



**MARCELO HENRIQUE DE ALVARENGA**

**ANÁLISE CANÔNICA DA TEORIA GRAVITACIONAL**

**LAVRAS – MG**

**2018**

**MARCELO HENRIQUE DE ALVARENGA**

**ANÁLISE CANÔNICA DA TEORIA GRAVITACIONAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Rodrigo Santos Bufalo

Orientador

**LAVRAS – MG**

**2018**

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos  
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Alvarenga, Marcelo Henrique de.

Análise Canônica da teoria gravitacional / Marcelo Henrique de Alvarenga. – Lavras : UFLA, 2018.

97 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal de Lavras, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Santos Bufalo.

Bibliografia.

1. Relatividade Geral. 2. Teoria Unimodular. 3. Formalismo ADM. I. Bufalo, Rodrigo Santos. . II. Título.

**MARCELO HENRIQUE DE ALVARENGA**

**ANÁLISE CANÔNICA DA TEORIA GRAVITACIONAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 21 de Setembro de 2018.

Prof. Dr. Rodrigo Santos Bufalo UFLA  
Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto UNIFAL  
Profa. Dra. Tatiana Ramos Cardoso UFLA

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'R Bufalo', written in a cursive style.

Prof. Dr. Rodrigo Santos Bufalo  
Orientador

**LAVRAS – MG  
2018**

*Dedico este trabalho à todos jovens cientistas.*

## **AGRADECIMENTOS**

- Gostaria de agradecer primeiramente à Deus por tudo.
- Agradeço à toda minha família pelo apoio e por sempre acreditarem em mim, em especial aos meus pais Maria e José e meus irmãos por todo apoio.
- Gostaria de agradecer ao meu orientador, professor Dr. Rodrigo Bufalo pelos ensinamentos e pela orientação no decorrer deste trabalho, muito obrigado.
- Agradeço também aos colegas da pós-graduação, em especial a Lauziene pelos momentos de discussão sobre Relatividade Geral e os de estudos para as tão “temidas” provas.
- Agradeço a todos que fazem parte do departamento de física, que de uma forma geral contribuíram imensamente para que eu pudesse ter chegado até aqui.
- Aos professores Drs. José Nogales e Karen pelos conselhos e apoio desde à graduação, obrigado por toda a ajuda.
- E por fim, gostaria de agradecer à Universidade Federal de Lavras (UFLA), em específico a PRPG e PRAEC pelo auxílio financeiro através da bolsa institucional.
- Meu muito obrigado à todos!!.

*"A vida é como andar de bicicleta.  
Para manter seu equilíbrio você deve continuar em movimento."  
(A. Einstein)*

## RESUMO

Não há uma descrição quântica consistente para o campo gravitacional. Há uma quantidade significativa de modelos que buscam tal descrição, onde um dos meios pelos quais pode-se quantizar uma teoria, é por meio da quantização canônica ou por integrais funcionais de Feynmann. Neste projeto, busca-se estudar as ferramentas necessárias para descrição clássica do Hamiltoniano da Relatividade Geral (RG) que é fundamental em uma futura quantização canônica. Para descrever o Hamiltoniano da Relatividade Geral é necessário a foliação do espaço-tempo  $M$  utilizando do formalismo ADM (Arnowitt-Deser-Misner). E além disso uma análise sistemática dos termos de fronteira presentes na ação gravitacional é necessária, uma vez que eles representam energia na descrição hamiltoniana e levam a um bom comportamento da variação do Hamiltoniano. Assim como a maioria das teorias clássicas, a RG tem em sua descrição Hamiltoniana a presença de vínculos devido a sua estrutura de simetria: invariância dos difeomorfismos. Exploraremos em detalhes a estrutura canônica da RG. Diante desta construção a sua aplicação em modelos alternativos também foi feita. Aonde aplicamos em uma teoria unimodular que matematicamente consiste em uma imposição sobre o tensor métrico fazendo-o constante. Além disso, as equações de campo da teoria unimodular a constante cosmológica surge como uma constante de integração, sem a necessidade de acoplá-la ao campo gravitacional. Foi mostrado que classicamente a teoria unimodular é consistente com a análise canônica da RG. Num trabalho futuro, o arcabouço adquirido com o estudo da formulação hamiltoniana da RG e a sua aplicação a modelos alternativos proporcionará condições suficientes para mergulhar em algum modelo ou teoria para a gravidade quântica.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral, Formalismo ADM, Hamiltonianos vinculados, gravitação quântica.



## ABSTRACT

There is no consistent quantum description for the gravitational field. There is a significant number of models that seek such a description, where one of the means by which one can quantize a theory is through canonical quantization or functional integrals of Feynmann. In this project, we seek to study the necessary tools for the classical description of the Hamiltonian of General Relativity (GR), which is fundamental in future canonical quantization. In order to describe the Hamiltonian of General Relativity it is necessary to foliation space-time  $M$  using the ADM formalism. And furthermore a systematic analysis of the boundary terms present in the gravitational action is necessary, they represent energy in the Hamiltonian description, lead to a good behavior of the Hamiltonian variation. Like most classical theories, RG has in its Hamiltonian description the presence of constraints due to its structure of symmetry: invariance of diffeomorphisms. We will explore in detail the canonical structure of GR. In view of this construction its application in alternative models was also made. Here we apply in a unimodular theory that mathematically consists of an imposition on the metric tensor making it constant. In addition, in the field equations of the unimodular theory, the cosmological constant appears as a constant of integration, without the need to couple it to the gravitational field. It has been shown that classically the unimodular theory is consistent with the canonical analysis of the GR. In a future work, the know how acquired with the study of GR Hamiltonian formulation and its application to alternative models will provide sufficient conditions to delve into some model or theory for quantum gravity.

**Keywords:** General Relativity, ADM Formalism, Constrained Hamiltonians, Quantum Gravitation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Representação da Foliação do Espaço-Tempo $M$ . . . . .	36
Figura 3.2 – Hipersuperfície sendo arrastada pelo vetor normal de evolução. . . . .	37
Figura 3.3 – Representação do vetor Lapse $N$ e Shift $\vec{N}$ . . . . .	38
Figura 3.4 – A fronteira do Espaço-Tempo. . . . .	43

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela das principais quantidades presentes no projeto. . . . .	10
Tabela 4.1 – Rótulos das Hipersuperfícies. Ver Fig.(3.4), pág.42. . . . .	55

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	11
<b>2</b>	<b>OBJETIVO GERAL</b> . . . . .	15
<b>3</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> . . . . .	16
<b>3.1</b>	<b>Dinâmica Hamiltoniana de um sistema clássico singular.</b> . . . . .	16
<b>3.2</b>	<b>Uma introdução à Relatividade Especial e Geral</b> . . . . .	22
<b>3.3</b>	<b>Estrutura do espaço-tempo na Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral</b> . . . . .	30
<b>3.3.1</b>	<b>Geometria de Hipersuperfícies</b> . . . . .	31
<b>3.3.2</b>	<b>Foliação do espaço-tempo</b> . . . . .	35
<b>3.4</b>	<b>Formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral</b> . . . . .	42
<b>3.4.1</b>	<b>Conteúdo físico dos termos de fronteira</b> . . . . .	44
<b>3.4.2</b>	<b>Variação do termo de Einstein-Hilbert</b> . . . . .	47
<b>3.4.3</b>	<b>Variação do termo dos campos de matéria</b> . . . . .	50
<b>3.4.4</b>	<b>Variação do termo de fronteira</b> . . . . .	51
<b>4</b>	<b>FORMALISMO HAMILTONIANO DA RELATIVIDADE GERAL</b> . . . . .	54
<b>4.1</b>	<b>Ação Gravitacional</b> . . . . .	54
<b>4.2</b>	<b>Abordagem Hamiltoniana</b> . . . . .	56
<b>4.3</b>	<b>Equações de movimento de Hamilton</b> . . . . .	60
<b>4.4</b>	<b>Análise dos vínculos</b> . . . . .	66
<b>4.4.1</b>	<b>Geradores de Simetria</b> . . . . .	69
<b>5</b>	<b>ANALISE CANÔNICA DA TEORIA GRAVITACIONAL UNIMODULAR</b> .	71
<b>5.1</b>	<b>Gravidade Unimodular</b> . . . . .	71
<b>5.2</b>	<b>Hamiltoniano da Gravidade Unimodular.</b> . . . . .	74
<b>5.2.1</b>	<b>Análise canônica dos vínculos</b> . . . . .	77
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	85
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	87
	<b>APENDICE A – Detalhes do cálculo dos Parênteses de Poisson.</b> . . . . .	89
<b>.1</b>	<b>Cálculo de <math>\{H_0[\xi], H_0[\eta]\}</math></b> . . . . .	89
<b>.2</b>	<b>Cálculo de <math>\{H_0[\xi], \Phi[\vec{X}]\}</math></b> . . . . .	93
<b>.3</b>	<b>Cálculo de <math>\{\Phi[\vec{X}], \Phi[\vec{Y}]\}</math></b> . . . . .	95
<b>.4</b>	<b>Cálculo de <math>\{\Phi[\psi^i], C[\chi^j]\}</math></b> . . . . .	96

**Notação:**

Considera-se o espaço-tempo uma variedade 4-dimensional  $(M, g)$  suave e contínua. A assinatura utilizada aqui é  $(-, +, +, +)$ . Define-se as coordenadas na variedade  $M$  como sendo  $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ , ou seja, escolhamos os índices gregos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = \{0, 1, 2, 3\}$ . As hipersuperfícies  $\Sigma_t$  tipo-espaço  $(\Sigma_t, h)$  embutidas no espaço-tempo  $M$  são homeomorfismos, ou seja, um mapeamento um para um, contínuo. As coordenadas locais são descritas através dos índices latinos como  $y^a = (y^1, y^2, y^3)$  onde  $a, b, c, \dots = \{1, 2, 3\}$ . A métrica definida em  $\Sigma_t$  é a métrica induzida  $h_{ab}$ , que a partir dela é possível estabelecer todas as quantidades na hipersuperfície. Define-se também a hipersuperfície  $B_t$  tipo-tempo  $(B_t, \gamma)$  que são consideradas como ortogonais a  $(\Sigma_t, h)$  também suaves e contínuas, as coordenadas definidas nessa hipersuperfície estão rotuladas por:  $z^i = \{z^1, z^2, z^3\}$ . Consideraremos neste trabalho unidades naturais, em que:  $c = G = \hbar = 1$ . A seguir, apresentamos uma tabela com os principais símbolos e suas descrições definidas no projeto.

Tabela 1 – Tabela das principais quantidades presentes no projeto.

SÍMBOLO	DESCRIÇÃO
$A_{,\alpha} = \partial_\alpha A$	derivada parcial 4-dimensional de um campo escalar $A$ .
$\dot{A} = \frac{dA}{dt}$	derivada temporal total de um campo escalar $A$
$A^\alpha_{;\beta} = \nabla_\beta A^\alpha$	derivada covariante das componentes do vetor $A^\alpha$ (compatível com $g_{\alpha\beta}$ )
$A^a_{ b} = D_b A^a$	derivada covariante das componentes do vetor $A^a$ (compatível com $h_{ab}$ )
$g, h, \sigma, \gamma$	determinante dos tensores métricos
$\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}$	símbolos de Christoffel (compatível com $g_{\alpha\beta}$ )
$\Gamma^a_{bc}$	símbolos de Christoffel (compatível com $h_{ab}$ )
$R^\alpha_{\beta\sigma\lambda}, R_{\alpha\beta}, R$	Tensores de curvatura e escalar curvatura (compatível com $g_{\alpha\beta}$ )
$R^a_{bcd}, R_{ab}, {}^{(3)}R$	Tensores de curvatura e escalar curvatura (compatível com $h_{ab}$ )
$\mathcal{L}_{\vec{u}} A^\alpha$	derivada de Lie de $A^\alpha$ ao longo de $u^\alpha$ .

## 1 INTRODUÇÃO

É muito comum encontrarmos em literaturas recentes, no campo de física teórica, uma busca intensa por uma descrição quântica da gravidade. A Relatividade Geral (RG) é uma teoria que descreve classicamente o campo gravitacional através das equações de campo de Einstein (CARMELI, 1982; D'INVERNO, 1998). O fato da teoria ser elegantemente formulada e experimentalmente testada, não a garante como uma teoria completa, pois existem lacunas nas quais devemos questionar e repensar sua descrição. Por exemplo, a cosmologia moderna (descrita a partir da RG) com o grande progresso na sua compreensão teórica e experimental, apresenta dificuldades em descrever três grandes problemas: matéria escura, constante cosmológica e energia escura <sup>1</sup>. Em vista do modelo padrão cosmológico, diversas modificações mínimas da RG têm sido exploradas na tentativa de uma melhor compreensão da origem fundamental de um ou mais dos problemas citados. Por outro lado, uma descrição quântica da gravidade poderá conceder uma nova visão (novos campos) em que os problemas acerca da RG poderiam ser revistos. No entanto, ao que se sabe até hoje é que não há uma consistência na descrição da RG nos regimes da Mecânica Quântica, mais conhecido fenomenologicamente como gravidade quântica.

O cenário na busca de uma descrição quântica do campo gravitacional ocorreu a partir da década de 50, onde já haviam trabalhos bem avançados em termos da teoria quântica de campos para a interação eletromagnética. No entanto, ao aplicar as ideias de quantização para o campo gravitacional deparou-se com problemas de divergência, pois a natureza das equações de campo da RG é não-linear, diferenciando das teorias de campo usualmente conhecidas naquela época (DEWITT, 2009). Um dos caminhos na busca de uma teoria consistente nesse regime é por meio da formulação Hamiltoniana da RG, ou seja, a estrutura canônica da RG <sup>2</sup>. As primeiras ideias nessa direção surgiram na década de 50 com Dirac (DIRAC, 1958), e também com Arnowitt, Deser e Misner, em (ARNOWITT; DESER; MISNER, 2008), o último conhecido como formalismo ADM, o legado e a história do formalismo ADM podem ser vistos também

<sup>1</sup> É importante ressaltar que no contexto de teoria de campos o problema da constante cosmológica é intrinsecamente relacionado com a energia do vácuo, e há uma discrepância do valor teórico previsto de  $10^{120}$  ordens de magnitude em relação ao valor experimental, e há estudos buscando uma solução para este problema sem a necessidade de um ajuste fino. Por outro lado, em um contexto cosmológico, a energia escura é descrita a partir da constante cosmológica no modelo  $\Lambda$ -CDM, descritas pela métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)

<sup>2</sup> Aqui apresenta-se a estrutura canônica, onde se pode realizar uma quantização canônica pelo princípio de correspondência de Heisenberg a partir das ferramentas aqui presentes.

em (DESER, 2015). E mais tarde, com DeWitt, um dos precursores da análise canônica da teoria gravitacional (DEWITT, 1967).

A teoria da RG pode ser expressa em termos de uma ação funcional que descreve as equações de campo para o campo gravitacional

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{-g} R. \quad (1.1)$$

em que  $R$  é o escalar de curvatura de Ricci. Sobre o conteúdo de simetria da RG, podemos dizer que ela é covariante sob transformações gerais de coordenadas do tipo  $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \xi^\alpha(x)$  em que  $\xi^\alpha(x)$  é um campo vetorial. Dentro do grupo de transformações gerais de coordenadas, temos que a RG também é invariante sob a seguinte transformação de reparametrização:

$$x^\mu \rightarrow X^\mu(x^\mu)$$

e também invariante por difeomorfismos:

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu.$$

Uma consequência imediata da invariância por reparametrização é a presença de vínculos de primeira-classe em sua descrição Hamiltoniana (OKSANEN, 2013). A descrição completa de sistemas Hamiltoniano vinculados foi proposto também por Dirac em (DIRAC, 1958). Segundo a abordagem de Dirac para sistemas vinculados, é possível determinar o número preciso de graus de liberdade físicos de uma teoria a partir da correta análise de seus vínculos canônicos. Primeiramente, após determinar o conjunto completo de vínculos, passa-se para o nível de classificá-los como vínculos de primeira-classe, ou vínculos de segunda-classe. Os últimos são identificados como variáveis redundantes, enquanto os de primeira-classe como os geradores de simetria para uma dada teoria.

Recentemente, devido ao avanço tecnológico, diversos experimentos cosmológicos têm permitido escrutinar a estrutura da RG, permitindo assim a proposta de diversos modelos gravitacionais fenomenológicos. Todavia, além de descrever um determinado fenômeno, modelos alternativos devem ser matematicamente consistentes, e possuir um bom comportamento quanto às suas características fundamentais, por exemplo, seus graus de liberdade físicos, e a maneira mais precisa para se estabelecer essa análise de consistência é a partir do formalismo

Hamiltoniano. Todavia, para a descrição hamiltoniana da teoria gravitacional a covariância da RG necessariamente precisa ser quebrada, uma vez que um parâmetro de evolução temporal precisa ser incorporado. Mas como a teoria gravitacional descreve o próprio espaço-tempo, será necessário introduzir o conceito de foliação de hiper-superfícies, e assim compreender o espaço-tempo como uma evolução temporal de uma coleção de hiper-superfícies com estrutura causal.

Uma proposta interessante e não muito recente de um modelo alternativo à RG é analisado neste trabalho, sendo mais específico abordaremos a análise canônica da Gravidade Unimodular (GU). A proposta em GU é de uma descrição clássica semelhante à RG em que é imposto ao determinante do tensor métrico ser igual a uma constante:  $\sqrt{-g} = \epsilon_0$ . A condição de unimodularidade fixa parcialmente o sistema de coordenadas. Embora a estrutura da teoria unimodular seja bastante similar à da RG, existem sutilezas que permitem estabelecer a descrição de certos fenômenos não descritos pela RG: através da análise das equações de movimento é possível concluir que a constante cosmológica é interpretada como uma constante de integração, e não mais como um acoplamento como na RG. Essa nova visão permite explorar diversas consequências teóricas e experimentais da teoria unimodular frente a RG.

A constante cosmológica foi adicionada por Albert Einstein nas suas equações da RG originais para a implementação de um universo estático. No entanto, com as descobertas do *redshift*, em que observou-se que as galáxias estão se afastando e as ideias do universo em expansão, A. Einstein abandona as ideias da constante cosmológica (PAIS, 1995). Por outro lado, com o surgimento da teoria quântica de campos a ideia de energia do ponto zero ou energia do vácuo surge como uma explicação de que não existe espaço vazio. De acordo com as equações de Einstein com constante cosmológica e sua solução para o vácuo é possível estabelecer uma relação entre a energia do vácuo e a constante cosmológica, e a sua comparação está a uma ordem de grandeza muito grande de diferença, cerca de 120 ordens entre os dados experimentais e a densidade do vácuo. Este é um problema fundamental da física até hoje (WEINBERG, 1989; PADILLA, 2015).

Dentre as motivações em compreender melhor a GU, embora ela não resolva o problema da constante cosmológica, como apontado por (PADILLA; SALTAS, 2015), podemos citar o fato de que as duas teorias, RG e GU, possuem comportamento quântico completamente distintos (ALVAREZ et al., 2015), em que correções quânticas não corrigem o valor da constante cosmológica, i.e. não há necessidade de renormalização para a constante cosmológica. Assim,



a GU descreve os mesmos fenômenos físicos que RG. A ação mais simples que descreve GU é

$$S_{GU} = \int_M d^4x \left( \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} R + \lambda (\sqrt{-g} - \varepsilon_0) \right), \quad (1.2)$$

onde  $\varepsilon_0$  é uma densidade escalar e a condição de unimodularidade está presente na ação como um vínculo em que  $\lambda$  faz o papel de um multiplicador de lagrange. Ela é invariante a um subconjunto de difeomorfismo, que satisfaz a condição  $\nabla_\mu \xi^\mu = 0$ , nomeado como difeomorfismo transversal (TDiff). Embora não abordaremos a análise quântica da teoria unimodular existe uma equivalência nesse regime com a RG (PADILLA; SALTAS, 2015). Isto implica que a teoria unimodular descrita pela ação (1.2) também não é consistente quanticamente. No entanto, a equivalência poderá ser quebrada ao descrever a teoria unimodular a partir de acoplamento entre campos livres, não interagentes, como nas refs. (PADILLA; SALTAS, 2015; BUFALO; OKSANEN; TUREANU, 2015). Essas versões tornam-se invariantes por difeomorfismos e são classicamente equivalentes à GU.

Nos capítulos a seguir serão introduzidos os detalhes necessários para a compreensão do formalismo Hamiltoniano da RG e que serão fundamentais na análise canônica em GU. Uma introdução a sistemas clássicos com vínculos e sua devida análise dos vínculos encontra-se na próxima seção. A decomposição do espaço-tempo a partir do formalismo 3 + 1, conforme seção 3.3 e as equações de campo de Einstein por meio do formalismo métrico Lagrangiano, com detalhes envolvendo termos de fronteira, seção 3.4. Já no capítulo 4 encontra-se a descrição do Hamiltoniano da RG que irá herdar os termos de fronteira descritos na formulação Lagrangiana e sua análise canônica segundo as ideias de Dirac é feita. Diante das ferramentas apresentadas nos capítulos anteriores, aplicamos à teoria unimodular no capítulo 5 e a análise canônica também é feita. E por fim tratamos de esclarecer quais são as conclusões e as perspectivas envolvidas no estudo da formulação Hamiltoniana da RG e sua aplicação.

## **2 OBJETIVO GERAL**

Compreensão da formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral levando em conta em sua descrição termos de fronteira e em sequência aplicá-lo a uma modificação realizada na teoria gravitacional: Gravidade Unimodular.

### 3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo iremos abordar a estrutura matemática necessária para a construção do Hamiltoniano da RG. Primeiramente iremos descrever um sistema Hamiltoniano vinculado geral, abordando as principais propriedades existentes na descrição de um sistema físico. Em sequência definimos como deve ser a estrutura do espaço-tempo para formular a RG na forma Hamiltoniana e por fim, deduziremos as equações de campo de Einstein através do formalismo Lagrangiano.

#### 3.1 Dinâmica Hamiltoniana de um sistema clássico singular.

Nesta seção faz-se uma abordagem geral da dinâmica Hamiltoniana. As variáveis canônicas independentes  $q_i$  (coordenadas generalizadas) e o momento  $p^i$  são assumidas como gerais (significa que podemos tomá-las como variáveis canônicas que descrevem partículas ou campos) (NIVALDO, 2007; DIRAC, 1964).

Seja  $L(q_i; \dot{q}_j)$  a função Lagrangiana presente na ação, dada por:

$$S = \int dt L(q_i; \dot{q}_j). \quad (3.1)$$

O formalismo Hamiltoniano consiste em escrever toda a informação contida no sistema (3.1) em termos das variáveis canônicas  $(q_i, p^i)$ . Para isso, fazemos uso da transformação de Legendre a fim de fazer uma mudança de variáveis  $(q_i; \dot{q}_j) \rightarrow (q_i; p_j)$  e escrever

$$H(q_i; p^i) = \dot{q}_i p^i - L(q_i; \dot{q}_i) \quad (3.2)$$

em que  $p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  e  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$  são as definições do momento canônico e a velocidade generalizada, respectivamente. Assim, temos uma nova função escrita em termos de  $(q_i, p^i)$  somente.

As equações de movimento de Hamilton são obtidas quando substituimos a expressão (3.2) em termos da lagrangiana na ação, dada pela Eq. (3.1). Usando o princípio de mínima ação ( $\delta S = 0$ ), ou seja, tomando as variações de  $S(q, \dot{q}) = \int dt (\dot{q}_i p^i - H(q_i; p^i))$  e considerando que  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ , encontra-se as equações de movimento de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Agora seja  $F(q, p, t)$  e  $G(q, p, t)$  variáveis dinâmicas arbitrárias, é possível calcular a sua evolução temporal como

$$\dot{F} = \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p^k} \frac{\partial p^k}{\partial t} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

usando agora as equações de Hamilton, temos

$$\dot{F} = \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p^k} - \frac{\partial F}{\partial p^k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

onde  $\dot{F} = \frac{dF}{dt}$ . Define-se como parênteses de Poisson a relação entre duas variáveis dinâmicas quaisquer em termos das variáveis canônicas, como segue:

$$\{F, G\} \equiv \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p^k} - \frac{\partial F}{\partial p^k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right) \quad (3.3)$$

Logo, escreve-se  $\dot{F}$  como

$$\dot{F} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (3.4)$$

A partir da expressão (3.3), os parênteses de Poisson básicos entre as variáveis canônicas  $(q_i, p^i)$  podem ser facilmente encontrados, sendo eles

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p^i, p^j\} = 0, \quad \{q_j, p^i\} = \delta_j^i, \quad (3.5)$$

onde  $\delta_j^i$  é a função delta de Kroenecker. Ademais, é ainda possível reescrever as equações de Hamilton em termos dos parênteses de Poisson

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = \{p^i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.6)$$

Diz-se que a função lagrangiana  $L(q_i; \dot{q}_j)$  é singular quando não podemos expressar unicamente as velocidades canônicas  $\dot{q}_i$  em termos dos momentos  $p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  (HANSON; REGGE; TEILTELBOIM, 1976). Um outro teste equivalente desta condição é quando o determinante da

matriz Hessiana é nulo

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) = 0. \quad (3.7)$$

A matriz Hessiana basicamente nos diz se há uma relação entre as velocidades e momentos, seja essa relação de inversão possível quando ela é não nula, enquanto que no caso em que a matriz é nula a relação não é estabelecida, neste caso dizemos tratar-se de uma teoria singular. Esta condição necessária nos leva à presença de vínculos primários na dinâmica do sistema, que foi estudado primeiramente por Dirac em 1964 (DIRAC, 1964). Um dos exemplos de sistema com vínculos é a descrição Hamiltoniana da gravitação que será abordada mais adiante. Vínculos primários são definidos a partir de

$$\phi_m(q, p) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \approx 0, \quad m = 1, \dots, K, \quad (3.8)$$

o símbolo  $\approx$  foi introduzido por Dirac e significa “fracamente”, indica que os vínculos  $\phi_m$  não são identicamente nulos sobre todo o espaço de fase, podendo ter parênteses de Poisson não nulos com variáveis do espaço de fase.

A Hamiltoniana  $H = H(q_i, p^i)$  ainda assim continua válida, no entanto na presença de vínculos primários devemos ter uma Hamiltoniana modificada, que irá incorporar estes vínculos por meio de multiplicadores de Lagrange, chamada de Hamiltoniana primária

$$\hat{H} = H + \sum_{m=1}^K \lambda_m \phi_m \quad (3.9)$$

onde  $H$  é a Hamiltoniana dada em (3.2) e  $\lambda_m$  são multiplicadores de Lagrange. Não é possível variar  $p^i$  e  $q_i$  independentemente, portanto as equações de movimento na presença de vínculos primários são agora dados por

$$\dot{q}_i = \{q_i, \hat{H}\} = \frac{\partial H}{\partial p^i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = \{p^i, \hat{H}\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \quad (3.10)$$

Essas equações são consistentes com as variações  $\delta q_i$ ,  $\delta p^i$  que preservam os vínculos  $\phi_m \approx 0$ . No entanto, o sistema só será completamente consistente se a derivada temporal de todos os vínculos primários forem zero. Trata-se isso como condição de consistência (DIRAC, 1964), ou seja, devemos garantir que os vínculos sejam preservados na evolução temporal do

sistema. Então para um vínculo  $\phi_n$  devemos ter

$$\dot{\phi}_n = \{\phi_n, \hat{H}\} \approx \{\phi_n, H\} + \sum_{m=1}^K \lambda_m \{\phi_n, \phi_m\} \approx 0 \quad (3.11)$$

Se de alguma forma a condição de consistência (3.11) não for satisfeita, é necessário incorporar vínculos secundários na dinâmica do sistema. Por outro lado, uma vez que a condição de consistência acima é satisfeita e a matriz  $\{\phi_n, \phi_m\}$  não seja singular, ou seja,  $\det\{\phi_n, \phi_m\} \neq 0$  é possível determinar univocamente os multiplicadores de Lagrange (NIVALDO, 2007). Se essa condição é válida, a matriz  $\{\phi_n, \phi_m\}$  tem uma inversa  $C_{ln}$  que satisfaz

$$\sum_n C_{ln} \{\phi_n, \phi_m\} = \sum_n \{\phi_n, \phi_m\} C_{ln} = \delta_{lm}.$$

Assim o multiplicador de Lagrange pode ser obtido a partir da condição de consistência

$$\lambda_l \approx - \sum_n C_{ln} \{\phi_n, H\}.$$

Desta forma, podemos reescrever a evolução temporal de qualquer função canônica  $F(q, p)$  como

$$\dot{F} \approx \{F, H\} - \sum_{l,n} \{F, \phi_l\} C_{ln} \{\phi_n, H\}. \quad (3.12)$$

Agora definimos os parênteses generalizados de Dirac como sendo

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \sum_{m,n} \{F, \phi_m\} C_{mn} \{\phi_n, G\}, \quad (3.13)$$

Esta nova quantidade possui as mesmas propriedades algébricas dos parênteses de Poisson. Portanto, a evolução temporal de qualquer função  $F(q, p)$  fica

$$\dot{F} = \{F, H\}_D \quad (3.14)$$

Veja que foi introduzido o sinal de igualdade forte em (3.14). Isto decorre do fato de que, qualquer função  $F(q, p)$  no espaço de fase tem parênteses de Dirac nulos com os vínculos, ou

seja

$$\{F, \phi_m\}_D = \{F, \phi_m\} - \sum_{l,n} \{F, \phi_l\} C_{ln} \{\phi_n, \phi_m\} = \{F, \phi_m\} - \{F, \phi_m\} = 0,$$

Ao trabalharmos com os parênteses de Dirac, estamos de fato num espaço de fase reduzido, sendo que as variáveis canônicas espúrias<sup>1</sup> presentes nos vínculos são eliminadas.

Se de alguma forma a condição de consistência imposta aos vínculos primários não for satisfeita, são incorporados à dinâmica do sistema os vínculos secundários. Esses vínculos devem também satisfazer condições de consistência semelhantes à eq. (3.11) que também deve ser preservada no tempo. Essa condição de consistência se alonga até que todos vínculos a satisfazem, inclusive, se necessário vínculos adicionais são acrescentados (OKSANEN, 2013). Por fim, o conjunto completo de vínculos, primários e secundários é obtido por

$$\phi_m(q, p) \approx 0, \quad m = 1, \dots, M \geq K. \quad (3.15)$$

O Hamiltoniano para esse conjunto completo de vínculos é nomeado como Hamiltoniano estendido e é definido como

$$H_e = H + \sum_{m=1}^M \lambda_m \phi_m,$$

onde  $H$  é dado por (3.2).

Uma vez que estabelecemos o conjunto completo de vínculos podemos classificá-los. Eles são classificados em duas categorias, os de primeira classe e os de segunda classe, respectivamente. Os vínculos de primeira classe são aqueles que possuem parênteses de Poisson nulos com quaisquer outro vínculo. No entanto, aqueles cujo parênteses de Poisson não se anula entre vínculos, são ditos vínculos de segunda classe. Assim como foi feito anteriormente a partir da condição de consistência, podemos resolver os multiplicadores de Lagrange para os vínculos de segunda classe, considerando os vínculos de primeira classe como arbitrários (OKSANEN, 2013).

De fato, o processo de introdução dos parênteses de Dirac, expressão (3.13), consiste basicamente no fato de que os vínculos de segunda classe são eliminados da dinâmica, i.e.

<sup>1</sup> Sempre que tratamos de teorias com vínculos há em sua descrição graus de liberdade a mais (no sistema) do que aqueles que realmente têm significado físico. A esses graus de liberdades a mais que nos referimos como variáveis espúrias.

podemos torná-los fortemente nulos, introduzindo assim um novo conjunto de parênteses e ocasionando na existência somente de vínculos de primeira classe no sistema. Então, seja  $\phi_b \approx 0$ , em que  $b = 1, \dots, B$  um conjunto de vínculos de segunda classe. Pelo parênteses de Dirac garantimos que qualquer variável canônica satisfaz:  $\{F, \phi_b\}_D = 0 \rightarrow \phi_b = 0$ . Já os vínculos de primeira classe têm uma álgebra fechada sob os parênteses de Dirac, ou seja não geram novos vínculos (OKSANEN, 2013). Portanto, nosso sistema terá somente vínculos de primeira classe, onde o Hamiltoniano estendido para o conjunto completo se restringe agora a

$$H_e = H + \sum_{a=1}^A \lambda_a \Phi_a, \quad (3.16)$$

onde  $\Phi_a$  são vínculos de primeira classe e  $\lambda_a$  são seus respectivos multiplicadores de Lagrange arbitrários. Fazemos um resumo referente ao processo de construção e características dos vínculos de um sistema. Começamos logo na descrição da função Hamiltoniano identificando os primeiros vínculos do sistema, esses são os **vínculos primários** que sempre surgem a partir da definição do momento canônico <sup>2</sup>. Em seguida, uma vez que foi imposto que os vínculos primários devem satisfazer a condição de consistência (evolução temporal) e se ela for violada, em decorrência desse resultado é necessário introduzir os **vínculos secundários**. Repetimos o processo de condição de consistência a esses novos vínculos, se por um acaso ela não for satisfeita novos **vínculos terciários** serão gerados <sup>3</sup>, e esse processo de condição de consistência é aplicado até que todos os vínculos do sistema são obtidos. Uma vez que o conjunto de vínculos tenha sido determinado, o próximo passo é classificá-los segundo a conjectura de Dirac, entre vínculos de primeira e segunda classe. Por exemplo, se um vínculo tiver parêntese de Poisson nulo com todos os outros vínculos, seja ele **primário**, **secundário** ou **terciário**, etc, ele é dito ser de **primeira classe** (e é interpretado como sendo o gerador do grupo de simetria em questão). Por outro lado, se um deles tiver um único parênteses de Poisson com algum dos outros vínculos diferente de nulo, a este par nós classificamos como vínculos de **segunda classe**.

Estamos interessados em compreender como é a evolução temporal das variáveis canônicas  $(q, p)$  definidas no espaço de fase. A obtenção das variáveis canônicas definem o estado do sistema, o simples fato da evolução temporal possuir funções arbitrárias  $\lambda_a$ , implica que existe um instante de tempo posterior tal que o conjunto de valores de  $q_i$  e  $p^i$  corresponde ao mesmo estado físico. Esta é uma característica exclusiva de uma teoria que é invariante por

<sup>2</sup> Como veremos na RG, os **vínculos primários**  $p_N, p_a$ .

<sup>3</sup> Embora este fato não ocorra neste trabalho.



transformação de *gauge*<sup>4</sup>, que muitas das vezes é descrita por um número de variáveis maior do que os graus de liberdade físicos, a superfície do espaço de fase com as variáveis físicas nesse caso é chamada de órbita de *gauge* (OKSANEN, 2013). Assim, os vínculos de primeira classe atuam como geradores de transformação de *gauge*.

Por outro lado, se escolhermos um multiplicador  $\lambda_a$  específico a dinâmica do sistema torna-se unívoca. Para isso, introduzimos condições de *gauge* (ou condições subsidiárias), que serão de mesmo número que os vínculos de primeira classe. Essas condições subsidiárias são escolhidas de tal forma a também serem vínculos de primeira classe, e também transformarem os vínculos de primeira classe originais em segunda classe, permitindo assim eliminá-los através da introdução de parênteses de Dirac. Portanto, introduzimos

$$\chi_a \approx 0, \quad a = 1, \dots, A,$$

onde os  $\chi_a$  devem satisfazer as condições de consistência que irá fixar o restante de multiplicadores de Lagrange  $\lambda_a$ . As condições de *gauge* eliminam completamente todos os graus de liberdade espúrios (i.e. aqueles que não são físicos) do sistema (OKSANEN, 2013).

De acordo com Dirac, a fórmula para obter os graus de liberdade físicos de qualquer teoria com vínculos é dada por

$$\text{n}^\circ \text{ de graus físicos de liberdade} = \frac{2N - 2A - B}{2}, \quad (3.17)$$

onde  $2N$  corresponde ao número de variáveis canônicas,  $A$  ao número de vínculos de primeira classe e  $B$  ao número de vínculos de segunda classe (OKSANEN, 2013).

A seguir aborda-se as ferramentas matemáticas necessárias para o estudo da formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral (RG).

### 3.2 Uma introdução à Relatividade Especial e Geral

Nesta seção faremos um resumo das principais ideias envolvidas na elaboração das teorias da Relatividade (Especial e Geral).

Em 1905 a publicação da Teoria da Relatividade Especial desencadeava um grande avanço na concepção de espaço e tempo na ausência de campo gravitacional. A concepção

<sup>4</sup> É uma transformação de simetria local, por exemplo, realizar uma transformação local de coordenadas, ou seja uma transformação no ponto.

de espaço e tempo não é a mesma para todos os observadores (sistemas de referência <sup>5</sup>) que viajam à velocidades próximas a da luz  $c$ , eles são de fato relativos. Essas quantidades passam então a serem tratadas como uma única entidade chamada espaço-tempo 4-dimensional contínuo de Minkowski, no sentido em que um sistema de coordenadas definido em um ponto  $P$  do espaço-tempo dado por  $x^\alpha = x^\alpha(P) = (t, x, y, z)$  <sup>6</sup> descreve a posição e o tempo de um determinado evento neste ponto, que se pode estender e determiná-los ponto a ponto. Toda a teoria foi elaborada por Albert Einstein, que se baseia em dois postulados: (i) as leis da física são as mesmas para todos os sistemas de referência inerciais <sup>7</sup> e (ii) a velocidade da luz é uma constante para qualquer sistema de referência inercial. Pode-se dizer que a teoria da relatividade especial foi fundamentada em diversos resultados anteriores, como as transformações de Lorentz <sup>8</sup> e a noção de espaço-tempo de Minkowski, oriundos da descrição covariante da teoria eletromagnética (equações de Maxwell).

Mais tarde, em 1915, A. Einstein propôs a teoria da Relatividade Geral como uma forma de generalizar as ideias desenvolvidas por ele na teoria especial levando em conta os efeitos do campo gravitacional. Era muito comum Einstein construir “experimentos mentais” na busca da compreensão de determinados fenômenos físicos. E na generalização dos postulados da relatividade especial levando em conta o campo gravitacional não foi diferente. O “experimento mental” de Einstein foi o seguinte: “...uma pessoa que cai sob influência do campo gravitacional, não consegue sentir seu próprio peso...”(PAIS, 1995). O significado dessa frase culminou no chamado princípio da equivalência, em que localmente existe uma equivalência entre sistemas de referência acelerados e a presença de um campo gravitacional. Para Einstein, qualquer observador deveria ser capaz de construir e aplicar as leis físicas em quaisquer sistemas de referência, seja ele inercial ou não, a isso denomina-se princípio da covariância geral em que as leis físicas fundamentais devem ser invariantes sob transformações gerais de coordenadas. A RG é uma teoria invariante por difeomorfismo <sup>9</sup>. As transformações matemáticas realizadas em um sistema e que localmente deixam o mesmo inalterado são ditas transformações de

<sup>5</sup> Sistema de referência pode ser estabelecido em boa aproximação como um sistema de coordenadas responsável por realizar medidas de grandezas físicas, como por exemplo: posição, velocidade, aceleração, e etc.

<sup>6</sup> Onde estamos utilizando unidades naturais:  $c = G = 1$ .

<sup>7</sup> Na relatividade especial, se traduz no movimento uniforme (MU) entre dois sistemas referência.

<sup>8</sup> São transformações de coordenadas entre dois sistemas que se movem com velocidade constante dada por:  $x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$ , onde  $\Lambda^\alpha_\beta$  são as componentes da matriz de Lorentz que representam os *boosts* e as rotações.

<sup>9</sup> É uma determinada transformação do tipo  $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \xi^\alpha(x)$  em que deixa o tensor métrico invariante.

*gauge* (CHUNG, 2008). Para isso, a estrutura matemática que irá descrever toda a dinâmica do campo gravitacional é o cálculo tensorial, no qual as equações são independentes do sistema de coordenadas.

Não iremos abordar toda a construção matemática da análise tensorial<sup>10</sup>, no entanto vamos analisar como é a lei de transformação entre dois sistemas de coordenadas definidos por:  $x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{\beta})$ , em que  $x'^{\alpha}$  representa o sistema de coordenadas em um referencial  $K'$  e  $x^{\beta}$  representa o sistema de coordenadas em um referencial  $K$ . Realizando a diferenciação em  $x'^{\alpha}$  em um ponto  $P$  a transformação é dada por

$$dx'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta}, \quad (3.18)$$

onde  $\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$  representa a matriz de transformação num ponto  $P$ , o jacobiano é o determinante da matriz de transformação devendo ser diferente de zero se existe uma transformação inversa, usamos também a convenção de Einstein, em que índices repetidos expressam a existência de uma soma (CARMELI, 1982; D'INVERNO, 1998; MISNER; THORNE; WHEELER, 1973). A quantidade que usamos para fazer medidas de distâncias infinitesimais no espaço-tempo é chamada de métrica<sup>11</sup> e é dada por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \quad (3.19)$$

onde  $g_{\alpha\beta}$  é um tensor<sup>12</sup> chamado de tensor métrico que na RG tem componentes que dependem das coordenadas ( $g_{\alpha\beta}(x^{\mu})$ ), mas localmente esse tensor torna-se o tensor de Minkowski

<sup>10</sup> Para mais detalhes o leitor pode consultar as seguintes referências: (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973; CARMELI, 1982; D'INVERNO, 1998)

<sup>11</sup> A métrica geral do espaço-tempo pode ser classificada em três tipos:

$$\begin{aligned} ds^2 > 0 &\rightarrow \text{tipo-tempo} \\ ds^2 = 0 &\rightarrow \text{tipo-luz} \\ ds^2 < 0 &\rightarrow \text{tipo-espaço.} \end{aligned}$$

Sendo propostas a partir do conceito de causalidade existente no espaço-tempo definidas pelo cone de luz, em que a velocidade da luz no vácuo  $c$  é o limite velocidade de propagação. Todos os eventos que ocorrem ou que ocorrerá acontecem dentro e na borda do cone de luz.

<sup>12</sup> Os tensores são uma generalização dos vetores. Existem dois tipos de tensores, os covariantes e os contravariante, identificados a partir de seu comportamento sob transformações de Lorentz. As regras de transformações de coordenadas para os tensores segue a mesma linha, veja

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}, \quad g'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g^{\mu\nu}.$$

$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  com componentes constantes. A expressão (3.19) é um invariante sob transformações de coordenadas, ou seja, para qualquer referencial,  $ds^2$  tem o mesmo valor. Seja  $ds^2$  a distância medida por um observador em um sistema de referencial  $K$  com coordenadas  $x^\alpha = x^\alpha(x')$ , temos

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= g'_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu = ds'^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde usamos a transformação inversa da expressão (3.18). É importante que neste espaço-tempo seja possível comparar objetos (pontos, vetores, tensores, etc) usando as leis de transformação. Para isso, vamos definir alguns conceitos de derivada.

- Conexão afim e derivada covariante

Seja um campo vetorial  $U^\alpha(x)$  definido em um ponto  $P$  com coordenadas  $x^\mu$ <sup>13</sup>. Este mesmo campo vetorial é avaliado num segundo ponto  $Q$  (deslocado infinitesimalmente  $\delta x$  do ponto  $P$ ) com coordenadas  $x^\mu + \delta x^\mu$ , logo o campo vetorial fica

$$U^\alpha(x + \delta x) = U^\alpha(x) + \delta x^\beta \partial_\beta U^\alpha, \quad (3.21)$$

se definirmos a variação  $\delta U^\alpha(x) \equiv \delta x^\beta \partial_\beta U^\alpha$ , é fácil ver que a quantidade  $\delta U^\alpha(x)$  não se transforma como um tensor uma vez que ela foi construída a partir da comparação de duas quantidades (vetores) em pontos diferentes, isto é:

$$\delta U^\alpha(x) = U^\alpha(x + \delta x) - U^\alpha(x),$$

neste caso, a variação contempla tanto a variação da forma como do ponto onde o vetor é calculado. Vamos agora definir um vetor no ponto  $Q$  que seja paralelo ao vetor  $U^\alpha(x)$  no ponto  $P$  e realizar a diferenciação dele. Dizemos neste caso que o vetor será transportado paralelamente  $P$  até o ponto  $Q$  (D'INVERNO, 1998). Por outro lado, assumimos que  $x^\mu + \delta x^\mu$  está infinite-

---

Um tensor de ordem 1, ou seja com apenas um índice é um vetor  $V^\alpha$ . Já um tensor de ordem zero é um escalar e eles são invariantes sob transformações de coordenadas (CARMELI, 1982; D'INVERNO, 1998).

<sup>13</sup> Um campo vetorial associa a cada ponto  $P$  do espaço-tempo um vetor de mesma valência.

similmente próximo de  $x^\mu$ , e assim o vetor transportado paralelamente apresenta diferença por uma quantidade  $\delta\bar{U}^\alpha$ . Realizando a diferença entre os vetores, temos que a quantidade

$$U^\alpha(x + \delta x) - \bar{U}^\alpha(x + \delta x) = U^\alpha(x) + \delta U^\alpha - [U^\alpha(x) + \delta\bar{U}^\alpha] = \delta U^\alpha - \delta\bar{U}^\alpha$$

é de fato um vetor, pois a diferença foi avaliada no mesmo ponto  $Q$ , podemos dizer nesse caso que somente a forma do vetor foi alterada, e não o ponto onde ele é calculado. Ao exigirmos que a variação  $\delta\bar{U}^\alpha$  seja nula sempre que  $\delta x^\mu$  seja nula nos permite impor que  $\delta\bar{U}^\alpha$  seja escrito como

$$\delta\bar{U}^\alpha = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta x^\mu U^\nu,$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  é conhecido como conexão afim e o sinal é uma convenção (D'INVERNO, 1998). Agora estamos prontos para definir o conceito de derivada covariante no espaço-tempo. A definição da derivada covariante segue a partir do processo usual do cálculo diferencial. Seja então  $U^\alpha(x)$  um campo vetorial

$$\nabla_\mu U^\alpha(x) \equiv \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{U^\alpha(x + \delta x) - \bar{U}^\alpha(x + \delta x)}{\delta x^\mu} \quad (3.22)$$

$$= \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{U^\alpha(x + \delta x) - U^\alpha(x)}{\delta x^\mu} - \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{\delta\bar{U}^\alpha}{\delta x^\mu} \quad (3.23)$$

$$= \partial_\mu U^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\nu, \quad (3.24)$$

onde usamos a definição usual de derivada e a expressão para  $\delta\bar{U}^\alpha$ , sendo  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  os símbolos de Christoffel <sup>14</sup> definidos no espaço-tempo

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\alpha\beta,\nu}),$$

A expressão (3.22) consiste na definição de derivada covariante que pode ser facilmente estendida à vetores covariantes e também para tensores de ordem superior de forma análoga. Uma condição importante no espaço-tempo está contida na derivada covariante do tensor métrico

<sup>14</sup> Os símbolos de Christoffel é a conexão escrita em termos do tensor métrico. Esta quantidade aparece ao definirmos a derivada de um tensor que não se transforma de acordo com a lei de transformação para um tensor.

$g^{\alpha\beta}$ , que é

$$\nabla_{\mu} g^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.25)$$

essa condição também é chamada de condição de metricidade, e é intrinsecamente relacionada com a forma dos símbolos de Christoffel. A seguir, vamos introduzir o conceito de derivada de Lie, que também tem como característica a comparação de objetos ao longo de uma congruência

- Derivada de Lie

A definição da derivada de Lie segue a partir da comparação de tensores entre dois pontos. Por exemplo, seja  $P$  um ponto com coordenadas  $x^{\alpha}$  e um outro ponto  $Q$  com coordenadas  $x'^{\alpha}$ , após realizarmos uma transformação infinitesimal do tipo

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \varepsilon \xi^{\alpha}(x),$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro infinitesimal e  $\xi^{\alpha}(x)$  é um campo vetorial. O campo vetorial  $\xi^{\alpha}(x)$  é definido como sendo o responsável por “arrastar” o ponto  $P$  ao longo de uma congruência  $\gamma$  até o ponto  $Q$  onde iremos compará-los, o resultado dessa comparação é o que chamamos de derivada de Lie (CARMELI, 1982; D’INVERNO, 1998). Seja  $T_{\alpha\beta}$  as componentes de um campo tensorial de rank  $(2,0)$ <sup>16</sup> no ponto  $P$  realizando uma transformação no ponto  $T^{\alpha\beta}(x) \rightarrow T'^{\alpha\beta}(x')$ , ou seja, essa transformação irá “arrastar” o tensor  $T^{\alpha\beta}$  ao longo de  $\gamma$  de  $P$  para  $Q$ . Sob essa condição, as componentes deste tensor se transformam como usualmente

$$T'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} T^{\mu\nu}(x). \quad (3.26)$$

É possível ainda determinar a diferenciação entre elas

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\alpha} + \varepsilon \partial_{\mu} \xi^{\alpha},$$

<sup>15</sup> Uma congruência é uma curva parametrizada definida por cada ponto  $p$  da variedade  $M$  no qual passe uma e apenas uma curva parametrizada  $x^{\alpha} = x^{\alpha}(u)$ .

<sup>16</sup> Usamos a notação  $(k,l)$  para expressar o rank de um tensor, ou seja, consiste na maneira simplificada de dizer que o número de componentes contravariantes de um campo tensorial é  $k$ , enquanto que o número de componentes covariantes é  $l$ .

onde usamos que  $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\alpha$ . Substituindo este resultado na expressão (3.26) e desprezando termos de ordem  $\varepsilon^2$ , encontra-se

$$T'^{\alpha\beta}(x') = T^{\alpha\beta}(x) + \left[ \partial_\mu \xi^\alpha T^{\mu\nu} + \partial_\nu \xi^\beta T^{\alpha\nu} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (3.27)$$

Por outro lado, podemos realizar uma expansão em série de Taylor nas componentes do tensor  $T^{\alpha\beta}$  calculada no ponto  $Q$ :

$$T^{\alpha\beta}(x') = T^{\alpha\beta}(x + \varepsilon \xi(x)) = T^{\alpha\beta}(x) + \varepsilon \xi^\mu \partial_\mu T^{\alpha\beta}, \quad (3.28)$$

desprezando novamente ordens maiores que  $\varepsilon$ . A definição matemática da derivada de Lie é semelhante ao conceito da derivada ordinária em que se compara duas quantidades (tensores) no mesmo ponto sob o limite do parâmetro  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ou seja

$$\mathcal{L}_\xi T^{\alpha\beta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T^{\alpha\beta}(x') - T'^{\alpha\beta}(x')}{\varepsilon} = \xi^\mu \partial_\mu T^{\alpha\beta} - T^{\mu\beta} \partial_\mu \xi^\alpha - T^{\alpha\mu} \partial_\mu \xi^\beta. \quad (3.29)$$

Podemos usar a definição (3.22) e reescrever as derivadas parciais como derivadas covariantes em (3.29). Logo, a derivada de Lie de um tensor de rank  $(2,0)$  ao longo da direção de um vetor arbitrário  $\xi^\alpha$  é

$$\mathcal{L}_\xi T^{\alpha\beta} = \xi^\mu \nabla_\mu T^{\alpha\beta} - T^{\mu\alpha} \nabla_\mu \xi^\beta - T^{\mu\beta} \nabla_\mu \xi^\alpha. \quad (3.30)$$

A derivada de Lie de um tensor covariante é obtida de modo análogo,

$$\mathcal{L}_\xi T_{\alpha\beta} = \xi^\mu \nabla_\mu T_{\alpha\beta} + T_{\mu\alpha} \nabla_\beta \xi^\mu + T_{\beta\mu} \nabla_\alpha \xi^\mu. \quad (3.31)$$

Quando analisamos uma transformação infinitesimal do tipo  $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha(x)$ , vemos que a transformação do tensor métrico deve ser da forma

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \xi^\mu \nabla_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} \nabla_\beta \xi^\mu + g_{\beta\mu} \nabla_\alpha \xi^\mu \quad (3.32)$$

$$= \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha, \quad (3.33)$$

em que a condição de metricidade (3.25) foi utilizada. Para que o tensor métrico seja invariante sob esse tipo de transformação a derivada de Lie deve ser nula  $\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = 0$  (CARMELI,

1982). A esta invariância denominamos de difeomorfismo, e a condição para que uma teoria gravitacional seja invariante por difeomorfismo é que

$$\delta g_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha}. \quad (3.34)$$

A descrição das equações que regem o campo gravitacional podem ser obtidas a partir de um formalismo clássico, através do princípio de Hamilton. Mencionamos anteriormente que a RG é uma teoria de *gauge* e todas as teorias deste tipo podem ser escrita em termos de um Lagrangiano em que as transformações de *gauge* deixam o Lagrangiano da teoria invariante (CHUNG, 2008; ROVELLI, 2014).

Assim, as equações de campo que descrevem a dinâmica do campo gravitacional podem ser escritas a partir da ação dada por

$$S_{EH} = \int_M d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.35)$$

onde a densidade Lagrangiana é dada pelo escalar de Ricci  $R$  que é um invariante, ou seja, uma quantidade escalar que é invariante sob transformações gerais de coordenadas ( $x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu}$ ), o elemento de volume 4-dimensional também deve ser um invariante sob essas transformações, garantindo assim a invariância da ação de Einstein-Hilbert.

Para isso, devemos chamar atenção para as densidades tensoriais. Define-se uma densidade tensorial de peso  $w$  sob uma transformação de coordenadas a seguinte quantidade:

$$T'^{\alpha\dots\mu}_{\beta\dots\nu} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^w \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \dots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\beta}} \dots \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}} T^{\sigma\dots\lambda}_{\gamma\dots\delta}, \quad (3.36)$$

onde  $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^w$  representa o jacobiano elevado a uma potência constante  $w$ . Sob transformações de coordenadas o determinante do tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  se transforma como  $g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g$ , o fato da métrica ter assinatura negativa implica que o determinante  $g$  pode assumir valores negativos, assim fazemos que  $\sqrt{-g'} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \sqrt{-g}$ , onde dizemos que a raiz do determinante é uma densidade escalar de peso +1 (D'INVERNO, 1998). Essas densidades são importantes pois permitem construir os elementos infinitesimais de volume nas integrais como invariantes sob transformações de coordenadas. Sob transformação de coordenadas um elemento de volume 4-dimensional se transforma como  $d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x$ , que claramente tem peso -1 (CARMELI, 1982; D'INVERNO, 1998). Relembrando que precisamos obter uma expressão que seja invariante



riante por transformações de coordenadas, é fácil identificar a seguinte quantidade

$$\sqrt{-g'} d^4x' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \sqrt{-g} d^4x = \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.37)$$

como um invariante sob transformações gerais de coordenadas. Assim, a ação Einstein-Hilbert é um invariante sob transformações de coordenadas.

Uma vez que a ação é invariante sob esse tipo de transformação, é possível descrever a RG a partir do formalismo Hamiltoniano que como consequência deve também ser invariante sob transformações de coordenadas. Como veremos posteriormente só é possível realizar tal descrição ao quebrarmos a covariância espaço-temporal, uma vez que precisamos o conceito de tempo no formalismo Hamiltoniano.

### 3.3 Estrutura do espaço-tempo na Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral

A RG é então uma teoria que descreve o campo gravitacional através da geometria do espaço-tempo<sup>17</sup>, conceito que está fortemente relacionado com as componentes do tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ . A RG na forma como é construída, é definida a partir de uma variedade 4-dimensional  $M$ <sup>18</sup> que caracteriza o próprio espaço-tempo com coordenadas  $x^\alpha = (ct, x, y, z)$  (onde espaço e tempo se unem em um único conceito), tal espaço-tempo está equipado de um elemento de linha  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ , que podemos pensar como a distância 4-dimensional entre dois eventos que ocorrem no espaço-tempo, sendo suas componentes determinadas a partir das soluções das equações de Einstein, que discutiremos mais adiante.

Para se realizar a construção da formulação hamiltoniana da RG, é necessário o conceito de foliação do espaço-tempo, quebrando a covariância mas permitindo definir uma evolução temporal. Para isso, nas seções a seguir encontra-se uma revisão de alguns detalhes que permitem analisar espaço e tempo de forma separada através de hipersuperfícies embutidas em  $M$ , sem a perda dos graus de liberdade originais da teoria, também conhecido como formalismo

<sup>17</sup> A geometria do espaço-tempo está relacionada à curvatura do espaço-tempo causada por uma fonte massiva.

<sup>18</sup> Variedade está relacionado ao conceito de superfícies, se tratando de RG a variedade é todo o espaço-tempo onde vivemos.

ADM (GOURGOULHON, 2012; POISSON, 2002; OKSANEN, 2013). De fato, a foliação é a evolução dessas hipersuperfícies no tempo.<sup>19</sup>

### 3.3.1 Geometria de Hipersuperfícies

Uma hipersuperfície  $\Sigma_t$  é definida no espaço-tempo como sendo a imagem de uma variedade 3-dimensional  $\hat{\Sigma}$  a partir de uma aplicação:  $\Phi: \hat{\Sigma} \rightarrow M$ . Localmente, uma hipersuperfície é definida pelo conjunto de pontos para os quais um campo escalar  $(t)$  em  $M$  é constante.

O efeito dessa aplicação fará com que o tensor métrico  $g$  induza uma métrica 3-dimensional  $h$  definida na hipersuperfície  $\Sigma_t$ , dada por

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \varepsilon n_\alpha n_\beta, \quad (3.38)$$

ou ainda, sua inversa

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \varepsilon n^\alpha n^\beta, \quad (3.39)$$

onde  $\varepsilon = n_\alpha n^\alpha = \pm 1$ , cuja valor dependerá do tipo de hipersuperfície considerada: tipo-tempo ( $\varepsilon = +1$ ) ou tipo-espaço ( $\varepsilon = -1$ ). Os vetores  $n^\alpha$  são unitários<sup>20</sup> e normais à hipersuperfície  $\Sigma_t$ , sua construção é feita normalizando o gradiente do campo escalar  $\nabla t$  que está definido normal à hipersuperfície  $\Sigma_t$ . Explicitamente temos

$$\vec{n} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pm \vec{\nabla}t \cdot \vec{\nabla}t}} \vec{\nabla}t, \quad (3.40)$$

onde  $\vec{\nabla}t$  é a forma dual<sup>21</sup> do gradiente do campo escalar  $\nabla t$ . A expressão (3.38) é também chamada de primeira forma fundamental de  $\Sigma_t$ .

Assim como no espaço-tempo, também define-se curvaturas na hipersuperfície, que são agora de dois tipos: curvatura intrínseca e curvatura extrínseca. A curvatura intrínseca está

<sup>19</sup> Assumimos pelo momento que o leitor possua uma certa familiaridade com a formulação Lagrangiana da RG e as equações de Einstein. Embora, apresentaremos na seção (3.4) uma discussão da formulação Lagrangiana da RG.

<sup>20</sup> Vetores unitários são aqueles que possuem norma igual a 1 de acordo com a geometria euclidiana usual, com assinatura  $(+, +, +, +)$ . No entanto, ao tratar espaço-tempo como uma única entidade, ou seja, tratando-se de uma geometria não-euclidiana com assinatura  $(-, +, +, +)$  a norma dos vetores unitários podem ser  $\pm 1$ .

<sup>21</sup> Geralmente a forma dual está relacionada com as componentes da matriz inversa, por exemplo, a forma dual das componentes do tensor  $g_{\alpha\beta}$  são as componentes contravariantes  $g^{\alpha\beta}$

relacionada ao tensor de Riemann<sup>22</sup> associado com a não comutatividade da derivada covariante definida em  $\Sigma_t$ . Denota-se por  $(D_\alpha)$  a componente da derivada covariante em  $\Sigma_t$ , que satisfaz

$$D_a h^{ab} = h^{ab}{}_{|a} = 0, \quad (3.41)$$

conhecida como condição de metricidade. Portanto, se  $\vec{v}$  é um vetor pertencente ao espaço tangente  $\mathcal{S}(\Sigma_t)$ , temos:

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{S}(\Sigma_t), \quad (D_a D_b - D_b D_a) v^c = R^c{}_{dab} v^d, \quad (3.42)$$

onde  $R^c{}_{dab}$  é o tensor de Riemann definido na hipersuperfície  $\Sigma_t$  e a expressão (3.42) é a identidade de Ricci 3-dimensional. A partir dessa definição e levando em conta a semelhança entre  $(g, M)$  e  $(h, \Sigma_t)$ , as componentes do tensor de Ricci e o escalar de Ricci (ou também conhecida como curvatura Gaussiana de  $(h, \Sigma_t)$ ) é escrita como

$$R_{ab} = R^c{}_{acb}, \quad (3.43)$$

$$R = h^{ab} R_{ab}. \quad (3.44)$$

A curvatura intrínseca flexiona a hipersuperfície  $\Sigma_t$  em  $M$ . E como consequência disso, à medida que movemos o vetor unitário  $n_\alpha$  normal à hipersuperfície alteramos a sua direção, isto está relacionado à curvatura extrínseca. Matematicamente o tensor de curvatura extrínseca é definido como

$$\mathbf{K} : \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{S}_p(\Sigma_t) \otimes \mathcal{S}(\Sigma_t), \quad \mathbf{K}(\vec{u}, \vec{v}) = -\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{n}, \quad (3.45)$$

onde  $\mathbf{K}(\vec{u}, \vec{v})$  é o tensor curvatura extrínseca e  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores arbitrários definidos no espaço tangente da hipersuperfície (GOURGOULHON, 2012). A expressão (3.45) é também chamada de segunda forma fundamental de  $\Sigma_t$ .

A partir de agora assume-se que a hipersuperfície  $\Sigma_t$  seja tipo-espaço ( $\epsilon = n_\alpha n^\alpha = -1$ )<sup>23</sup>. Um operador projeção é definido como sendo o responsável em projetar quantidades (vetoriais e/ou tensoriais) ortogonalmente e paralelamente com relação à hipersuperfície  $\Sigma_t$ . As compo-

<sup>22</sup> Tensor de Riemann é a medida da curvatura do espaço-tempo.

<sup>23</sup> Este tratamento é usado pois, sendo a hipersuperfície tipo-espaço permite que os vetores normais a  $\Sigma_t$  sejam tipo-tempo mantendo a causalidade no espaço-tempo.

nentes do projetor são

$$h_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + n^{\alpha}n_{\beta}, \quad (3.46)$$

onde  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  é o delta de Kronecker. É por meio da aplicação desse projetor que iremos relacionar as quantidades definidas no espaço-tempo  $M$  com aquelas definidas na hipersuperfície  $\Sigma_t$ , como por exemplo as derivadas covariantes, métrica induzida e curvatura extrínseca.

Seja um campo tensorial  $T$  de rank  $(k, l)$ , o projetor estabelece a relação entre a derivada covariante  $D$  compatível com  $(h, \Sigma_t)$  com a derivada covariante  $\nabla$  compatível com  $(g, M)$  deste campo tensorial  $T$ , dada explicitamente por

$$D_{\rho} T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = h_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots h_{\mu_k}^{\alpha_k} h_{\beta_1}^{\nu_1} \dots h_{\beta_l}^{\nu_l} h_{\rho}^{\sigma} \nabla_{\sigma} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}, \quad (3.47)$$

onde o lado direito é considerado a extensão de  $T$  no espaço-tempo.

Da mesma forma, a projeção da curvatura extrínseca  $K$ , eq. (3.45), em  $M$  é dada por meio da ação do projetor  $h_{\beta}^{\alpha}$ , ou seja

$$K_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{\sigma} \nabla_{\sigma} n_{\beta} \quad (3.48)$$

$$= (\delta_{\alpha}^{\sigma} + n^{\sigma}n_{\alpha}) \nabla_{\sigma} n_{\beta}. \quad (3.49)$$

Se um observador que viaja pela sua linha de mundo,  $X = X(\tau)$ , interceptando a hipersuperfície tipo-espaço em um ponto  $P$  os vetores normais são tipo-tempo e atuam como a 4-velocidade deste observador, assim as componentes  $n^{\alpha}$  podem ser interpretados como a 4-velocidade. Por outro lado, interpreta-se como a 4-aceleração  $\vec{a}$  de um observador, um vetor ortogonal ao vetor unitário  $\vec{n}$  que é escrito como

$$\vec{a} = \nabla_{\vec{n}} \vec{n}, \quad (3.50)$$

$$a^{\alpha} = n^{\beta} \nabla_{\beta} n^{\alpha}, \quad (3.51)$$

onde  $\nabla_{\vec{n}}$  significa que estamos tomando o gradiente ao longo do vetor  $\vec{n}$ , sendo que expressamos tal relação em componentes na eq. (3.51). A partir dessas considerações e retomando a

expressão (3.49), as componentes da curvatura extrínseca são escritas como

$$K_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}n_{\beta} + n_{\alpha}a_{\beta} \quad (3.52)$$

cujo traço nos dá

$$K = \nabla_{\alpha}n^{\alpha}. \quad (3.53)$$

Em seguida, calcularemos algumas decomposições no tensor curvatura de Riemann definidos em  $M$  relativos a hipersuperfície  $\Sigma_t$ . Como ficará claro adiante, essas projeções serão importantes para a descrição Hamiltoniana da RG, ou seja na construção do formalismo 3 + 1<sup>24</sup>. Para isto, tem-se as seguintes relações:

- Relação de Gauss

Considera-se a relação existente entre as derivadas covariantes (3.47) e assim obtemos

$$[D_{\alpha}, D_{\beta}] v^{\gamma} = \left( K_{\alpha\mu}K_{\beta}^{\gamma} - K_{\beta\mu}K_{\alpha}^{\gamma} \right) v^{\mu} + h_{\alpha}^{\mu}h_{\beta}^{\nu}h_{\rho}^{\gamma}h_{\lambda}^{\sigma} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] v^{\lambda}.$$

Agora, utilizando a versão 4-dimensional da definição do tensor de Riemann (3.42), temos

$$h_{\alpha}^{\mu}h_{\beta}^{\nu}h_{\rho}^{\gamma}h_{\delta}^{\sigma}R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = R^{\gamma}_{\delta\alpha\beta} + K_{\alpha}^{\gamma}K_{\delta\beta} - K_{\beta}^{\gamma}K_{\alpha\delta}. \quad (3.54)$$

usando contração nos índices  $\gamma$  e  $\alpha$ , i.e, atuando com o operador  $h^{\alpha}_{\gamma}$  tem-se a relação de Gauss contraída

$$h_{\alpha}^{\mu}h_{\beta}^{\nu}R_{\mu\nu} + h_{\alpha\beta}n^{\nu}h_{\beta}^{\rho}n^{\sigma}R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu}K_{\beta}^{\mu}, \quad (3.55)$$

onde  $K = h^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}$  é o traço da curvatura extrínseca. Tomando o traço da expressão (3.55) com relação a  $h^{\alpha\beta}$  obtém-se uma expressão para o escalar de Ricci 4-dimensional decomposta em quantidades definidas em  $\Sigma_t$

$$R + 2R_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta} \stackrel{(3)}{=} R + K^2 - K_{ab}K^{ab}. \quad (3.56)$$

<sup>24</sup>Essa sigla significa que iremos separar o espaço-tempo 4-dimensional em 3 coordenadas espaciais e 1 temporal sem a perda dos graus de liberdade.

Observe que o lado direito de (3.56) contém apenas quantidade tangentes a  $\Sigma_t$ .

- Relação de Codazzi

Para obter a relação de Codazzi analisa-se como é a atuação da identidade de Ricci 4-dimensional no vetor normal  $\vec{n}$  (GOURGOULHON, 2012). Temos explicitamente que

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] n^\gamma = R^\gamma_{\mu\alpha\beta} n^\mu \quad (3.57)$$

ao projetarmos essa expressão completamente em relação a  $\Sigma_t$ , encontramos a identidade,

$$h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho R^\rho_{\sigma\mu\nu} n^\sigma = D_\beta K^\gamma_\alpha - D_\alpha K^\gamma_\beta. \quad (3.58)$$

Observe que até o presente momento, trabalhamos com quantidades relacionadas a uma única hipersuperfície  $\Sigma_t$  tipo-espaço. Para cobrir toda a variedade 4-dimensional (o espaço-tempo) será necessário analisar como é a evolução de uma família de hipersuperfícies que cobrirá toda a variedade  $M$ , também chamada de foliação do espaço-tempo.

### 3.3.2 Foliação do espaço-tempo

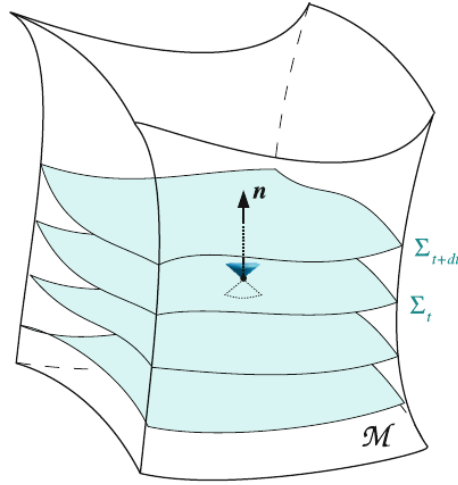
Consideremos um espaço-tempo globalmente hiperbólico  $M$ <sup>25</sup>, a foliação do espaço-tempo  $M$  segue desta propriedade a partir de um conjunto de hipersuperfícies tipo-espaço  $\Sigma_t$  (com  $t \in \mathbb{R}$ ) que cobre  $M$ , ou seja:  $M = \cup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$ . Cada hipersuperfície contínua  $\Sigma_t$  definida anteriormente, é uma superfície de Cauchy chamada de fatia da foliação, veja figura 3.1.

Matematicamente, define-se uma foliação como sendo um campo escalar  $t' \in M$  que seja contínuo e que seu gradiente nunca se anule, a fim que satisfaça:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Sigma_t \equiv \{p \in M, t'(p) = t\}. \quad (3.59)$$

As quantidades definidas aqui estarão adaptadas à foliação e sua aplicação na formulação Hamiltoniana da RG será direta. Rotula-se em cada hipersuperfície  $\Sigma_t$  um sistema de coordenadas  $y^a = (y^1, y^2, y^3)$ , e assim  $x^\alpha = (t, x^1, x^2, x^3)$  constitui um sistema de coordenadas em  $M$ .

<sup>25</sup> Significa que existe uma superfície de Cauchy que permite que cada curva casual, tipo-tempo ou tipo-nulo, intercepte uma hipersuperfície  $\Sigma_t$  em  $M$  uma e apenas uma vez (GOURGOULHON, 2012).

Figura 3.1 – Representação da Foliação do Espaço-Tempo  $\mathcal{M}$ .

Fonte: *3+1 Formalism in General Relativity-Bases of Numerical Relativity* (GOURGOULHON, 2012)

- Vetor normal unitário

Redefine-se o vetor normal unitário (3.40) para a foliação como

$$\vec{n} = -N\vec{\nabla}t, \quad (3.60)$$

onde  $N \equiv \left(-\vec{\nabla}t \cdot \vec{\nabla}t\right)^{-\frac{1}{2}}$  é conhecido como função lapso e sua escolha é tal que mantenha  $\vec{n}$  como um vetor unitário ( $\vec{n} \cdot \vec{n} = -1$ ). Usando a dualidade da métrica, a forma dual de  $\vec{n}$  é denotada por  $n$  e terá a mesma forma:  $n = -N\nabla t$ , ou explicitamente em termos de componentes  $n_\alpha = -N\nabla_\alpha t$ . Agora, com essas escolhas, a expressão (3.50) para a aceleração  $\vec{a}$  pode ser escrita em termos de componentes na forma para a foliação como:  $a_\alpha = D_\alpha \ln N$ , ou  $a^\alpha = D^\alpha \ln N$ .

- Vetor normal de evolução

Seja  $\vec{m}$  um vetor normal a  $\Sigma_t$ , dado por

$$\vec{m} \equiv N\vec{n}, \quad (3.61)$$

onde  $N$  é a função lapso e  $\vec{n}$  é o vetor normal unitário. O campo vetorial  $\vec{m}$  satisfaz a relação:  $m^\alpha \nabla_\alpha t = 1$ . É fácil verificar esta relação. Partindo da expressão (3.61) tem-se:

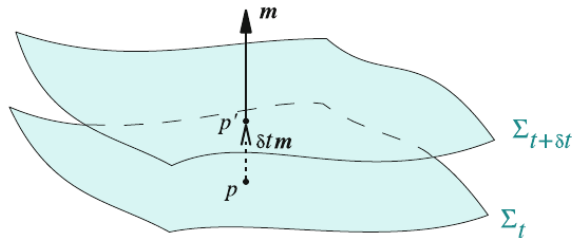
$$\begin{aligned} m^\alpha &= Nn^\alpha \\ &= -N^2 (g^{\mu\alpha} \nabla_\mu t); \end{aligned} \quad (3.62)$$

assim,

$$\begin{aligned} m^\alpha \nabla_\alpha t &= -N^2 (\vec{\nabla} t \cdot \vec{\nabla} t) \\ m^\alpha \nabla_\alpha t &= 1 \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde usou-se a definição de vetor unitário normal e da função lapso. A expressão (3.63) nos diz que o campo vetorial  $\vec{m}$  é adaptado ao campo escalar  $t$ . Geometricamente, ao analisar dois instantes quaisquer da foliação ( $t$  e  $t + \delta t$ ), a hipersuperfície  $\Sigma_{t+\delta t}$  é obtida a partir da hipersuperfície  $\Sigma_t$  realizando um pequeno deslocamento  $\delta t \vec{m}$  em cada ponto definido em  $\Sigma_t$ , veja figura 3.2. Portanto, o papel do vetor  $\delta t \vec{m}$  é o de arrastar a hipersuperfície  $\Sigma_t$  até a hipersuperfície  $\Sigma_{t+\delta t}$ , justificando assim o nome de vetor normal de evolução  $\vec{m}$ . Esta operação é equivalente a dizer que as hipersuperfícies são “*Lie dragged*” pelo vetor  $\vec{m}$ . Uma das consequências do fato que o vetor  $\vec{m}$  ser o responsável por realizar um “*Lie drag*” (arrastar as hipersuperfícies  $\Sigma_t$ ) é que, para quaisquer campo tensorial  $T$  pertencente ao espaço tangente  $\mathcal{S}(\Sigma_t)$  a derivada de Lie na direção do vetor normal  $\vec{m}$  de  $T$  também pertence a esse espaço tangente (GOURGOULHON, 2012).

Figura 3.2 – Hipersuperfície sendo arrastada pelo vetor normal de evolução.



Fonte: *3+1 Formalism in General Relativity-Bases of Numerical Relativity* (GOURGOULHON, 2012)

O gradiente de  $\vec{m}$  pode ser escrito da seguinte maneira. Partindo da expressão (3.61), temos:

$$\nabla_\beta m^\alpha = NK_\beta^\alpha - ND^\alpha \ln N n_\beta + n^\alpha \nabla_\beta N, \quad (3.64)$$

onde usou-se a expressão para o gradiente do vetor normal unitário dado por (3.52) escrito em termos da curvatura extrínseca.

- Vetor *Shift*

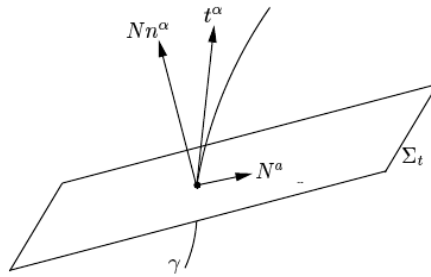


Agora para uma dada congruência  $\gamma$  que intercepta a hipersuperfície  $\Sigma_t$  em algum ponto  $y(p)$ , define-se um campo vetorial  $t^\alpha \in M$  tangente a  $\gamma$  que se assemelha ao vetor normal de evolução  $\vec{m}$  através da propriedade:  $t^\alpha \nabla_\alpha t = 1$ . No entanto, as congruências nem sempre interceptam ortogonalmente as hipersuperfícies, levando assim o campo vetorial  $t^\alpha$  diferir do vetor normal de evolução. A essa diferença chamamos de vetor *shift*  $N^\alpha$ , definido por:

$$N^\alpha = t^\alpha - N n^\alpha. \quad (3.65)$$

É importante notar que ele é definido na hipersuperfície  $\Sigma_t$ . Pode-se também pensar na equação (3.65) como sendo a projeção do campo vetorial  $t^\alpha$  em componentes, normal à hipersuperfície e tangente a ela, veja figura (3.3). Assim a função lapso e o vetor *shift* podem ser escritos a partir de (3.65), como:  $N = -n_\alpha t^\alpha$  e  $N^\alpha = h^\alpha_\beta t^\beta$ .

Figura 3.3 – Representação do vetor Lapso  $N$  e *Shift*  $\vec{N}$ .



Fonte: *An advanced course in general relativity* (POISSON, 2002)

- Elemento de linha

Discutimos agora como a função lapso  $N$ , o vetor *shift*  $N^a$  e a métrica induzida  $h_{\alpha\beta}$  juntos descrevem a foliação do espaço-tempo. Uma vez conhecidas as quantidades que descrevem a foliação, pode-se agora escrever o elemento de linha invariante ( $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ ) em termos dessas quantidades

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ab} (N^a dt + dy^a) (N^b dt + dy^b). \quad (3.66)$$

Assim, a decomposição 3 + 1 do tensor métrico na forma matricial fica

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{b0} \\ g_{0a} & g_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N^2 + N_c N^c & N_b \\ N_a & h_{ab} \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

onde  $N_b = h_{ab}N^a$ , ou seja, usa-se a métrica induzida  $h_{ab}$  para descer ou levantar índices de quantidades definidas em  $\Sigma_t$ , assim os índices latinos ( $a, b, \dots = 1, 2, 3$ ) são referidos à hipersuperfície  $\Sigma_t$ . A forma dual do tensor métrico, ou seja, as componentes contravariantes  $g^{\alpha\beta}$  podem ser obtidas a partir da relação  $g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$ , usando as componentes covariantes dadas por (3.67). Portanto, podemos escrever

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{b0} \\ g^{0a} & g^{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^b}{N^2} \\ \frac{N^a}{N^2} & h^{ab} - \frac{N^aN^b}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Nota-se a partir de (3.68) que  $g^{ab} \neq h^{ab}$  ao contrário de  $g_{ab} = h_{ab}$ . Denota-se por  $g$  e  $h$  o determinante de  $g_{\alpha\beta}$  e  $h_{\alpha\beta}$ , respectivamente. Por se tratarem de densidades escalares, há uma relação entre  $g$  e  $h$ . Usando o método de cofator, temos que a componente  $g^{00}$  é escrita como

$$g^{00} = \frac{C_{00}}{\det g_{\alpha\beta}},$$

onde  $C_{00}$  é o elemento  $(0, 0)$  do cofator associado à matriz  $(g_{\alpha\beta})$ . O cofator é dado por

$$C_{00} = (-1)^0 M_{00} = M_{00},$$

onde  $M_{00}$  tem a mesma ordem de  $C_{\alpha\beta}$  e será a matriz  $3 \times 3$  igual à métrica induzida  $h_{\alpha\beta}$ , obtida ao eliminarmos a primeira linha e primeira coluna de  $g_{\alpha\beta}$ . Desta forma, encontramos

$$C_{00} = M_{00} = \det h_{\alpha\beta}.$$

Logo,

$$g^{00} = \frac{h}{g} \rightarrow \sqrt{-g} = N\sqrt{h}, \quad (3.69)$$

onde usamos a componente  $g^{00}$  dado pela expressão (3.68). Assim, ao realizar uma integração no espaço-tempo invariante por transformações gerais de coordenadas, a mesma poderá ser decomposta como segue

$$\int_M \sqrt{-g} d^4x = \int dt \int_{\Sigma_t} N\sqrt{h} d^3y, \quad (3.70)$$

A seguir, dando continuidade na definição de quantidades necessárias na foliação, reescreve-se a curvatura extrínseca em termos das variáveis  $(N, N^a, h_{ab})$ .

- Curvatura Extrínseca

As componentes do tensor curvatura extrínseca são escritos em termos do gradiente do vetor normal unitário e da aceleração  $\vec{a}$ , eq. (3.52). Essas componentes podem também ser escritas em termos da derivada de Lie da métrica induzida  $h_{\alpha\beta}$  na direção do vetor unitário  $\vec{n}$ , como segue

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\vec{n}} h_{\alpha\beta}). \quad (3.71)$$

Para comprovar que a expressão (3.71) é de fato verdadeira, vamos fazer uso definição da derivada de Lie de um tensor. Se adaptamos o resultado (3.31) de acordo com a Eq. (3.71) devemos ter

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (n^\gamma \nabla_\gamma h_{\alpha\beta} + h_{\gamma\alpha} \nabla_\beta n^\gamma + h_{\beta\gamma} \nabla_\alpha n^\gamma) \\ &= \frac{1}{2} [n^\gamma \nabla_\gamma (g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) + (g_{\gamma\alpha} - n_\gamma n_\alpha) \nabla_\beta n^\gamma + (g_{\beta\gamma} - n_\beta n_\gamma) \nabla_\alpha n^\gamma] \\ K_{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha n_\beta + n_\alpha a_\beta, \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde usa-se a definição da métrica induzida (3.38) e o fato da curvatura extrínseca ser simétrica nos índices  $\alpha$  e  $\beta$ . Na hipersuperfície a curvatura extrínseca é então escrita:

$$K_{ab} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\vec{n}} h_{ab}) = \frac{1}{2N} (\mathcal{L}_{\vec{m}} h_{ab}), \quad (3.73)$$

na segunda igualdade usamos o fato que  $\vec{m} = N\vec{n}$ .

Enfim, equipados das principais ferramentas definidas anteriormente da foliação do espaço-tempo  $M$  define-se a seguir a última parte da decomposição 3 + 1 do tensor de Riemman, que será fundamental para a decomposição na descrição Hamiltoniana da Relatividade Geral.

- Parte final da decomposição 3 + 1 do escalar de curvatura

As quantidades definidas anteriormente como a relação de Gauss (3.54) e a relação de Codazzi (3.58) têm significado para uma única hipersuperfície, pois estão restritas a apenas campos

tangentes a  $\Sigma_t$ . Agora, ao atuar duas vezes um mesmo operador em índices diferentes, obtém-se termos proporcionais à derivadas de  $K$  (tensor curvatura extrínseca) na direção do vetor unitário  $\vec{n}$  que é a característica de uma foliação.

Partindo da equação (3.57), atuando duas vezes em  $\Sigma_t$  e uma vez ao longo de  $\vec{n}$  encontramos

$$h_{\alpha\mu} n^\sigma h_\beta^\nu R_{\rho\nu\sigma}^\mu n^\rho = h_{\alpha\mu} n^\sigma h_\beta^\nu (\nabla_\nu \nabla_\sigma n^\mu - \nabla_\sigma \nabla_\nu n^\mu). \quad (3.74)$$

Usando o fato que podemos escrever  $\nabla_\beta n^\alpha = K_\beta^\alpha - D^\alpha \ln N n_\beta$ , em que a aceleração  $a_\nu = n^\sigma \nabla_\sigma n_\nu = D_\nu \ln N$ , e também que  $n^\sigma \nabla_\mu n_\sigma = 0$  e  $n^\sigma K_\sigma^\mu = 0$ , obtem-se

$$\begin{aligned} h_{\alpha\mu} n^\sigma h_\beta^\nu R_{\rho\nu\sigma}^\mu n^\rho &= h_{\alpha\mu} h_\beta^\nu (-K_\sigma^\mu \nabla_\nu n^\sigma + \nabla_\nu D^\mu \ln N - n^\sigma \nabla_\sigma K_\nu^\mu + \\ &+ D_\nu \ln N D^\mu \ln N + n^\sigma n_\nu \nabla_\sigma D^\mu \ln N) \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} &= -K_{\alpha\sigma} K_\beta^\sigma + D_\beta D_\alpha \ln N - h_\alpha^\mu h_\beta^\nu n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu} + \\ &+ D_\beta \ln N D_\alpha \ln N. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Na expressão (3.76) usamos a projeção  $h_\beta^\nu \nabla_\nu = D_\beta$  e  $h_\beta^\nu n_\nu = 0$ . Por sua vez, o termo  $h_\alpha^\mu h_\beta^\nu n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu}$  pode ser interpretado a partir da derivada de Lie das componentes da curvatura extrínseca ao longo da direção do vetor normal de evolução  $\vec{m}$ . Assim,

$$\mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} = N n^\mu \nabla_\mu K_{\alpha\beta} + 2N K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu - K_{\mu\beta} D^\mu N n_\alpha - K_{\alpha\mu} D^\mu N n_\beta, \quad (3.77)$$

onde usou-se a definição de derivada de Lie (3.30) e o gradiente do vetor normal de evolução (3.64). Agora, projetar a expressão (3.77) com relação a hipersuperfície  $\Sigma_t$  significa projetar uma quantidade já definida em  $\Sigma_t$ , que é a própria quantidade, ou seja:  $h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \mathcal{L}_m K_{\mu\nu} = \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} &= N h_\alpha^\mu h_\beta^\nu n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu} + 2N h_\alpha^\mu h_\beta^\nu K_{\mu\sigma} K_\sigma^\nu \\ h_\alpha^\mu h_\beta^\nu n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu} &= \frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\sigma} K_\beta^\sigma. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Substituindo a expressão (3.78) em (3.76), tem-se

$$h_{\alpha\mu} n^\sigma h_\beta^\nu R_{\rho\nu\sigma}^\mu n^\rho = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} + \frac{1}{N} D_\beta D_\alpha N + K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu. \quad (3.79)$$

Em seguida, se olharmos para a expressão da relação de Gauss contraída (3.55), observa-se exatamente um termo igual ao da expressão (3.79). Portanto, substituindo (3.79) em (3.55), tem-se

$$h^\mu_\alpha h^\nu_\beta R_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{ab} - \frac{1}{N} D_b D_a N + {}^3 R_{ab} + K K_{ab} - 2K_{ac} K^c_b, \quad (3.80)$$

onde, no lado direito de (3.80), substituímos os índices gregos pelos latinos, pois se tratam de quantidades definidas somente em  $\Sigma_t$ . Nosso interesse basicamente reside em reescrever a Lagrangiana gravitacional em termos variáveis da hipersuperfície, ou seja, expressar o escalar de Ricci  $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$  em termos de  $(N, N^a, h_{ab})$ . Para obter o traço da expressão (3.80) basta aplicar nos dois lados a métrica induzida  $h^{\alpha\beta}$

$$R + n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \mathcal{L}_m K - \frac{1}{N} D^a D_a N + {}^3 R + K^2, \quad (3.81)$$

onde usou-se que  $h^{ab} \mathcal{L}_m K_{ab} = \mathcal{L}_m K + 2N K_{ab} K^{ab}$  e que  $K = h^{ab} K_{ab}$ . Finalmente, se usarmos o escalar da relação de Gauss (3.56), é possível eliminar o termo  $n^\mu n^\nu R_{\mu\nu}$ , assim

$$\begin{aligned} R &= {}^{(3)} R + K^2 + K_{ab} K^{ab} + \frac{2}{N} \mathcal{L}_m K - \frac{2}{N} D^a D_a N, \\ R &= {}^{(3)} R + K_{ab} K^{ab} - K^2 - 2\nabla_\alpha \left( \nabla_\beta n^\alpha n^\beta - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta \right). \end{aligned} \quad (3.82)$$

A expressão (3.82) representa a última e mais importante decomposição 3 + 1 do escalar de curvatura. Com esta expressão encerramos nossa descrição da decomposição 3 + 1 do espaço-tempo. A seguir vamos revisar as equações de campo da Relatividade Geral através do formalismo Lagrangiano.

### 3.4 Formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral

A Relatividade Geral é uma teoria covariante clássica de campos. Para obter as equações de campo da RG no formalismo lagrangiano considera-se um espaço-tempo 4-dimensional onde se define uma ação funcional do campo gravitacional  $\mathbf{g}$  de sua primeira derivada  $\partial\mathbf{g}$  e segunda derivada  $\partial^2\mathbf{g}$ , dada por

$$S_T [\mathbf{g}, \partial\mathbf{g}, \partial^2\mathbf{g}; \Phi_m, \partial\Phi_m] = \int_M \mathcal{L}(\mathbf{g}, \partial\mathbf{g}, \partial^2\mathbf{g}; \Phi_m, \partial\Phi_m) \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.83)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a densidade Lagrangiana total que contém a contribuição gravitacional  $\mathbf{g}$  e da matéria representada por campos  $\Phi_m$ ,  $g$  é o determinante do tensor métrico e a integral é sobre uma região finita do espaço-tempo  $M$ . A ação total, expressão (3.83), pode então ser dividida em duas contribuições:

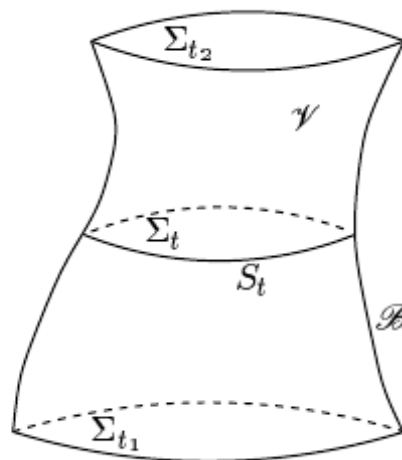
$$S_T = S_G + S_m,$$

onde  $S_G$  e  $S_m$  são as ações para o campo gravitacional e para os campos de matéria, respectivamente. A ação para a gravidade, também chamada de ação Einstein-Hilbert é

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int_M R \sqrt{-g} d^4x + \frac{2}{16\pi} \oint_{\partial M} \epsilon K |h|^{\frac{1}{2}} d^3y - \frac{2}{16\pi} \oint_{\partial M} \epsilon K_0 |h|^{\frac{1}{2}} d^3y, \quad (3.84)$$

$R$  é o escalar de Ricci 4-dimensional,  $K$  e  $K_0$  são as curvaturas extrínsecas e suas integrais representam os termos de fronteira, enquanto  $h$  é o determinante da métrica induzida ambos definidos na hipersuperfície  $\Sigma_t$  (POISSON, 2002). Cada termo de (3.84) tem um significado, o primeiro termo é o de Einstein-Hilbert onde toda a informação da dinâmica do campo gravitacional está contida, o segundo e o terceiro são termos de fronteira necessários para uma variação bem definida da ação gravitacional (YORK JR., 1972; GIBBONS; HAWKING, 1977). No entanto, o último termo subtraído é nomeado como termo não-dinâmico que, não afetará o valor da equação de movimento, mas somente a definição de energia que abordaremos posteriormente.

Figura 3.4 – A fronteira do Espaço-Tempo.



Fonte: *An advanced course in general relativity* (POISSON, 2002)

Apresentamos uma breve discussão sobre os termos de fronteira, pois são eles que permitem um bom comportamento das quantidades no princípio variacional. A fronteira de  $M$  é definida como sendo a união de duas hipersuperfícies  $\Sigma_{t_1}$  e  $\Sigma_{t_2}$  com uma hipersuperfície tipo-tempo  $B$  (POISSON, 2002), veja figura 3.4.

$$\partial M = \Sigma_{t_2} \cup (-\Sigma_{t_1}) \cup B \quad (3.85)$$

o sinal de negativo  $-$  em  $\Sigma_{t_1}$  é por questão de orientação do vetor normal em cada hipersuperfície tipo-espaco. Trabalha-se com todos os vetores orientados no mesmo sentido.

Por outro lado, a ação para os campos de matéria tem a forma

$$S_m[\Phi; \mathbf{g}] = \int_M \mathcal{L}_m(\Phi, \Phi_{;\alpha}; \mathbf{g}) \sqrt{-g} d^4x \quad (3.86)$$

em que a matéria é acoplada minimamente com o campo gravitacional. Dessa forma, a ação completa pode então ser escrita como:

$$S_T = \int_M \left( \frac{R}{16\pi} + \mathcal{L}_m \right) \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial M} \epsilon K |h|^{\frac{1}{2}} d^3y - \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial M} \epsilon K_0 |h|^{\frac{1}{2}} d^3y. \quad (3.87)$$

As equações de campo da Relatividade Geral são obtidas ao variar a expressão acima em termos do tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  e minimizá-la, i.e.  $\delta S_T = 0$ . A variação estará restrita à condição  $\delta g_{\alpha\beta}|_{\partial M} = 0$ , o que implica em manter fixo a métrica induzida  $h_{ab}$  durante a variação. O processo de variação encontra-se a seguir, em que se analisa separadamente a variação com relação a  $g^{\alpha\beta}$  de cada um dos termos presentes em (3.87). No entanto, antes de apresentarmos a variação da ação (3.87) apresentamos um significado físico existente na descrição dos termos de fronteira.

### 3.4.1 Conteúdo físico dos termos de fronteira

Até o momento ainda não tratamos dos detalhes sobre o significado dos termos de fronteira presentes na ação gravitacional (3.87), iremos voltar nossa atenção nesta subseção para esclarecer a importância dos termos de fronteira na descrição da energia total.

As equações de campo de Einstein ( $G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$ ), relacionam a curvatura do espaço-tempo com o campo gravitacional por meio do tensor de Einstein e a informação da energia do conteúdo de matéria encontra-se no tensor energia-momento. Não é possível encontrar uma

definição geral de energia total de um sistema na RG, isso porque a energia do campo gravitacional não pode ser estabelecida a partir do tensor energia-momento, sua informação é contida no tensor de Einstein  $G_{\alpha\beta}$ , que são equações diferenciais não-lineares (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973). No entanto, através do Hamiltoniano gravitacional (3.87) ou (4.24) em uma região assintoticamente plana <sup>26</sup> é possível obter uma definição para a massa gravitacional. Na região assintoticamente plana o Hamiltoniano gravitacional toma a forma

$$E = H_G = -\frac{1}{\kappa} \oint_{S_t} \left[ N \left( {}^{(2)}K - K_0 \right) - 2N_a p^{ab} r_b \right] \sqrt{\sigma} d^2\theta. \quad (3.88)$$

Na região assintoticamente plana a geometria do espaço-tempo deve ser a de Minkowski, em que  $x^\alpha = x^\alpha(ct', x', y', z')$  representa um sistema de referência lorentziano. Exigiremos assim, uma vez que as funções lapso e *shift* são arbitrárias, que as hipersuperfícies tipo-espaço  $\Sigma_t$  coincidam com o espaço-tempo minkowskiano no infinito. Para isso temos que: para  $\Sigma_t$  assintótico,  $t' = \text{constante}$  e as coordenadas  $y^a$  estão relacionadas com as coordenadas espaciais de Minkowski através de  $y^a(x', y', z')$  (POISSON, 2002).

Define-se matematicamente a massa gravitacional  $M$  como sendo:

$$M \equiv -\frac{1}{\kappa} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} \left( {}^{(2)}K - K_0 \right) \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (3.89)$$

onde tomamos o limite da expressão (3.88) quando  $S_t$ , uma 2-esfera, vai para o infinito e escolhemos  $N = 1$  e  $N^a = 0$ . A expressão (3.89) é conhecida como massa ADM do espaço-tempo assintoticamente plano.

A escolha para a função lapso e o vetor *shift* são propositais, pois permitem uma relação entre a energia total e as translações no tempo, que pode ser visualizada através da expressão  $t^\alpha = Nn^\alpha + N^\alpha$ , equação (3.65). Se consideramos  $\tau$  como sendo o tempo próprio <sup>27</sup> medido por um observador, então a 4-velocidade deste observador é dada por  $v^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}$ , onde  $x^\alpha = x^\alpha(\tau, y^a)$  é um sistema de coordenadas minkowskiano. Como  $\Sigma_t$  deve coincidir com Minkowski

<sup>26</sup> Define-se espaço-tempo assintoticamente plano aquele que descreve fontes gravitacionais em regiões de vácuo no infinito.

<sup>27</sup> É o tempo medido pelo observador que viaja na sua própria linha de mundo que irá descrever sua trajetória.



no infinito, o vetor normal  $n^\alpha \in \Sigma_t$  é a 4-velocidade do observador. Assim,

$$t^\alpha = N \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} \right) + N^a \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right) \quad (3.90)$$

$$t^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}. \quad (3.91)$$

Há uma outra escolha para a função lapso e vetor *shift*, que geram rotações assintóticas (POISSON, 2002). Como consequência disso é possível estabelecer a definição do momento angular de um espaço-tempo assintoticamente plano através de:

$$J \equiv \frac{1}{\kappa} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} \left( 2 \phi_a p^{ab} r_b \right) \sqrt{\sigma} d^2 \theta, \quad (3.92)$$

onde escolhe-se  $N = 0$  e  $N^a = \phi^a = \frac{\partial y^a}{\partial \phi}$  em que  $\phi$  representa o ângulo de rotação.

As definições de massa e momento angular descritos anteriormente têm como pilar a ideia de fixar o tempo  $t$  (constante) tal que no limite ( $r \rightarrow \infty$ ) alcançamos o infinito espacial<sup>28</sup> representado pela 2-superfície  $S_t$  fechada. De fato, outras definições de massa podem ser obtidas se ajustamos a 2-superfície no limite quando se está no infinito. Um exemplo de uma nova definição de massa é conhecido como massa de Bondi-Sachs ( $M_{BS}$ ) que consiste na escolha de uma 2-superfície  $S_t$  se tornar um infinito nulo (estrutura assintótica) (POISSON, 2002). Sua forma matemática é

$$M_{BS}(u) \equiv -\frac{1}{\kappa} \oint_{S(u, v \rightarrow \infty)} \left( {}^{(2)}K - K_0 \right) \sqrt{\sigma} d^2 \theta, \quad (3.93)$$

em que foi necessário realizar uma mudança de coordenadas, ao qual chamamos de coordenadas no cone de luz  $u$  e  $v$ , definidas da seguinte maneira:  $u = t - r$  e  $v = t + r$ . Dessa forma, os limites de  $r \rightarrow \infty$  e  $t$  fixo são equivalentes às condições nas novas coordenadas de manter  $u$  fixo e  $v \rightarrow \infty$ . A 2-superfície é então denotada por  $S(u, v)$ .

Diante da mudança nas coordenadas a partir de  $u$  e  $v$ , a interpretação física da massa de Bondi-Sachs consiste no estudo de um objeto isolado que emite radiação (radiação essa que poderá ser emitida na forma de ondas eletromagnéticas ou ondas gravitacionais). Além disso, podemos associar a taxa de variação desta massa com o fluxo de energia irradiada (POISSON,

<sup>28</sup> Este termo faz menção à causalidade do espaço-tempo definida pelo cone de luz, que na decomposição do espaço-tempo em hipersuperfícies espaciais consideramos como hipersuperfícies tipo-espaço.

2002), que se define como

$$\frac{dM_{BS}}{du} \equiv - \oint_{S(u,v \rightarrow \infty)} F \sqrt{\sigma} d^2\theta \quad (3.94)$$

onde  $F$  representa o fluxo da radiação. Em um espaço-tempo estacionário, ou seja, em que  $t$  é fixo ambas definições de massa são idênticas. A diferença entre as definições da massa ADM  $M_{ADM}$  e a massa de Bonchi-Sachs  $M_{BS}$  fica evidente quando tratamos o espaço-tempo como dinâmico. Nesse espaço-tempo observa-se que a massa de Bonchi-Sachs decresce enquanto a massa ADM se mantém constante.<sup>29</sup> Destacamos que existem novas definições de massas diferentes da massa ADM, que podem ser utilizadas dependendo do contexto e modelo que esteja trabalhando (POISSON, 2002; BROWN; YORK JR., 1993).

Encerramos aqui nossa discussão da importância e conteúdo físico dos termos de fronteira na descrição da energia para o campo gravitacional em uma região assintoticamente plana.

### 3.4.2 Variação do termo de Einstein-Hilbert

Seja a ação de Einstein-Hilbert  $S_{EH}$ , podemos expressar sua variação em relação a  $\mathbf{g}$  como

$$\frac{\delta S_{EH}}{16\pi} = \frac{1}{16\pi} \int_M \delta (R\sqrt{-g}) d^4x = \frac{1}{16\pi} \int_M (\delta R\sqrt{-g} + R\delta\sqrt{-g}) d^4x, \quad (3.95)$$

lembrando que  $R$  é o escalar de Ricci 4-dimensional, o escalar é escrito como a contração do tensor de Ricci com o tensor métrico:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (3.96)$$

onde

$$R_{\alpha\beta} = R^\gamma_{\alpha\gamma\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^\gamma_{\mu\gamma}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}$$

sendo  $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$  os símbolos de Christoffel. Assume-se a partir deste ponto a seguinte notação:  $\nabla_\alpha v^\beta = v^\beta_{;\alpha}$  e  $\partial_\alpha v^\beta = v^\beta_{,\alpha}$ .<sup>30</sup> A variação do escalar de Ricci (3.96) é feita aplicando a regra de

<sup>29</sup> É possível demonstrar esta afirmação, no entanto no momento foge do escopo do trabalho, para detalhes sugerimos ao leitor a referência (POISSON, 2002).

<sup>30</sup> Note que a notação  $\nabla_\alpha v^\rho = v^\rho_{;\alpha}$ , é válida no espaço-tempo, enquanto  $D_a v^b = v^b_{|a}$  na hipersuperfície  $\Sigma_t$

Leibniz,

$$\delta R = \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \quad (3.97)$$

Reescrevendo a variação do termo de Einstein-Hilbert, temos

$$\delta S_{EH} = \int_M \left( \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} + g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} + R \delta \sqrt{-g} \right) d^4 x. \quad (3.98)$$

Ao variar o tensor de Ricci ( $\delta R_{\alpha\beta}$ ), estamos variando na realidade os símbolos de Christoffel ( $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ ) que por sua vez não se transformam como um tensor, portanto não é possível tomar diretamente sua variação. Todavia, a subtração de dois símbolos de Christoffel se transforma como um pseudotensor e coincidem com a variação de  $R_{\alpha\beta}$ . Podemos ainda calcular a variação de  $R_{\alpha\beta}$  em um referencial local de Lorentz <sup>31</sup>, logo

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta \left( \Gamma_{\alpha\beta;\mu}^\mu - \Gamma_{\alpha\mu;\beta}^\mu \right) = \left( \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right)_{;\mu} - \left( \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\mu \right)_{;\beta}.$$

É ainda possível escrever convenientemente

$$g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} := \bar{\delta} v_{;\mu}^\mu,$$

em que definimos um novo termo na variação  $\bar{\delta} v^\mu = g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta$ . Por outro lado, a variação da métrica  $\delta \sqrt{-g}$  é mais simples

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \quad (3.99)$$

sendo que, para obter (3.99), usa-se a propriedade do tensor métrico ( $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta_\beta^\alpha$ ) e propriedades de determinante de uma matriz (D'INVERNO, 1998).

Substituindo essas variações em (3.98), temos:

$$\delta S_{EH} = \int_M \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4 x + \int_M \bar{\delta} v_{;\mu}^\mu \sqrt{-g} d^4 x. \quad (3.100)$$

<sup>31</sup> É o referencial com geometria plana, ou seja, não há curvatura.

Podemos identificar o último termo de (3.100) como uma integral de fronteira (POISSON, 2002),

$$\int_M \bar{\delta}v_{;\mu}^{\mu} \sqrt{-g} d^4x = \int_M (\sqrt{-g} \bar{\delta}v^{\mu})_{;\mu} d^4x \quad (3.101)$$

em que foi usado a definição de derivada covariante (CARMELI, 1982; D'INVERNO, 1998)

$$A_{;\mu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^{\mu})_{;\mu}. \quad (3.102)$$

Por outro lado, fazendo uso do teorema de Gauss, a expressão (3.101) se reduz simplesmente a

$$\int_M \bar{\delta}v_{;\mu}^{\mu} \sqrt{-g} d^4x = \oint_{\partial M} \bar{\delta}v^{\mu} d\Sigma_{\mu} = \oint_{\partial M} \varepsilon \bar{\delta}v^{\mu} n_{\mu} |h|^{\frac{1}{2}} d^3y, \quad (3.103)$$

em que  $n_{\mu}$  é um vetor unitário normal a  $\partial M$  e  $\varepsilon \equiv n_{\mu} n^{\mu} = \pm 1$ . Por sua vez, o termo de fronteira (3.103) pode ser escrito em termos da variação de  $g_{\alpha\beta}$ . Lembramos que  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  é escrito em termos do tensor métrico e sua variação na fronteira é dada por

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Big|_{\partial M} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}).$$

Portanto, fazendo uso desses resultados e condições, o termo  $\bar{\delta}v_{\mu}$  presente na integral de fronteira (3.103) fica

$$\bar{\delta}v_{\mu} = g^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) \quad (3.104)$$

onde usa-se o fato de que  $\bar{\delta}v^{\mu}$  é escrito em termos da variação dos símbolos de Christoffel e lembrando que na fronteira  $\delta g_{\alpha\beta} \Big|_{\partial M} = \delta g^{\alpha\beta} \Big|_{\partial M} = 0$ . Agora, ao realizar o produto escalar do vetor normal  $n^{\mu}$  com o resultado (3.104) podemos determinar o termo presente na integral em (3.103):

$$\begin{aligned} n^{\mu} \bar{\delta}v_{\mu} \Big|_{\partial M} &= n^{\mu} g^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) \\ &= n^{\mu} (\varepsilon n^{\alpha} n^{\beta} + h^{\alpha\beta}) (\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) \\ &= n^{\mu} h^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) \\ n^{\mu} \bar{\delta}v_{\mu} \Big|_{\partial M} &= -h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^{\mu}. \end{aligned}$$

Na segunda linha usou-se a definição da decomposição do tensor métrico em termos da métrica induzida  $h^{\alpha\beta}$  e ainda temos que  $n^\mu n^\alpha$  multiplica tensores antissimétricos em  $\mu$  e  $\alpha$ , que é igual a zero, chegando assim na terceira linha. E por último o termo  $h^{\alpha\beta} \delta g_{\mu\beta, \alpha} = 0$ , pois não somente a variação  $\delta g^{\alpha\beta}$  é nula na fronteira  $\partial M$ , mas também a sua derivada tangencial se anula (POISSON, 2002).

Finalmente pode-se escrever a variação do termo de Einstein-Hilbert (3.100), da seguinte forma

$$\delta S_{EH} = \int_M \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x - \oint_{\partial M} \varepsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta, \mu} n^\mu |h|^{\frac{1}{2}} d^3y, \quad (3.105)$$

o termo da primeira integral é conhecido como o tensor de Einstein  $G_{\alpha\beta}$ , que descreve a geometria do espaço-tempo. A expressão (3.105) contém ainda um termo de fronteira. Geralmente em teoria de campos não há variáveis com derivadas parciais de segunda ordem, um caso especial é a RG, que tem como densidade lagrangiana  $R$  (escalar de Ricci) possuindo derivadas parciais de segunda ordem do tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ . Portanto, devido a essa característica não muito comum em uma teoria de campos, faz-se necessário acrescentar termos de fronteira como em (3.105) (POISSON, 2002; OKSANEN, 2013).

### 3.4.3 Variação do termo dos campos de matéria

Os campos de matéria são introduzidos na ação total, pois são a partir deles que vem a informação da matéria presente na famosa equação de campo de Einstein ( $G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$ ). Até aqui, na última seção encontrou-se uma expressão para a dinâmica do campo gravitacional, ou seja, como é a deformação da geometria do espaço-tempo. No entanto, ainda não há informação a respeito de quem é o causador na equação de campo desses efeitos na geometria do espaço-tempo. Para isso, seja  $S_m$  a ação integral contendo informações de campos de matéria

$$S_m = \int_M \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.106)$$

onde  $\mathcal{L}_m$  é a densidade lagrangiana para campos de matéria. A variação de (3.106) com relação ao tensor métrico fica

$$\delta S_m = \int_M \left( \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} + \mathcal{L}_m \delta \sqrt{-g} \right) d^4x \quad (3.107)$$

$$= \int_M \left( \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.108)$$

em que foi usado a variação  $\delta \sqrt{-g}$  dado por (3.99). Define-se a seguinte quantidade como sendo as componentes do tensor energia-momento

$$T_{\alpha\beta} \equiv -2 \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\alpha\beta}} + \mathcal{L}_m g_{\alpha\beta} \quad (3.109)$$

A expressão (3.109) é a responsável por fornecer a informação da distribuição de matéria na equação de campo de Einstein (CARMELI, 1982; D'INVERNO, 1998). Para modelo de sistemas físicos, temos diferentes expressões para o tensor  $T_{\alpha\beta}$  para um determinado tipo de matéria. Por enquanto  $T_{\alpha\beta}$  descreve um fluido perfeito com pressão. Pela lei de conservação da energia, o tensor energia-momento deve satisfazer

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0,$$

que é vista como uma versão covariante da lei de conservação. Portanto, substituindo a definição (3.109) na expressão para a variação dos campos de matéria, temos

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int_M T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.110)$$

essa é a variação para os campos de matéria que tem sua contribuição expressa na ação total. A seguir, a variação dos termos de fronteira é analisada com cuidado.

#### 3.4.4 Variação do termo de fronteira

Os termos de fronteira presentes na ação total (3.87) dependem das curvaturas extrínsecas, a única que contribuirá na variação é aquela escrita em termos de  $K$ , o traço da curvatura extrínseca, pois em princípio:  $\delta K_0 = 0$  (onde,  $K_0$  é uma curvatura constante) (POISSON, 2002).

Assim, a variação do termo de fronteira será

$$\frac{S_f}{16\pi} = \frac{2}{16\pi} \oint_{\partial M} \varepsilon \delta K |h|^{\frac{1}{2}} d^3y, \quad (3.111)$$

aqui  $\delta h^{\alpha\beta}|_{\partial M} = 0$ , ou seja  $h^{\alpha\beta}$  é fixada na fronteira. Para encontrar a variação de  $K$  deve-se recordar da expressão (3.53), em que o traço da curvatura extrínseca pode ser escrita como

$$\begin{aligned} K = n_{;\alpha}^{\alpha} &= \left( g^{\alpha\beta} n_{\beta} \right)_{;\alpha} \\ &= g^{\alpha\beta} n_{\alpha;\beta} \\ &= \left( \varepsilon n^{\alpha} n^{\beta} + h^{\alpha\beta} \right) n_{\alpha;\beta} \end{aligned}$$

ou seja

$$K = h^{\alpha\beta} n_{\alpha;\beta}.$$

em que usamos o fato de que  $(n^{\alpha} n_{\alpha;\beta} = 0)$ , e que  $n_{\alpha;\beta}$  é interpretado como a aceleração  $a^{\alpha}$  de um observador na hipersuperfície, eq. (3.51). Por fim, substituindo a derivada covariante do vetor  $n_{\alpha}$ , o traço da curvatura extrínseca é assim escrita em termos de  $g^{\alpha\beta}$

$$K = h^{\alpha\beta} (n_{\alpha;\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} n_{\gamma}). \quad (3.112)$$

A variação de  $K$  dado em (3.112) com relação a  $g^{\alpha\beta}$  consiste simplesmente em tomar a variação do símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ , lembrando que  $h^{\alpha\beta}$  é mantida fixa na fronteira

$$\begin{aligned} \delta K &= -h^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} n_{\gamma} \\ &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\alpha,\beta} + \delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) n^{\mu} \\ &= \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^{\mu}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

em que usamos novamente o fato de que a variação da métrica  $\delta g^{\alpha\beta}$  e a componente tangencial de sua derivada  $h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\mu,\beta}$  se anulam na fronteira.

Substituindo a expressão (3.113) em (3.111) encontra-se o seguinte resultado para a variação do termo de fronteira,

$$\delta S_f = \oint_{\partial M} \varepsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu |h|^{\frac{1}{2}} d^3y. \quad (3.114)$$

Por fim, determinamos todos os termos da variação da ação total, basta somar as expressões (3.105), (3.110) e (3.114), ou seja:

$$\delta S_T = \frac{1}{16\pi} (\delta S_{EH} + \delta S_f) + \delta S_m \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16\pi} \int_M \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x - \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial M} \varepsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu |h|^{\frac{1}{2}} d^3y \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_M T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial M} \varepsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu |h|^{\frac{1}{2}} d^3y. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Os termos de fronteira se cancelam mutuamente na expressão (3.116). Agora minimizando a expressão acima  $\delta S_T = 0$ , obtém-se exatamente a equação de Einstein para o campo gravitacional:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi T_{\alpha\beta}. \quad (3.117)$$

A expressão (3.117) é a famosa equação de Einstein para o campo gravitacional na presença de matéria. O lado esquerdo de (3.117) contém informações de como é a geometria do espaço-tempo devido a presença de matéria, representada pelo tensor  $T_{\alpha\beta}$ .

Com essa discussão, finalizamos a nossa revisão quanto as ferramentas necessárias para construir a Hamiltoniana para o campo gravitacional. A seguir discutiremos em detalhes a formulação Hamiltoniana para a RG.



## 4 FORMALISMO HAMILTONIANO DA RELATIVIDADE GERAL

Formular a Relatividade Geral como uma teoria de Hamilton é um trabalho extenso, sendo que a principal motivação para tal abordagem é a quantização do campo gravitacional. A primeira proposta concreta foi dada por Arnowit, Deser e Misner em 1962 (ARNOWITT; DESER; MISNER, 2008). É muito comum encontrar em literaturas a nomenclatura formalismo ADM em homenagem aos três pela descrição, em vez de formulação Hamiltoniana da RG. No entanto, aqui faremos o uso do termo formulação Hamiltoniana da RG, pois abordaremos as variações com relação ao tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  contrário ao descrito em ADM, que utiliza-se o método de Palatini <sup>1</sup>, ou também conhecido como representação de primeira ordem do campo gravitacional. Para detalhes ver (ARNOWITT; DESER; MISNER, 2008).

Usaremos a decomposição 3 + 1 para obtenção da formulação Hamiltoniana da RG, além é claro, de levarmos em conta as ferramentas apresentadas no capítulo anterior, referente ao formalismo Lagrangiano. O Hamiltoniano da RG é um funcional da função lapso  $N$ , vetor *shift*  $N^a$ , métrica induzida  $h_{ab}$  e de seus momentos canonicamente conjugados  $p_N$ ,  $p_a$  e  $p^{ab}$ , respectivamente, que são variáveis canônicas independentes e juntos formam as variáveis ADM (OKSANEN, 2013; POISSON, 2002). No presente momento faz-se a construção do Hamiltoniano gravitacional sem levar em conta a contribuição dos campos de matéria, sendo que sua presença não altera os principais resultados obtidos. No entanto, consideramos na construção, uma vez mais, os termos de fronteira que por sua vez tem um papel importante na análise da variação do Hamiltoniano em termos das variáveis canônicas. Além disso, na representação Hamiltoniana, os termos de fronteira representam energias e não podem ser simplesmente desprezados.

### 4.1 Ação Gravitacional

Consideremos a ação gravitacional expressa em (3.84), e deixando de lado, no presente momento, o termo não-dinâmico associados com a curvatura constante  $K_0$ . Pode-se então escrever a ação como

$$2\kappa S_G = \int_M R \sqrt{-g} d^4x + 2 \oint_{\partial M} \varepsilon K |h|^{\frac{1}{2}} d^3y. \quad (4.1)$$

<sup>1</sup> Este método consiste em variar separadamente a ação gravitacional com relação ao símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$  e ao tensor métrico  $g^{\alpha\beta}$  na obtenção das equações de movimento, tratando-os como variáveis independentes.

em que  $\kappa = 8\pi$  é a constante de acoplamento gravitacional. No capítulo anterior definiu-se a fronteira  $\partial M$  como sendo constituída pela união das hipersuperfícies ortogonais, tipo-espaço  $(\Sigma_{t_2}, \Sigma_{t_1})$  e tipo-tempo  $(B)$ , expressão (3.85). Aplicando novamente essa condição de fronteira na segunda integral da expressão (4.1), temos que

$$2\kappa S_G = \int_M R \sqrt{-g} d^4x - 2 \int_{\Sigma_{t_2}} K \sqrt{h} d^3y + 2 \int_{\Sigma_{t_1}} K \sqrt{h} d^3y + 2 \int_B K_B \sqrt{-\gamma} d^3z. \quad (4.2)$$

É necessário chamar a atenção nesta parte para rotular as quantidades definidas em cada hipersuperfície segundo tabela (4.1) a fim de evitar confusão na interpretação de cada hipersuperfície.

Tabela 4.1 – Rótulos das Hipersuperfícies. Ver Fig.(3.4), pág.42.

Superfície	$\Sigma_t$	$S_t$	$B$
vetor normal	$n^\alpha$	$r^\alpha$	$r^\alpha$
coordenadas	$y^a$	$\theta^A$	$z^i$
métrica induzida	$h_{ab}$	$\sigma_{AB}$	$\gamma_{ij}$
curvatura extrínseca	$K_{ab}$	$K_{AB}$	$K_{ij}$
traço da curvatura extrínseca	$K$	${}^{(2)}K$	$K_B$

Prosseguindo com a descrição do Hamiltoniano da RG, leva-se em conta que o escalar de curvatura presente na primeira integral de (4.2) pode ser decomposto segundo a expressão (3.82); temos assim:

$$\int_M R \sqrt{-g} d^4x = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left( {}^{(3)}R + K^{ab} K_{ab} - K^2 \right) N \sqrt{h} d^3y - 2 \oint_{\partial M} \left( n_{;\beta}^\alpha n^\beta - n^\alpha n_{;\beta}^\beta \right) d\Sigma_\alpha \quad (4.3)$$

onde usamos o teorema de Gauss para escrever a última integral de (4.3). É necessário certo cuidado ao tratar o termo de superfície. Na última integral, há novamente uma integração na fronteira, que pode ser dividida a partir da união das três hipersuperfícies. Então, o elemento de medida  $d\Sigma_\alpha$  assumirá um determinado valor segundo a hipersuperfície que está sendo considerada, por exemplo, para a hipersuperfície  $\Sigma_{t_1}$ :  $d\Sigma_\alpha = n_\alpha \sqrt{h} d^3y$ . Abrindo os termos para todas as hipersuperfícies na expressão (4.3) e substituindo essas quantidades na ação gravitacional, obtém-se que os termos envolvendo  $\Sigma_{t_1}$  e  $\Sigma_{t_2}$  se cancelam (devido a orientação das normais),

fornecendo assim

$$2\kappa S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left( {}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right) N\sqrt{h}d^3y + 2 \int_B \left( K_B + r_{\alpha;\beta}n^\alpha n^\beta \right) \sqrt{-\gamma}d^3z, \quad (4.4)$$

onde assumimos que as hipersuperfícies  $(\Sigma_t, B)$ , que definem a fronteira, se interceptam ortogonalmente, o que implica que os vetores normais satisfazem:  $r_\alpha n^\alpha = 0$ .

Podemos trabalhar um pouco mais o termo de superfície restante. A foliação da hipersuperfície tipo-tempo  $B$  é dada pela união de um conjunto de superfícies 2-dimensionais  $S_t$ . Portanto, levando em conta a foliação de  $B$ , o segundo termo de (4.4) pode ser escrito em termos de uma integral sob  $S_t$ , ou seja

$$\int_B \left( K_B + r_{\alpha;\beta}n^\alpha n^\beta \right) \sqrt{-\gamma}d^3z = \int dt \oint_{S_t} N\sqrt{\sigma} {}^{(2)}K d^2\theta, \quad (4.5)$$

aqui  ${}^{(2)}K = \sigma^{AB}K_{AB}$  é o traço da curvatura extrínseca 2-dimensional, definida em  $S_t$ . Só é possível escrever a integral (4.5) porque podemos estabelecer uma relação entre as coordenadas  $(z^i = z^i(t, \theta^A))$  definidas em  $B$  e em  $S_t$  (POISSON, 2002). A expressão (4.4) pode ser reescrita adicionando o termo constante  $S_0$  (mencionado no capítulo anterior) e levando em conta a foliação de  $B = \cup_t S_t$ , como

$$2\kappa S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_{\Sigma_t} \left( {}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right) N\sqrt{h}d^3y + 2 \oint_{S_t} \left( {}^{(2)}K - K_0 \right) N\sqrt{\sigma}d^2\theta \right]. \quad (4.6)$$

O termo que envolve  $K_0$  (curvatura constante embutida em  $S_t$ ) na expressão (4.6) permite que a ação gravitacional seja bem definida para qualquer espaço-tempo assintoticamente plano (POISSON, 2002; OKSANEN, 2013). A expressão (4.6) é a ação gravitacional utilizada para descrever o Hamiltoniano gravitacional, abordado a seguir.

## 4.2 Abordagem Hamiltoniana

O processo para a construção do funcional Hamiltoniano segue o mesmo princípio tratado na seção 3.1, no entanto, seremos mais específicos apresentando uma formulação hamiltoniana de uma teoria de campo. As variáveis presentes na ação gravitacional (4.6), estão definidas no espaço de configuração  $(q, \dot{q})$ , e são aquelas que irão descrever as componentes da

métrica  $g_{\alpha\beta}$  do espaço-tempo:  $h_{ab}$ ,  $N$ ,  $N^a$ ,  $\dot{h}_{ab}$ ,  $\dot{N}$  e  $\dot{N}^a$ . A curvatura extrínseca  $K_{ab}$  pode ser escrita em termos dessas variáveis. Para isso, levamos em conta a expressão (3.73), onde

$$\mathcal{L}_{\vec{m}}h_{ab} = 2NK_{ab}, \quad (4.7)$$

é a derivada de Lie da métrica induzida ao longo do vetor normal de evolução  $\vec{m}$ . Usando o fato de que  $\vec{m} = Nn^\alpha = t^\alpha - N^\alpha$ , podemos expressar a derivada de Lie em termos de derivadas parciais:

$$\mathcal{L}_{\vec{m}}h_{ab} = \mathcal{L}_t h_{ab} - \mathcal{L}_{N^\alpha} h_{ab} = \dot{h}_{ab} - h_{ac}N_{|b}^c - h_{bc}N_{|a}^c, \quad (4.8)$$

em que aplicamos a definição de derivada de Lie na direção do vetor *shift*  $N^a$ . Lembre da notação  $N_{|b}^a = D_b N^a$ , sendo que também usamos uma propriedade da derivada de Lie ao longo de  $t$ , que corresponde simplesmente tomar a derivada total com relação ao tempo da quantidade que está sendo “arrastada”, i.e.  $\mathcal{L}_t h_{ab} = \frac{dh_{ab}}{dt} = \dot{h}_{ab}$ , para maiores detalhes veja (GOURGOULHON, 2012). Portanto, podemos então expressar a curvatura extrínseca como:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - N_{a|b} - N_{b|a}). \quad (4.9)$$

A partir de (4.6), a densidade Lagrangiana é escrita como

$$\begin{aligned} 2\kappa\mathcal{L}_G &= \left( {}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right) N\sqrt{h} \\ &= \left( {}^3R + \left( h^{ac}h^{db} - h^{ab}h^{cd} \right) K_{ab}K_{cd} \right) N\sqrt{h}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

É fácil notar que a densidade Lagrangiana é independente de  $\dot{N}$  e  $\dot{N}^a$ , o que implica que  $N$  e  $N^a$  não são variáveis dinâmicas, o que resulta na presença de vínculos primários, determinados a partir do momento canonicamente conjugado da teoria (DIRAC, 1958). Os momentos canonicamente conjugados das variáveis  $N$  e  $N^a$  são denotados por

$$p_N = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}} \approx 0, \quad p_a = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}^a} \approx 0. \quad (4.11)$$

A densidade Hamiltoniana é definida da maneira usual a partir de uma transformada de Legendre, que consiste em redefinir a dinâmica no espaço de configuração  $(h_{ab}, N, N^a, \dot{h}_{ab}, \dot{N} \text{ e } \dot{N}^a)$  para o espaço de fases  $(h_{ab}, N, N^a, p_N, p_a, \text{ e } p^{ab})$ . A definição da Hamiltoniana gravitacional

segue

$$\mathcal{H}_G = p^{ab}\dot{h}_{ab} + p_N\dot{N} + p_a\dot{N}^a - \mathcal{L}_G. \quad (4.12)$$

Os parênteses de Poisson fundamentais entre as variáveis canônicas são definidos como:

$$\{N(x), p_N(y)\} = \delta(x-y), \quad (4.13)$$

$$\{N^a(x), p_b(y)\} = \delta_b^a \delta(x-y) \quad (4.14)$$

$$\{h_{ab}(x), p^{cd}(y)\} = \delta_a^c \delta_b^d \delta(x-y), \quad (4.15)$$

onde  $\delta_b^a$  é o delta de Kronecker e  $\delta(x-y)$  o delta de Dirac. Os demais parênteses de Poisson entre as variáveis canônicas são nulos.

O momento canonicamente conjugado à métrica  $h_{ab}$  é

$$p^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial K_{mn}} \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} (K^{ab} - Kh^{ab}), \quad (4.16)$$

em que usamos a relação entre a curvatura extrínseca e a derivada temporal da métrica induzida, dada pela expressão (4.9). Substituindo os resultados Eqs. (4.9), (4.10) e (4.16) em (4.12), tem-se a seguinte expressão para a densidade Hamiltoniana,

$$2\kappa\mathcal{H}_G = (K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R)N\sqrt{h} + 2(K^{ab} - Kh^{ab})N_{a|b}\sqrt{h}.$$

O Hamiltoniano total para a gravitação é obtido através da integral da densidade  $\mathcal{H}_G$  em  $\Sigma_t$ . Levaremos em conta em sua descrição, a presença de vínculos primários  $(p_N, p_a)$  presentes na teoria e também dos termos de fronteira (4.6). Portanto, o Hamiltoniano total segue

$$\begin{aligned} 2\kappa H_G &= \int_{\Sigma_t} \left[ (K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R)N\sqrt{h} + 2(K^{ab} - Kh^{ab})N_{a|b}\sqrt{h} \right] d^3y \\ &+ \int_{\Sigma_t} (v_N p_N + v^a p_a) d^3y + 2 \oint_{S_t} ({}^{(2)}K - K_0) N \sqrt{\sigma} d^2\theta, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde os vínculos primários  $(p_N, p_a)$  são incluídos a partir de multiplicadores de Lagrange  $v_N$  e  $v^a$ , respectivamente. Primeiramente, é importante notar a necessidade de escrever  $H_G$  completamente em termos das variáveis canônicas. Para isso, podemos expressar o momento canoni-

camente conjugado como:

$$2\kappa p^{ab} = G^{abcd} K_{cd}, \quad (4.18)$$

onde  $G^{abcd}$  é conhecida como a métrica de DeWitt (OKSANEN, 2013), e é definida por

$$G^{abcd} \equiv \sqrt{h} \left[ \frac{1}{2} (h^{ac} h^{bd} + h^{ad} h^{bc}) - h^{ab} h^{cd} \right] \quad (4.19)$$

sendo sua inversa dada por

$$G_{abcd} \equiv \frac{\sqrt{h}}{2} (h_{ac} h_{bd} + h_{ad} h_{bc} - h_{ab} h_{cd}). \quad (4.20)$$

Esta definição permite reescrever convenientemente:

$$\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} (K^{ab} K_{ab} - K^2) = \frac{1}{2\kappa} K_{ab} G^{abcd} K_{cd} = 2\kappa G_{abcd} p^{ab} p^{cd}. \quad (4.21)$$

Em seguida, o termo proporcional à função *shift*  $N^a$ , na primeira integral de (4.17), também pode ser escrito em termos do momento  $p^{ab}$  como:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\kappa} (K^{ab} - Kh^{ab}) N_{a|b} \sqrt{h} d^3y &= \int_{\Sigma_t} 2p^{ab} N_{a|b} d^3y \\ &= \int_{\Sigma_t} 2p^{ab} h_{ca} (\partial_b N^c + \Gamma_{bd}^c N^d) d^3y \\ &= \int_{\Sigma_t} (2p^{ab} h_{ca} \partial_b N^c + p^{ab} \partial_d h_{ab} N^d) d^3y. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Aplicando integração por partes no primeiro termo de (4.22), temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\kappa} (K^{ab} - Kh^{ab}) N_{a|b} \sqrt{h} d^3y &= \int_{\Sigma_t} (\partial_b (2p^{ab} h_{ca} N^c) - N^c \partial_b (p^{ab} h_{ca}) + p^{ab} \partial_d h_{ab} N^d) d^3y \\ &= \oint_{S_t} 2p^{ab} N_a r_b \sqrt{\sigma} d^2\theta + \\ &+ \int_{\Sigma_t} (-2h_{ca} \partial_b p^{ab} - (2\partial_b h_{ca} - \partial_c h_{ab}) p^{ab}) N^c d^3y. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Em posse dos resultados Eqs. (4.21) e (4.23), podemos escrever o Hamiltoniano gravitacional total como segue:

$$H_G = \int_{\Sigma_t} (N \mathcal{H}_0 + N^a \mathcal{H}_a + v_N p_n + v^a p_a) d^3y - \frac{1}{\kappa} \oint_{S_t} \left[ N \left( {}^{(2)}K - k_0 \right) - 2N_a p^{ab} r_b \right] \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (4.24)$$

onde define-se as seguintes quantidades

$$\mathcal{H}_0 = 2\kappa G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} {}^{(3)}R, \quad (4.25)$$

e

$$\mathcal{H}_a = -2h_{ac} \partial_b p^{cb} - (2\partial_b h_{ac} - \partial_a h_{cb}) p^{cb}. \quad (4.26)$$

O próximo passo da análise consiste em impor a condição de consistência para os vínculos primários, que resulta em

$$\begin{aligned} \dot{p}_N &= \{p_N, H_G\} = \mathcal{H}_0 \approx 0; \\ \dot{p}_a &= \{p_a, H_G\} = \mathcal{H}_a \approx 0. \end{aligned}$$

Vemos assim que as quantidades  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_a$  são vínculos secundários. Eles são conhecidos respectivamente como, vínculo Hamiltoniano  $\mathcal{H}_0$  e vínculo super-momento  $\mathcal{H}_a$  (OKSANEN, 2013; BOJOWALD, 2011; BAEZ, 1994), mais adiante examinaremos esses vínculos com mais detalhes sobre o fechamento da álgebra.

A expressão (4.24) é a forma final do Hamiltoniano gravitacional que leva em conta na sua descrição os termos de fronteira. O próximo passo na análise canônica é determinar a variação do Hamiltoniano Gravitacional  $H_G$  com relação às variáveis canônicas, para em seguida obter as equações de movimento de Hamilton.

### 4.3 Equações de movimento de Hamilton

Nesta seção apresentaremos a análise das equações de Hamilton, para isso discutiremos as variações do Hamiltoniano Gravitacional (4.24) com relação às variáveis canônicas. Uma vez que o Hamiltoniano é um funcional que depende das variáveis canônicas é necessário impor

condições de contorno para que na fronteira  $S_t$  tenha-se

$$\delta N = \delta N^a = \delta h_{ab} = 0.$$

No entanto, a variação dos momentos canônicos  $(\delta p_N, \delta p_a, \delta p^{ab})$  não são tomados como zero na fronteira (POISSON, 2002).

A variação do Hamiltoniano com relação as variáveis  $N$  e  $N^a$  são realizadas diretamente a partir de (4.24), assim

$$2\kappa\delta_N H_G = \int_{\Sigma_t} \left( \hat{\mathcal{H}}_0 \delta N + 2\hat{\mathcal{H}}_a \delta N^a \right) \sqrt{h} d^3 y, \quad (4.27)$$

em que, por conveniência, definimos quantidades  $\hat{\theta} \equiv 2\kappa\theta$ .

Por sua vez, a variação de  $H_G$  com relação às variáveis  $h_{ab}$  e  $p^{ab}$  devem ser realizadas com cuidado. Para começar deve-se escrever a expressão (4.24) em termos dessas variáveis. Realiza-se a variação de uma forma mais prática dividindo o Hamiltoniano gravitacional como segue

$$2\kappa H_G = \hat{H}_\Sigma + \hat{H}_F, \quad (4.28)$$

onde  $\hat{H}_\Sigma$  é a parte do Hamiltoniano devido à hipersuperfície  $\Sigma_t$ ,

$$\hat{H}_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \left[ N h^{-\frac{1}{2}} \left( \hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2 \right) - N h^{\frac{1}{2}} {}^{(3)}R - 2N_a h^{\frac{1}{2}} \left( h^{-\frac{1}{2}} \hat{p}^{ab} \right)_{|b} \right] d^3 y \quad (4.29)$$

enquanto  $\hat{H}_F$  é o termo referente à fronteira,

$$\hat{H}_F = -2 \oint_{S_t} \left[ N \left( {}^{(2)}K - k_0 \right) - N_a h^{-\frac{1}{2}} \hat{p}^{ab} r_b \right] \sqrt{\sigma} d^2 \theta \quad (4.30)$$

O processo da variação com relação a  $\delta \hat{p}^{ab}$  encontra-se a seguir.

- Variação de  $H_G$  com relação ao momento  $\hat{p}^{ab}$

A fim de calcularmos a variação de  $H_G$  com relação ao momento  $\hat{p}^{ab}$ , analisaremos separadamente cada uma das quantidades em (4.29) e (4.30). A variação do primeiro termo pode ser



escrita como

$$\begin{aligned} \delta_p \hat{H}_\Sigma &= \int_{\Sigma_t} \left[ N h^{-\frac{1}{2}} \delta_p \left( \hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2 \right) - \delta_p \left( N h^{\frac{1}{2}} {}^{(3)}R \right) \right] d^3y \\ &\quad - 2 \delta_p \int_{\Sigma_t} N_a h^{\frac{1}{2}} \left( h^{-\frac{1}{2}} \hat{p}^{ab} \right)_{|b} d^3y, \end{aligned} \quad (4.31)$$

a variação do termo quadrático no momento é escrita a partir do resultado

$$\begin{aligned} \delta_p \left( \hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2 \right) &= \hat{p}^{ab} \delta \hat{p}_{ab} + \delta \hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \delta \left( \frac{1}{2} \hat{p}^2 \right) \\ &= 2 \left( \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p} h_{ab} \right) \delta \hat{p}^{ab}. \end{aligned}$$

Ademais, usamos também o resultado anterior (4.23),

$$\int_{\Sigma_t} N_a h^{\frac{1}{2}} \left( h^{-\frac{1}{2}} \hat{p}^{ab} \right)_{|b} d^3y = - \int_{\Sigma_t} N_{a|b} \left( h^{-\frac{1}{2}} \hat{p}^{ab} \right) \sqrt{h} d^3y + \oint_{S_t} N_a \hat{p}^{ab} r_b h^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (4.32)$$

para expressar o termo linear no momento em uma forma mais apropriada e assim determinar a sua variação, que explicitamente é escrito como

$$2 \delta_p \int_{\Sigma_t} N_a h^{\frac{1}{2}} \left( h^{-\frac{1}{2}} \hat{p}^{ab} \right)_{|b} d^3y = -2 \int_{\Sigma_t} N_{a|b} \delta \hat{p}^{ab} d^3y + 2 \oint_{S_t} N_a h^{-\frac{1}{2}} \delta \hat{p}^{ab} r_b \sqrt{\sigma} d^2\theta.$$

O escalar de Ricci  ${}^{(3)}R$  é independente do momento canônico, então  $\delta_p {}^{(3)}R = 0$ . Variando em seguida o termo de fronteira, observa-se que a única contribuição será

$$\delta_p \hat{H}_F = +2 \oint_{S_t} N_a h^{-\frac{1}{2}} \delta \hat{p}^{ab} r_b \sqrt{\sigma} d^2\theta. \quad (4.33)$$

Portanto, a partir dos resultados Eqs. (4.31) e (4.33) encontramos a variação do Hamiltoniano gravitacional com relação ao momento  $\hat{p}^{ab}$ , como segue

$$2\kappa \delta_p H_G = \int_{\Sigma_t} 2 \left[ N h^{-\frac{1}{2}} \left( \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p} h_{ab} \right) + N_{(a|b)} \right] \delta \hat{p}^{ab} d^3y, \quad (4.34)$$

ou convenientemente em forma compacta

$$16\pi \delta_p H_G = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_{ab} \delta \hat{p}^{ab} d^3y, \quad (4.35)$$

onde  $\mathcal{H}_{ab} = 2 \left[ N h^{-\frac{1}{2}} \left( \hat{p}^{ab} - \frac{1}{2} \hat{p} h_{ab} \right) + N_{(a|b)} \right]$ . Agora, na sequência varia-se o Hamiltoniano gravitacional com relação à métrica induzida  $h_{ab}$ .

- Variação de  $H_G$  com relação à métrica  $h_{ab}$

A variação de  $\hat{H}_\Sigma$  com relação à métrica induzida  $h_{ab}$  consiste em

$$\begin{aligned} \delta_h \hat{H}_\Sigma &= \delta_h \int_{\Sigma_t} \left[ N h^{-\frac{1}{2}} \left( \hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2 \right) - N h^{\frac{1}{2}} {}^{(3)}R \right] d^3y \\ &\quad - 2 \delta_h \int_{\Sigma_t} N_a h^{\frac{1}{2}} \left( h^{-\frac{1}{2}} \hat{p}^{ab} \right) \Big|_b d^3y, \end{aligned} \quad (4.36)$$

a última integral de (4.36) pode ser reescrita numa forma conveniente com o auxílio da Eq. (4.32).

Temos então que

$$\begin{aligned} \delta_h \hat{H}_\Sigma &= \int_{\Sigma_t} \left[ N \delta_h \left[ h^{-\frac{1}{2}} \left( \hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2 \right) \right] - N \delta_h \left( h^{\frac{1}{2}} {}^{(3)}R \right) \right] d^3y + \\ &\quad + 2 \delta_h \int_{\Sigma_t} N_{a|b} \left( h^{-\frac{1}{2}} \hat{p}^{ab} \right) \sqrt{h} d^3y - 2 \delta_h \oint_{S_t} N_a \hat{p}^{ab} r_b h^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\sigma} d^2\theta. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Após calcular a variação das quantidades em (4.37), a expressão tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta_h \hat{H}_\Sigma &= \int_{\Sigma_t} \left[ -\frac{1}{2} N h^{-\frac{1}{2}} \left( \hat{p}^{cd} \hat{p}_{cd} - \frac{1}{2} \hat{p}^2 \right) h^{ab} + 2 N h^{-\frac{1}{2}} \left( \hat{p}_c^a \hat{p}^{cb} - \frac{1}{2} \hat{p} \hat{p}^{ab} \right) + \right. \\ &\quad \left. + N h^{\frac{1}{2}} G^{ab} + 2 \hat{p}^{ca} N_{|c}^b \right] \delta h_{ab} d^3y + \int_{\Sigma_t} \left[ -N h^{\frac{1}{2}} \bar{\delta} v_{|c}^c + 2 \hat{p}_c^b N^d \delta \Gamma_{bd}^c \right] d^3y, \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde usamos novamente alguns resultados anteriores

$$\begin{aligned} \delta_h h^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} h^{\frac{1}{2}} h^{ab} \delta h_{ab}; \\ \delta_h \left( \hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2 \right) &= 2 \left( \hat{p}_c^a \hat{p}^{cb} - \frac{1}{2} \hat{p} \hat{p}^{ab} \right) \delta h_{ab}; \\ \delta_h \left( h^{\frac{1}{2}} {}^{(3)}R \right) &= -h^{-\frac{1}{2}} G^{ab} + h^{\frac{1}{2}} \bar{\delta} v_{|c}^c; \\ \delta_h N_{a|b} &= N_{|b}^c \delta h_{ac} + h_{ac} \delta \Gamma_{bd}^c N^d; \end{aligned}$$

em que  $G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2} {}^{(3)}R h^{ab}$  é o tensor de Einstein 3-dimensional, e lembramos da identidade  $h^{ab} \delta R_{ab} = \bar{\delta} v_{|c}^c$ , sendo que  $\bar{\delta} v^c = h^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c - h^{ac} \delta \Gamma_{ab}^b$ .

É possível manipular um pouco mais a expressão (4.38) a fim de escrever a última integral em função da variação  $\delta h_{ab}$ . Para isso utiliza-se o teorema de Gauss, e também o fato de

que  $\delta h_{ab}$  é identicamente zero na fronteira  $S_t$ . Portanto, com um pouco de álgebra, os termos da última integral de (4.38) são escritos explicitamente como

$$\begin{aligned} - \int_{\Sigma_t} N h^{\frac{1}{2}} \bar{\delta} v_{|c}^c d^3 y &= \int_{\Sigma_t} \left( h^{ab} N_{|d}^{|d} - N^{|ab} \right) \delta h_{ab} h^{\frac{1}{2}} d^3 y + \oint_{S_t} N h^{ab} \delta h_{ab,c} r^c \sqrt{\sigma} d^2 \theta, \\ \int_{\Sigma_t} 2 \hat{p}_c^b N^d \delta \Gamma_{bd}^c d^3 y &= - \int_{\Sigma_t} \left( h^{-\frac{1}{2}} \hat{p}^{ab} N^d \right)_{|d} \delta h_{ab} h^{\frac{1}{2}} d^3 y. \end{aligned}$$

Por fim, reescrevendo a expressão (4.38) considerando as devidas manipulações tem-se, de forma compacta, a seguinte expressão

$$\delta_h \hat{H}_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \hat{\mathcal{P}}^{ab} \delta h_{ab} d^3 y + \oint_{S_t} N h^{ab} \delta h_{ab,c} r^c \sqrt{\sigma} d^2 \theta, \quad (4.39)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}^{ab} &= N h^{\frac{1}{2}} G^{ab} - \frac{1}{2} N h^{-\frac{1}{2}} \left( \hat{p}^{cd} \hat{p}_{cd} - \frac{1}{2} \hat{p}^2 \right) h^{ab} + 2 N h^{-\frac{1}{2}} \left( \hat{p}_c^a \hat{p}^{cb} - \frac{1}{2} \hat{p} \hat{p}^{ab} \right) + \\ &+ h^{\frac{1}{2}} \left( h^{ab} N_{|d}^{|d} - N^{|ab} \right) - h^{\frac{1}{2}} \left( h^{-\frac{1}{2}} \hat{p}^{ab} N^d \right)_{|d} + 2 \hat{p}^{ca} N_{|c}^b. \end{aligned}$$

Por outro lado, a variação do termo de fronteira (4.30) com relação à métrica  $h_{ab}$  é mais simples. A única contribuição para a variação é oriunda do termo envolvendo a curvatura extrínseca  ${}^{(2)}K$ , pois ao variar o segundo termo de (4.30) deve-se levar em conta mais uma vez o fato de  $\delta h_{ab} = 0$  na fronteira  $S_t$ . Então, como não há contribuição na variação da curvatura constante  $k_0$ , temos

$$\delta_h \hat{H}_F = -2 \oint_{S_t} N \delta_h {}^{(2)}K \sqrt{\sigma} d^2 \theta. \quad (4.40)$$

De fato, a variação  $\delta_h {}^{(2)}K$  já foi calculada no capítulo anterior, expressão (3.113), a única necessidade é adequar o termo com a fronteira, ou seja

$$\delta_h {}^{(2)}K = \frac{1}{2} h^{ab} \delta h_{ab,c} r^c.$$

Logo a variação do termo de fronteira é escrita simplesmente como

$$\delta_h \hat{H}_F = - \oint_{S_t} N h^{ab} \delta h_{ab,c} r^c \sqrt{\sigma} d^2 \theta \quad (4.41)$$

Ao somarmos os resultados Eqs. (4.39) e (4.41) fica claro que as partes envolvendo termos de superfície se cancelam, possibilitando assim escrever a variação do Hamiltoniano gravitacional com relação à métrica  $\delta h_{ab}$  da seguinte forma

$$2\kappa\delta_h H_G = \int_{\Sigma_t} \hat{\mathcal{P}}^{ab} \delta h_{ab} d^3y. \quad (4.42)$$

Por fim, com auxílio dos resultados de variação Eqs. (4.35) e (4.42), podemos escrever a variação completa do Hamiltoniano gravitacional como

$$\delta H_G = \int_{\Sigma_t} \left( \hat{\mathcal{P}}^{ab} \delta h_{ab} + \mathcal{H}_{ab} \delta p^{ab} + \mathcal{H}_0 \delta N + 2\mathcal{H}_a \delta N^a \right) d^3y, \quad (4.43)$$

onde escrevemos  $\delta H_G$  em termos das variáveis originais  $\theta = \frac{\hat{\theta}}{2\kappa}$ . Note ainda que o cálculo das variações foi preciso graças aos termos de fronteira que carregamos desde o princípio e sob as condições  $\delta N = \delta N^a = \delta h_{ab} = 0$  em  $S_t$ . A seguir, utiliza-se da variação completa do Hamiltoniano gravitacional (4.43) para encontrar as equações de movimento de Hamilton.

Por se tratar de uma teoria que descreve campos (campo gravitacional) e garantindo que a teoria seja covariante a ação gravitacional pode ser escrita na forma canônica, i.e. ser expressa em termos da densidade Hamiltoniana

$$S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_{\Sigma_t} \left( \dot{h}_{ab} p^{ab} + p_N \dot{N} + p_a \dot{N}^a \right) d^3y - \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_G d^3y \right], \quad (4.44)$$

onde  $H_G = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_G d^3y$  é o Hamiltoniano total do sistema. Logo a variação da ação resulta em

$$\delta S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_{\Sigma_t} \delta \left( \dot{h}_{ab} p^{ab} + p_N \dot{N} + p_a \dot{N}^a \right) d^3y - \delta H_G \right] = 0, \quad (4.45)$$

em que  $\delta H_G$  é dado pela expressão (4.43). A variação dos primeiros termos resultam em

$$\delta \left( \dot{h}_{ab} p^{ab} \right) = \dot{h}_{ab} \delta p^{ab} - \dot{p}^{ab} \delta h_{ab} + \frac{d}{dt} \left( p^{ab} \delta h_{ab} \right),$$

note que o último termo se anula quando integrado, pois na fronteira  $\delta h_{ab} = 0$ . Ao variar a ação minimizando-a, encontra-se as equações de campo de Einstein no vácuo no formalismo

hamiltoniano, ou seja

$$\delta S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left[ - \left( \mathcal{P}^{ab} + \dot{p}^{ab} \right) \delta h_{ab} + \left( \dot{h}_{ab} - \mathcal{H}_{ab} \right) \delta p^{ab} - \mathcal{H}_0 \delta N - 2 \mathcal{H}_a \delta N^a \right] d^3 y = 0,$$

de onde segue as equações de campo

$$\dot{p}^{ab} = \mathcal{P}^{ab}, \quad \dot{h}_{ab} = \mathcal{H}_{ab}, \quad \mathcal{H}_0 = 0, \quad \mathcal{H}_a = 0.$$

Essas são as equações de campo de Einstein para o vácuo no formalismo Hamiltoniano. A seção a seguir trata-se de uma análise dos vínculos  $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_a)$  presentes na teoria.

#### 4.4 Análise dos vínculos

Como foi visto anteriormente, deparamo-nos, na descrição da hamiltoniana da RG, com a presença de vínculos, que são:  $p_N, p_a$  (vínculos primários) e  $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_a$  (vínculos secundários). O próximo passo da análise é a imposição das condições de consistência para os vínculos secundários, assim <sup>2</sup>

$$\dot{\mathcal{H}}_0 = \{\mathcal{H}_0, H_G\} \approx 0, \quad \dot{\mathcal{H}}_a = \{\mathcal{H}_a, H_G\} \approx 0, \quad (4.46)$$

onde  $H_G$  é a Hamiltoniana total do sistema dada pela expressão (4.24). Com a verificação dessa condição, i.e. ela ser fracamente nula, fechamos a estrutura de vínculos para a RG, ou seja, diante da expressão (4.46) não temos a geração de novos vínculos no sistema. Portanto, o conjunto completo de vínculos para a Relatividade Geral são:  $p_N, p^a, \mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_a$ , totalizando um número de 8 vínculos. Também, a partir da condição de consistência (4.46) é possível ver que os vínculos secundários têm parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os outros vínculos, assim como os vínculos primários. Mostraremos explicitamente a seguir que a álgebra de Poisson existente entre os vínculos  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_a$  é fechada, ou seja, não geram novos vínculos. Assim, uma vez que essas condições são satisfeitas é possível concluir que o conjunto de vínculos  $(p_N, p_a, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_a)$  é de primeira classe, pois todos os vínculos possuem parênteses de Poisson nulos entre si. Podemos concluir então que todos os vínculos presentes na teoria da RG são classificados como vínculos de primeira classe.

<sup>2</sup> Apresentamos os principais detalhes do cálculo no apêndice A.

Para mostrar que a algebra dos vínculos é fechada, relembremos que os vínculos  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_a$  são escritos como

$$\mathcal{H}_0 = 2\kappa G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} {}^{(3)}R \quad (4.47)$$

$$\mathcal{H}_a = -2h_{ac} \partial_b p^{cb} - (2\partial_b h_{ac} - \partial_a h_{cb}) p^{cb}. \quad (4.48)$$

sendo eles definidos explicitamente nas Eqs. (4.25) e (4.26), respectivamente. O vínculo Hamiltoniano  $\mathcal{H}_0$  tem a forma muito semelhante à diferença entre a energia cinética e energia potencial, sendo o primeiro termo em (4.25) quadrático no momento representa a energia cinética enquanto o escalar de curvatura  ${}^{(3)}R$  age como o potencial. Para uma facilidade nos cálculos e garantindo que estamos trabalhando com funções bem comportadas, isto é distribuições, definimos funcionais  $H_0[\xi]$  e  $\Phi[\vec{X}]$  escritos explicitamente em termos dos vínculos  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_a$  como

$$H_0[\xi] = \int_{\Sigma_t} \xi \mathcal{H}_0, \quad \Phi[\vec{X}] = \int_{\Sigma_t} X^a \mathcal{H}_a, \quad (4.49)$$

onde  $\xi$  é uma função teste suave e  $\vec{X}$  é um vetor arbitrário, ambos definidos em  $\Sigma_t$  (OKSANEN, 2013). Para duas variáveis dinâmicas  $F$  e  $G$  quaisquer, os parênteses de Poisson para campos são dados por

$$\{F(x), G(y)\} = \int_{\Sigma_t} d^3y \left( \frac{\delta F}{\delta h_{ab}} \frac{\delta G}{\delta p^{ab}} - \frac{\delta F}{\delta p^{ab}} \frac{\delta G}{\delta h_{ab}} \right).$$

Embora o cálculo dos parênteses de Poisson entre os funcionais  $H_0[\xi]$  e  $\Phi[\vec{X}]$  seja bastante extenso, é possível mostrar que eles satisfazem <sup>3</sup>

$$\{H_0[\xi], H_0[\chi]\} = \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \{\xi \mathcal{H}_0(x), \chi \mathcal{H}_0(y)\} = \Phi[\xi \vec{D}\chi - \chi \vec{D}\xi] \quad (4.50)$$

$$\{H_0[\xi], \Phi[\vec{X}]\} = \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \{\xi \mathcal{H}_0(x), X^a \mathcal{H}_a(y)\} = -H_0[\vec{X}(\xi)] \quad (4.51)$$

$$\{\Phi[\vec{X}], \Phi[\vec{Y}]\} = \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \{X^a \mathcal{H}_a(x), Y^b \mathcal{H}_b(y)\} = \Phi[[\vec{X}, \vec{Y}]], \quad (4.52)$$

sendo que  $(\xi \vec{D}\chi - \chi \vec{D}\xi) = h^{ab} (\xi D_b \chi - \chi D_b \xi)$  onde  $\vec{D}\xi = h^{ab} D_b \xi$  é a derivada covariante da função teste. Por outro lado, tem-se que o vetor  $\vec{X}$  atuando em uma função arbitrária como

<sup>3</sup> Apresentamos os principais detalhes do cálculo no apêndice A.

um campo vetorial é expresso explicitamente como  $\vec{X}(\xi) = X^a \partial_a \xi$ . E na última expressão (4.52), temos que o comutador de dois vetores é dado pela forma usual

$$[\vec{X}, \vec{Y}]^a = X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a.$$

Note que a álgebra dos vínculos é fechada nos parênteses de Poisson (4.50-4.52), ou seja, ao tomarmos os parênteses de quaisquer dois vínculos obtemos novamente um vínculo já descrito no sistema, e isso implica que cada um desses parênteses é fracamente nulo.

Está claro que pela expressão para o Hamiltoniano (4.24) os multiplicadores de Lagrange dos vínculos secundários  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_a$  são as funções arbitrárias lapso  $N$  e a função *shift*  $N^a$ , respectivamente. Ademais, a evolução no tempo das mesmas  $\dot{N} = v_N$  e  $\dot{N}^a = v^a$  corresponde à determinação de multiplicadores de Lagrange (dos vínculos primários  $p_N$  e  $p^a$ , respectivamente). Com esses resultados, vemos claramente a liberdade de *gauge* sobre elas, e com isso seus valores podem ser expressos a partir de uma escolha de uma condição de *gauge* bem definida. É justamente nos multiplicadores de Lagrange onde a liberdade de *gauge* apresenta-se no sistema. Escolher uma condição de *gauge*, ou melhor fixar um *gauge*, implica em eliminarmos os graus de liberdades espúrios do nosso sistema, como discutido no capítulo 3.

Na RG, uma escolha simples para fixar os multiplicadores de Lagrange, i.e., fixar a liberdade de *gauge* associada com os vínculos primários, é impor que a função lapso e função *shift* sejam constantes (OKSANEN, 2013). Por outro lado, para fixar os multiplicadores para os vínculos secundários é necessário impor quatro novas condições (subsidiárias) entre as componentes da métrica  $h_{ab}$  ou momento  $p^{ab}$ . Portanto as escolhas são

$$\sigma_\mu \approx 0, \quad \sigma_0 = N - 1, \quad \sigma_a = N^a, \quad \chi_\mu(h_{ab}) \approx 0, \quad (4.53)$$

onde  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , e as condições subsidiárias  $\sigma_\mu$  irão fixar os multiplicadores associados com os vínculos primários ( $p_N, p_a$ ) enquanto as condições  $\chi_\mu$  irão fixar 4 componentes da métrica induzida  $h_{ab}$ <sup>4</sup>. Consequentemente essas condições também fixarão o sistema de coordenadas no espaço-tempo.

<sup>4</sup> Como fizemos a escolha de que a condição  $\chi_\mu$  fixasse 4 das componentes da métrica induzida, os vínculos secundários  $\mathcal{H}_\mu = 0$  necessariamente irão fixar quatro componentes correspondentes do momento canônico  $p^{ab}$ , isto para que o número de variáveis no espaço de fase seja simétrico. Por outro lado, poderíamos equivalentemente ter escolhido uma condição de *gauge* que fixasse 4 componentes do momento canonicamente conjugado, de tal forma que os vínculos  $\mathcal{H}_\mu = 0$  agora fixariam 4 das componentes da métrica induzida.

A escolha das condições de *gauge* Eq. (4.53) é ditada majoritariamente de tal modo que todos os vínculos de primeira classe presentes no sistema sejam transformados em vínculos de segunda classe, e assim introduzir os parênteses generalizados de Dirac. Todavia, é ainda possível escolher que essas condições subsidiárias sejam vínculos de primeira classe, tal que a forma da matriz de vínculos seja a mais simples possível. Por fim, estas condições irão gerar vínculos de segunda classe dados por:  $\phi_b = (p_N, p^a, \sigma_\mu, \mathcal{H}_\mu, \chi_\mu)$ , permitindo assim que eles sejam tomados fortemente nulos ao impormos os parênteses de Dirac (OKSANEN, 2013).

Podemos determinar o número de graus de liberdade físicos diretamente de acordo com a análise de Dirac. Sabemos que o número de variáveis canônicas do sistema (i.e. da Relatividade Geral) são:  $2N = 20$ , onde usamos o fato da métrica induzida e o momento canônico serem simétricos em seus índices. Vimos também que os vínculos presentes na descrição canônica da RG são todos de primeira classe, logo o número destes vínculos são iguais a  $A = 8$ ,  $(p_N, p_a, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_a)$  e a  $B = 0$ . Assim, temos que, pela Eq.(3.17)

$$\text{n}^\circ \text{ de graus de liberdade físicos} = \frac{2N - 2A - B}{2} = \frac{20 - 16}{2} = 2. \quad (4.54)$$

exatamente o número de graus de liberdade físicos para o gráviton sem massa. Assim encerramos a análise dos vínculos presentes na descrição Hamiltoniana da RG. Motivados pelas ferramentas até aqui apresentadas e buscando uma melhor compreensão de um modelo alternativo à RG, a seguir apresentaremos a análise canônica da gravidade unimodular.

#### 4.4.1 Geradores de Simetria

Por fim, sobre o conteúdo de simetria da RG, segundo Dirac podemos finalmente associar os vínculos de primeira classe com os geradores de transformações *gauge* do sistema. Para a RG vimos que todos os vínculos são de primeira classe. Primeiramente, para analisar o geradores de gauge para a RG podemos reescrever o gerador  $\Phi[\vec{X}]$ , lembrando que

$$\int_{\Sigma_t} 2p^{ab}X_{a|b} = \int_{\Sigma_t} X^a \mathcal{H}_a + 2 \oint_{S_t} X_a r_b p^{ab}. \quad (4.55)$$

Ao abrirmos o termo do lado esquerdo da expressão (4.55) e compararmos com a derivada de Lie de  $h_{ab}$  ao longo do vetor  $\vec{X}$ , temos que

$$2X_{a|b} = X^c h_{ab,c} + h_{bd}X_{,a}^d + h_{ad}X_{,b}^d = \mathcal{L}_{\vec{X}}h_{ab}, \quad (4.56)$$



onde usamos a simetria nos índices  $ab$  da métrica. Podemos assim reescrever  $\Phi \left[ \vec{X} \right]$  como

$$\Phi \left[ \vec{X} \right] = \int_{\Sigma_t} p^{ab} \mathcal{L}_{\vec{X}} h_{ab} - 2 \oint_{S_t} X_a r_b p^{ab}. \quad (4.57)$$

É conhecido que o vínculo super-momento é responsável por gerar transformações infinitesimais espaciais na teoria gravitacional, enquanto o vínculo hamiltoniano é responsável por fixar o fator conforme da métrica (O’MURCHADHA; YORK, 1974). A partir da análise dos parênteses de Poisson entre as variáveis canônicas e o gerador  $\Phi \left[ \vec{X} \right]$ , as transformações para as componentes da métrica são da seguinte forma:

$$\delta h_{ab} = \left\{ h_{ab}, \Phi \left[ \vec{X} \right] \right\} = \mathcal{L}_{\vec{X}} h_{ab} \quad (4.58)$$

e da mesma forma, o vínculo super-momento também irá gerar transformações infinitesimais na variável canônica  $p^{ab}$ ,

$$\delta p^{ab} = \left\{ p^{ab}, \Phi \left[ \vec{X} \right] \right\} = \left\{ p^{ab}, \int_{\Sigma_t} p^{cd} \mathcal{L}_{\vec{X}} h_{cd} \right\} = \mathcal{L}_{\vec{X}} p^{ab}. \quad (4.59)$$

Em ambas expressões desprezamos o termo de fronteira existente considerando que o parâmetro de gauge  $X^a \rightarrow 0$  na fronteira  $S_t$ . Dizemos que as expressões (4.58) e (4.59) são as transformações infinitesimais de difeomorfismos espaciais.

## 5 ANALISE CANÔNICA DA TEORIA GRAVITACIONAL UNIMODULAR

A ideia da gravitação unimodular é tão velha como a própria RG, sendo proposta também por Einstein ao impor a condição unimodular (EINSTEIN, 1916)

$$\sqrt{-g} = 1 \quad (5.1)$$

como uma maneira de fixar parcialmente um sistema de coordenadas na RG, simplificando assim o cálculo em algumas situações. Por ser uma das modificações mais simples da RG, a teoria unimodular ganhou bastante atenção recentemente, sendo analisada em contextos formal e também em aplicações cosmológicas (BUCHMULLER; DRAGON, 1988; HENNEAUX; TEITELBOIM, 1989; PADILLA; SALTAS, 2015; ALVAREZ et al., 2015; JAIN et al., 2012). A fim de explorar as diferenças da gravidade unimodular (GU) quanto à RG, principalmente quanto ao conteúdo físico e também de simetrias, abordaremos a estrutura canônica da GU (BUFALO; OKSANEN; TUREANU, 2015).

### 5.1 Gravidade Unimodular

Em nível Lagrangiano, é necessário realizar que  $\sqrt{-g}$  é uma densidade escalar, logo precisamos substituir a condição unimodular por

$$\sqrt{-g} = \varepsilon_0 \quad (5.2)$$

onde  $\varepsilon_0$  é uma densidade escalar fixa, basicamente esta condição fornece um elemento de volume fixo no espaço-tempo. Em relação ao conteúdo de simetria, sabe-se que a RG é invariante por difeomorfismos, que de fato corresponde à variação infinitesimal do tensor métrico

$$x'^{\mu}(x) = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \rightarrow \delta g_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} \xi_{\nu} + \nabla_{\nu} \xi_{\mu}$$

onde  $\xi^{\mu}$  é um campo vetorial. A GU também é invariante sob difeomorfismo, no entanto ela é um grupo restrito de difeomorfismo (Difeomorfismo transverso-TDiff), que preserva o determinante da métrica

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \sqrt{-g} = 0, \quad (5.3)$$

logo é fácil verificar que

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu) = 0$$

que resulta na condição

$$\nabla_\mu\xi^\mu = 0 \quad (5.4)$$

que de fato vincula a simetria da GU para o Difeomorfismo transverso (covariante).

Quanto ao conteúdo dinâmico da GU, em princípio ela não altera as equações de campo de Einstein classicamente. A grande diferença é o fato da constante cosmológica surgir como uma constante de integração, sem a necessidade de realizarmos um acoplamento mínimo na ação de Einstein-Hilbert (como geralmente é proposto). A ação que descreve a equação de campo para a gravidade unimodular é escrita como segue

$$S_{GU} = \int d^4x \left( \frac{\sqrt{-g}R}{\kappa} - \lambda(\sqrt{-g} - \varepsilon_0) \right) + \frac{2}{\kappa} \oint_{\partial M} d^3y \sqrt{h}K + S_m, \quad (5.5)$$

em que a condição (5.2) é adicionada na ação como um vínculo por meio da inclusão de um multiplicador de Lagrange  $\lambda$ ,  $S_m$  é a ação devido aos campos de matéria. Note ainda que a quantidade  $\varepsilon_0 d^4x$  corresponde a um elemento de volume fixo. Podemos usar o princípio da mínima ação para encontrarmos as equações de campo. Variando então a ação em relação à métrica, obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{\kappa}{2}\lambda g_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu}, \quad (5.6)$$

sendo que o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  é idêntico ao obtido quando demonstramos às equações de Einstein (3.109). Usando a conservação do tensor energia-momento e a identidade de Bianchi ( $\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0$ , em que  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein), a partir da expressão (5.6), encontra-se

$$\nabla_\mu\lambda = 0, \quad (5.7)$$

implicando que  $\lambda$  seja uma constante de integração. Realizando uma escolha apropriada  $\lambda = \frac{2}{\kappa}\Lambda$ , onde  $\Lambda$  é de fato a constante cosmológica, podemos reescrever (5.6) como a equação de

Einstein com constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu}.$$

Em resumo, embora sejam classicamente equivalentes, a principal diferença da teoria unimodular com a RG é que estamos restritos a usar sistemas de coordenadas que satisfaçam a condição (5.2).

Dentre as diferentes propostas da teoria unimodular, gostaríamos de chamar atenção àquelas que propõem a extensão da condição  $\sqrt{-g} = \varepsilon_0$  para uma versão que seja invariante por difeomorfismos, tendo assim o mesmo conteúdo de simetria da RG. A principal ideia por trás dessas propostas é fazer uso da invariância da ação de Einstein-Hilbert e de matéria frente à parametrização das coordenadas do espaço-tempo (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1989). Consideremos a transformação  $x^\alpha \rightarrow X^\alpha(x)$ , sendo  $x$  as coordenadas usuais do espaço-tempo, enquanto  $X$  são variáveis (restritas) da teoria unimodular, sob essa mudança os termos de Einstein-Hilbert e de matéria são invariantes. Agora, a parte com o elemento de volume fixo transforma como  $\int d^4x \varepsilon_0 \lambda \rightarrow \int d^4x \varepsilon_0 \lambda |\partial_\mu X^\alpha|$ , sendo  $|\partial_\mu X^\alpha|$  o determinante do Jacobiano da transformação, com isso é possível identificar a condição unimodular invariante por difeomorfismos como

$$\sqrt{-g} = \partial_\mu \tau^\mu. \quad (5.8)$$

A partir dessa nova condição proposta por Henneaux-Teitelboim (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1989), que consiste na identificação do determinante do tensor métrico sendo igual ao divergente de uma densidade vetorial  $\tau^\mu$ , é possível escrever uma nova ação unimodular

$$\begin{aligned} S_{HT} = & \int_M d^4x \left( \frac{\sqrt{-g}R}{\kappa} - \lambda (\sqrt{-g} - \partial_\mu \tau^\mu) \right) \\ & + \oint_{\partial M} d^3y \left( \frac{2}{\kappa} \sqrt{h}K - \lambda r_\mu \tau^\mu \right) + S_m \end{aligned} \quad (5.9)$$

sendo que é necessário identificar a densidade vetorial  $\tau^\mu$  com o Jacobiano da transformação como  $\tau^\mu = 4! \delta_\alpha^{[\mu} \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\rho \delta_\delta^{\sigma]} X^\alpha \partial_\nu X^\beta \partial_\rho X^\gamma \partial_\sigma X^\delta$ .

Uma segunda forma para a teoria unimodular invariante sob difeomorfismos foi proposta em (BUFALO; OKSANEN; TUREANU, 2015), e é escrita como

$$S_{DUG} = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{\kappa} - \lambda - V^\mu \nabla_\mu \lambda \right) + \frac{2}{\kappa} \oint_{\partial M} d^3y \sqrt{h}K + S_m. \quad (5.10)$$

nesta forma, é possível interpretar que esta ação consiste das contribuições dos termos de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica variável  $\lambda$ , além de um vínculo usual sob  $\lambda$ , i.e.  $\nabla_\mu \lambda = 0$ , enquanto o campo vetorial  $V^\mu$  faz o papel de um multiplicador de Lagrange  $\nabla_\mu V^\mu = 1$ .

De fato, é possível estabelecer que as expressões (5.9) e (5.10) são equivalentes classicamente, se tomamos

$$\int_M d^4x \lambda \partial_\mu \tau^\mu = \oint_{\partial M} d^3y \lambda r_\mu \tau^\mu - \int_M d^4x \tau^\mu \nabla_\mu \lambda \quad (5.11)$$

onde efetuamos uma integração por partes. Ao substituir em (5.9) e fazermos  $\tau^\mu = \sqrt{-g} V^\mu$  na expressão (5.11) temos como resultado a expressão (5.10).

Consideraremos a seguir a ação dada em (5.10), estudando seu conteúdo físico e de simetria a partir do formalismo canônico de Dirac para sistemas com vínculos como discutido nos capítulos anteriores.

## 5.2 Hamiltoniano da Gravidade Unimodular.

A análise canônica para a ação (5.10) segue o mesmo procedimento desenvolvido para a análise canônica da teoria gravitacional de Einstein apresentada anteriormente no capítulo 4. Na descrição canônica o campo vetorial  $V^\mu$  também é decomposto em uma parte paralela e tangente à hipersuperfície  $\Sigma_t$  como segue

$$V^\mu = V'^\mu - n^\mu V_n, \quad V'^\mu = h_V^\mu V^\nu, \quad V_n = n_\mu V^\mu, \quad (5.12)$$

sendo que  $h_V^\mu$  é o operador de projeção dado por (3.46) e  $n^\mu$  é o vetor normal unitário à  $\Sigma_t$ . Podemos assim aplicar a decomposição na ação (5.10), obtendo-a na forma canônica decomposta na hipersuperfície  $\Sigma_t$

$$S_{DUG} = \int dt \int_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{h} N \left[ \frac{1}{\kappa} \left( {}^{(3)}R + K_{ab} K^{ab} - K^2 \right) - \lambda - V^i \partial_i \lambda + V_n \nabla_n \lambda \right] + S_F + S_m \quad (5.13)$$

onde fizemos uso da decomposição  $V^\mu \nabla_\mu \lambda = V^i \partial_i \lambda - V_n \nabla_n \lambda$  e identificamos

$$S_F = \frac{2}{\kappa} \int dt \int d^2\theta N \sqrt{\sigma} {}^{(2)}K$$

como a ação referente à contribuição da fronteira, cuja forma é idêntica à encontrada na análise da teoria gravitacional e  $S_m$  é a ação referente aos campos de matéria. Na sequência, a densidade lagrangiana pode ser identificada a partir da expressão (5.13)

$$\mathcal{L} = \sqrt{h}N \left[ \frac{1}{\kappa} \left( {}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right) - \lambda - V^i \partial_i \lambda + V_n \nabla_n \lambda \right]. \quad (5.14)$$

Podemos trabalhar um pouco mais o último termo a fim de explicitar a dependência temporal da ação. Assim, manipulando o termo  $\nabla_n \lambda = n^\mu \nabla_\mu \lambda$  obtemos

$$\begin{aligned} n^\mu \nabla_\mu \lambda &= n^0 \nabla_0 \lambda + n^i \nabla_i \lambda \\ &= \frac{1}{N} \partial_0 \lambda - \frac{N^i}{N} \partial_i \lambda \\ &= \frac{1}{N} \left( \dot{\lambda} - N^i \partial_i \lambda \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde usamos a decomposição ADM do vetor unitário  $n^\mu = \left( \frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N} \right)$ . Usando agora a expressão (5.15) na densidade lagrangiana fica explicito a dependência com relação a  $\dot{\lambda}$ .

$$\mathcal{L}_{GU} = \frac{\sqrt{h}N}{\kappa} \left( {}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right) - \sqrt{h}N\lambda \quad (5.16)$$

$$- \sqrt{h}NV^i \partial_i \lambda + \sqrt{h}V_n \dot{\lambda} - \sqrt{h}N^i \partial_i \lambda. \quad (5.17)$$

Começamos a nossa análise da expressão para a densidade lagrangiana (5.2) ao calcularmos os momentos canonicamente conjugados às variáveis do sistema,<sup>1</sup> a partir dessas expressões é possível encontrar os vínculos primários do sistema

$$\pi_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} \approx 0, \quad \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}^i}, \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}^i} \approx 0, \quad p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}_n} \approx 0. \quad (5.18)$$

Há um outro vínculo primário relacionado com o momento canonicamente conjugado  $p_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}}$ , vemos assim que

$$C_\lambda = p_\lambda - \sqrt{h}V_n \approx 0. \quad (5.19)$$

<sup>1</sup> Observe que estamos redefinindo os símbolos para os momentos canonicamente conjugados que definimos na análise da teoria gravitacional:  $p_N \rightarrow \pi_N, p_a \rightarrow \pi_i$ . Assim também, como iremos utilizar índices gregos e latinos diferentes, mas eles variam de mesma forma  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$  e  $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ .

As variáveis canônicas e os seus respectivos momentos canonicamente conjugados para este sistema são:  $(N, N^i, h_{ij}, \lambda, V^i, V_n)$  e  $(\pi_N, \pi_i, \pi^{ij}, p_\lambda, p_i, p_n)$ . Os parênteses de Poisson fundamentais entre essas variáveis são dados por

$$\begin{aligned} \{h_{ij}(x), \pi^{kl}(y)\} &= \delta_i^{(k} \delta_j^{l)} \delta(x-y); \\ \{N(x), \pi_N(y)\} &= \delta(x-y); \quad \{N^i(x), \pi_j(y)\} = \delta_j^i \delta(x-y); \\ \{\lambda(x), p_\lambda(y)\} &= \delta(x-y); \quad \{V_n(x), p_n(y)\} = \delta(x-y); \\ \{V^i(x), p_j(y)\} &= \delta_j^i \delta(x-y). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Escrevemos a densidade hamiltoniana através de uma transformação de Legendre das variáveis canônicas

$$\mathcal{H}_{GU} = \dot{h}_{ij} \pi^{ij} + \dot{N} \pi_N + \dot{N}^i \pi_i + \dot{V}^i p_i + \dot{V}_n p_n + \dot{\lambda} p_\lambda - \mathcal{L}_{GU}, \quad (5.21)$$

sendo que  $\pi^{ij}$  é dado por (4.16). Substituindo a expressão da densidade lagrangiana, é possível escrever a densidade Hamiltoniana em termos somente das variáveis canônicas, temos assim que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{GU} &= N \left[ \frac{\kappa}{\sqrt{h}} \pi^{ij} G_{ijkl} \pi^{kl} - \frac{\sqrt{h}}{\kappa} {}^{(3)}R + \sqrt{h} \lambda + \sqrt{h} V^i \partial_i \lambda \right] + 2\pi^{ij} D_{(i} N_{j)} \\ &+ \dot{N} \pi_N + \dot{N}^i \pi_i + \dot{V}^i p_i + \dot{V}_n p_n + \dot{\lambda} p_\lambda + \sqrt{h} N^i \partial_i \lambda, \end{aligned} \quad (5.22)$$

em que  $G_{ijkl}$  é a métrica de Dewitt (4.20). O hamiltoniano total  $H_{GU}$  para a teoria unimodular é dado pela integral da densidade hamiltoniana sobre  $\Sigma_t$ , assim

$$H_{GU} = \int_{\Sigma_t} d^3y \left[ N \mathcal{H}_T + N^i \mathcal{H}_i + v_N \pi_N + v_N^i \pi_i + v_\lambda C_\lambda + v_n p_n + v^i p_i \right] + H_F, \quad (5.23)$$

onde  $v_N, v_N^i, v_\lambda, v_n, v^i$  são os multiplicadores de Lagrange associados com os vínculos primários. Já as expressões para o vínculo Hamiltoniano  $\mathcal{H}_T$  e super-momento  $\mathcal{H}_i$  são semelhantes às expressões encontradas anteriormente

$$\mathcal{H}_T = \frac{\kappa}{\sqrt{h}} \pi^{ij} G_{ijkl} \pi^{kl} - \frac{\sqrt{h}}{\kappa} {}^{(3)}R + \sqrt{h} \lambda + \sqrt{h} V^i \partial_i \lambda \quad (5.24)$$

$$\mathcal{H}_i = -2h_{ij} D_k \pi^{jk} + \partial_i \lambda p_\lambda \quad (5.25)$$

Ademais, temos que hamiltoniano devido aos termos de fronteira  $H_F$  é idêntico ao da RG

$$H_F = -\frac{2}{\kappa} \oint_{S_t} d^2\theta N^{(2)}K + 2 \oint_{S_t} d^2\theta N_i r_j \pi^{ij}.$$

Por fim, para que o super-momento gere difeomorfismos espaciais em  $\Sigma_t$  para todas as variáveis, acrescenta-se um termo relacionado ao vínculo  $p_n$ , de tal forma que

$$\mathcal{H}_i = -2h_{ij}D_k\pi^{jk} + \partial_i\lambda p_\lambda + \partial_i V_n p_n, \quad (5.26)$$

Diante desta construção do Hamiltoniano (5.23) podemos agora proceder para a análise da estrutura dos vínculos da teoria unimodular.

### 5.2.1 Análise canônica dos vínculos

Até o momento na construção do Hamiltoniano identificamos os respectivos vínculos primários, dados pelas expressões (5.18) e (5.15). De acordo com o método de Dirac, estes vínculos devem ser preservados na evolução temporal, ou seja, é necessário impor condições de consistência, sendo possível que vínculos secundários sejam incorporados ao sistema. A condição de consistência dos vínculos  $(\pi_N, \pi_i)$ , geram os seguintes vínculos secundários

$$\dot{\pi}_N = \{\pi_N, H_{GU}\} = \mathcal{H}_T \approx 0;$$

$$\dot{\pi}_i = \{\pi_i, H_{GU}\} = \mathcal{H}_i \approx 0.$$

Em seguida, ao impormos a condição de consistência ao vínculo  $p_i$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H_{GU}\} = N\sqrt{h}\partial_i\lambda \approx 0, \quad (5.27)$$

vemos assim a necessidade de introduzir um novo vínculo secundário ao sistema

$$C_i = \partial_i\lambda \approx 0. \quad (5.28)$$

Desta forma, o Hamiltoniano total é reescrito levando em conta os vínculos secundários

$$H_{GU} = \int_{\Sigma_t} d^3y [N\mathcal{H}_T + N^i\mathcal{H}_i + v_N\pi_N + v_N^i\pi_i + v_\lambda C_\lambda + v_n p_n + v^i p_i + v_\lambda^i C_i] + H_F. \quad (5.29)$$



Já a condição de consistência para o vínculo  $C_\lambda$  é mais complicada, e os parênteses de Poisson que contribuirão neste caso são

$$\begin{aligned}\dot{C}_\lambda &= \{C_\lambda, H_{GU}\} \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3y \{C_\lambda, N\mathcal{H}_T\} + \int_{\Sigma_t} d^3y \{C_\lambda, N^i\mathcal{H}_i\} \\ &\quad + \int_{\Sigma_t} d^3y \{C_\lambda, v_\lambda^i C_i\} + \int_{\Sigma_t} d^3y \{C_\lambda, v_n p_n\} \approx 0.\end{aligned}$$

A seguir vamos calcular cada um desses parênteses de Poisson. Usando a definição do vínculo  $C_\lambda$  e de  $\mathcal{H}_T$ , expressão (5.19) e (5.24), respectivamente, temos que

$$\int_{\Sigma_t} d^3y \{C_\lambda, N\mathcal{H}_T\} = -N\sqrt{h} + \frac{\kappa}{2} N h_{ij} \pi^{ij} V_n. \quad (5.30)$$

Em seguida, a partir da definição para  $C_\lambda$  e  $\mathcal{H}_i$ , expressão (5.19) e (5.26), respectivamente, segue

$$\int_{\Sigma_t} d^3y \{C_\lambda, N^i\mathcal{H}_i\} = \partial_i (N^i C_\lambda) \approx 0,$$

onde usamos a definição para o vínculo  $C_\lambda$ . Ademais, a partir das expressões para  $C_\lambda$  e  $C_i$ , temos

$$\int_{\Sigma_t} d^3y \{C_\lambda, v_\lambda^i C_i\} = \partial_i v_\lambda^i.$$

Por fim, é fácil obter que

$$\int_{\Sigma_t} d^3y \{C_\lambda, v_n p_n\} = -\sqrt{h} v_n.$$

Portanto, substituindo todos esses resultados na condição de consistência para o vínculo  $C_\lambda$ , encontramos que

$$\dot{C}_\lambda \approx -N\sqrt{h} + \frac{\kappa}{2} N h_{ij} \pi^{ij} V_n - \sqrt{h} v_n + \partial_i v_\lambda^i \approx 0. \quad (5.31)$$

desse resultado podemos determinar o multiplicador de Lagrange  $v_n$  como sendo

$$v_n = -N + \frac{\kappa}{2\sqrt{h}} h_{ij} \pi^{ij} V_n + \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i v_\lambda^i.$$

Nos resta agora impor a condição de consistência ao vínculo  $p_n$ , obtendo

$$\dot{p}_n = \{p_n, H_{GU}\} = -\sqrt{h} v_\lambda \approx 0 \quad (5.32)$$

o que implica que o multiplicador de Lagrange  $v_\lambda$  é fixado como

$$v_\lambda = 0.$$

A condição de consistência foi imposta a todos os vínculos primários, mas antes de começar a classificação deles, é ainda necessário impor as condições aos vínculos secundários  $(\mathcal{H}_T, \mathcal{H}_i, C_i)$  agora podemos classificá-los em vínculos de primeira ou segunda classe. Todavia, podemos simplificar o hamiltoniano (5.29) ao impormos os valores fixados acima para os multiplicadores de Lagrange  $v_n$  e  $v_\lambda$ . Portanto, substituindo esses multiplicadores de Lagrange no hamiltoniano (5.29) e reescrevendo convenientemente os termos,

$$H_{GU} = \int_{\Sigma_t} d^3y [N \mathcal{H}'_T + N^i \mathcal{H}'_i + v_N \pi_N + v_N^i \pi_i + v^i p_i + v_\lambda^i C'_i] + H_F \quad (5.33)$$

sendo que agora temos

$$\mathcal{H}'_T = \mathcal{H}_T - p_n + \frac{\kappa}{2\sqrt{h}} h_{ij} \pi^{ij} V_n \approx 0 \quad (5.34)$$

$$\mathcal{H}'_i = \frac{\kappa}{\sqrt{h}} \pi^{ij} G_{ijkl} \pi^{kl} - \frac{\sqrt{h}}{\kappa} {}^{(3)}R + \sqrt{h} \lambda \approx 0 \quad (5.35)$$

$$C'_i = C_i - \partial_i \left( \frac{p_n}{\sqrt{h}} \right) \approx 0. \quad (5.36)$$

Se mostra conveniente reescrever os vínculos secundários como funcionais de funções suaves, de maneira que

$$\mathcal{H}_T[\xi] = \int_{\Sigma_t} \xi \mathcal{H}_T, \quad \Phi[\chi^i] = \int_{\Sigma_t} \chi^i \mathcal{H}_i, \quad C[\eta^i] = \int_{\Sigma_t} \eta^i \partial_i \lambda.$$

Impondo a condição de consistência para esses vínculos, encontramos que

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{H}_T [\xi] &= \{ \mathcal{H}_T [\xi], H_{GU} \} \approx 0, & \partial_t \Phi [\chi^i] &= \{ \Phi [\chi^i], H_{GU} \} \approx 0, \\ \partial_t C [\eta^i] &= \{ C [\eta^i], H_{GU} \} \approx 0,\end{aligned}\tag{5.37}$$

ou seja, não há a geração de nenhum vínculo adicional. É importante enfatizar que para determinar esses resultados primeiramente calculamos a álgebra desses vínculos como

$$\begin{aligned}\{ \mathcal{H}_T [\xi], \mathcal{H}_T [\eta] \} &= \int_{\Sigma_t} (\xi \partial_i \eta - \partial_i \xi) h^{ij} (\mathcal{H}_j - p_\lambda C_j - \partial_j V_n p_n) \\ \{ \Phi [\chi^i], \mathcal{H}_T [\xi] \} &= \mathcal{H}_T [\chi^i \partial_i \eta] \\ \{ \Phi [\chi^i], \Phi [\psi^j] \} &= \Phi [\chi^j \partial_j \psi^i - \psi^j \partial_j \chi^i] \\ \{ \mathcal{H}_T [\xi], C [\eta^i] \} &= 0 \\ \{ \Phi [\chi^i], C [\eta^j] \} &= C [\chi^i \partial_j \eta^j],\end{aligned}$$

sendo que esses resultados foram obtidos a partir do cálculo apresentado em detalhes no Apêndice A. Podemos assim concluir que todos os vínculos secundários são preservados no tempo, pois a álgebra deles é fechada.

Uma vez obtidos todos os vínculos da teoria e determinado a álgebra que todos satisfazem, podemos finalmente classificar os vínculos, como sendo vínculos de primeira classe cujo o parêntese de Poisson entre todos os outros vínculos são fracamente nulo, que são:  $\mathcal{H}_T$ ,  $\mathcal{H}_i$ ,  $C_i$ ,  $\pi_N$ ,  $\pi_i$ ,  $p_i$ , enquanto que os vínculos de segunda classe são aqueles que possuem parênteses de Poisson diferentes de fracamente nulo com qualquer outro vínculo, que são dois:  $p_n \approx 0$  e  $C_\lambda \approx 0$ .

É importante notar todavia que, uma vez que os vínculos de primeira classe são interpretados como os geradores do grupo de simetria do sistema, se mostra necessário clarificar a natureza do vínculo  $C_i$ . Não somente a contagem e identificação dos graus de liberdade físicos são afetadas pela natureza de  $C_i$ , mas o fato dele ter integral nula sobre  $\Sigma_t$ , i.e.  $\int_{\Sigma_t} \partial_i \lambda = 0$ , implica que ele seja linearmente dependente, ou seja que o valor de  $\lambda$  para  $x_i \rightarrow \pm\infty$  para cada  $i = 1, 2, 3$  é o mesmo. Todavia, é possível reescrever o vínculo  $C_i = \partial_i \lambda$  equivalentemente como um único vínculo local ao invés de um gradiente. Iremos tratar este problema da forma como sugerido em (BUFALO; OKSANEN, 2018).

Dessa forma substituímos o gradiente de uma função escalar  $\lambda$  introduzindo uma nova função  $q(t)$  que dependa somente do tempo, assim

$$C_i = \partial_i \lambda \approx 0 \rightarrow \bar{C} = \lambda - q(t) \approx 0. \quad (5.38)$$

Essa operação é claramente equivalente pois ao tomarmos o gradiente o vínculo é satisfeito, e por outro lado isso é possível pois  $C_i$  é invariante sob a mudança  $\lambda \rightarrow \lambda - q(t)$ . Ademais, o novo vínculo  $\bar{C}$  não compartilha a dependência linear que os vínculos iniciais apresentavam. Ao redefinirmos o vínculo, é necessário lembrar que ao fixarmos os valores dos multiplicadores de Lagrange, obtemos uma nova expressão para o vínculo

$$\begin{aligned} C'_i &= C_i - \partial_i \left( \frac{p_n}{\sqrt{h}} \right) \approx 0 \\ &= \partial_i \left( \lambda - \frac{p_n}{\sqrt{h}} \right) \approx 0 \end{aligned}$$

e conseqüentemente devemos ter que

$$\bar{C}' = \lambda - \frac{p_n}{\sqrt{h}} - q(t) \approx 0. \quad (5.39)$$

Por fim, podemos reescrever o Hamiltoniano total (5.33) em termos deste vínculo com seu respectivo multiplicador de Lagrange  $\bar{v}_\lambda$ , como segue

$$H_{GU} = \int_{\Sigma_t} d^3y [N \mathcal{H}'_T + N^i \mathcal{H}'_i + v_N \pi_N + v_N^i \pi_i + v^i p_i + \bar{v}_\lambda \bar{C}'] + H_F. \quad (5.40)$$

Devemos ainda reconhecer que a evolução temporal da variável  $q$  não é determinada pelas equações de movimento (note que  $H_{GU}$  não depende do momento canonicamente conjugado à  $q$ ). Essa condição assegura que  $q$  seja uma função arbitrária do tempo, que carrega um único grau de liberdade, chamado de modo zero.

Podemos finalmente concluir que o conjunto  $(\mathcal{H}'_T, \mathcal{H}'_i, \bar{C}, \pi_N, \pi_i, p_i)$  consiste de 12 vínculos de primeira classe, enquanto  $(p_n, C_\lambda)$  são 2 vínculos de segunda classe. Logo, podemos aplicar o método de Dirac (3.17) na contagem do número de graus de liberdade físico da teoria unimodular descrito pela ação (5.10), então

$$\text{n}^\circ \text{ de graus de liberdade físicos} = \frac{2N - 2A - B}{2} = \frac{30 - 24 - 2}{2} = 2. \quad (5.41)$$

dessa forma concluímos que a teoria unimodular possui os mesmos 2 graus de liberdade físicos da RG e uma variável temporal adicional  $q(t)$ , este modo zero descreve de fato a constante cosmológica (BUFALO; OKSANEN; TUREANU, 2015).

Sobre o conteúdo de simetria da teoria unimodular é necessário agora analisar os geradores de *gauge* do sistema, que segundo Dirac consiste nos vínculos de primeira classe. Um gerador de *gauge* é definido da seguinte maneira

$$G[\varepsilon] = \int_{\Sigma_t} \sum_{a=1}^A \varepsilon_a \Phi_a, \quad (5.42)$$

em que  $\Phi_a$  são os vínculos de primeira classe e  $\varepsilon_a$  é um parâmetro independente das variáveis canônicas (ainda assim uma função contínua de  $x$ ). Por outro lado, uma variável dinâmica arbitrária  $F$  é dita invariante de *gauge* se possuir parênteses de Dirac (3.13) nulo com o gerador da transformação

$$\delta F = \{F, G[\varepsilon]\}_D = 0.$$

Como nós discutimos anteriormente já é conhecido na RG que o vínculo hamiltoniano  $\mathcal{H}_T$  é o responsável por fixar o fator conforme da métrica induzida  $h_{ij}$ , enquanto o supermomento  $\mathcal{H}_i$  é responsável pelos difeomorfismos espaciais (O'MURCHADHA; YORK, 1974).

Agora para o vínculo  $p_i$ , temos que ele gera uma transformação de *gauge* no vetor  $V^i$  da seguinte forma

$$\delta V^i = \left\{ V^i, \int_{\Sigma_t} \varepsilon^j p_j \right\} = \varepsilon^i, \quad (5.43)$$

onde  $\varepsilon^i$  é um parâmetro de *gauge* infinitesimal, neste caso os parênteses de Dirac são iguais aos parênteses de Poisson. Isso nos sugere que façamos uma escolha de *gauge*, fixando o valor de  $V^i = 0$ . Já a variável  $p_\lambda$  também pode ser fixada, se observamos que o vínculo  $\bar{C}$  gera uma transformação de *gauge*

$$\delta p_\lambda = \left\{ p_\lambda, \int_{\Sigma_t} d^3y \bar{\varepsilon} \bar{C} \right\} = -\bar{\varepsilon}.$$

E com o vínculo  $C'_i$ , tem-se

$$\delta p_\lambda = \left\{ p_\lambda, \int_{\Sigma_t} d^3y \varepsilon^i C'_i \right\} = \partial_i \varepsilon^i,$$

No que uma vez que o parêntese de Poisson é calculado em tempo fixo, a presença da variável  $q(t)$  não altera o resultado final dos parênteses de Poisson calculados acima. Podemos assim, fixar o *gauge* livre ajustando  $p_\lambda = 0$ .

A partir da discussão anterior podemos escolher algumas condições de *gauge*, tal que possamos fixar alguns dos vínculos de primeira classe:  $(C_\lambda, p_n, V^i, p_i, \bar{C}, p_\lambda)$ . Na sequência esses vínculos de segunda classe podem ser feitos fortemente iguais a zero, basta substituímos os parênteses de Poisson pelos de Dirac e assim eliminamos as variáveis canônicas:

$$\begin{aligned} p_\lambda = 0, \quad \bar{C} = \lambda - q(t) = 0 \\ C_\lambda = p_\lambda - \sqrt{\hbar} V_n = 0, \quad V_n = 0 \\ V^i = 0, \quad p_i = 0. \end{aligned}$$

Finalmente o Hamiltoniano pode ser reescrito:

$$H = \int_{\Sigma_t} d^3y [N \mathcal{H}_T + N^i \mathcal{H}_i + v_N \pi_N + v_N^i \pi_i], \quad (5.44)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_T = \frac{\kappa}{\sqrt{\hbar}} \pi^{ij} G_{ijkl} \pi^{kl} - \frac{\sqrt{\hbar}}{\kappa} {}^{(3)}R + \sqrt{\hbar} q(t) \approx 0, \\ \mathcal{H}_i = -2h_{ij} D_k \pi^{jk} \approx 0. \end{aligned}$$

É fácil ver que após eliminarmos os graus de liberdade espúrios, a forma funcional do hamiltoniano (5.44) é a mesma que a da RG com a adição do modo zero  $q(t)$  descrevendo a constante cosmológica. As condições de *gauge* para fixar as variáveis canônicas restantes podem ser escolhidas iguais às da RG, isto é

$$\sigma_\mu \approx 0, \quad \sigma_0 = N - 1, \quad \sigma_a = N^a, \quad \chi_\mu(h_{ab}) \approx 0. \quad (5.45)$$

Devido à estrutura do hamiltoniano acima concluímos que a teoria unimodular possui os mesmos 2 graus de liberdade físicos da RG e uma variável temporal adicional  $q(t)$ , este modo zero descreve de fato a constante cosmológica.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fundamentada no formalismo de teoria de campos, a descrição dos grávitons <sup>1</sup> impõe que classicamente o campo gravitacional tenha dois graus de liberdade. É conhecido que a variável responsável pela dinâmica do espaço-tempo, ou seja, do campo gravitacional é o tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ . Este tensor é escrito como uma matriz simétrica de 16 componentes, ou seja são 10 componentes independentes. Destacamos no trabalho que ao realizar a decomposição de hipersuperfícies em termos das variáveis ADM é possível eliminar outras quatro variáveis que surgem como variáveis expúrias (a função lapso  $N$  e o vetor *shift*  $N^a$ ), restando então seis variáveis dinâmicas  $h_{ij}$ . Na contagem dos graus de liberdade no formalismo hamiltoniano ainda há uma incompatibilidade com aqueles descritos pela teoria de campos para o gráviton. Mostramos que essa incompatibilidade entre o número de graus de liberdade é resolvido com a devida análise canônica da teoria gravitacional, o que permite interpretar a RG como uma teoria de *gauge* consistindo de um sistema físico com vínculos de primeira classe. Essa análise canônica quando efetuada corretamente, permite a contagem precisa desses graus de liberdade tal que ele esteja de acordo com os possíveis estados de polarização.

A análise canônica, apesar de ser uma proposta clássica ela tem um potencial muito grande. Por meio dela exploramos as características fundamentais (graus de liberdade físicos) de qualquer teoria clássica, além dela ser responsável pela estrutura fundamental da quantização canônica de uma teoria de campos. Neste trabalho tratamos da análise da teoria gravitacional descrita pela RG, como mencionado no parágrafo anterior. Utilizamos a análise canônica para explorar as características fundamentais de uma teoria alternativa à RG; a teoria unimodular. A teoria unimodular ganha destaque na literatura por sua semelhança clássica à da RG, sendo que a constante cosmológica aparece neste contexto como uma constante de integração em nível das equações de campo, e assim a teoria surge como um dos modelos alternativos na busca de explicações de determinados fenômenos que a RG não consegue explicar, como exemplo a constante cosmológica  $\Lambda$ , como mostrado na seção 5.1.

Ao longo deste trabalho vimos que ao tratar a RG e a teoria unimodular na forma canônica deparamos em suas descrições um sistema altamente vinculado. Vale destacar aqui, que a descrição dos vínculos entre a RG e teoria unimodular se apresentaram distintamente. De fato, o modelo que estudamos consiste em uma extensão de gravidade unimodular cuja densidade lagrangiana possui graus de liberdade a mais que são adicionados à dinâmica do campo

---

<sup>1</sup> O gráviton é a possível partícula de spin-2 mediadora da interação gravitacional.



gravitacional. No entanto, por meio da análise de consistência dos vínculos descritos na teoria unimodular conseguimos eliminar os graus de liberdade redundantes presentes na teoria, tal que os graus de liberdade restantes ao final da análise coincidem com os do campo gravitacional, o que se mostrou satisfatório sabendo da semelhança em nível clássico entre a RG e a teoria unimodular. Mas para isso, a natureza do vínculo  $\partial_i \lambda \approx 0$  teve que ser clarificada. Para isso, introduzimos uma nova variável a fim de substituir o vínculo da seguinte forma  $\partial_i \lambda \approx 0 \rightarrow \lambda - q(t) \approx 0$  (conforme apresentado na seção 5.2.1), isto nos permitiu estabelecer uma nova interpretação para a constante cosmológica que na forma funcional do hamiltoniano se apresenta como sendo a função  $q(t)$ . Não exploramos um modelo cosmológico para interpretar a função  $q(t)$ , por outro lado há trabalhos nesse caminho, como exemplo (JAIN et al., 2012). A análise canônica da teoria unimodular aplicada ao universo de Schwarzschild pode também ser analisado como perspectivas (buracos negros esfericamente simétricos, estáticos e não carregados).

Outra característica importante da análise hamiltoniana é a estruturação das bases para a quantização canônica a partir do princípio de correspondência de Heisenberg. Sabemos que a RG não é uma teoria consistente no regime quântico na formulação em termos de campos, há problemas de renormalização. Por outro lado a análise canônica da teoria unimodular permite estudos em regimes quânticos com a construção consistente da integral de caminhos de Feynmann, que pode ser utilizada em cálculos perturbativos. Embora a teoria unimodular tenha comportamento distinto em relação à constante cosmológica, não apresentando a necessidade de sua renormalização, o problema de contra-termos envolvendo termos de ordem superior é ainda presente (ALVAREZ et al., 2015; BUFALO; OKSANEN; TUREANU, 2015; PADILLA; SALTAS, 2015).

De uma forma geral, os conceitos e aparatos matemáticos presentes neste trabalho permitem explorar as características fundamentais e a quantização de qualquer teoria descrita por meio de uma determinada ação funcional de campos. As ideias aqui presentes também são extremamente utilizadas na busca de soluções numéricas da RG, principalmente através do formalismo  $3 + 1$  (GOURGOULHON, 2012). Portanto, em um trabalho futuro (Doutorado, como exemplo) esse estudo se faz bastante importante para o desenvolvimento de ideias de quantização ou soluções numéricas para a Relatividade Geral.

## REFERÊNCIAS

- ALVAREZ, E. et al. Quantum Corrections to Unimodular Gravity. **JHEP**, v. 08, p. 078, 2015.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. **General Relativity and Gravitation**, v. 40, n. 9, p. 1997–2027, Sep 2008. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1>>.
- BAEZ, J. P. M. J. C. **Gauge theories, knots, and gravity**. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1994. (Series on Knots and Everything, Vol. 4). ISBN 9810220340,9789810220341.
- BOJOWALD, M. **Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. ISBN 0521195756,9780521195751.
- BROWN, J. D.; YORK JR., J. W. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. **Phys. Rev.**, D47, p. 1407–1419, 1993.
- BUCHMULLER, W.; DRAGON, N. Einstein Gravity From Restricted Coordinate Invariance. **Phys. Lett.**, B207, p. 292–294, 1988.
- BUFALO, R.; OKSANEN, M. Canonical structure and extra mode of generalized unimodular gravity. **Phys. Rev.**, D97, n. 4, p. 044014, 2018.
- BUFALO, R.; OKSANEN, M.; TUREANU, A. How unimodular gravity theories differ from general relativity at quantum level. **Eur. Phys. J.**, C75, n. 10, p. 477, 2015.
- CARMELI, M. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. [S.l.]: USA, 1982. 669 p. ISBN 0-471-H6437-4.
- CHUNG, J. P. **Diffeomorphism invariance in general relativity**. 47 p. Dissertação (Mestrado), 2008.
- DESER, S. The legacy of ADM. **Phys. Scripta**, v. 90, n. 6, p. 068006, 2015.
- DEWITT, B. Quantum Gravity Yesterday and Today. **Gen. Rel. Grav.**, v. 41, p. 413–419, 2009. [Erratum: Gen. Rel. Grav.41,671(2009)].
- DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 160, p. 1113–1148, Aug 1967. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.160.1113>>.
- D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. [S.l.]: Oxford University Press, New York, 1998.
- DIRAC, P. A. M. The Theory of gravitation in Hamiltonian form. **Proc. Roy. Soc. Lond.**, A246, p. 333–343, 1958.
- DIRAC, P. A. M. **Lectures on quantum mechanics**. [S.l.]: Dover Publications, 1964. ISBN 0-486-41713-1 (pbk.).
- EINSTEIN, A. The Foundation of the General Theory of Relativity. **Annalen Phys.**, v. 49, n. 7, p. 769–822, 1916.

GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Action integrals and partition functions in quantum gravity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 15, p. 2752–2756, May 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2752>>.

GOURGOULHON, E. **3+1 Formalism in General Relativity - Bases of Numerical Relativity**. [S.l.]: Springer, 2012. ISBN 3642245242.

HANSON, A.; REGGE, T.; TEITELBOIM, C. **Constrained Hamiltonian systems**. [S.l.]: Accademia dei Lincei, 1976.

HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. The Cosmological Constant and General Covariance. **Phys. Lett.**, B222, p. 195–199, 1989.

JAIN, P. et al. Cosmological implications of unimodular gravity. **JCAP**, v. 1211, p. 003, 2012.

MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. First edition. [S.l.]: W. H. Freeman, 1973. (Physics Series). ISBN 9780716703440,0716703440,0716703343.

NIVALDO, L. A. **Mecânica Analítica**. 2ª edição. ed. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. ISBN 8588325241.

OKSANEN, M. **Hamiltonian Analysis of Modified Gravitational Theories: Towards a Renormalizable Theory of Gravity**. 120 p. Tese (Doutorado), 2013.

O'MURCHADHA, N.; YORK, J. W. Initial - value problem of general relativity. 1. General formulation and physical interpretation. **Phys. Rev.**, D10, p. 428–436, 1974.

PADILLA, A. Lectures on the Cosmological Constant Problem. 2015.

PADILLA, A.; SALTAS, I. D. A note on classical and quantum unimodular gravity. **Eur. Phys. J.**, C75, n. 11, p. 561, 2015.

PAIS, A. **"Sutil é o Senhor...": A Ciência e a Vida de Albert Einstein**. 1. ed. Rio de Janeiro: Brasil, 1995. 654 p. ISBN 85-209-0631-1.

POISSON, E. **An advanced course in general relativity**. 2. ed. [S.l.]: Department of Physics University of Guelph, 2002.

ROVELLI, C. Why Gauge? **Found. Phys.**, v. 44, n. 1, p. 91–104, 2014.

WEINBERG, S. The cosmological constant problem. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, Jan 1989.

YORK JR., J. W. Role of conformal three geometry in the dynamics of gravitation. **Phys. Rev. Lett.**, v. 28, p. 1082–1085, 1972.

### APÊNDICE A – Detalhes do cálculo dos Parênteses de Poisson.

Neste apêndice apresentamos detalhes acerca do cálculo dos parênteses de Poisson entre os funcionais  $H_0[\xi]$  e  $\Phi[\vec{X}]$ . Lembremos que os funcionais são escritos em termos de distribuições de acordo com

$$H_0[\xi] = \int_{\Sigma_t} \xi \mathcal{H}_0; \quad (1)$$

$$\Phi[\vec{X}] = \int_{\Sigma_t} X^a \mathcal{H}_a, \quad (2)$$

onde as expressões para os vínculos são

$$\mathcal{H}_0 = 2\kappa G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} {}^{(3)}R, \quad (3)$$

$$\mathcal{H}_a = -2h_{ac} \partial_b p^{cb} - (2\partial_b h_{ac} + \partial_a h_{cb}) p^{cb}. \quad (4)$$

Uma vez que esses vínculos são funcionais do par canônico  $(h, p)$ , faremos uso dos parênteses de Poisson fundamentais entre as variáveis canônicas

$$\{h_{ab}(x), p^{cd}(y)\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(x-y) \quad (5)$$

para o cálculo das relações entre os vínculos, além de desprezar os termos de fronteira, considerando os  $\delta h_{mn} = 0$  e  $\delta p^{mn} = 0$  na fronteira.

#### .1 Cálculo de $\{H_0[\xi], H_0[\eta]\}$

Sejam  $\xi$  e  $\eta$  funções suaves, podemos então escrever

$$\begin{aligned} \{H_0[\xi], H_0[\eta]\} &= \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \eta(y) \{\mathcal{H}_0(x), \mathcal{H}_0(y)\} \\ &= \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \eta(y) \left\{ 2\kappa G_{abcd} p^{ab} p^{cd}(x), 2\kappa G_{ijkl} p^{ij} p^{kl}(y) \right\} \\ &\quad + \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \eta(y) \left\{ 2\kappa G_{abcd} p^{ab} p^{cd}(x), -\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} {}^{(3)}R(y) \right\} \\ &\quad + \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \eta(y) \left\{ -\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} {}^{(3)}R(x), 2\kappa G_{ijkl} p^{ij} p^{kl}(y) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

note que fizemos as distribuições entre os termos, e que o segundo e terceiro termos são similares, relacionados a partir de  $\xi \leftrightarrow \eta$  e  $x \leftrightarrow y$ . Podemos dividir a expressão acima em três integrais.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \eta(y) \left\{ 2\kappa G_{abcd} p^{ab} p^{cd}(x), 2\kappa G_{ijkl} p^{ij} p^{kl}(y) \right\}, \\ I_2 &= \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \eta(y) \left\{ 2\kappa G_{abcd} p^{ab} p^{cd}(x), -\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} {}^{(3)}R(y) \right\}, \\ I_3 &= \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \eta(y) \left\{ -\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} {}^{(3)}R(x), 2\kappa G_{ijkl} p^{ij} p^{kl}(y) \right\}. \end{aligned}$$

Novamente, é fácil notar a relação entre os termos  $I_2$  e  $I_3$  conforme a discussão acima.

É possível mostrar que a integral  $I_1$  é identicamente nula, basta aplicar a propriedade distributiva dos parênteses de Poisson e também usar a definição dos parênteses fundamentais (5).<sup>2</sup> Portanto  $I_1 = 0$ , logo não contribui para a expressão (6). Em seguida, trabalhamos com os detalhes das integrais  $I_2$  e  $I_3$ , como segue

$$I_2 = 2 \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \eta(y) G_{abcd}(x) p^{ab}(x) \left\{ p^{cd}(x), -\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} {}^{(3)}R(y) \right\} \quad (7)$$

onde fizemos uso da simetria da métrica de DeWitt. A integral de (7) fica da seguinte maneira:

$$I_2 = 2 \int_{\Sigma_t} dx dy \int_{\Sigma_t} dz \xi(x) \eta(y) G_{abcd}(x) p^{ab}(x) \left( \delta_{(m}^c \delta_{n)}^d \delta(x-z) \frac{\delta \sqrt{h} {}^{(3)}R(y)}{\delta h_{mn}(z)} \right) \quad (8)$$

Para calcular a variação do termo  $\sqrt{h} {}^{(3)}R(y)$  devemos recordar que:

$${}^{(3)}R = h^{ij} R_{ij}, \quad \frac{\delta \sqrt{h}}{\delta h_{mn}} = \frac{1}{2} \sqrt{h} h^{mn}, \quad \frac{\delta h^{ab}}{\delta h_{mn}} = -h^{am} h^{bn}.$$

Destas relações segue que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sqrt{h} {}^{(3)}R(y)}{\delta h_{mn}(z)} &= \frac{1}{2} \sqrt{h} h^{mn} \delta(y-z) {}^{(3)}R + \sqrt{h} \left( -h^{em} h^{fn} \right) \delta(y-z) R_{ef} + \\ &+ \sqrt{h} h^{ef}(y) \frac{\delta R_{ef}(y)}{\delta h_{mn}(z)}. \end{aligned} \quad (9)$$

<sup>2</sup> Não apresentamos os cálculos explícitos aqui, pois os mesmos são bastante extensos. No entanto, se o leitor deseja conferir, deve-se seguir as dicas presentes neste parágrafo.

Deixe-nos focar no último termo em (9), mas considerando a sua versão integrada em (8), então

$$\int_{\Sigma_t} dy \eta(y) \sqrt{h} h^{ef}(y) \frac{\delta R_{ef}(y)}{\delta h_{mn}(z)} = \int_{\Sigma_t} dy \eta(y) \sqrt{h} \delta v_{mn|p}^p, \quad (10)$$

onde usamos o fato de que

$$h^{ef}(y) \frac{\delta R_{ef}(y)}{\delta h_{mn}(z)} = \delta v_{mn|p}^p = h^{ef} \left( \frac{\delta \Gamma_{ef}^p}{\delta h_{mn}} \right)_{|p} - h^{ep} \left( \frac{\delta \Gamma_{ef}^f}{\delta h_{mn}} \right)_{|p}. \quad (11)$$

Assim, retomando à expressão (10) e aplicando a definição de derivada covariante e integrando por partes, temos

$$\int_{\Sigma_t} dy \eta(y) \sqrt{h} \delta v_{mn|p}^p = - \int_{\Sigma_t} dy \partial_p \eta(y) \sqrt{h} \delta v_{mn}^p, \quad (12)$$

onde

$$\delta v_{mn|p}^p = \frac{1}{\sqrt{h}} \left( \sqrt{h} \delta v_{mn}^p \right)_{,p} \quad \delta v_{mn}^p = h^{ef} \left( \frac{\delta \Gamma_{ef}^p}{\delta h_{mn}} \right) - h^{ep} \left( \frac{\delta \Gamma_{ef}^f}{\delta h_{mn}} \right) \quad (13)$$

Agora vamos trabalhar explicitamente na variação dos símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ef}^p$  e  $\Gamma_{ef}^f$ . Lembrando que os símbolos de Christoffel são escritos como

$$\Gamma_{ef}^p = \frac{h^{pg}}{2} (\partial_e h_{fg} + \partial_f h_{eg} - \partial_g h_{ef}),$$

logo,

$$h^{ef} \frac{\delta \Gamma_{ef}^p}{\delta h_{mn}(z)} = \frac{h^{ef} h^{pg}}{2} \left( \delta_f^m \delta_g^n \partial_e \delta(y-z) + \delta_e^m \delta_g^n \partial_f \delta(y-z) - \delta_e^m \delta_f^m \partial_g \delta(y-z) \right) \quad (14)$$

em que usamos o fato de que  $\delta h_{mn} = 0 = \delta h^{mn}$  na fronteira. Vamos considerar um sistema de referência local de Lorentz (POISSON, 2002), onde  $\partial_m \rightarrow D_m$ , desta forma

$$h^{ef} \frac{\delta \Gamma_{ef}^p}{\delta h_{mn}(z)} = \frac{h^{ef} h^{pg}}{2} \left( \delta_f^{(m} \delta_g^{n)} D_e \delta(y-z) + \delta_e^{(m} \delta_g^{n)} D_f \delta(y-z) - \delta_e^{(m} \delta_f^{m)} D_g \delta(y-z) \right). \quad (15)$$

Uma vez mais usando a definição de derivada covariante e realizando uma integração por partes fazendo zero o termo de fronteira, a integral fica

$$\int_{\Sigma_t} dy \eta(y) \sqrt{h} h^{ef}(y) \frac{\delta R_{ef}(y)}{\delta h_{mn}(z)} = \int_{\Sigma_t} dy \sqrt{h} \delta(y-z) \partial_e \left( h^{em} \eta^{|n} - h^{mn} \eta^{|e} \right). \quad (16)$$

Por fim, retornando à integral  $I_2$ , expressão (8) e substituindo (9) e (16), temos

$$I_2 = 2 \int_{\Sigma_t} \xi \delta_{(m}^c \delta_{n)}^d G_{abcd} p^{ab} \left( -\sqrt{h} G^{mn} \eta(y) + (D^m D^n \eta - h^{mn} D_e D^e \eta) \right), \quad (17)$$

onde  $G^{mn}$  é o tensor de Einstein 3-dimensional. Usamos a definição de integral da função delta de Dirac <sup>3</sup> e mais uma vez a condição de que estamos em um sistema de referência local de Lorentz.

A integral  $I_3$  segue a partir da identificação  $\xi \leftrightarrow \eta$  no resultado (17), temos assim

$$I_3 = - \int_{\Sigma_t} \eta G_{ijkl} \left[ -\sqrt{h} G^{mn} \xi + (D^m D^n \xi - h^{mn} D_e D^e \xi) \right] \left( \delta_{(m}^k \delta_{n)}^l p^{ij} + \delta_{(m}^i \delta_{n)}^j p^{kl} \right). \quad (18)$$

Podemos, finalmente, determinar o parêntese de Poisson entre os funcionais  $H_0[\xi]$  e  $H_0[\eta]$ , em que

$$\{H_0[\xi], H_0[\eta]\} = 2 \int_{\Sigma_t} [p^{mn} \xi D_m D_n \eta - p^{mn} \eta D_m D_n \xi] \quad (19)$$

É possível reescrever essa expressão numa forma mais conveniente. Para isso, manipulamos as derivadas no primeiro termo de (19), obtendo:

$$\begin{aligned} 2 p^{mn} \xi D_m D_n \eta &= 2 p^{mn} \xi h_{nk} D_m \left( h^{lk} D_l \eta \right) \\ &= 2 p^{mn} \xi h_{nk} \left( \partial_m \left( h^{lk} D_l \eta \right) + \Gamma_{mj}^k h^{jl} D_l \eta \right) \end{aligned} \quad (20)$$

<sup>3</sup> A definição de uma integral da delta de Dirac é:

$$\int \int \int dx dy dz \delta(x-z) \delta(y-z) f(x) g(y) = \int dz f(z) g(z).$$

Escrevendo os símbolos de Christoffel em termos da métrica induzida, chega-se a

$$2p^{mn}\xi D_m D_n \eta = 2\partial_m(p^{mn}\xi\partial_n\eta) + [-2h_{nk}\partial_m p^{mn} - (2\partial_m h_{nk} + \partial_k h_{mn})p^{mn}](\xi h^{kl}\partial_l\eta) - 2p^{mn}\partial_m\xi\partial_n\eta. \quad (21)$$

Aplicamos no segundo termo de (19) a mesma ideia, reescrevendo a partir da troca  $\xi \leftrightarrow \eta$  em (21). Então

$$2p^{mn}\eta D_m D_n \xi = 2\partial_m(p^{mn}\eta\partial_n\xi) + [-2h_{nk}\partial_m p^{mn} - (2\partial_m h_{nk} + \partial_k h_{mn})p^{mn}](\eta h^{kl}\partial_l\xi) - 2p^{mn}\partial_m\eta\partial_n\xi. \quad (22)$$

Por fim, substituindo os resultados (21) e (22) na equação (19), e também levando em conta a expressão para o vínculo  $\mathcal{H}_a$ , equação (4), escrevemos

$$\{H_0[\xi], H_0[\eta]\} = \int_{\Sigma_t} [\xi h^{kl}\partial_l\eta - \eta h^{kl}\partial_l\xi] \mathcal{H}_k = \Phi[\xi\vec{D}\eta - \eta\vec{D}\xi] \quad (23)$$

## .2 Cálculo de $\{H_0[\xi], \Phi[\vec{X}]\}$

Procedemos agora para o cálculo dos parênteses de Poisson entre os funcionais  $H_0[\xi]$  e  $\Phi[\vec{X}]$ . Esta análise segue a mesma ideia da apresentação anterior, então

$$\{H_0[\xi], \Phi[\vec{X}]\} = \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) X^a(y) \{\mathcal{H}_0(x), \mathcal{H}_a(y)\}. \quad (24)$$

Usando a expressão para os vínculos e aplicando as propriedades gerais dos parênteses de Poisson, tem-se

$$\begin{aligned} \{H_0[\xi], \Phi[\vec{X}]\} &= 2\kappa \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \left\{ G_{ijkl} p^{ij} p^{kl}(x), 2h_{ab} D_c X^a p^{bc}(y) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \left\{ \sqrt{h}^{(3)} R(x), 2h_{ab} D_c X^a p^{bc}(y) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$



Uma vez mais podemos dividir a expressão (25) em três integrais, sendo elas

$$\begin{aligned} I_1 &= 4\kappa \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) \left\{ G_{ijkl}(x), h_{ab} D_c X^a p^{bc}(y) \right\} \left( p^{ij} p^{kl} \right) (x); \\ I_2 &= 4\kappa \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) G_{ijkl}(x) \left\{ p^{ij} p^{kl}(x), h_{ab} D_c X^a p^{bc}(y) \right\}; \\ I_3 &= -\frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \xi(x) h_{ab} D_c X^a(y) \left\{ \sqrt{h}^{(3)} R(x), p^{bc}(y) \right\}. \end{aligned}$$

Vamos trabalhar um pouco as integrais acima. Começando por  $I_1$ , que pode ser calculada facilmente e resulta em

$$I_1 = 2\kappa \int_{\Sigma_t} \xi (D_c X^a) \left[ -\delta_a^c G_{ijkl} p^{ij} p^{kl} + \frac{1}{\sqrt{h}} \left[ 4h_{ab} h_{jl} p^{bj} p^{cl} - 2h_{ab} p^{bc} p \right] \right] \quad (26)$$

onde usamos o fato que

$$\frac{\delta \sqrt{h}}{\delta h_{mn}(z)} = \frac{1}{2} h^{mn} \sqrt{h}; \quad G_{ijkl} = \frac{\sqrt{h}}{2} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl})$$

Agora, a partir das definições,

$$D_c X^a = \partial_c X^a + \Gamma_{cd}^a X^d, \quad \Gamma_{cd}^a = \frac{h^{ag}}{2} (\partial_c h_{dg} + \partial_d h_{cg} - \partial_g h_{cd}),$$

podemos reescrever a integral  $I_2$  numa forma mais conveniente, e realizando um pouco de álgebra, encontramos

$$I_2 = -4\kappa \int_{\Sigma_t} \xi \left[ 2G_{ijkl} p^{ij} p^{lc} \partial_c X^k - G_{ijkl} p^{ij} \partial_e (p^{lk} X^e) \right]. \quad (27)$$

Para  $I_3$  usa-se a mesma variação realizada anteriormente, explicitamente as equações (9) e (16), e também as discussões apresentadas. Desta forma segue que

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma_t} (h_{ab} D_c X^a) \left( \frac{\sqrt{h}}{2} h^{bc} \left( \xi^{(3)} R \right) - \left( \xi \sqrt{h} h^{mb} h^{cn} R_{mn} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma_t} (h_{ab} D_c X^a) \sqrt{h} \left( D^b D^c - h^{bc} D^m D_m \right) \xi \end{aligned} \quad (28)$$

Tendo calculado os termos  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , podemos escrever a expressão final para (25). Todavia, podemos manipular os termos de forma a deixar a expressão mais simples. Depois de algumas

manipulações, e com a ajuda das identidades

$$\begin{aligned} D_e \mathcal{H}_0 &= -\frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \partial_e \sqrt{h} G_{ijkl} p^{ij} p^{kl} + \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \partial_e h_{kl} (2h_{jn} p^{lj} p^{kn} - p^{kl} p) + \\ &\quad 4\kappa \left( G_{ijkl} p^{ij} \partial_e p^{kl} \right) - \frac{1}{\kappa} \sqrt{h} D_m R_e^m, \\ D_m R_n^m &= \frac{1}{2} D_n^{(3)} R, \end{aligned}$$

a última identidade é obtida a partir da identidade de Bianchi:  $D_m G_n^m = 0$ , chega-se a expressão a seguir

$$\left\{ H_0[\xi], \Phi[\vec{X}] \right\} = \int_{\Sigma_t} \xi D_e (X^e \mathcal{H}_0) = \int_{\Sigma_t} \frac{\xi}{\sqrt{h}} \partial_e (\sqrt{h} X^e \mathcal{H}_0) = - \int_{\Sigma_t} \sqrt{h} X^e \mathcal{H}_0 \partial_e \frac{\xi}{\sqrt{h}},$$

onde usamos a definição de derivada covariante e integração por partes. Por fim, o parêntese de Poisson entre os funcionais  $H_0[\xi]$  e  $\Phi[\vec{X}]$  é escrito como

$$\left\{ H_0[\xi], \Phi[\vec{X}] \right\} = - \int_{\Sigma_t} X^e \mathcal{H}_0 D_e \xi = - \int_{\Sigma_t} X^e \partial_e \xi \mathcal{H}_0 = -H_0[\vec{X}(\xi)] \quad (29)$$

### .3 Cálculo de $\left\{ \Phi[\vec{X}], \Phi[\vec{Y}] \right\}$

Procedemos agora para o cálculo do último parêntese, o parêntese de Poisson entre os funcionais  $\Phi[\vec{X}]$  e  $\Phi[\vec{Y}]$ . Utilizaremos os mesmos procedimentos apresentados anteriormente. Desta forma,

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi[\vec{X}], \Phi[\vec{Y}] \right\} &= \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \{ X^a H_a, Y^i H_i \} \\ &= \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} 2h_{ab} D_c X^a(x) \left\{ p^{bc}(x), 2h_{ij} D_k Y^i(y) \right\} p^{jk}(y) + \\ &\quad + \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} 2h_{ij} D_k Y^i(y) \left\{ 2h_{ab} D_c X^a(x), p^{jk}(y) \right\} p^{bc}(x) \end{aligned} \quad (30)$$

Separando a expressão (30) em duas integrais:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} 2h_{ab} D_c X^a(x) \left\{ p^{bc}(x), 2h_{ij} D_k Y^i(y) \right\} p^{jk}(y) \\ I_2 &= \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} 2h_{ij} D_k Y^i(y) \left\{ 2h_{ab} D_c X^a(x), p^{jk}(y) \right\} p^{bc}(x) \end{aligned}$$

Utilizaremos as mesmas identidades em ambas integrais  $I_1$  e  $I_2$ , uma vez que elas são relacionadas a partir de  $X^a \leftrightarrow Y^a$ . Deve-se notar que a derivada covariante de um vetor depende da métrica induzida através dos símbolos de Christoffel, portanto

$$I_1 = \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} 2h_{ab} D_c X^a(x) \left\{ p^{bc}(x), 2h_{ij}(y) \right\} \partial_k Y^i(y) p^{jk}(y) \\ + \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} 2h_{ab} D_c X^a(x) \left\{ p^{bc}(x), 2h_{ij} \Gamma_{kl}^i(y) \right\} Y^l(y) p^{jk}(y).$$

Usando a seguinte expressão

$$h_{ij} \Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} (\partial_k h_{jl} + \partial_l h_{jk} - \partial_j h_{kl}),$$

e realizando integração por partes, encontramos

$$I_1 = -4 \int_{\Sigma_t} h_{ab} D_c X^a \partial_k Y^b p^{ck} + 2 \int_{\Sigma_t} h_{ab} D_c X^a \partial_l (Y^l p^{bc}). \quad (31)$$

Para calcular  $I_2$  fazemos a substituição  $X^a \leftrightarrow Y^a$  na expressão (31), o que leva ao resultado:

$$I_2 = 4 \int_{\Sigma_t} h_{ij} D_k Y^i \partial_c X^j p^{kc} - 2 \int_{\Sigma_t} dz h_{ij} D_k Y^i \partial_l (X^l p^{jk}).$$

Por fim, substituindo as equações  $I_1$  e  $I_2$  em (30), manipulando os termos com derivada, encontramos

$$\left\{ \Phi \left[ \vec{X} \right], \Phi \left[ \vec{Y} \right] \right\} = \int_{\Sigma_t} \left[ X^l \partial_l Y^a - Y^l \partial_l X^a \right] \mathcal{H}_a = \Phi \left[ \left[ \vec{X}, \vec{Y} \right] \right]. \quad (32)$$

#### .4 Cálculo de $\left\{ \Phi \left[ \psi^i \right], C \left[ \chi^j \right] \right\}$

Em adição aos resultados da RG, na seção 5.2.1 fora necessário calcular um quarto parênteses de Poisson que era extremamente complicado. Para isso, lembremos que

$$\Phi \left[ N^i \right] = \int_{\Sigma_t} d^3 y N^i \mathcal{H}_i$$

Assim, segue que os parênteses de Poisson pode ser calculado

$$\begin{aligned}
 \{\Phi[\psi^i], C[\chi^j]\} &= \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma_t} \chi^j(y) \{ \psi^i(x) \mathcal{H}_i(x), \partial_j \lambda \} \\
 &= \int_{\Sigma_t} dz \psi^i(x) \partial_i \lambda \partial_j \chi^j \\
 &= C[\psi^i \partial_j \chi^j].
 \end{aligned}$$