma_a + \sigma_b$ é igual a $2\,E_+$. Assim, a probabilidade de saída é dada por

$$E_+ = \frac{1}{2}[\sigma_a(0) + \sigma_b(0)] \tag{13}$$

independentemente da quantidade total de spins no grafo. Estendendo a redes complexas, obtemos a expressão (9).