



LAUZIENE NAZARETH BARBOZA

**ACOPLAMENTO DE FÉRMIONS COM O CAMPO
GRAVITACIONAL E APLICAÇÃO NA COSMOLOGIA**

LAVRAS – MG

2018

LAUZIENE NAZARETH BARBOZA

**ACOPLAMENTO DE FÉRMIONS COM O CAMPO GRAVITACIONAL E
APLICAÇÃO NA COSMOLOGIA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestra.

Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito
Orientador

Prof. Dr. Jean Carlos Coelho Felipe
Coorientador

**LAVRAS – MG
2018**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Barboza, Lauziene Nazareth

Acoplamento de férmions com o campo gravitacional e
aplicação na cosmologia / Lauziene Nazareth Barboza. –
Lavras : UFLA, 2018.

49 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal
de Lavras, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito.

Bibliografia.

1. Relatividade Geral. 2. Campo de Dirac. 3. Cosmologia.
I. Brito, Luiz Cleber Tavares de. II. Título.

LAUZIENE NAZARETH BARBOZA

**ACOPLAMENTO DE FÉRMIONS COM O CAMPO GRAVITACIONAL E
APLICAÇÃO NA COSMOLOGIA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestra.

APROVADA em 20 de Setembro de 2018.

Prof. Dr. Jean Carlos Coelho Felipe	UFVJM
Profa. Dra. Tatiana Ramos Cardoso	UFLA
Profa. Dra. Gabriela Coutinho de Carvalho	USP



Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito
Orientador

Prof. Dr. Jean Carlos Coelho Felipe
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2018**

Dedico esse trabalho aos meus pais, irmã, sobrinho e namorado.

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente a Deus por ter me dado forças e coragem para chegar até aqui.
- Um agradecimento especial aos meus pais, Maria de Nazaré e Waldemar, a minha irmã Luana e ao meu namorado Giovani que acreditaram muito em mim e me apoiaram incondicionalmente. O apoio e a torcida de vocês para esse trabalho foram essenciais.
- Ao Prof. Dr. Luiz Cleber pela proposta do tema do trabalho, orientação (desde a graduação) e esclarecimentos durante a realização do trabalho.
- Ao Prof. Dr. Jean pela coorientação durante o trabalho e a preocupação em esclarecer as dúvidas quanto aos cálculos que eu não conseguia fazer.
- Aos demais professores do Departamento de Física, em especial, os Profs. Dr. Rodrigo Bufalo, Dra. Tatiana Cardoso e Dr. José Nogales pelos esclarecimentos de dúvidas, pelas indicações de referências bibliográficas e empréstimos de materiais.
- Ao Professor Joaquim, vice-chefe do DFI pelos cafés-expresso, os biscoitos para acompanhar os cafés, as caronas até o centro de Lavras e as palavras de força e coragem para enfrentar os desafios.
- Ao Prof. Dr. Ilya Shapiro pelos esclarecimentos e dicas de referências para complementação do trabalho.
- Aos colegas da pós-graduação que me acompanharam nessa jornada, obrigada pelos momentos de descontração, ajudas recebidas, apoios nos momentos de desânimo e desespero.
- Aos secretários do DFI, Fábio e Débora pelos materiais fornecidos, xérox, impressões, acessibilidade e torcida.
- As auxiliares de serviços gerais, especialmente, a Lu e a Cleuza pelos cafés quentinhos, a preocupação em deixar nosso departamento sempre limpinho.
- Aos demais colegas, da graduação e da pós-graduação de outros departamentos da UFLA e, também externos à UFLA, obrigada pela torcida.
- Por fim, agradeço pela bolsa institucional recebida da UFLA por um período de 12 meses, o que ajudou a financiar as despesas na cidade de Lavras.

*A vida não é fácil para nenhum de nós.
Temos que ter persistência e,
acima de tudo, confiança
em nós mesmos.
(Marie Curie)*

RESUMO

A proposta desse trabalho é apresentar uma revisão sobre o acoplamento do campo de Dirac (férmions) ao campo gravitacional através do formalismo das tetradas. Mais especificamente, será feita uma aplicação ao modelo de Friedmann-Robertson-Walker em que o campo fermiônico é considerado como uma das componentes do fluido cosmológico. Uma consequência relevante é a possibilidade de que os férmions sejam candidatos ao conteúdo de energia escura substituindo a abordagem padrão com a constante cosmológica.

Palavras-chave: Férmions, gravitação, tetradas, cosmologia.

ABSTRACT

The proposal of this work is to present a review on the coupling of the Dirac field (fermions) to the gravitational field through the formalism of the tetrads. More specifically, an application will be made to the Friedmann-Robertson-Walker model in which the fermionic field is considered as one of the components of the cosmological fluid. A relevant consequence is the possibility that fermions are candidates for dark energy content by replacing the standard approach with the cosmological constant.

Keywords: Fermions, gravitation, tetrad, cosmology.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	O Modelo Cosmológico Padrão - ΛCDM	10
2	FUNDAMENTOS	14
2.1	Formalismo Lagrangeano da Relatividade Geral	14
2.2	Solução FRW na Cosmologia	17
2.3	O redshift cosmológico	20
2.4	Componentes do fluido cosmológico	21
2.4.1	Matéria	22
2.4.2	Radiação	22
2.4.3	Vácuo	23
2.5	Parâmetros cosmológicos	24
3	MÉTODOS	27
3.1	Método das tetradas	27
4	CÁLCULO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO NA GEOMETRIA FRW	32
4.1	Cálculo da variação da ação	32
4.2	Cálculo da densidade e da pressão	35
5	CAMPOS FERMIÔNICOS NA COSMOLOGIA	38
5.1	O modelo de Ribas-Devecchi-Kremer	38
5.2	Expressão para o redshift cosmológico e a idade do universo	43
5.2.1	Parâmetro de Hubble	43
5.2.2	Idade do universo	44
6	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	48

1 INTRODUÇÃO

Entender a formação e evolução do universo em grande escala não é algo simples. No entanto, o que se faz é propor um modelo cosmológico que conjecture algumas propriedades básicas do universo em grande escala e explique os resultados observacionais obtidos pelos astrônomos. Nessa busca, pretende-se a elaboração de um modelo que permita descrever o passado do Universo, de modo a se compreender as presentes observações e prever a sua evolução futura (LIMA; SANTOS, 2018). Atualmente, a cosmologia está sustentada pela Teoria da Relatividade Geral (TRG) (EINSTEIN, 1916). A RG é a teoria que fornece a descrição relativística do campo gravitacional e que está de acordo com todas as observações¹ feitas até o presente momento, seja com relação a objetos astronômicos, astrofísicos ou em cosmologia (PEEBLES, 2005), (AGHANIM et al., 2018).

Na concepção de Einstein, os efeitos gravitacionais (CARMELI, 1982) podem ser interpretados como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo produzida pela matéria e energia nele contidas. Desse modo, diz-se que a presença de matéria deforma o espaço-tempo. A Relatividade Geral fornece um modo preciso para calcular a curvatura do espaço-tempo. Mais precisamente, a TRG fornece um conjunto de equações que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de energia-matéria nele presente, as equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Nessa equação, $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, em que G é a constante gravitacional e c é a velocidade da luz; $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci; $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico; $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci; $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e Λ é a constante cosmológica. Em relação à constante Λ , foi inicialmente introduzida por Einstein baseado na ideia de um modelo estático do Universo. Esta ideia foi abandonada após a descoberta da expansão do universo por Edwin Hubble em 1929 (HUBBLE, 1929). A constante cosmológica faz parte do atual modelo cosmológico padrão (Λ CDM- Λ Cold Dark Matter), sendo responsável pela explicação da expansão acelerada do universo. A energia do vácuo associada à constante cosmológica representa atualmente o conteúdo de energia escura do universo (PERLMUTTER et al., 2013), (SCHMIDT et al., 2013), (RIESS et al., 2013).

¹ Essas observações permitiram testar a Relatividade Geral, para fins de comprovação de sua validade. Detalhes podem ser encontrados nas referências (HENRIQUES, 2009), (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006), (NOVELLO; NETO; BERGLIAFFA, 2010).

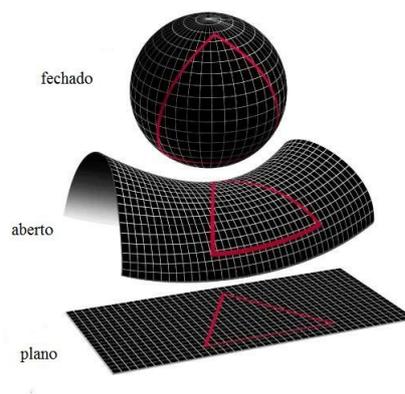
Contudo, o pequeno valor observado da constante cosmológica representa um dos problemas mais desafiadores da física contemporânea (WEINBERG, 1989).

A métrica mais geral compatível com os princípios de homogeneidade e isotropia do universo (Princípio Cosmológico) é a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (WEINBERG, 2014)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (1.2)$$

As coordenadas (r, θ, ϕ) são coordenadas esféricas co-móveis. A coordenada t representa o tempo cosmológico e a função $a(t)$ é o fator de escala. O parâmetro k é uma constante que define a curvatura espacial e assume valores $k = -1, 0, 1$. Cada valor de k representa tipos distintos de geometria: plana para $k = 0$; hiperbólica para $k = -1$; esférica para $k = 1$. Assim, têm-se dois casos de espaços com geometria aberta e um caso de espaço com geometria fechada (veja Fig. 1.1). No presente estágio de evolução do universo, as observações apontam para um universo plano², ou seja, $k = 0$. Entretanto, um dos objetivos da cosmologia é determinar se o universo foi plano ao longo de toda a sua história ou evoluiu para um universo plano na atualidade. Em escalas cosmológicas, maiores do que $9,2 \times 10^4$ Mpc, esta geometria descrita pela métrica (1.2) constitui o modelo de espaço-tempo homogêneo e isotrópico: não há no universo nenhuma localização ou direção privilegiadas. Essa afirmação constitui o Princípio Cosmológico (HENRIQUES, 2009).

Figura 1.1 – Geometrias possíveis do universo: fechado, aberto e plano.



Atualmente, a cosmologia é um campo de intensa atividade onde encontram-se alguns dos problemas mais desafiadores da ciência contemporânea. Desde meados do século XX, vem destacando-se como um campo de pesquisa com dados observacionais de grande precisão. Em

² <https://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_shape.html>. Acesso em 15/05/2018.

1964 os físicos norte-americanos Robert Wilson e Arno Penzias descobriram a radiação cósmica de fundo (WILSON, 1978), (PENZIAS, 1978). Passadas quase quatro décadas, em 1992, o satélite *Cosmic Background Explorer* (COBE) (MATHER, 2007) mediu o espectro da radiação cósmica de fundo com alta precisão, que foi melhorada em 2003 com as medidas das pequenas flutuações da radiação cósmica de fundo realizadas pela sonda espacial *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP)(SMOOT, 2007). Em 2013, a missão espacial Planck da Agência Espacial Europeia (ESA) revelaram a medição mais precisa da radiação cósmica de fundo (ADE et al., 2014). Combinadas com dados de supernovas e estrutura em grande escala inseriram a cosmologia no campo das medidas de precisão, fundamentais para o desenvolvimento de novos modelos teóricos.

A física além do modelo cosmológico padrão, Λ CDM, representa o estado da arte da pesquisa em cosmologia. Entre os problemas teóricos e observacionais abordados encontram-se a busca de melhores estimativas da idade do universo e da porcentagem de matéria escura e energia escura (ADE et al., 2016). A natureza da matéria e da energia escura também é um tópico de muita pesquisa além do modelo Λ CDM. Estima-se que a matéria observada nas estruturas conhecidas (galáxias, estrelas, poeira) corresponda à apenas 4,9% da matéria total do universo (AGHANIM et al., 2018).

1.1 O Modelo Cosmológico Padrão - Λ CDM

O modelo Λ CDM é o mais aceito atualmente e que está em melhor concordância com os presentes dados observacionais (AGHANIM et al., 2018). Também chamado de modelo de concordância, o Λ CDM contém como parte essencial um setor escuro composto pela matéria escura fria (não-relativística) e a energia escura. Contudo, a natureza das componentes do setor escuro ainda é misteriosa. Na sigla Λ CDM, o Λ corresponde à energia escura responsável pela expansão acelerada do universo, enquanto que CDM é abreviatura de *Cold Dark Matter*, o que representa a componente de matéria escura não-relativística do universo (LIMA; SANTOS, 2018).

O Λ CDM tem como base o Princípio Cosmológico o qual afirma que o universo em escalas suficientemente grandes é homogêneo e isotrópico. Ele fornece uma descrição detalhada da evolução do universo composto de matéria, radiação e energia escura. O modelo prediz a evolução do espectro da radiação cósmica de fundo (LIDDLE, 2003), o qual mantém o espectro

de Planck³ para um corpo negro ao longo da expansão do universo. O modelo mostra que a atual temperatura da radiação cósmica de fundo é da ordem de 2.7 K, o que está em acordo com os dados observacionais. Uma vez que o Λ CDM permite calcular a temperatura do universo ao longo da sua evolução (LIDDLE, 2003), quando invoca-se a física de partículas elementares e a física atômica, tem-se um modelo que prediz a abundância dos elementos químicos leves (hidrogênio, deutério, hélio e lítio) que surgiram nos primeiros 3min de existência do universo (NOVELLO; NETO; BERGLIAFFA, 2010).

Apesar de sua eficácia, o Modelo Cosmológico Padrão não explica alguns fatos teóricos e observacionais como a Planura do Universo, o horizonte, monopolos magnéticos, formação das estruturas locais (galáxias, aglomerados de galáxias, etc.). Não é objetivo discutir esses problemas nesse trabalho, contudo, é interessante mencionar que a proposta de um regime inflacionário anterior ao período descrito pelo Λ CDM é capaz de resolver os quatro problemas mencionados acima. Para mais detalhes ver referências (NOVELLO; NETO; BERGLIAFFA, 2010), (RYDEN, 2016). De modo geral, todos esses problemas estão relacionados com a escolha das condições iniciais do universo primordial.

De acordo com o Λ CDM o universo é composto por diferentes tipos de componentes, a saber:

- Matéria bariônica - corresponde a toda forma de matéria não-relativística que interage eletromagneticamente e gravitacionalmente e, em geral, pode ser observada diretamente. Como o próprio nome diz, toda matéria bariônica presente no universo é formada por bárions que, por sua vez, é constituído de quarks (MOREIRA, 2009). Como no estágio atual do universo (expansão acelerada) (AGHANIM et al., 2018), (NETO, 2018) os bárions são não-relativísticos, a componente bariônica possui pressão nula ($\omega = 0$) de tal forma que não afeta a expansão acelerada do universo, estado da matéria que costuma-se denominar de "poeira". A sua evolução temporal é dada em termos do fator de escala, conforme será visto no capítulo 2.

- Radiação - composta por fótons e a matéria relativística (LIDDLE, 2003), incluindo neutrinos. A maior parte dos fótons corresponde à radiação cósmica de fundo, contribuindo com apenas 0,001% da massa equivalente do universo hoje. A matéria relativística era a componente dominante nos estágios em que o universo era muito quente e denso, correspondente a temperaturas

³ Para mais detalhes veja a referência (EISBERG R.; RESNICK, 1979).

com valores maiores do que 10^9 K e energias maiores do que 1 MeV. Os fótons desacoplam da matéria quando a temperatura do universo é da ordem de 4000 K e a energia da ordem de 0,4 eV, o que ocorreu por volta de 380.000 anos atrás ou no redshift $z = 1100$ (NETO, 2018).

- **Matéria Escura** - assim denominada porque se interagir, é uma interação fraca eletromagneticamente e dificulta uma detecção direta. A observação da matéria escura é feita indiretamente pelos efeitos gravitacionais que causa na sua vizinhança. A matéria escura é essencial para o entendimento da formação das grandes estruturas do universo. Detalhes sobre métodos indiretos usados para estimar a presença da matéria escura no universo são encontrados na referência (NOVELLO; NETO; BERGLIAFFA, 2010), (RYDEN, 2016). Pelos resultados observacionais, sabe-se que hoje a matéria escura corresponde a cerca de 25% do conteúdo de matéria do universo.

- **Energia Escura** - no Λ CDM não há nenhuma hipótese sobre a natureza da energia escura. No modelo, a energia escura é representada pela constante cosmológica (NETO, 2018). Essa forma de energia corresponde a cerca de 70% do conteúdo do universo com densidade $\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}$, em que os dados recentes indicam que $\Lambda = 1,1056 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$, o que dá uma energia do vácuo da ordem de 10^{-47} GeV^4 (AGHANIM et al., 2018). A única evidência para a existência da energia escura - ou seja, um valor não-nulo da constante cosmológica - é a expansão acelerada do universo. Existe um consenso de que a constante cosmológica está associada com processos físicos relacionados com o vácuo do modelo padrão da física de partículas elementares. Contudo, essa relação não está fechada e constitui um dos maiores problemas da física contemporânea (BURGESS, 2015), (PADILLA, 2015).

Pelos resultados observacionais, 95% do conteúdo do universo está associado ao setor escuro. Isso torna o estudo da matéria e da energia escura tópicos de grande interesse, imprescindíveis para uma melhor compreensão do universo.

Nesse trabalho vamos abordar apenas aspectos relacionados com o conteúdo de matéria escura do universo. Em particular será explorada a possibilidade de que um campo fermiônico de Dirac substitua a proposta usual da constante cosmológica como fonte da expansão acelerada do universo. Essa possibilidade atribui um caráter mais fundamental a dinâmica da expansão, uma vez que campos fermiônicos compõe o conjunto de campos fundamentais conhecidos na natureza. Com esse propósito, no que segue, a dissertação será desenvolvida da

seguinte forma: no capítulo 2 serão apresentados os fundamentos necessários para obtenção das equações de campo de Einstein e a solução FRW de interesse à cosmologia. Também são apresentadas as componentes do fluido cosmológico e suas respectivas equações de estado e evolução de densidade, uma vez que cada componente é considerada como um fluido perfeito. Por fim, os parâmetros cosmológicos são definidos e escritos em termos do redshift cosmológico. No capítulo 3 será apresentado o formalismo das tetradas que permite descrever férmions na presença de um campo gravitacional e quantidades como tensor métrico, derivada covariante de um vetor e conexão afim são reescritas. No capítulo 4 será desenvolvido o cálculo do tensor energia-momento para o campo fermiônico na geometria FRW utilizando a lagrangeana de Dirac minimamente acoplada ao campo gravitacional. No capítulo 5 será apresentado um modelo, cuja proposta original foi apresentada por (RIBAS; DEVECCHI; KREMER, 2005), em que a fonte da expansão acelerada é um campo fermiônico de Dirac. Por meio do modelo são escritas expressões simples de parâmetros cosmológicos que, posteriormente, permitirá testá-los observacionalmente. Finalizamos apresentando algumas conclusões e resultados obtidos.

2 FUNDAMENTOS

Nesse capítulo será feita uma breve apresentação do formalismo lagrangeano aplicado a Relatividade Geral. Em particular, as equações de campo de Einstein serão obtidas via o Princípio de Hamilton. A solução de interesse à cosmologia é obtida da métrica de Friedmann-Robertson-Walker e expressa em termos das equações de Friedmann. Também serão apresentadas as diferentes componentes do fluido cosmológico e as respectivas equações de estado e de evolução da densidade, quando cada componente é considerada como um fluido perfeito. Os parâmetros relevantes à cosmologia serão definidos e escritos em termos do redshift cosmológico.

2.1 Formalismo Lagrangeano da Relatividade Geral

A descrição clássica do campo gravitacional fundamentada nos princípios da Teoria da Relatividade Geral (TRG) pode ser feita através da extensão do princípio variacional para uma teoria de campos no espaço-tempo quadridimensional (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). Na TRG os efeitos do campo gravitacional são interpretados como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo.

No formalismo variacional (LEMOS, 2007) define-se uma ação da qual obtém-se o conjunto das equações de campo de Einstein (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006), (WEINBERG, 2014). A ação que gera as equações de Einstein no vácuo é dada por

$$S_{EH} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{R}} R \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.1)$$

que é denominada ação de Einstein-Hilbert ¹. Nessa expressão $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ (G é a constante gravitacional e c é a velocidade da luz), R é o escalar de Ricci e $\sqrt{-g} d^4x$ é o elemento de volume invariante com $g = \text{Det}g_{\mu\nu}$. As equações de campo são obtidas pela variação funcional de cada um dos termos da expressão (2.1) em relação à $g_{\mu\nu}$ até primeira ordem. Usando a definição

¹ As teorias físicas são covariantes por transformação geral de coordenadas. Essa simetria deve estar refletida na ação, que sob transformação geral de coordenadas, deve ser um escalar (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, a variação de (2.1) resulta em

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} = & -\frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{R}} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x - \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ & - \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) d^4x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ é definido por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda, \quad (2.3)$$

em que a conexão (símbolo de Christoffel) é dado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.4)$$

A variação de cada um dos termos de (2.2) é dada por

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) - \nabla_\sigma (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma), \quad (2.5)$$

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.6)$$

e

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Para obter (2.5) utiliza-se um referencial local no ponto P satisfazendo $g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$ e $\partial_\rho g_{\mu\nu}(P) = 0$. Portanto, nesse referencial, $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(P) = 0$ de modo que na (2.3) contribuem somente termos com a derivada da conexão. Finalmente, como a variação deve ser escrita na forma covariante, fazemos a substituição $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$. Na variação (2.6) foi utilizada a propriedade geral $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$, válida para uma matriz inversível A, onde C^T é a transposta da matriz dos cofatores C da matriz A.²

² O determinante de uma matriz A pode ser escrito em termos dos cofatores C_{ij} do elemento a_{ij} como

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{iN}C_{iN} = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \dots + a_{Ni}C_{Ni}$$

O cofator do elemento a_{ij} é definido por $(-1)^{i+j}a_{ij}$.

Substituindo as expressões de (2.5) a (2.7) em (2.2) e usando que $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ e o teorema da divergência chega-se a

$$\delta S_{EH} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{R}} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.8)$$

Note que o termo de superfície proveniente da aplicação do teorema da quadri-divergência não contribui, uma vez que a superfície de integração está no infinito onde por hipótese os campos se anulam. O princípio de Hamilton determina que $\delta S_{EH} = 0$ para uma variação arbitrária do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Aplicando esse princípio à (2.8) tem-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \quad (2.9)$$

que corresponde às equações de campo de Einstein no vácuo.

Na presença de outros campos, pelo mesmo princípio pode-se obter as equações do campo gravitacional na presença de matéria. Assim, deve-se adicionar a ação de Einstein-Hilbert (2.1) a ação correspondente aos outros campos. Suponha que S_{mat} corresponda à ação de um campo de matéria (como o campo de Dirac que será analisado posteriormente). Tem-se, então, que

$$S_{EH} + S_{mat}, \quad (2.10)$$

na qual S_{mat} contém todas as informações sobre o conteúdo de matéria que produz a curvatura e que é afetada pelo campo gravitacional. A variação de S_{mat} é dada por

$$\delta S_{mat} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

em que

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.12)$$

define o tensor de energia-momento. Usaremos essa definição posteriormente para estudar o acoplamento do campo de Dirac com o campo gravitacional.

É possível introduzir um termo de constante cosmológica na equação de Einstein. Para isso, basta adicionar à ação de EH o termo $\int d^4x \sqrt{-g} \Lambda$, cuja variação em relação a $g_{\mu\nu}$ conduzirá à

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Essas são as equações de campo de Einstein em sua forma mais geral, incluindo o termo de constante cosmológica Λ . Note que do lado esquerdo de (2.13) temos informação sobre a curvatura do espaço-tempo, enquanto que do lado direito temos informação sobre a matéria que produz essa curvatura. Portanto, *a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar e o espaço-tempo diz a matéria como se mover* (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973).

2.2 Solução FRW na Cosmologia

O estudo das soluções das equações de Einstein mostrou-se de suma importância para o desenvolvimento da física no século XX. Um interesse particular voltado para a cosmologia são as soluções das equações de Einstein para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), definida na equação (1.2).

A geometria FRW constitui o modelo de espaço-tempo homogêneo e isotrópico em escalas cosmológicas (WEINBERG, 2014), ou seja, compatível com o Princípio Cosmológico de que não há no universo nenhuma localização e direção privilegiadas (HENRIQUES, 2009). Estatisticamente, a distribuição espacial de matéria no universo ocorre de maneira homogênea e isotrópica a escalas suficientemente grandes.

Para obter a dinâmica e determinar a evolução do fator de escala $a(t)$ utiliza-se a equação de Einstein (2.13) com o espaço-tempo considerado como sendo um fluido perfeito (NETO, 2018) descrito pelo tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

em que $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento; ρ é a densidade; p é a pressão e u_μ é a quadrivelo- cidade. O procedimento é o padrão utilizado na relatividade geral (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006):

- Adota-se um sistema de coordenadas esféricas co-móveis $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ para determinar as

componentes não-nulas da métrica (1.2):

$$g_{00} = c^2, \quad (2.15)$$

$$g_{11} = -\frac{a^2(t)}{1-kr^2}, \quad (2.16)$$

$$g_{22} = -a^2(t)r^2, \quad (2.17)$$

$$g_{33} = -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.18)$$

- Calcula-se as componentes não-nulas da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$;
- Determina-se as componentes do tensor de Ricci (2.3);
- Utiliza-se o sistema de coordenadas co-móveis com quadrivelocidade $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ para determinar o tensor de energia-momento;
- Determina-se as componentes não-nulas do tensor de energia-momento dado em (2.14);
- Substitui-se os resultados obtidos acima nas equações de Einstein (2.13).

Com esses procedimentos obtêm-se duas equações independentes (LIMA; SANTOS, 2018):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{1}{3} \Lambda c^2, \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{1}{3} \Lambda c^2 - \frac{c^2 k}{a^2}. \quad (2.20)$$

Assumindo que o espaço-tempo é um fluido perfeito com pressão $p = 0$, a equação (2.19) reduz-se a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho - \frac{\Lambda}{4\pi G} \right). \quad (2.21)$$

As observações indicam que atualmente o universo está em uma expansão acelerada (PERLMUTTER et al., 2013), (RIESS et al., 2013), (SCHMIDT et al., 2013) e (ADE et al., 2016). A concordância da (2.21) é observada através de diferentes tipos de dados e como eles ajustam os parâmetros da equação de estado e parâmetros de densidade. Note que isso só será possível se $\Lambda > 0$, uma vez que com a expansão do universo ρ está diminuindo. Desse modo, a expansão acelerada impõe $\rho < \frac{\Lambda}{4\pi G}$. Realmente, se $\Lambda = 0$ teremos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho, \quad (2.22)$$

o que representa uma expansão desacelerada já que $\rho > 0$. Dois parâmetros cinemáticos importantes na cosmologia e que aparecem nas equações de Friedmann são

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.23)$$

e

$$q(t) \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (2.24)$$

denominados respectivamente, parâmetro de Hubble e parâmetro de desaceleração; $H(t)$ mede a taxa de expansão do universo e $q(t)$ mede a taxa de variação da expansão (LIMA; SANTOS, 2018). Note que em termos do parâmetro de desaceleração, para um universo em expansão acelerada equivale a $q(t) < 0$.

As equações (2.19) e (2.20) permitem determinar o fator de escala $a(t)$. Outra equação importante, obtida independentemente é a equação de evolução da densidade ρ . Essa equação é obtida usando a conservação do tensor energia-momento (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006), (WEINBERG, 2014)

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.25)$$

Usando a equação (2.14) na equação (2.25) chega-se a

$$\dot{\rho} + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \frac{3\dot{a}}{a} = 0. \quad (2.26)$$

De equação (2.26) tem-se que

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -\frac{3pa^2}{c^2}. \quad (2.27)$$

Considerando a equação de estado dada por

$$p = \omega\rho c^2, \quad (2.28)$$

sendo ω um parâmetro constante, tem-se

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3\omega\rho a^2. \quad (2.29)$$

A solução dessa equação diferencial é

$$\rho = Aa^{-3(1+\omega)}, \quad (2.30)$$

com A uma constante determinada pelas condições iniciais. Os valores do parâmetro ω relevantes a cosmologia são: $\omega = 0$ para poeira; $\omega = \frac{1}{3}$ para radiação e $\omega = -1$ para vácuo (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

2.3 O redshift cosmológico

Uma das consequências da Relatividade Geral aplicada à cosmologia é a existência de um redshift devido exclusivamente à expansão do fluido cosmológico, independentemente do Efeito Doppler usual (RIBAS, 2008). Considere um observador O situado na origem do sistema de coordenadas co-móveis e que um fóton seja emitido por uma galáxia distante na coordenada $x_E = (t_E, r_E, 0, 0)$, chegando à Terra na coordenada $x_0 = (t_0, 0, 0, 0)$ na época atual. Logo, para a métrica FRW, um fóton viajando em nossa direção, segue que a distância radial infinitesimal entre dois pontos é dada por

$$dr = -\frac{c}{a(t)} dt, \quad (2.31)$$

onde considera-se entretanto, que a trajetória dos fótons descrevem geodésicas nulas caracterizadas por $ds^2 = 0$ (RYDEN, 2016). O sinal negativo em (2.31) ocorre porque a coordenada está diminuindo a partir da coordenada de emissão.

Suponha que um segundo fóton seja emitido no instante de tempo posterior $t_E + \delta t_E$ da mesma posição, sendo detectado na Terra no instante de tempo $t_0 + \delta t_0$. Dado que os fótons são detectados na mesma posição e as coordenadas de emissão e recepção são co-móveis (fixas) r_E e $r = 0$, integrando a (2.31) tem-se

$$\int_{r_E}^{r_E} dr = 0 = -\int_{t_E}^{t_E + \delta t_E} \frac{c}{a(t)} dt \quad (2.32)$$

e

$$\int_0^0 dr = 0 = -\int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{c}{a(t)} dt. \quad (2.33)$$

Fazendo a diferença entre as equações acima, tem-se que

$$\int_{t_E}^{t_E + \delta t_E} \frac{c}{a(t)} dt - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{c}{a(t)} dt = 0. \quad (2.34)$$

Uma vez que os intervalos de tempo da emissão e da recepção entre os dois fótons são muito pequenos, ou seja, $\delta t_E \ll t_E$ e $\delta t_0 \ll t_0$, tem-se que $a(t_E + \delta t_E) \approx a(t_E)$ e $a(t_0 + \delta t_0) \approx a(t_0)$, de modo que

$$\frac{c \delta t_E}{a(t_E)} = \frac{c \delta t_0}{a(t_0)} \quad (2.35)$$

Dado que o comprimento de uma onda é obtido através de $\lambda = \frac{c}{f}$ e $f = \frac{1}{T}$, tem-se que o intervalo de tempo entre as duas cristas de onda corresponde então ao tempo δt_E e δt_0 . Assim,

$$\frac{\lambda_E}{\lambda_0} = \frac{a(t_E)}{a(t_0)}. \quad (2.36)$$

Usando a definição usual de redshift em termos das distâncias relativas entre dois comprimentos de onda observados e emitidos

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_E}{\lambda_E}, \quad (2.37)$$

obtem-se da equação (2.36) que

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_E)}, \quad (2.38)$$

onde a quantidade z é conhecida como redshift cosmológico. Quanto maior o valor de z mais distante situa-se a fonte emissora em relação ao receptor, implicando que a observação corresponde a um objeto mais ao passado do observador.

2.4 Componentes do fluido cosmológico

Sabe-se que nos modelos cosmológicos atuais o universo é considerado como sendo um fluido cosmológico constituído de matéria, radiação e vácuo, cada qual descrito por uma equação de estado independente dada por (2.28). Portanto, a densidade de energia total do universo é dada por:

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t), \quad (2.39)$$

em que os três termos do lado direito representam, respectivamente, as densidades de matéria, radiação e vácuo (representado pela constante cosmológica Λ).

De acordo com o modelo cosmológico padrão Λ CDM, conhece-se apenas 5% da composição do universo correspondente à matéria bariônica e radiação, sendo que os demais 95% correspondem ao setor escuro do modelo, genericamente chamados de matéria e energia es-

curas (BARBOSA, 2018). Com relação às contribuições individuais de cada componente na densidade total do universo tem-se:

2.4.1 Matéria

A densidade total de matéria presente no universo é dada em termo de duas componentes:

$$\rho_m(t) = \rho_b(t) + \rho_{dm}(t), \quad (2.40)$$

em que $\rho_b(t)$ corresponde à matéria bariônica e $\rho_{dm}(t)$ corresponde à matéria escura (*dark matter*) fria, ou seja, não-relativística (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). A matéria bariônica é toda forma de matéria que interage eletromagneticamente e gravitacionalmente, como por exemplo, prótons e nêutrons existentes nos núcleos atômicos e seus aglomerados. A matéria escura fria, por sua vez, corresponde à matéria não-bariônica. Esse tipo de matéria interage apenas gravitacionalmente, tornando difícil a sua detecção direta. Contudo, a existência da componente escura da matéria é muito importante na compreensão atual da formação de grandes estruturas no universo, como na formação das galáxias.

Assumindo a condição inicial $\rho_m(t_0) \equiv \rho_{m,0}$, para um instante de tempo cósmico t arbitrário, a solução da (2.30) para a componente de matéria é

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0} \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^3 \quad (2.41)$$

em que a_0 representa o fator de escala no instante t_0 . Costuma-se adotar t_0 como sendo o tempo hoje.

Utilizando a expressão (2.30), a expressão (2.41) pode ser escrita em termos do redshift

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0} (1+z)^3. \quad (2.42)$$

2.4.2 Radiação

São classificados como radiação os componentes relativísticos responsáveis pela interação eletromagnética: os fótons e matéria relativística em altíssimas temperaturas ou neutrinos em baixas temperaturas (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). De modo geral, para a radiação, o valor do parâmetro ω na equação (2.30) é $\omega = \frac{1}{3}$. Considerando a condição inicial $\rho_r(t_0) = \rho_{r,0}$, tem-se que a solução da equação (2.30) para a componente de radiação no tempo

t é dada por

$$\rho_r(t) = \rho_{r,0} \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^4, \quad (2.43)$$

ou em termos do redshift cosmológico por

$$\rho_r(t) = \rho_{r,0} (1+z)^4. \quad (2.44)$$

Pelos dados observacionais, com boa aproximação, sabe-se que a contribuição dominante sobre a densidade de energia de radiação presente no universo é devido aos fótons da radiação cósmica de fundo (a sigla comumente utilizada na literatura é *CMB*, de *Cosmic Microwave Background*). A *CMB* é caracterizada por uma temperatura atual de 2.726K . As observações mostram que a distribuição da densidade de energia dos fótons associados, medida hoje, possui a forma de uma distribuição de Planck do corpo negro. Pode-se mostrar que essa distribuição é preservada ao longo da expansão do universo (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). Dado que para o espectro de corpo negro a densidade é proporcional a T^4 , obtém-se de (2.43), para um dado instante de tempo cósmico t , que a temperatura da radiação cósmica de fundo é

$$T(t) = T_0 \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]. \quad (2.45)$$

Como esperado, nos estágios iniciais do universo, quando o fator de escala é pequeno, tem-se um universo muito mais denso e, portanto, muito mais quente do que o universo observado hoje.

2.4.3 Vácuo

De equação (2.28), fazendo $\omega = -1$, tem-se um fluido com pressão negativa. Desse modo, da equação (2.30) tem-se que a densidade associada ao vácuo é constante. O valor da densidade atribuída ao vácuo pode ser obtida diretamente da equação de Einstein como segue. Usando $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ para escrever a equação de Einstein como

$$G_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{\mu\nu} \right), \quad (2.46)$$

nota-se que o segundo termo do lado direito corresponde ao tensor energia-momento (2.14) com $p = -\rho$ e $p = -\frac{\Lambda}{\kappa}$. Assim, pode-se interpretar o termo da constante cosmológica como uma

componente do fluido cosmológico com densidade

$$\rho_{\Lambda} = \rho_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.47)$$

Dadas as contribuições relativas de cada componente, conforme equações (2.41), (2.43) e (2.47), obtém-se que a densidade total equivalente é dada por

$$\rho(t) = \rho_{m,0} \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^3 + \rho_{r,0} \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^4 + \rho_{\Lambda,0}, \quad (2.48)$$

que contém a contribuição das componentes de matéria, radiação e vácuo. Espera-se que para tempos suficientemente longos, a evolução do universo seja completamente dominada pelo vácuo (fase de Sitter) (NOVELLO; NETO; BERGLIAFFA, 2010). Embora o presente estágio de evolução do universo seja dominado pelo vácuo, fica claro da equação (2.48) que existiram no passado, épocas dominadas pela matéria e pela radiação que predominaram quando $a(t) \ll a_0$. Conclui-se, então, que no universo primordial deve ter predominado a energia associada à radiação (HENRIQUES, 2009).

2.5 Parâmetros cosmológicos

Para estudar e comparar diferentes modelos cosmológicos, basta conhecer as densidades de massa equivalentes ρ_i para cada componente do fluido cosmológico em um tempo t_0 . Entretanto, em Cosmologia, adota-se quantidades adimensionais conhecidas como parâmetros de densidade, definidos em relação à densidade crítica

$$\rho_{crit}(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (2.49)$$

por

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_{crit}(t)}, \quad (2.50)$$

em que $H(t)$ é o parâmetro de Hubble no tempo t e o índice $i = m, r, \Lambda$ varre as diferentes componentes: matéria (m), radiação (r) e vácuo (Λ). Portanto, $\rho_{crit}(t)$ define uma escala de massa para a cosmologia em cada época de evolução do universo. Atualmente, o valor de ρ_0 de

acordo com as observações é (AGHANIM et al., 2018)

$$\rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 9.2 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}. \quad (2.51)$$

Os valores mais recentes dos parâmetros cosmológicos H_0 , $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ foram determinados pela colaboração Planck (AGHANIM et al., 2018):

- constante de Hubble - $H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$;
- densidade de matéria - $\Omega_{m,0} = 0.315 \pm 0.007$;
- densidade de radiação - $\Omega_{r,0} \approx 5 \times 10^{-5}$;
- densidade do vácuo - $\Omega_{\Lambda,0} = 0.688 \pm 0.005$.

Lembrando que $1 \text{ Mpc} \equiv 10^6 \text{ parsecs} \approx 3.09 \times 10^{22} \text{ m}$. No SI, $H_0 \approx 2.19 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$. A densidade de energia atual presente no universo é dominada pelo vácuo.

De acordo com as observações realizadas hoje, a componente de matéria do universo possui uma componente bariônica e uma componente de matéria escura, cujos parâmetros de densidade são dados, respectivamente, por $\Omega_{b,0} \approx 0.05$ e $\Omega_{dm,0} \approx 0.25$. A componente de radiação hoje é dominada pela radiação cósmica de fundo, que representa uma pequena fração da densidade total, sendo desprezada quando se estuda a cosmologia do universo no seu presente estágio de evolução ($\Omega_{r,0} \sim 10^{-5}$).

Substituindo na equação (2.50) as definições das densidades dadas por (2.41), (2.43) e (2.47), ao substituir na equação de Friedmann (2.20), obtém-se que

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_{\Lambda} - \frac{c^2 k}{H^2 a^2}. \quad (2.52)$$

Quanto ao último termo presente na equação (2.52), define-se como parâmetro de densidade de curvatura

$$\Omega_k(t) = -\frac{c^2 k}{H^2(t) a^2(t)}. \quad (2.53)$$

Assim, a equação (2.52) tem uma dependência apenas temporal (isto é, para todos os tempos cósmicos t) e pode ser escrita como

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k = 1. \quad (2.54)$$

Quanto ao parâmetro de densidade total,

$$\Omega \equiv \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k. \quad (2.55)$$

Pode-se notar que para o modelo cosmológico ser espacialmente plano deve-se ter que $\Omega = 1$.

A evolução do parâmetro de Hubble pode ser escrita em termos dos parâmetros de densidade e da constante de Hubble medidos hoje. Assim, escrevendo os termos da constante cosmológica e da curvatura da equação (2.20) como parâmetros de densidade, utilizando a (2.51) e a (2.54) tem-se

$$H^2(t) = H_0^2 [\Omega_{m,0} a^{-3}(t) + \Omega_{r,0} a^{-4}(t) + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} a^{-2}(t)], \quad (2.56)$$

em que $\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0}$ e onde usou-se $a \equiv \frac{a(t)}{a_0}$ correspondendo ao fator de escala relativo ao valor do fator de escala a_0 medido hoje.

Multiplicando a equação (2.19) por $\frac{a^2}{\dot{a}^2}$ e usando a equação de estado dada por (2.28), obtém-se:

$$\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{4\pi G}{3H^2} \sum_i \rho_i (1 + 3\omega_i). \quad (2.57)$$

Uma vez que o parâmetro de desaceleração é dado por $q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}$, a equação (2.57) pode ser escrita em termos das componentes presentes no universo conforme equação (2.50). Segue que

$$q(t) = \frac{1}{2} (\Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda). \quad (2.58)$$

3 MÉTODOS

O propósito desse capítulo é apresentar o formalismo matemático que permite descrever férmions na presença de um campo gravitacional, o formalismo das tetradas. Desse modo, quantidades como tensor métrico, derivada covariante de um vetor e conexão afim são escritas em termos das tetradas. A quantidade denominada conexão de spin é definida e a álgebra de Clifford das matrizes de Dirac é estendida para o espaço curvo. Por meio das definições de derivada covariante de um espinor chega-se à definição do tensor de curvatura e o tensor de curvatura de Riemann em termos das tetradas.

3.1 Método das tetradas

A conexão entre a relatividade geral e a equação de Dirac pode ser feita através do formalismo das tetradas, também denominadas *vierbeins*. A formulação dos campos clássicos das tetradas em um background curvo é um elemento importante da relatividade geral e vem sendo referenciado tanto nos aspectos clássicos quanto quânticos (SHAPIRO, 2016).

A incorporação dos férmions na relatividade geral não é feita de forma imediata por meio das representações tensoriais do grupo de transformações gerais de coordenadas em quatro dimensões. Para isso usa-se uma relação entre o espaço-tempo descrito por um sistema geral de coordenadas e o espaço de Minkowski local definida em cada ponto P . Nesse espaço local (espaço de Minkowski) as representações espinoriais são conhecidas de modo que a introdução de campos fermiônicos pode ser feita naturalmente através da relação com as coordenadas gerais. Isso é feito através das tetradas (KAKU, 1993).

Uma tetrada é representada pelo símbolo e_{μ}^a na qual os índices latinos (a, b, \dots) denotam o espaço plano tangente de Minkowski definido localmente em cada ponto do espaço curvo. Esses índices são baixados e levantados, respectivamente, pelas métricas η_{ab} e η^{ab} . Os índices gregos (μ, ν, \dots) representam o sistema de coordenadas geral definido no espaço curvo sendo baixados e levantados, respectivamente, por $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$. A transição entre o espaço local e o espaço curvo é realizada pelas tetradas, que serão os coeficientes da transformação entre esses dois espaços. Os índices latinos e gregos assumem os valores $a, \mu = 0, 1, 2, 3$.

Suponha que \mathbf{e}_a sejam vetores que formam uma base local do espaço de Minkowski em um ponto P e que \mathbf{e}_{μ} , também nesse ponto, seja uma base associada ao sistema geral de coordenadas. Supondo também que a transformação entre as bases \mathbf{e}_a e \mathbf{e}_{μ} sejam inversíveis,

pode-se escrever

$$\mathbf{e}_\mu = e_\mu^a \mathbf{e}_a, \quad (3.1)$$

e

$$\mathbf{e}_a = e_a^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (3.2)$$

em que e_a^μ representam as componentes da transformação inversa à transformação e_μ^a . Definindo as bases satisfazendo $\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b = \eta_{ab}$ e $\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu}$ têm-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu &= g^{\mu\nu} \\ &= e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \\ &= e_\mu^a e_{a\nu} \end{aligned} \quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b &= \eta_{ab}, \\ &= e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} \\ &= e_a^\mu e_{\mu b}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Das relações (3.3) e (3.4) seguem as seguintes propriedades:

$$e_\nu^a e_a^\mu = \delta_\nu^\mu, \quad (3.5)$$

e

$$e^{a\mu} e_{\mu b} = \delta_b^a. \quad (3.6)$$

Desse modo, toda álgebra implementada com a métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser obtida de forma equivalente por meio das tetradas e_μ^a . Assim, o conjunto das tetradas permite implementar a mudança de um índice para o outro, o que corresponde apenas a uma mudança de base.

Uma outra grandeza importante a ser definida é a expressão para a derivada covariante de um vetor e para a conexão afim, que seguem diretamente da definição usual

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\tau\nu}^\mu V^\tau, \quad (3.7)$$

onde as componentes de um vetor V^μ e V^a se relacionam com o campo das tetradas por

$$V^\mu = e_a^\mu V^a \quad (3.8)$$

e

$$V^a = e_\mu^a V^\mu. \quad (3.9)$$

Em termos dos índices latinos a derivada covariante de um vetor é definida por

$$\nabla_a V^b \equiv \partial_a V^b + \omega_{ca}^b V^c, \quad (3.10)$$

onde ω_{ca}^b é denominada conexão de spin. Assim, a derivada covariante de um vetor no sistema de coordenadas gerais é relacionada com a derivada covariante de um vetor no sistema local através das tetradas por $\nabla_\nu V^\mu = e_\nu^a e_b^\mu \nabla_a V^b$. Logo, substituindo essa relação no lado esquerdo de (3.7) e mantendo fixo o lado direito, tem-se

$$e_\nu^a e_b^\mu \nabla_a V^b = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\tau\nu}^\mu V^\tau. \quad (3.11)$$

Substituindo a relação (3.9) e (3.10) na equação (3.11),

$$\begin{aligned} e_\nu^a e_b^\mu \left(\partial_a V^b + \omega_{ca}^b V^c \right) &= \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\tau\nu}^\mu V^\tau \\ e_\nu^a e_b^\mu \partial_a (e_\tau^b V^\tau) + e_\nu^a e_b^\mu e_\lambda^c V^\lambda \omega_{ca}^b &= \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\tau\nu}^\mu V^\tau \\ \partial_\nu V^\mu + V^\tau \left(e_b^\mu \partial_\nu e_\tau^b + e_b^\mu e_\tau^c \omega_{c\nu}^b \right) &= \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\tau\nu}^\mu V^\tau, \end{aligned} \quad (3.12)$$

em que na segunda linha acima foi utilizada a regra de Leibnitz. De (3.12), por comparação dos dois membros da igualdade, tem-se que a expressão para a conexão afim é

$$\Gamma_{\tau\nu}^\mu = e_b^\mu \partial_\nu e_\tau^b + e_b^\mu e_\tau^c \omega_{c\nu}^b. \quad (3.13)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.13) pelo produto das tetradas $e_\mu^a e^{\tau d}$ obtém-se

$$\omega_{d\nu}^a = e_\mu^a e_d^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\mu - e_d^\tau \partial_\nu e_\tau^a. \quad (3.14)$$

Por fim, multiplicando ambos os lados de (3.14) por η^{fd} , chega-se à expressão para a conexão de spin,

$$\omega_{\nu}^{af} = e_{\mu}^a e^{\tau f} \Gamma_{\tau\nu}^{\mu} - e^{\tau f} \partial_{\nu} e_{\tau}^a. \quad (3.15)$$

A conexão de spin (3.15) é antissimétrica nos índices (a, f) . Utilizando essa expressão pode ser verificado explicitamente que $\omega_{\nu}^{af} + \omega_{\nu}^{fa} = 0$.

Segue da identidade (3.3) que deve-se escolher as tetradas satisfazendo (YEPEZ, 2011)

$$\nabla_{\tau} e_b^{\mu} = 0, \quad (3.16)$$

$$\nabla_{\tau} e_{\mu b} = 0. \quad (3.17)$$

Essa escolha corresponde à propriedade de metricidade da derivada covariante (denominada compatibilidade da métrica)

$$\nabla_{\tau} g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.18)$$

A relação entre as matrizes de Dirac no espaço local e no espaço descrito pelas coordenadas gerais (índices gregos) satisfaz a relação usual de anti-comutação da álgebra de Clifford

$$\begin{aligned} \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} &= e_a^{\mu} \gamma^a e_b^{\nu} \gamma^b + e_b^{\nu} \gamma^b e_a^{\mu} \gamma^a \\ &= 2\eta^{ab} e_a^{\mu} e_b^{\nu} \\ &= 2g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

em que na segunda linha foi utilizada a álgebra das matrizes de Dirac no espaço de Minkowski $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$.

Para obter a generalização covariante da ação de Dirac, utiliza-se a prescrição usual em que a derivada parcial é substituída pela derivada covariante e a medida de integração na ação é a medida invariante. Com isso, a ação do campo de Dirac invariante por transformação geral de coordenadas é dada por

$$S_f = i \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} (i\gamma^{\mu} \nabla_{\mu} - m) \psi, \quad (3.20)$$

em que a derivada covariante para a representação espinorial é definida por

$$\nabla_{\mu} \psi \equiv \partial_{\mu} \psi + \frac{i}{2} \omega_{\mu}^{ab} \sigma_{ab} \psi \quad (3.21)$$

e o seu conjugado

$$\nabla_\mu \bar{\Psi} \equiv \partial_\mu \bar{\Psi} - \frac{i}{2} \omega_\mu^{ab} \bar{\Psi} \sigma_{ab}, \quad (3.22)$$

no qual $\sigma_{ab} = \frac{i}{2}[\gamma_a, \gamma_b]$. De fato, a equação (3.10) é a definição da derivada covariante para uma representação vetorial.

A relação entre as derivadas covariantes e o tensor de curvatura é obtida como segue. Calcula-se o comutador entre as derivadas covariantes

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \Psi = -\frac{1}{4} R_{\mu\nu}^{ab} \gamma_a \gamma_b \Psi, \quad (3.23)$$

onde

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac} \omega_{\nu c}^b - \omega_\nu^{ac} \omega_{\mu c}^b. \quad (3.24)$$

A expressão (3.23) é o tensor de curvatura escrito em termos das derivadas da conexão de spin. De fato, pode-se obter uma relação direta com o tensor de Riemann:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \Psi = -\frac{1}{4} R_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\rho \gamma^\sigma \Psi. \quad (3.25)$$

Uma consequência importante de (3.25) segue pelo uso da identidade de Bianchi e as propriedades do tensor de Riemann (DEWITT, 1975) e (PARKER; TOMS, 2009):

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 2R. \quad (3.26)$$

Portanto, embora não existam representações *espinoriais* associadas ao grupo de transformação geral de coordenadas, é possível introduzi-las localmente e utilizá-las em um espaço curvo através das tetradas. Isso é feito nos planos tangentes definidos ponto a ponto no espaço (KAKU, 1993).

4 CÁLCULO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO NA GEOMETRIA FRW

Utilizando o método das tetradas apresentado anteriormente, nesse capítulo será desenvolvido o cálculo do tensor energia-momento para o campo fermiônico na geometria FRW utilizando a lagrangeana de Dirac minimamente acoplada ao campo gravitacional, ou seja, simplesmente substitui-se as derivadas usuais por derivadas covariantes. Mostra-se que, supondo que os campos dependem exclusivamente do tempo, os férmions não exercem pressão, comportando-se como poeira. Conclui-se, portanto, que campos fermiônicos minimamente acoplados ao campo gravitacional não podem representar uma componente de energia escura.

4.1 Cálculo da variação da ação

Usando os métodos apresentados no capítulo 3 será feita uma aplicação à cosmologia baseada na métrica FRW. As soluções das equações de campo da relatividade geral formam a base da descrição dinâmica do universo dentro do atual modelo cosmológico padrão (KAKU, 1993). O objetivo central é investigar o efeito de um campo fermiônico como fonte do campo gravitacional (SHAPIRO, 2016).

Como se sabe das equações de campo (2.13), toda informação sobre presença de matéria está contida no tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ definido em (2.11) por meio de

$$\delta S_{mat} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (4.1)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

No que segue será feita uma descrição sucinta dos passos necessários para a obtenção de $T_{\mu\nu}$ no campo de Dirac (férmions) (SHAPIRO, 2016). Utilizando a definição (4.2), o tensor energia-momento é simétrico na troca dos índices μ e ν como deve ser na aplicação à relatividade geral.

Nesse caso envolvendo o campo gravitacional é conveniente simetrizar a ação (3.20). A forma simetrizada é dada por

$$S_f = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (i\bar{\psi}\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - i\nabla_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - 2m\bar{\psi}\psi). \quad (4.3)$$

A ação dada em (4.3) é construída em termos da conexão de spin (veja equação (3.21)). Para o cálculo do tensor de energia-momento dado em (2.11) é necessário calcular a variação da ação

em relação a métrica. Para isso, utilizaremos o sistema de coordenadas conforme definido por $dt = a(\eta)d\eta$, em que η é o tempo conforme. Fazendo essa mudança de coordenadas na métrica FRW (1.2) e assumindo $k = 0$, em concordância com os dados observacionais de hoje, obtém-se

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(\eta) [c^2 d\eta^2 - (dr^2 + r^2(d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2))] \\ &= a^2(\eta) ds_M^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que ds_M^2 é a métrica de Minkowski, escrita acima em coordenadas esféricas. Usando as coordenadas cartesianas têm-se que a métrica FRW em termos do tempo conforme é dada por $g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}$, em que $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

Para calcular a variação da ação escreve-se a métrica transformada como

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

ou seja, $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. As variações das grandezas relevantes para o cálculo da variação da ação são as seguintes (SHAPIRO, 2016):

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}h, \quad (4.6)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

$$\delta e_\mu^c = \frac{1}{2}h_\mu^\nu e_\nu^c, \quad (4.8)$$

$$\delta e_b^\rho = -\frac{1}{2}h_\lambda^\rho e_b^\lambda, \quad (4.9)$$

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha h_\beta^\lambda + \nabla_\beta h_\alpha^\lambda - \nabla^\lambda h_{\alpha\beta}\right), \quad (4.10)$$

$$\delta\gamma^\mu = -\frac{1}{2}h_\nu^\mu \gamma^\nu, \quad (4.11)$$

$$\delta\omega_\mu^{ab} = \frac{1}{2}(e^{b\tau}e^{a\lambda} - e^{b\lambda}e^{a\tau})\nabla_\lambda h_{\mu\tau}. \quad (4.12)$$

Substituindo a expressão para as derivadas covariantes de um espinor e seu conjugado em (4.3) tem-se

$$S_f = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}\bar{\psi}(\gamma^\mu \sigma_{ab} + \sigma_{ab}\gamma^\mu)\psi - 2m\bar{\psi}\psi \right]. \quad (4.13)$$

Variando os termos de (4.13) em relação a métrica tem-se que

$$\begin{aligned} \delta S_f &= \frac{1}{2} \int d^4x (\delta\sqrt{-g}) \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab} \bar{\psi} (\gamma^\mu \sigma_{ab} + \sigma_{ab} \gamma^\mu) \psi - 2m\bar{\psi}\psi \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[i\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu) \partial_\mu \psi - i\partial_\mu \bar{\psi}(\delta\gamma^\mu) \psi - \frac{1}{2}(\delta\omega_\mu^{ab}) \bar{\psi} (\gamma^\mu \sigma_{ab} + \sigma_{ab} \gamma^\mu) \psi \right] \\ &- \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \omega_\mu^{ab} \bar{\psi} (\delta\gamma^\mu \sigma_{ab} + \sigma_{ab} \delta\gamma^\mu) \psi. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nos concentraremos agora no cálculo da contribuição da variação $\delta\omega_\mu^{ab}$ da conexão de spin em (4.14) e mostraremos que sua contribuição é nula. Partindo da expressão (veja equação (4.12))

$$\begin{aligned} \delta S_\omega &= -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \delta\omega_\mu^{ab} [\bar{\psi}(\gamma^\mu \sigma_{ab} + \sigma_{ab} \gamma^\mu) \psi] \\ &= -\frac{1}{8} \int d^4x \sqrt{-g} (e^{b\tau} e^{a\lambda} - e^{b\lambda} e^{a\tau}) h_{\mu\tau} e^{\mu c} \nabla_\lambda [\bar{\psi}(\gamma_c \sigma_{ab} + \sigma_{ab} \gamma_c) \psi], \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que na última linha usou-se a (4.12) e foi feita uma integração por partes, desprezando os termos de superfície e utilizada a propriedade (3.16). Note que os dois termos entre parênteses na integral acima são antissimétricos na troca dos índices a e b . Usando em (4.15) a expressão $\sigma_{ab} = \frac{i}{2}[\gamma_a, \gamma_b]$ e o fato de que as matrizes de Dirac satisfazem $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$ tem-se

$$\begin{aligned} \delta S_\omega &= -\frac{i}{16} \int d^4x \sqrt{-g} (e^{b\tau} e^{a\lambda} - e^{b\lambda} e^{a\tau}) h_{\mu\tau} e^{\mu c} \nabla_\lambda [\bar{\psi}(\gamma_c \gamma_a \gamma_b - \gamma_c \gamma_b \gamma_a + \gamma_a \gamma_b \gamma_c - \gamma_b \gamma_a \gamma_c) \psi] \\ &= -\frac{i}{16} \int d^4x \sqrt{-g} 2e^{b\tau} e^{\mu c} h_{\mu\tau} e^{a\lambda} \nabla_\lambda [\bar{\psi}(\gamma_c \gamma_a \gamma_b - \gamma_c \gamma_b \gamma_a + \gamma_a \gamma_b \gamma_c - \gamma_b \gamma_a \gamma_c) \psi] \\ &= -\frac{i}{8} \int d^4x \sqrt{-g} h_{\mu\nu} e_{\mu c} e_{b\nu} e_{a\lambda} \nabla_\lambda [\bar{\psi} 4(\eta^{ac} \gamma^b - \eta^{bc} \gamma^a) \psi] \\ &= -\frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} h_{\mu\nu} \nabla_\lambda [\bar{\psi}(g^{\lambda\mu} \gamma^\nu - g^{\nu\lambda} \gamma^\mu) \psi], \end{aligned} \quad (4.16)$$

em que na terceira linha de (4.16) usamos a relação (3.19) para as matrizes de Dirac. Uma vez que $h_{\mu\nu}$ é simétrico na troca dos índices μ e ν e o termo entre parênteses é antissimétrico na troca dos índices μ e ν , segue que $\delta S_\omega = 0$.

Finalmente, fazendo as respectivas substituições das variações (4.6) e (4.11) em (4.14), obtém-se que

$$\delta S_f = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[\frac{i}{2} g_{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma^\lambda \nabla_\lambda \psi - \nabla_\lambda \bar{\psi} \gamma^\lambda \psi) - m g_{\mu\nu} \bar{\psi} \psi - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \nabla_\nu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi) \right], \quad (4.17)$$

onde usamos $h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Por comparação com a equação (4.2) chega-se a

$$T_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}g_{\mu\nu} \left(\bar{\psi}\gamma^\lambda\nabla_\lambda\psi - \nabla_\lambda\bar{\psi}\gamma^\lambda\psi \right) + \frac{i}{2} \left(\bar{\psi}\gamma_\mu\nabla_\nu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi \right) + mg_{\mu\nu}\bar{\psi}\psi. \quad (4.18)$$

4.2 Cálculo da densidade e da pressão

As componentes do tensor energia-momento para a métrica FRW são obtidas diretamente de (4.18) substituindo as definições dadas por (3.21) e (3.22). Os índices gregos e latinos assumem os valores $\mu, a = 0, 1, 2, 3$. O resultado para as diferentes componentes é

$$T_{00} = a^2(t)m\bar{\psi}\psi, \quad (4.19)$$

$$T_{0k} = \frac{ia(t)}{2} \left(\bar{\psi}\Gamma_k\psi' - \bar{\psi}'\Gamma_k\psi \right), \quad (4.20)$$

e

$$T_{ik} = \frac{ia(t)}{2} \eta_{ik} \left(\bar{\psi}'\Gamma^0\psi - \bar{\psi}\Gamma^0\psi' \right) + ma^2(t)\eta_{ik}\bar{\psi}'\psi. \quad (4.21)$$

Para obter as componentes acima, assumimos que o campo fermiônico depende exclusivamente do tempo. Também foram necessárias as seguintes grandezas:

- conexão de spin

$$\begin{aligned} \omega_0^{00} &= 0, \\ \omega_0^{i0} &= 0, \\ \omega_0^{ik} &= 2\frac{a'}{a}\eta^{ik}, \\ \omega_j^{ik} &= 0, \\ \omega_k^{0i} &= -\frac{a'}{a}\delta_k^i. \end{aligned} \quad (4.22)$$

- componentes temporais das derivadas covariantes

$$\nabla_0\psi = \psi', \quad (4.23)$$

$$\nabla_0\bar{\psi} = \bar{\psi}' \quad (4.24)$$

- componentes espaciais das derivadas covariantes

$$\begin{aligned}\nabla_j \psi &= \partial_j \psi - \frac{i}{4} \omega_j^{ab} \psi \\ &= -\frac{a'}{2a} \Gamma_0 \Gamma_j,\end{aligned}\tag{4.25}$$

$$\nabla_j \bar{\psi} = \frac{a'}{2a} \bar{\psi} \Gamma_0 \Gamma_j\tag{4.26}$$

- matrizes de Dirac

$$\gamma^0 = \frac{1}{a} \Gamma^0,\tag{4.27}$$

$$\gamma_0 = a \Gamma_0,\tag{4.28}$$

$$\gamma^k = \frac{1}{a} \Gamma^k,\tag{4.29}$$

$$\gamma_k = a \Gamma_k.\tag{4.30}$$

Na expressão das matrizes de Dirac dadas acima foram utilizadas as relações $\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$ e $\gamma_\mu = e_\mu^a \gamma_a$. Portanto, o símbolo Γ utilizado do lado direito serve para indicar que tratam-se das matrizes de Dirac com índices latinos. Os fatores multiplicativos são as componentes das tetradas para a métrica FRW.

Mostraremos agora que o tensor energia-momento é diagonal na camada de massa, ou seja, quando os campos fermiônicos satisfazem a equação de Dirac

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \nabla_\mu \psi + im\psi &= 0, \\ \frac{1}{a} \Gamma^0 \psi' - \frac{a'}{2a^2} \Gamma^0 \Gamma^k \psi + im\psi &= 0.\end{aligned}\tag{4.31}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - im\bar{\psi} &= 0, \\ \frac{1}{a} \left(\bar{\psi}' \Gamma^0 + \frac{3}{2} \frac{a'}{a} \bar{\psi} \Gamma^0 \right) - im\bar{\psi} &= 0.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Todas as derivadas temporais acima são em relação ao tempo conforme. Pelas equações (4.31) e (4.32) obtêm-se as expressões para os campos

$$\psi' = -iam\psi - \frac{3}{2} \frac{a'}{a} \psi\tag{4.33}$$

e

$$\bar{\psi}' = -\frac{3}{2} \frac{a'}{a} \bar{\psi} + iam \bar{\psi} \Gamma_0, \quad (4.34)$$

Retornando em equação (4.20), substituindo as expressões (4.33) e (4.34) na camada de massa,

$$T_{0k} = \frac{a^2}{2} m (\bar{\psi} \Gamma_k \Gamma_0 \psi + \bar{\psi} \Gamma_0 \Gamma_k \psi) = 0, \quad (4.35)$$

em que usou-se o fato de que as matrizes de Dirac anti-comutam.

Assim, o tensor energia-momento do campo de Dirac em um universo homogêneo e isotrópico (FRW) é diagonal. Define-se as componentes diagonais em termos da densidade ρ e da pressão p como $T_{\mu\nu} = (\rho, -p, -p, -p)$. Um cálculo análogo ao que foi feito acima para a componente T_{0k} mostra que na camada de massa $T_{ii} = 0$, restando como componente não-nula somente a componente $T_{00} = \rho$, que é a equação de estado para poeira.

5 CAMPOS FERMIONICOS NA COSMOLOGIA

Na cosmologia do presente estágio de evolução do universo o mecanismo capaz de produzir um regime de expansão acelerada pode ser identificado como uma componente de energia escura. No modelo padrão Λ CDM, por exemplo, a componente de energia escura é introduzida por uma constante cosmológica, presente nas equações de Einstein. Entre os problemas em aberto no modelo cosmológico padrão está a determinação da natureza da energia escura. Nesse capítulo será apresentado um modelo em que a fonte da expansão acelerada é um campo fermiônico de Dirac. A proposta original foi feita na referência (RIBAS; DEVECCHI; KREMER, 2005). Na primeira seção será feito um resumo da proposta original enquanto que, na segunda seção, será feita uma pequena variação do modelo proposto por Ribas, Devecchi e Kremer. Por meio desse modelo serão escritas expressões simples de parâmetros cosmológicos, o que permitirá, posteriormente, testá-lo observacionalmente.

5.1 O modelo de Ribas-Devecchi-Kremer

No capítulo 4 vimos que o campo de Dirac acoplado com o campo gravitacional comporta-se como matéria não-relativística (poeira). Nessa seção, o tensor energia-momento (4.18) é acrescido graças à introdução, na ação de Dirac (4.3), de um potencial de auto-interação da forma

$$V(\bar{\psi}, \psi) = \lambda [\beta_1 (\bar{\psi}\psi)^2 + \beta_2 (i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2]^n, \quad (5.1)$$

em que λ , β_1 , β_2 e n são constantes positivas. Desse modo, a ação de Dirac modificada é dada por

$$S_D + S_{int} = \int \sqrt{-g} \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi}\Gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi}\Gamma^\mu \psi) - m\bar{\psi}\psi - V(\bar{\psi}, \psi) \right] d^4x, \quad (5.2)$$

em que

$$S_{int} = - \int \sqrt{-g} V(\bar{\psi}, \psi) d^4x. \quad (5.3)$$

Como será visto adiante, o tensor de energia-momento calculado a partir da ação (5.2) conduz a uma pressão negativa para um ajuste adequado do parâmetro n que aparece no potencial (5.1).

O cálculo do tensor energia-momento modificado pelo potencial (5.1) é feito pelo mesmo procedimento descrito no capítulo anterior. A modificação virá da variação da ação de interação

(5.3) em relação à métrica. Tem-se que

$$\begin{aligned}
\delta S_{int} &= - \int d^4x \delta [\sqrt{-g} V(\bar{\psi}, \psi)] \\
&= - \int d^4x \delta [\sqrt{-g}] V(\bar{\psi}, \psi) - \int d^4x \sqrt{-g} \delta [V(\bar{\psi}, \psi)] \\
&= - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [g_{\mu\nu} V(\bar{\psi}, \psi)] \delta g^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{5.4}$$

onde na segunda linha de (5.4) a variação $\delta V(\bar{\psi}, \psi)$ é nula pois não depende da métrica $g_{\mu\nu}$. As outras variações já foram calculadas no capítulo anterior conforme a equação (4.17). O novo tensor energia-momento após a modificação é dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} g_{\mu\nu} \left(\bar{\psi} \gamma^\lambda \nabla_\lambda \psi - \nabla_\lambda \bar{\psi} \gamma^\lambda \psi \right) + \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_\mu \nabla_\nu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi \right) + m g_{\mu\nu} \bar{\psi} \psi + g_{\mu\nu} V(\bar{\psi}, \psi). \tag{5.5}$$

As componentes do tensor energia-momento do campo fermiônico para a métrica FRW são diretamente obtidas de (5.5), do mesmo modo que no capítulo anterior, como segue

$$T^{00} = m \bar{\psi} \psi + V, \tag{5.6}$$

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = V - \frac{dV}{d\psi} \frac{\psi}{2} - \frac{\bar{\psi}}{2} \frac{dV}{d\bar{\psi}}. \tag{5.7}$$

Detalhes dos cálculos podem ser encontrados no Apêndice da referência (RIBAS, 2008).

Deste modo, uma vez que o tensor energia-momento do campo de Dirac em um universo homogêneo e isotrópico é diagonal, tal condição permite identificar as componentes diagonais em termos da densidade e da pressão dos férmions como

$$T_f^{\mu\nu} = (\rho_f, -p_f, -p_f, -p_f). \tag{5.8}$$

Assim, segue que

$$\rho_f = m (\bar{\psi} \psi) + \lambda \left[\beta_1 (\bar{\psi} \psi)^2 + \beta_2 (i \bar{\psi} \gamma^5 \psi)^2 \right]^n, \tag{5.9}$$

$$p_f = (2n - 1) \lambda \left[\beta_1 (\bar{\psi} \psi)^2 + \beta_2 (i \bar{\psi} \gamma^5 \psi)^2 \right]^n. \tag{5.10}$$

Uma vez relacionadas as componentes do tensor energia-momento do campo de Dirac com a densidade e a pressão dos férmions, há três casos a se considerar na (5.10):

- para $n > \frac{1}{2}$, os férmions descrevem um campo de matéria com pressão positiva;

- para $n = \frac{1}{2}$, os férmions descrevem um fluido sem pressão;
- para $n < \frac{1}{2}$, a pressão dos férmions é negativa, comportando-se como energia escura.

Para o propósito desse capítulo, interessa o último caso.

Considerando a situação em que as componentes do fluido cosmológico (matéria e campo fermiônico) são independentes e comportam-se como fluido perfeito, tem-se

$$\dot{\rho}_f + 3H(\rho_f + p_f) = 0 \quad (5.11)$$

e

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (5.12)$$

No que segue, será considerada a matéria não-relativística e adotado $p_m = 0$. Além das expressões da conservação da energia (veja (2.26)) dadas acima, a evolução do modelo cosmológico segue o seguinte conjunto de equações:

- equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho_f + \rho_m + 3p_f) \quad (5.13)$$

- equação de Dirac em termos das componentes dos espinores

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \\ \dot{\psi}_4 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}H \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} + im \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} - 2i \left(\psi_1^\dagger \psi_1 + \psi_2^\dagger \psi_2 - \psi_3^\dagger \psi_3 - \psi_4^\dagger \psi_4 \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} V' \\ - 2i \left(\psi_3^\dagger \psi_1 + \psi_4^\dagger \psi_2 - \psi_1^\dagger \psi_3 - \psi_2^\dagger \psi_4 \right) \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \\ -\psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} V^* = 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

com a representação da matriz de Dirac γ^0 dada por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

e as derivadas do potencial V dadas por

$$V' = \frac{\partial V}{\partial(\bar{\psi}\psi)^2} \quad (5.16)$$

e

$$V^* = \frac{\partial V}{\partial(\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2}. \quad (5.17)$$

Como próximo passo, Ribas, Devecchi e Kremer implementam uma simulação computacional adotando valores específicos dos parâmetros do modelo:

$$\begin{cases} \lambda = 0.1, & \beta_1 = \beta_2 = 1, \\ n = 0.3 & m = 0.01, \quad p_m = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

As condições iniciais para a simulação estão na referência (RIBAS; DEVECCHI; KREMER, 2005). Uma vez que $n < \frac{1}{2}$, a pressão do férmion é negativa e reproduz um regime de expansão acelerada, conforme mostrado na Figura 3 da mesma referência (RIBAS; DEVECCHI; KREMER, 2005) e reproduzida abaixo. A figura 5.1 descreve uma transição de um regime desacelerado para um regime de expansão acelerada do universo. Ou seja, para valores de $t < 20$, por exemplo, tem-se valores de \ddot{a} negativos indicando, desse modo, a predominância da componente de matéria no universo, causando consequentemente o regime desacelerado. Conforme o valor de t aumenta, o campo fermiônico passa a dominar dando origem ao regime de expansão acelerada do universo, desempenhando o papel de energia escura. A transição do regime dominado pela matéria para o cenário dominado pela componente fermiônica está descrito em termos da evolução da densidade na Figura 4 da referência (RIBAS; DEVECCHI; KREMER, 2005), reproduzida na figura 5.2.

Não é objetivo do presente trabalho reproduzir a simulação computacional feita pelos autores da referência (RIBAS; DEVECCHI; KREMER, 2005). O que se deseja é obter uma maneira de determinar os parâmetros do modelo de modo físico, sem fazer escolhas arbitrárias

de parâmetros. De fato, o único vínculo utilizado para obter o regime desacelerado-acelerado, mostrado nas Figuras (5.1) e (5.2) é $n < \frac{1}{2}$.

Figura 5.1 – Campo fermiônico em uma transição de um regime desacelerado ($\ddot{a} < 0$) para um regime de expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$) em função do tempo de acordo com a simulação das equações do modelo. A linha pontilhada representa a evolução considerada nesse trabalho. As linhas cheia e tracejada correspondem à efeitos de não-equilíbrio que não afetam qualitativamente o regime de expansão acelerada, por isso podem ser ignorados. Figura extraída de (RIBAS; DEVECCHI; KREMER, 2005)

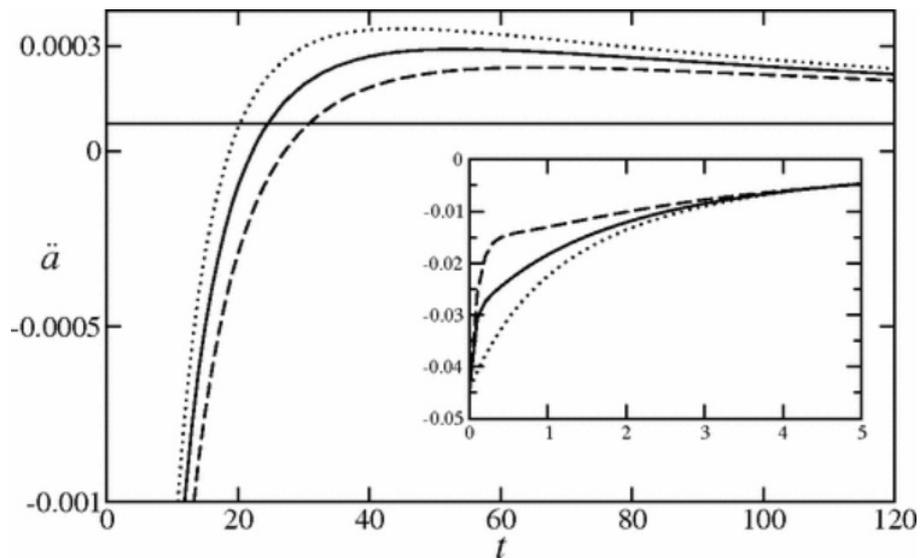
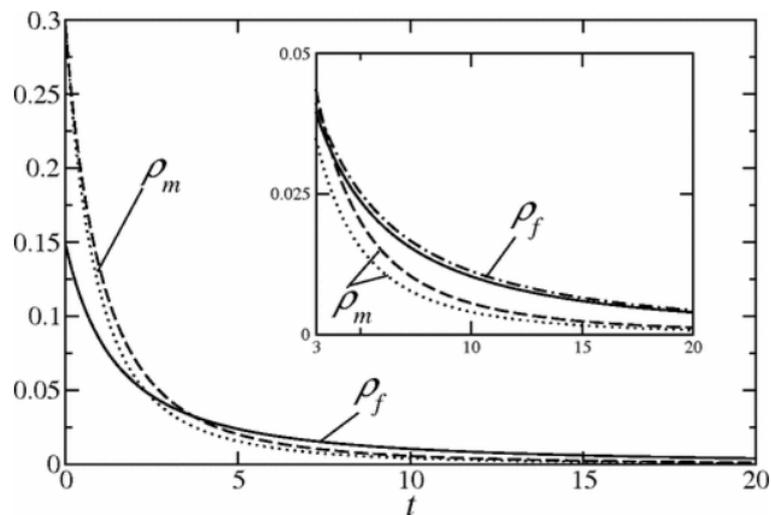


Figura 5.2 – Densidade de energia representada em uma transição do regime dominado pela matéria (ρ_m) para um cenário dominado pelo campo fermiônico (ρ_f) em função do tempo de acordo com a simulação das equações do modelo. A linha pontilhada representa a densidade de energia da matéria. A linha cheia representa a densidade de energia do campo fermiônico na expansão acelerada. A transição do regime dominado pela matéria para o regime dominado pelo campo fermiônico ocorre quando a linha pontilhada fica abaixo da linha cheia. Figura extraída de (RIBAS; DEVECCHI; KREMER, 2005)



5.2 Expressão para o redshift cosmológico e a idade do universo

Nessa seção serão desenvolvidas as expressões do parâmetro de Hubble e da idade do universo em termos do redshift. Escritas dessa forma, essas grandezas podem ser comparadas com dados observacionais.

5.2.1 Parâmetro de Hubble

Conforme visto anteriormente, a equação que descreve a densidade de matéria não-relativística ($\omega = 0$) é dada por

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \quad (5.19)$$

cuja solução é

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0} \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^3. \quad (5.20)$$

Considerando os férmions como uma componente independente, a equação que descreve a densidade do campo fermiônico é

$$\dot{\rho}_f + 3H(\rho_f + p_f) = 0, \quad (5.21)$$

onde a pressão para um férmion sem massa ($m = 0$) e com auto-interação da forma (5.1) é dada pela equação de estado usual

$$p_f = \omega_f \rho_f, \quad (5.22)$$

com $\omega_f = 2n - 1$. Para $n = 0$ tem-se o caso usual do vácuo; para $n < \frac{1}{2}$ tem-se a pressão negativa. Assim, a equação que descreve a densidade do campo fermiônico evoluindo no tempo é

$$\rho_f(t) = \rho_{f,0} \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^{6n}, \quad (5.23)$$

em que $\rho_{f,0}$ corresponde à densidade dos férmions hoje. A densidade pode ser escrita em termos do redshift como

$$\rho_f(t) = \rho_{f,0}(1+z)^{6n}. \quad (5.24)$$

Logo, a densidade total atual (excluindo a radiação) é dada por

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_f(t). \quad (5.25)$$

Por outro lado, a equação que descreve a dinâmica do universo plano ($k = 0$) é

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{\rho(t)}{\rho_c} \right). \quad (5.26)$$

onde a densidade crítica $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$.

Em termos do parâmetro de densidade, a equação (5.26) é dada por

$$H^2(t) = H_0^2 \Omega_T(t) \quad (5.27)$$

$$= H_0^2 \left[\Omega_{m,0} a^{-3}(t) + \Omega_{f,0} a^{-6n}(t) \right], \quad (5.28)$$

onde $\Omega_{f,0}$ e n são os dois parâmetros livres que poderão ser vinculados a partir de dados observacionais. Para isso, usando a expressão do redshift dada em (2.38), tem-se

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{f,0} (1+z)^{6n} \right]. \quad (5.29)$$

Essa expressão permitirá estabelecer o melhor valor de ajuste dos parâmetros $\Omega_{f,0}$ e n por meio da medida do redshift z , do valor da constante de Hubble H_0 e de $H(z)$ obtidos a partir dos dados astronômicos.

5.2.2 Idade do universo

Para calcular a idade do universo em um modelo cosmológico usa-se o chamado *look-back time* que é definido para um tempo t no passado em relação ao tempo t_0 hoje como

$$\delta t = t_0 - t. \quad (5.30)$$

Claramente, da definição segue que $\delta t > 0$. Particularmente, escolhendo o tempo inicial (big-bang) em $t = 0$, o *look-back time* corresponde à idade do universo.

Para escrever o *look-back time* em termos do redshift usa-se

$$\delta t = \int_t^{t_0} dt. \quad (5.31)$$

Utilizando a relação

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)}, \quad (5.32)$$

tem-se que

$$\frac{dz}{dt} = -(1+z)H(z). \quad (5.33)$$

Implementando a mudança de variável

$$dz = -(1+z)H(z) dt \quad (5.34)$$

na expressão (5.31) obtém-se

$$\delta t = - \int_{z(t)}^{z_0} \frac{d\bar{z}}{(1+\bar{z})H(\bar{z})}, \quad (5.35)$$

onde os intervalos de integração foram substituídos pelo redshift cosmológico correspondente em cada tempo.

Como descrito anteriormente, para obter a idade do universo adota-se $z_0 = 0$ em t_0 e para $t = 0$ toma-se o limite $z \rightarrow \infty$. Assim, o *look-back time* é

$$t_0 = \int_0^{\infty} \frac{d\bar{z}}{(1+\bar{z})H(\bar{z})}. \quad (5.36)$$

Utilizando a expressão (5.29), a idade do universo é obtida pelo cálculo da integral

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^{\infty} \frac{d\bar{z}}{(1+\bar{z}) [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{f,0}(1+z)^{6n}]^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.37)$$

De posse dos parâmetros¹ H_0 , $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{f,0}$ e n , que devem ser determinados observacionalmente, a idade do universo pode ser calculada com precisão. De modo geral, uma estimativa para a idade do universo é dada pelo valor de H_0^{-1} , implicando que a integral deve ser da ordem da unidade.

¹ O valor de $H(z)$ também pode ser estimado através das Oscilações Acústicas dos Bárions (BAO - do inglês *Baryon Acoustic Oscillations*). Para mais detalhes ver referência (NETO, 2018).

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho fizemos um estudo de revisão envolvendo a Relatividade Geral e sua aplicação a Cosmologia utilizando o formalismo das tetradas para acoplar férmions ao campo gravitacional. A geometria utilizada foi definida pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

Após encontrar as equações de Einstein via o princípio de Hamilton da ação estacionária obtivemos as equações de Friedmann para o caso padrão em que o fluido cosmológico é definido por um fluido perfeito com a componente de energia escura representada pela constante cosmológica. Um aspecto importante nesse modelo é que a expansão do universo só ocorre na presença da constante cosmológica.

Fizemos um estudo detalhado do formalismo das tetradas, desenvolvendo todas as ferramentas necessárias para transformar grandezas definidas localmente no espaço de Minkowski para sua correspondente no espaço geral de coordenadas. Os coeficientes dessas transformações são as tetradas. Com isso foram definidas em termos das tetradas algumas grandezas relevantes para a descrição covariante das leis físicas, como a derivada covariante, a conexão e o tensor de curvatura.

Uma aplicação importante das tetradas é a incorporação de férmions em uma descrição covariante e, portanto, adequada à relatividade geral. Isso é possível uma vez que, sendo as tetradas definidas em um ponto (localmente), as representações espinoriais são as mesmas do grupo de Lorentz. A conexão com o sistema geral de coordenadas (descrito por um espaço curvo na relatividade geral) é implementado através das transformações de coordenadas definidas pelas tetradas. Para esse caso, a representação da derivada covariante sobre um férmion foi devidamente estendida.

Para analisar o acoplamento do campo gravitacional com o campo de Dirac e seu efeito nas equações de Einstein fizemos um cálculo detalhado do tensor energia-momento. Quando o campo satisfaz a equação de Dirac obtivemos que o tensor energia-momento é diagonal, como espera-se em um espaço homogêneo e isotrópico descrito pela geometria de Friedmann-Robertson-Walker. No caso em que o campo de Dirac depende somente do tempo conforme obtivemos que os férmions minimamente acoplados ao campo gravitacional comportam-se como poeira.

Do modelo cosmológico padrão sabe-se que o universo encontra-se em um regime de expansão acelerada, que pode ser causado por uma componente de energia escura que é de natureza ainda desconhecida. Foi feita uma revisão do modelo proposto por Ribas, Devecchi

e Kremer em que a expansão acelerada é causada por um campo fermiônico de Dirac com um termo de auto-interação na ação. Com isso obtém-se uma pressão negativa para uma escolha adequada do valor do parâmetro n que aparece no potencial de auto-interação, a saber, $n < \frac{1}{2}$.

Seguindo a revisão, foram reproduzidos os resultados da evolução da aceleração e da densidade em função do tempo, indicando que os férmions produzem uma expansão acelerada quando dominam sobre a densidade de matéria. Isso mostra que nesse regime o férmion atua como uma componente de energia escura. Posteriormente, usando as equações do modelo, reescrevemos as equações para o caso em que o férmion possui massa zero, o que leva a uma equação de estado da forma $p_f = (2n - 1)\rho_f$.

Tratando o férmion e a matéria como componentes independentes de um fluido ideal, as expressões da constante de Hubble e da idade do universo foram escritas em termos do redshift cosmológico e dos parâmetros n e $\Omega_{f,0}$ do modelo fermiônico. Como perspectiva de seguimento do presente trabalho, pretende-se ajustar os parâmetros livres a partir de dados observacionais. Essa será uma interessante extensão do trabalho de Ribas, Devecchi e Kremer.

REFERÊNCIAS

- ADE, P. A. R. et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. **Astron. Astrophys.**, v. 571, p. A16, 2014.
- ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. **Astron. Astrophys.**, v. 594, p. A13, 2016.
- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. **arXiv:1807.06209**, 2018.
- BARBOSA, C. M. de S. **Formação de Estruturas em um Universo com componente Viscosa**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Física, Vitória, 2018.
- BURGESS, C. P. The Cosmological Constant Problem: Why it's hard to get Dark Energy from Micro-physics. In: **Proceedings, 100th Les Houches Summer School: Post-Planck Cosmology: Les Houches, France, July 8 - August 2, 2013**. [S.l.]: Oxford University Press, 2015.
- CARMELI, M. **Classical Fields: General Gravity and Gauge Theory**. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1982.
- DEWITT, B. S. Quantum field theory in curved spacetime. **Physics Reports**, Elsevier, v. 19, n. 6, p. 295–357, 1975.
- EINSTEIN, A. The Foundation of the General Theory of Relativity. **Annalen Phys.**, v. 49, n. 7, p. 769–822., 1916.
- EISBERG R.; RESNICK, R. **Física Quântica - Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas**. 1. ed. [S.l.]: Campus, 1979.
- HENRIQUES, A. B. **Teoria da Relatividade Geral: uma introdução**. 1. ed. [S.l.]: Ensino da Ciência e da Tecnologia, 2009.
- HOBSON, M.; EFSTATHIOU, G.; LASENBY, A. **General Relativity: An Introduction for Physicists**. First. New York, EUA: Cambridge University Press, 2006.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proc. Nat. Acad. Sci.**, v. 15, p. 168–173, 1929.
- KAKU, M. **Quantum Field Theory: A Modern Introduction**. New York: Oxford University Press, 1993.
- LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- LIDDLE, A. **An Introduction to Modern Cosmology**. 2nd. ed. [S.l.]: Wiley, 2003.
- LIMA, J. A. S.; SANTOS, R. C. 100 Anos da Cosmologia Relativística (1917-2017). Parte I: Das Origens à Descoberta da Expansão Universal (1929). **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 40, 2018.
- MATHER, J. C. From the Big Bang to the Nobel Prize and beyond. **Rev. Mod. Phys.**, v. 79, p. 1331–1348., 2007.

- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.
- MOREIRA, M. A. O modelo padrão da física de partículas elementares. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 31, p. 1306.1 – 1306.11, 2009.
- NETO, G. P. d. S. Estimando parâmetros cosmológicos a partir de dados observacionais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 40, 2018.
- NOVELLO, M.; NETO, N. P.; BERGLIAFFA, S. E. P. **Programa Mínimo de Cosmologia**. First. CBPF, Rio de Janeiro: Jauá, 2010.
- PADILLA, A. Lectures on the Cosmological Constant Problem. **arXiv:1502.05296**, 2015.
- PARKER, L.; TOMS, D. **Quantum field theory in curved spacetime: quantized fields and gravity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- PEEBLES, P. J. E. Open problems in cosmology. **Nucl. Phys. Proc. Suppl.**, v. 138, p. 5–9, 2005.
- PENZIAS, A. A. The origin of elements. **Nobel Lecture**, 1978.
- PERLMUTTER, S. et al. Measuring the acceleration of the cosmic expansion using supernovae. **Physics-Uspekhi**, v. 56, n. 10, 2013.
- RIBAS, M. de O. **Modelos Cosmológicos Acelerados Com Campos Fermiônicos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Instituto de Ciências Exatas, Curso de Pós-Graduação em Física, Curitiba, 2008.
- RIBAS, M. O.; DEVECCHI, F. P.; KREMER, G. M. Fermions as sources of accelerated regimes in cosmology. **Phys. Rev. D**, v. 72, p. 123502, 2005.
- RIESS, A. G. et al. My path to the accelerating universe. **Physics-Uspekhi**, v. 56, n. 10, 2013.
- RYDEN, B. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016.
- SCHMIDT, B. P. et al. The path to measuring an accelerating universe. **Physics-Uspekhi**, v. 56, n. 10, 2013.
- SHAPIRO, I. L. Covariant derivative of fermions and all that. **arXiv:1611.02263**, 2016.
- SMOOT, G. F. Cosmic microwave background radiation anisotropies: Their discovery and utilization. **Nobel Lecture**, 2007.
- WEINBERG, S. The Cosmological Constant Problem. **Rev. Mod. Phys.**, v. 61, p. 1–23., 1989.
- WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. [S.l.]: Wiley, 2014.
- WILSON, R. W. The cosmic microwave background radiation. **Nobel Lecture**, 1978.
- YEPEZ, J. Einstein's vierbein field theory of curved space. **arXiv:1106.2037**, 2011.