



PABLO WILLIAM RODRIGUES DE LIMA

**CÁLCULOS NEWTONIANO E RELATIVÍSTICO DA
DEFLEXÃO DA LUZ E A CONTRIBUIÇÃO DA CONSTANTE
COSMOLÓGICA**

LAVRAS – MG

2019

PABLO WILLIAM RODRIGUES DE LIMA

**CÁLCULOS NEWTONIANO E RELATIVÍSTICO DA DEFLEXÃO DA LUZ E A
CONTRIBUIÇÃO DA CONSTANTE COSMOLÓGICA**

Dissertação de mestrado apresentada à
Universidade Federal de Lavras como parte
das exigências do Programa de Pós-Graduação
em Física, área de concentração Partículas e
Campos, para obtenção do título de Mestre.

Dr. Luiz Cleber Tavares Brito

Orientador

Dr. José Ademir Sales Lima

Coorientador

LAVRAS – MG

2019

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Lima, Pablo William Rodrigues de.

Cálculos newtoniano e relativístico da deflexão da luz e a
contribuição da constante cosmológica / Pablo William Rodrigues
de Lima. - 2019.

54 p. : il.

Orientador(a): Luiz Cleber Tavares de Brito.

Coorientador(a): José Ademir Sales de Lima.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Lavras, 2019.

Bibliografia.

1. Relatividade Geral. 2. Deflexão da luz. 3. Constante
Cosmológica. I. Brito, Luiz Cleber Tavares de. II. Lima, José
Ademir Sales de. III. Título.

PABLO WILLIAM RODRIGUES DE LIMA

**CÁLCULOS NEWTONIANO E RELATIVÍSTICO DA DEFLEXÃO DA LUZ E A
CONTRIBUIÇÃO DA CONSTANTE COSMOLÓGICA**

Dissertação de mestrado apresentada à
Universidade Federal de Lavras como parte
das exigências do Programa de Pós-Graduação
em Física, área de concentração Partículas e
Campos, para obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 29 de Novembro de 2019.

Dr. Rodrigo Santos Bufalo

UFLA-Examinador

Dr. José Alberto Casto Nogales Vera

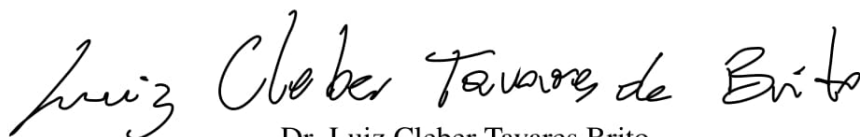
UFLA-Examinador

Dr. José Ademir Sales de Lima

USP-Examinador

Dra. Tatiana Ramos Cardoso

UFLA-Suplente



Dr. Luiz Cleber Tavares Brito
Orientador

Dr. José Ademir Sales Lima
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2019**

Dedico este trabalho a todas as pessoas que sonham em estudar e não tiveram as mesmas oportunidades que tive.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço à minha família pelo apoio e por sempre acreditarem em mim, em especial aos meus pais Paulo e Marcilene e meu irmão Patrick por todo apoio.
- Agradeço também à minha namorada Maria Beatriz por estar sempre ao meu lado, mesmo nos dias mais difíceis.
- Gostaria de agradecer também ao meu orientador, professor Dr. Luiz Brito pelos ensinamentos e pela paciência no decorrer deste trabalho, muito obrigado.
- Agradeço ao professor José Ademir por acreditar no meu trabalho e sua colaboração como meu coorientador.
- Agradeço também aos colegas da pós-graduação e colegas da vida, que nos dias de desânimo nunca deixaram de me botar para cima.
- Agradeço a todos integrantes do departamento de física, incluindo professores, técnicos e funcionários da limpeza que proporcionaram um ambiente adequado para minha formação.
- Ao professor Dr. José Nogales pelos ensinamentos e por ser uma inspiração para mim como cientista.
- E por fim, gostaria de agradecer à Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Física (DFI) da UFLA.
- O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Brasil (CAPES) — Código de Financiamento 001.
- Muito obrigado!

*"Ora (dizeis) ouvir estrelas! Certo
Perdeste o senso!"E eu vos direi, no entanto,
Que, para ouvi-las, muita vez desperto
E abro as janelas, pálido de espanto...*

*E conversamos toda a noite, enquanto
A via-láctea, como um pátio aberto,
Cintila. E, ao vir do sol, saudoso e em pranto,
Inda as procuro pelo céu deserto.*

*Dizeis agora: "Tresloucado amigo!
Que conversas com elas? Que sentido
Tem o que dizem, quando estão contigo?"*

*E eu vos direi: "Amai para entendê-las!
Pois só quem ama pode ter ouvido
Capaz de ouvir e de entender estrelas."*

(Olavo Bilac)

RESUMO

O fenômeno da deflexão da luz pelo sol foi abordado pela primeira vez por Cavendish (1784) e posteriormente revisto por Soldner (1801). No cálculo da deflexão foi utilizada a mecânica newtoniana. Atualmente, a deflexão da luz pode ser medida com precisão, indicando um valor igual ao dobro do previsto pelo cálculo newtoniano. O resultado correto da deflexão da luz é obtido mediante a aplicação da Teoria da Relatividade Geral (RG), que fornece os princípios e a base conceitual para a discussão do fenômeno. Apesar disso, recentemente alguns autores argumentaram que o cálculo newtoniano fornece o resultado observacional. Na primeira parte desse trabalho mostramos por diferentes métodos que essa afirmação está errada. O resultado newtoniano é, de fato, a metade do resultado indicado pelas observações da deflexão da luz. Em particular, mostramos que no limite não-relativístico a RG fornece o resultado newtoniano obtido por Cavendish e Soldner. Na segunda parte do trabalho abordamos os efeitos locais da constante cosmológica, uma vez que as equações de campo gravitacional são modificadas por essa constante. Esse problema conduz naturalmente à geometria de Kottler (Schwarzschild - de Sitter). Nesse contexto, abordamos o efeito da constante cosmológica ao fenômeno da deflexão da luz tanto na teoria newtoniana como na Relatividade Geral. Finalizando, discutimos alguns resultados encontrados na literatura corrente sobre o tema, o qual indicam que o cálculo local baseado na geometria de Kottler deve ser modificado para levar em conta efeitos da expansão do universo.

Palavras-chave: Relatividade Geral, Deflexão da luz, Constante Cosmológica.

ABSTRACT

The deflection of light by the sun was first studied by Cavendish in (1784) and later revised by Soldner in (1801). The newtonian physics was the base to these calculations. Currently, the deflection of light can be measured with accuracy indicating the double of the value predicted by the newtonian calculus. The correct result of the deflection of light is obtained by the application of the General Theory of Relativity GR, which gives the conceptual bases for the discussion of the given phenomenon. However, current authors argue that the newtonian calculus yields the result observed for this phenomenon. In the first part of this work we show by different methods that this statement is incorrect. The newtonian result is, in fact, half of the results yielded by observations. In particular, we show that in the non-relativistic limit the GR yields the newtonian result obtained by Cavendish and Soldner. In the second part of this paper we study local effects of the cosmological constant. This problem leads naturally to the Kottler (Schwarzschild - de Sitter) geometry. In this context, we analyze the effect of the cosmological constant on the deflection of light in the GR as well as in the newtonian theory. Lastly, we discuss some results obtained from current literature on the subject, which indicates that the calculus of the deflection of light based on the Kottler geometry must be modified to take into account effects of the expansion of the universe.

Keywords: General Relativity, Deflection of light, Cosmological Constant.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Princípio da Equivalência.	16
Figura 2.2 – Experimento de Eötvös.	17
Figura 2.3 – Deflexão da luz.	22
Figura 4.1 – Efeito de Λ	37
Figura 1 – Geometria da Hipérbole.	50
Figura 2 – Esquema de coordenadas polares	51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	Gravitação newtoniana	12
2.1	O campo gravitacional na teoria newtoniana	12
2.1.1	Equação de Poisson	13
2.1.2	Princípio da equivalência: o experimento de Eötvös	15
2.2	O problema de Kepler	18
2.3	Deflexão da luz na mecânica newtoniana	20
2.3.1	Método I	22
2.3.2	Método II	24
3	Fundamentos da Relatividade Geral	26
3.1	Princípio da equivalência na Relatividade Geral	26
3.2	Equação da geodésica	27
3.3	Equações de Einstein	29
3.4	Limite newtoniano	30
3.5	Solução estática e esférica: a métrica de Schwarzschild	31
3.6	Deflexão da Luz na Relatividade Geral	32
4	Efeitos da constante cosmológica na deflexão da luz	36
4.1	Contribuição de Λ no limite newtoniano	36
4.2	Cálculo newtoniano da deflexão da luz corrigido por Λ	38
4.3	Cálculo relativístico da deflexão da luz corrigido por Λ	40
5	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	46
	APENDICE A – Dedução da equação de Poisson gravitacional.	49
	APENDICE B – Geometria da hipérbole.	50
	APENDICE C – Cálculo alternativo da deflexão da luz	53

1 INTRODUÇÃO

A observação do universo possibilita aos pesquisadores investigar fenômenos físicos que não são possíveis de serem reproduzidos em laboratórios no planeta Terra. Alguns exemplos desses fenômenos são relacionados à super novas, buracos negros supermassivos, entre outros. Dito isso, a investigação de tais fenômenos requer análises da radiação eletromagnética (luz) oriunda desses fenômenos. Essas análises são realizadas por meio de receptores de radiação eletromagnética como telescópios, radio-telescópios, interferômetros e são vastamente exploradas na Cosmologia e na Astrofísica. Nesse sentido, um fenômeno importante é o efeito do campo gravitacional na propagação da luz, uma vez que a gravidade modifica a trajetória dos raios luminosos e por consequência a posição aparente dos objetos no universo (LIMA; SANTOS, 2019). Isso torna o estudo dos efeitos de deflexão da luz imprescindíveis à observação do universo.

O desvio da trajetória da luz pelo campo gravitacional do sol já havia sido analisado por Cavendish em 1784 e por Soldner em 1801 (WILL, 1988). Ambos obtiveram em primeira ordem o mesmo resultado de $\Delta\varphi = 0,87''$ (arcos de segundo). O cálculo tem como base a mecânica newtoniana e fornece metade do valor observacional. A Relatividade Geral (RG), por sua vez, prevê o valor da deflexão da luz de $\Delta\varphi = 1,75''$ (WEINBERG, 1972), obtido primeiramente por Eddington em 1919 (WEINBERG, 1972), e está em acordo com as observações recentes (WILL, 2018; BRUNS, 2018)¹. Contudo, trabalhos recentes (HUANG, 2017; MIGNONAT, 2018) alegam que o cálculo newtoniano da deflexão da luz fornece o resultado observacional, assim como a RG. Em particular, (MIGNONAT, 2018) afirma que Cavendish e Soldner fizeram o cálculo correto, porém definiram erroneamente o ângulo de deflexão. Por sua vez, na referência (HUANG, 2017) o autor obtém a equação de movimento incorreta para a luz, o que conduziu ao mesmo resultado obtido pela RG (KITTEL; KNIGHT; RUDERMAN, 1965).

A RG, no entanto, também apresenta lacunas. Na forma como havia sido definida em 1915 (EINSTEIN, 1915), a RG é incompatível com as observações. Uma vez que o universo é considerado um fluido auto-gravitante, sem pressão, homogêneo e isotrópico, ainda que esteja em expansão (HUBBLE, 1929), não há nada que impeça seu colapso gravitacional em um

¹ Além do ângulo de deflexão da luz existem outros resultados nos quais a RG fornece valores mais próximos aos observáveis do que a teoria newtoniana. Um exemplo é a precessão do periélio de Mercúrio, cujo resultado relativístico corrige o newtoniano em $43''$ por século, em acordo com as observações (WEINBERG, 1972). Outros fenômenos como *redshift* (POUND, 2000), lentes gravitacionais (LIMA; SANTOS, 2019) e radiação gravitacional (ABBOTT et al., 2016) confirmam que a RG é teoria que melhor explica fenômenos associados à gravitação.

período finito de tempo (LIMA; SANTOS, 2018,). No entanto, as observações de supernovas tipo IA mostram que o universo está em expansão acelerada (PERLMUTTER et al., 1999; RIESS et al., 1998). Para evitar o colapso gravitacional e tornar a RG compatível com as observações, acrescenta-se uma constante Λ nas equações de Einstein. Essa constante é conhecida como constante cosmológica e possui um papel muito importante na cosmologia moderna. O modelo padrão da cosmologia, Λ CDM (Λ *Cold Dark Matter*), atribui a expansão acelerada do universo ao termo da constante cosmológica nas equações de Einstein, que é interpretado como uma componente do fluido cosmológico (energia escura), cuja natureza ainda é desconhecida (MARTIN, 2012; PEEBLES; RATRA, 2003).

Dado que a constante cosmológica modifica as equações de Einstein, é natural pensar que também modificará as soluções conhecidas para $\Lambda = 0$. Um caso de interesse é a modificação da constante cosmológica à solução de Schwarzschild (FREIRE; BEZERRA; LIMA, 2001; RINDLER; ISHAK, 2007). Nesse caso, a solução é denominada de Schwarzschild-de Sitter. Desse modo, efeitos conhecidos como a deflexão da luz, que será o foco dessa dissertação, pode ser afetada pela constante cosmológica. A literatura recente que trata do problema mostra que esse não é um problema fechado. De fato, há divergência de opiniões sobre a possível contribuição da constante cosmológica à deflexão da luz. Alguns trabalhos alegam que não há contribuição de Λ (KAGRAMANOVA; KUNZ; LÄMMERZAHN, 2006; FINELLI; GALAVERNI; GRUPPUSO, 2007; SERENO; JETZER, 2006; FREIRE; BEZERRA; LIMA, 2001; ISLAM, 1983) enquanto outros alegam que há, de fato, essa contribuição (ARAKIDA, 2018; RINDLER; ISHAK, 2007; LAKE, 2002; ARAKIDA; KASAI, 2012).

Do exposto acima, a primeira parte desta dissertação (capítulos 2 e 3) tem como objetivo apresentar um cálculo detalhado da deflexão da luz na teoria newtoniana e na RG. Para isso, o capítulo 2 revê aspectos gerais da gravitação newtoniana. São determinadas as equações da órbita de uma partícula no campo gravitacional e em seguida discute-se o princípio da equivalência por meio do experimento de Eötvös, que dá embasamento experimental para a igualdade entre massas inercial e gravitacional. Além disso, para obter a deflexão da luz considera-se um modelo corpuscular da luz, uma vez que a mecânica newtoniana é válida para corpos massivos. A partir disso, apresenta-se por meio de dois métodos distintos o cálculo newtoniano da deflexão da luz sob a influência de um campo gravitacional. No método I, calcula-se a primeira integral de movimento, enquanto no método II utilizam-se as relações subjacentes à geometria da hipérbole.

No capítulo 3 mostra-se o cálculo da deflexão da luz por meio da RG. Inicialmente apresenta-se uma breve introdução aos fundamentos da RG, mostrando a importância do princípio da equivalência e introduzindo as equações de campo de Einstein. Com o intuito de verificar a consistência da RG, mostra-se que no limite não-relativístico as equações de Einstein recuperam a equação do campo gravitacional newtoniano. Além disso, a seção 3.5 discorre sobre a solução de Schwarzschild e sua função no cálculo de órbitas em torno de objetos massivos estáticos e com simetria esférica. Por fim, apresenta-se o cálculo da deflexão da luz na geometria de Schwarzschild, que equivale ao dobro do resultado newtoniano.

O capítulo 4 inicia-se com a introdução de Λ na equação de Einstein e uma discussão do seu limite newtoniano na geometria de Schwarzschild-de Sitter. Posteriormente, apresenta-se um cálculo detalhado da contribuição de Λ à deflexão da luz na teoria newtoniana e na geometria de Schwarzschild-de Sitter. Com esse propósito foi utilizado o método padrão da primeira integral de movimento (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002; WEINBERG, 1972). As ordens de grandeza das contribuições de Λ em cada caso são estimadas e mostra-se que o efeito da constante cosmológica é de reduzir o ângulo de deflexão total.

Por fim, o último capítulo apresenta um apanhado geral sobre os principais resultados e discussões deste trabalho.

2 GRAVITAÇÃO NEWTONIANA

Uma descrição da gravidade coerente com dados observacionais foi publicada pela primeira vez por Isaac Newton em 1687 no livro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Em uma perspectiva newtoniana, a gravidade é o fenômeno natural caracterizado pela atração entre corpos massivos (WEINBERG, 1972; MARION; THORNTON, 1995).

Por meio das leis da dinâmica e da lei da gravitação universal, Newton forneceu à física meios de descrever com precisão as órbitas dos corpos celestes. Apesar de seu enorme sucesso, dados observacionais da órbita de Mercúrio indicam um desvio de 42.98" em seu periélio não previsto pela teoria newtoniana. Esse desvio foi explicado apenas com o surgimento da teoria da relatividade geral de Albert Einstein em 1915 (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006; EINSTEIN, 1915). Esse capítulo oferece uma breve discussão sobre a gravitação newtoniana, enfatizando aspectos que serão relevantes nos capítulos posteriores.

2.1 O campo gravitacional na teoria newtoniana

A lei da gravitação universal de Newton estabelece que duas partículas quaisquer com massas M e m atraem-se mutuamente com uma força gravitacional \vec{F} proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre elas. Em uma linguagem matemática, a força exercida por M em m pode ser escrita na forma (MARION; THORNTON, 1995)

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{e}_r, \quad (2.1)$$

em que G é a constante gravitacional¹ e \hat{e}_r é o vetor unitário que aponta de M para m . Como pode-se observar em (2.1), quanto maior o valor das massas mais intensa será a força gravitacional entre elas. Em contraposição, por ser inversamente proporcional ao quadrado da distância, quanto maior for a distância menos intensa será a força gravitacional entre os dois objetos. O sinal negativo em (2.1) indica que essa força é atrativa. É importante ressaltar que \vec{F} é uma força central, ou seja, ela depende apenas da variável r e é definida radialmente (na direção \hat{e}_r).

É interessante definir uma quantidade que seja escrita em termos da força gravitacional por unidade de massa, ou seja, uma quantidade que dependa apenas da massa do corpo central. Essa quantidade é chamada de campo gravitacional \vec{g} , e define um campo ao redor da

¹ G é uma constante fundamental da física, que foi medida em 1798 pelo físico Inglês Henry Cavendish. O valor atual de G é $6,67430 \pm 0,00015 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ (MARION; THORNTON, 1995).

massa M que atrai uma partícula teste² a uma distância r da massa central. Isso permite, por exemplo, comparar a intensidade de campos gravitacionais de diferentes objetos, como a Terra e a Lua. Analiticamente, o vetor campo gravitacional pode ser escrito na forma (MARION; THORNTON, 1995)

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2}\hat{e}_r. \quad (2.2)$$

Uma propriedade importante do campo gravitacional é que ele é conservativo, ou seja, que $\nabla \times \vec{g} = 0$. Segue portanto que (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006; MARION; THORNTON, 1995)

$$\vec{g} = -\nabla\Phi(r), \quad (2.3)$$

em que Φ é chamado de potencial gravitacional. O potencial gravitacional é a energia por unidade de massa necessária para deslocar uma partícula entre dois pontos em um campo gravitacional. Ao integrar a equação (2.3) sob a condição de que $\Phi = 0$ quando $r \rightarrow \infty$ obtêm-se a solução (MARION; THORNTON, 1995)

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (2.4)$$

Como o potencial gravitacional tem dimensão de energia por unidade de massa, ao multiplicá-lo pela massa obtém-se a energia potencial gravitacional $U(r) = m\Phi(r)$. Isto é, $U(r)$ é a energia necessária para que uma partícula teste seja trazida do infinito até uma distância r do corpo de massa M . A partir das equações (2.4) e (2.1), pode-se verificar explicitamente que $F = -\nabla U(r)$ (MARION; THORNTON, 1995).

2.1.1 Equação de Poisson

Os resultados apresentados até agora são válidos para corpos puntiformes, ou seja, corpos cujas dimensões são desprezadas em comparação à massa central. Para determinar o campo gravitacional gerado por uma distribuição arbitrária de massa deve-se utilizar a equação (ver dedução no apêndice A)

$$\nabla^2\Phi(r) = 4\pi G\rho_m, \quad (2.5)$$

² Por definição, o campo gravitacional de uma partícula teste m (massa muito pequena comparada à M) pode ser ignorado em relação ao campo gravitacional da massa central M .

em que ρ_m é a densidade da distribuição de massa e $\nabla^2\Phi(r) = \nabla \cdot \nabla\Phi(r)$ é o operador Laplaciano. A equação (2.5) é conhecida como equação de Poisson (MARION; THORNTON, 1995).

Como a força gravitacional é central, percebe-se que $\Phi(r)$ não depende do tempo, uma vez que a distribuição de massa é independente do tempo. Isso significa que qualquer mudança na densidade de massa afetaria o potencial gravitacional instantaneamente. Entretanto, sabe-se que nenhum sinal pode viajar à uma velocidade maior que a da luz de acordo com a teoria da relatividade especial. Assim, aparece a primeira inconsistência da teoria newtoniana com a teoria da relatividade especial (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006; MARION; THORNTON, 1995).

Como uma ilustração, a seguir mostra-se como obter o potencial de uma partícula puntiforme a partir da equação de Poisson. Nesse caso, a densidade de uma massa pode ser escrita na forma $\rho_m = M\delta^3(\vec{r})$, na qual $\delta^3(\vec{r})$ é a função delta de Dirac³. A equação (2.5) nesse caso torna-se

$$\nabla^2\Phi(r) = 4\pi GM\delta^3(\vec{r}). \quad (2.6)$$

Entretanto, é sabido que a função delta de Dirac é igual ao Laplaciano de $(1/r)$, portanto

$$\nabla^2\Phi(r) = -GM \cdot \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2.7)$$

e como G e M são constantes, a equação (2.7) pode ser reescrita na forma

$$\nabla^2\Phi(r) = \nabla^2 \left(-\frac{GM}{r} \right). \quad (2.8)$$

A constante de integração é fixada com a condição de contorno dada anteriormente, $\Phi(r) = 0$ para $r \rightarrow \infty$. Como esperado, a equação (2.8) mostra que o potencial gravitacional para um corpo puntiforme coincide com a expressão (2.4).

³ A função delta de Dirac é definida por $f(\vec{r}_0) = \int d^3x f(\vec{r})\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$, em que a integral cobre todo o espaço.

2.1.2 Princípio da equivalência: o experimento de Eötvös

A segunda lei de Newton e a lei da gravitação universal descrevem a dinâmica de um corpo na presença de um campo gravitacional. A segunda lei diz que a soma de todas as forças \vec{F}_R que atuam sobre uma partícula é dada por

$$\vec{F}_R = m_I \vec{a}, \quad (2.9)$$

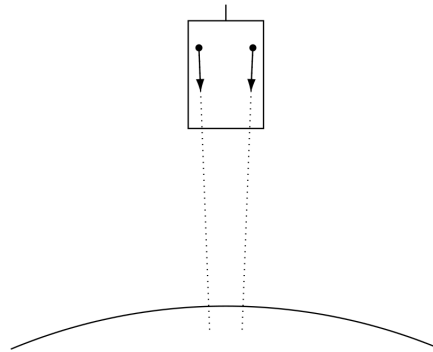
na qual m_I é a massa inercial da partícula e \vec{a} é a aceleração produzida pela força \vec{F}_R . Utilizando a força resultante em (2.9) como sendo (2.2) obtém-se a equação de movimento

$$\vec{a} = \frac{m_G}{m_I} \vec{g}, \quad (2.10)$$

na qual m_G é a massa gravitacional, chamada anteriormente na equação (2.2) apenas de m . Em princípio, não existe motivo para que as massas inercial e gravitacional sejam de mesma natureza. Contudo, é verificado experimentalmente que a razão m_G/m_I presente na equação (2.10) é sempre constante para todas os objetos. Em contraposição, a razão q/m_I que aparece na equação de movimento de uma partícula carregada em um campo eletromagnético não é a mesma para todas as partículas. Logo, a partir da equação (2.10) vê-se que a trajetória de uma partícula através do espaço em um campo gravitacional não depende da massa da partícula ou do material que compõe qualquer objeto. (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

O princípio da equivalência afirma que as massas gravitacional e inercial possuem a mesma natureza. Um experimento mental proposto por Albert Einstein explica esse princípio a partir da equivalência entre referenciais inerciais e referenciais com aceleração constante como segue. Suponha que um observador encontra-se dentro de um elevador em repouso a uma certa altura do chão. Ao cortar o cabo do elevador, ambos observador e elevador estarão em queda-livre no campo gravitacional da Terra. Portanto, uma vez que o elevador cai com a aceleração da gravidade, o observador não detecta o efeito gravitacional no interior do elevador. Como pode ser verificado na equação (2.9), o fato de que o observador cai com a mesma aceleração gravitacional \vec{g} acontece somente quando a razão m_G/m_I é igual à unidade, ou seja $m_G = m_I$. Foi Einstein que pela primeira vez percebeu que essa igualdade segue da equivalência entre referenciais inerciais e referenciais com aceleração constante (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006; WEINBERG, 1972).

Figura 2.1 – Princípio da Equivalência.



Dois corpos dentro de um elevador em queda livre se aproximando devido a não uniformidade do campo gravitacional. Fonte: *General Relativity: An Introduction for Physicists* (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

De modo geral, isso não é válido para um campo gravitacional não uniforme. No mesmo experimento, suponha agora que o elevador seja bem grande e que nas duas extremidades sejam soltas duas bolinhas que encontram-se originalmente a uma certa altura do piso do elevador.

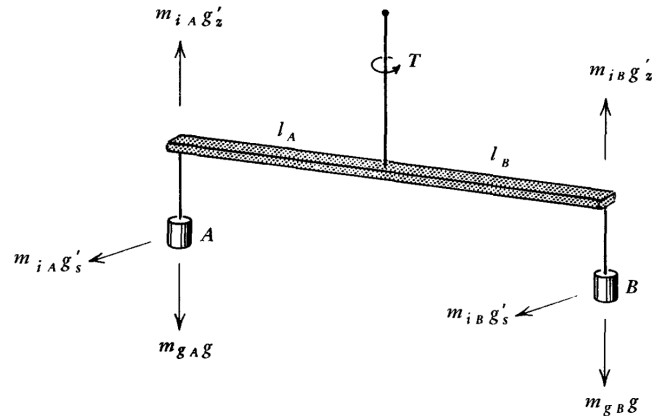
Como se sabe, o campo gravitacional de uma distribuição esférica de massa possui simetria radial, sendo portanto não-uniforme. No caso em que o elevador esteja em queda livre, devido à não uniformidade do campo gravitacional, as bolinhas seguem as linhas de campo gravitacional, como mostra a figura 2.1. Como as linhas de campo gravitacional são radiais, as bolinhas tendem a se deslocar para o centro do elevador com o passar do tempo.

Em contrapartida, se o elevador estivesse na ausência de gravidade, as bolinhas não se deslocariam para o centro do elevador, pois não haveria componentes horizontais da aceleração neste caso. Logo, o observador é capaz de diferenciar efeitos oriundos de um campo gravitacional autêntico, que produz forças de maré, de um efeito causado por aceleração de um referencial em queda livre. Porém, essa diferença só é perceptível em escalas de comprimento e tempo suficientemente grandes para que efeitos de maré sejam perceptíveis. Desse modo, o princípio de equivalência é válido localmente (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

O experimento de Eötvös

Isaac Newton e Friedrich Bessel realizaram experimentos na tentativa de identificar entre massa inercial e gravitacional por meio de pêndulos com diferentes composições; dentro dos limites experimentais da época, não foi constatada diferença alguma. Em 1885, Roland von

Figura 2.2 – Experimento de Eötvös.



Consiste em verificar a proporcionalidade entre as massas gravitacional e inercial de um objeto por meio de um somatório de forças. Fonte: *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity* (WEINBERG, 1972)

Eötvös realizou um experimento com maior precisão mostrando a igualdade entre m_G e m_I (WEINBERG, 1972). O experimento consistia em prender um fio fino em um bastão de 40 cm, fixando duas massas A e B em extremidades opostas do bastão conforme mostra a figura 2.2.

Para análise do resultado experimental, deve-se calcular o torque resultante devido à diferença entre a massa inercial e a gravitacional. O torque produzido pela força resultante \vec{F}_R é definido por (WEINBERG, 1972)

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_R. \quad (2.11)$$

Para o problema, nos interessam as componentes da força que são perpendiculares ao vetor posição \vec{r} . A distância r no experimento é l_A do fio até a extremidade em que se encontra a massa A, e l_B do fio à massa B. Enquanto em equilíbrio, o bastão se estabiliza de acordo que o torque para as componentes verticais de \vec{F}_R são iguais para a massa A e para a massa B de forma que

$$l_A(m_{gA}g - m_{iA}g'_z) = l_B(m_{gB}g - m_{iB}g'_z) \quad (2.12)$$

em que g é o campo gravitacional e g'_z e g'_s são respectivamente as componentes vertical e horizontal da aceleração centrípeta da Terra. O torque para as componentes horizontais de \vec{F}_R é

$$T = l_A m_{iA} g'_s - l_B m_{iB} g'_s \quad (2.13)$$

Considerando que $g'_z \ll g$, da (2.12) obtém-se que a razão entre as massas gravitacionais de A e B na situação de equilíbrio vertical é determinada pela razão do comprimento dos fios por $(m_{gA}/m_{gB}) = (l_B/l_A)$. Substituindo a razão do comprimento dos fios na (2.13) resulta em

$$T = l_A m_{gA} g'_S \left[\frac{m_{iA}}{m_{gA}} - \frac{m_{iB}}{m_{gB}} \right]. \quad (2.14)$$

Como pode ser verificado na equação (2.14), qualquer diferença mínima entre m_i e m_g faria com que o bastão sofresse um torque ao longo do fio, produzindo uma torção no mesmo. Entretanto, é importante enfatizar que não foi observada torção no fio devido à diferença entre massa inercial e gravitacional dentro dos limites experimentais da época, equivalente a uma precisão de 10^{-19} na razão m_i/m_g para madeira e platina (WEINBERG, 1972).

2.2 O problema de Kepler

Johannes Kepler já havia encontrado empiricamente as leis que regem as órbitas dos planetas em 1609 (lei das órbitas e lei das áreas) e 1619 (lei dos períodos). Kepler mostrou que as órbitas dos planetas são elípticas com o sol em um dos focos, porém não obteve analiticamente a solução para essas órbitas (WEINBERG, 1972).

Isaac Newton, por meio da lei da gravitação universal e das leis da dinâmica, deduziu analiticamente não só as órbitas dos planetas como o movimento de asteroides em geral. Newton mostrou que um objeto submetido a um campo gravitacional possui trajetórias descritas por seções cônicas, ou seja, círculos, elipses, parábolas, ou hipérbolas dependendo da energia deste objeto (WEINBERG, 1972; LIMA; SANTOS, 2018,).

As órbitas são obtidas por meio da equação de movimento (2.9). Como a gravidade é uma força central, é conveniente escrever a equação de movimento em coordenadas polares (r, φ) de modo que a aceleração é escrita na forma $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{e}_r$. Por simplicidade, denotam-se derivadas temporais da seguinte forma $\dot{r} = dr/dt$ e $\ddot{r} = d^2r/dt^2$. A equação de movimento torna-se então

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{d\Phi(r)}{dr} \quad (2.15)$$

Como \vec{r} e \vec{F} são sempre paralelos no caso de forças centrais, o torque sempre será zero, pois produtos vetoriais entre vetores paralelos são sempre zero. Se o torque é nulo, então o momento angular se conserva. Isso deve-se ao fato de que o torque pode ser escrito como a variação do momento angular no tempo, em que o momento angular por unidade de massa L é definido por

(HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

$$L = r^2 \dot{\varphi}, \quad (2.16)$$

A equação (2.15) também pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{r}^2}{2} + \Phi(r) + \frac{L^2}{2r^2} \right] = 0. \quad (2.17)$$

Desse modo, tem-se que a grandeza com dimensão de energia por unidade de massa,

$$\varepsilon = \frac{\dot{r}^2}{2} + \Phi(r) + \frac{L^2}{2r^2}, \quad (2.18)$$

é uma constante de movimento associada à dinâmica de uma partícula sob a ação do campo gravitacional. Como essa é uma equação que depende da velocidade \vec{r} e da posição \vec{r} é possível realizar uma separação de variáveis e encontrar uma relação entre a posição do corpo e o tempo

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2 \left(\varepsilon - \Phi(r) - \frac{L^2}{2r^2} \right)}}. \quad (2.19)$$

Outra maneira de encontrar a relação acima (2.19) é por meio da equação de Euler-Lagrange (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad (2.20)$$

em que as coordenadas generalizadas q_i são as coordenadas polares (r, φ) e \mathcal{L} é o Lagrangiano definido pela energia cinética menos a energia potencial. No sistema de coordenadas adotado, o lagrangiano pode ser escrito por (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (2.21)$$

Ao calcular (2.20) para a coordenada φ obtém-se a relação (2.16), e para a coordenada r encontra-se a relação (2.15). Assim, tanto a segunda lei de Newton quanto a equação de Euler-Lagrange concordam com (2.19). Nos dois casos foi utilizado a igualdade entre massa inercial e gravitacional.

Tabela 2.1 – Classificação das órbitas.

Excentricidade (e)	Energia (ε)	Forma da órbita
0	$-G^2 m/2L^2$	Círculo
$e < 1$	$\varepsilon < 0$	Elipse
1	0	Parábola
$e > 1$	$\varepsilon > 0$	Hipérbole

Relação entre a excentricidade, a energia e a forma da órbita. Fonte: Adaptada de (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002)

No estudo de uma partícula teste sob a ação do potencial gravitacional é interessante escrever a posição r em função do ângulo φ , pois esse ângulo está diretamente relacionado à órbita do corpo. Para isso, sabe-se por meio de (2.16) que $dt = (r^2/L)d\varphi$, logo (2.19) torna-se

$$d\varphi = \pm \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{L^2} + \frac{2GM}{rL^2} - \frac{1}{r^2}}}. \quad (2.22)$$

No que segue, adota-se o sinal positivo, ou seja, o ângulo $\varphi(r)$ aumenta quanto maior for a coordenada r .

Ao integrar a equação (2.22) obtém-se a solução, a menos de uma constante de integração,

$$r(\varphi) = \frac{L/MG}{1 + e \cos \varphi} \quad (2.23)$$

em que

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon L^2}{M^2 G^2}}. \quad (2.24)$$

A solução (2.23) define uma cônica na qual e é a excentricidade da órbita. O valor da excentricidade determina a forma da órbita conforme mostrado na tabela (2.1). Como será visto na próxima seção, tem-se $\varepsilon > 0$ para a deflexão da luz e, portanto, a trajetória é hiperbólica.

2.3 Deflexão da luz na mecânica newtoniana

A equação da órbita permite calcular a trajetória de um corpo massivo sob a ação de um campo gravitacional. Invocando uma natureza corpuscular para a luz esse modelo pode ser aplicado. Obviamente, espera-se que a massa do fóton seja muito pequena. De fato, limites experimentais sobre a massa do fóton indicam que, caso exista, deve ser menor do que 10^{-53} kg (TANABASHI et al., 2018). Com essa hipótese, o princípio da equivalência pode ser aplicado

e a equação da trajetória do fóton descrita por (2.23). Rigorosamente, para uma partícula sem massa, como o fóton, o modelo newtoniano não se aplica. Isso decorre do fato de que, por definição, a gravitação newtoniana descreve interações entre partículas massivas. Além disso, na mecânica newtoniana a luz pode ter velocidade variável. Porém, sabe-se atualmente que de acordo com a teoria da relatividade a luz tem velocidade constante no vácuo $c = 299.792.458$ m/s (BLANEY et al., 1974), independente da fonte emissora. No que segue, será feito o cálculo da deflexão para o modelo newtoniano corpuscular da luz.

Suponha que a luz possua velocidade c na coordenada r_0 em que os efeitos gravitacionais são pequenos (LIMA; SANTOS, 2019):

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \dot{r} = c. \quad (2.25)$$

Desse modo, considera-se que para a deflexão da luz r_0 é suficientemente grande tal que (2.18) seja dominada pelo primeiro termo. Assim, tem-se

$$\varepsilon = \frac{c^2}{2} > 0 \quad (2.26)$$

e, como dito no final da seção anterior, a órbita é hiperbólica. O parâmetro L pode ser encontrado para a distância mínima b (parâmetro de impacto) entre o fóton e objeto massivo substituindo a equação (2.26) em (2.18) e usando que $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ neste ponto. Com isso, obtém-se

$$L = bc \sqrt{1 + \frac{r_s}{b}} \approx bc, \quad (2.27)$$

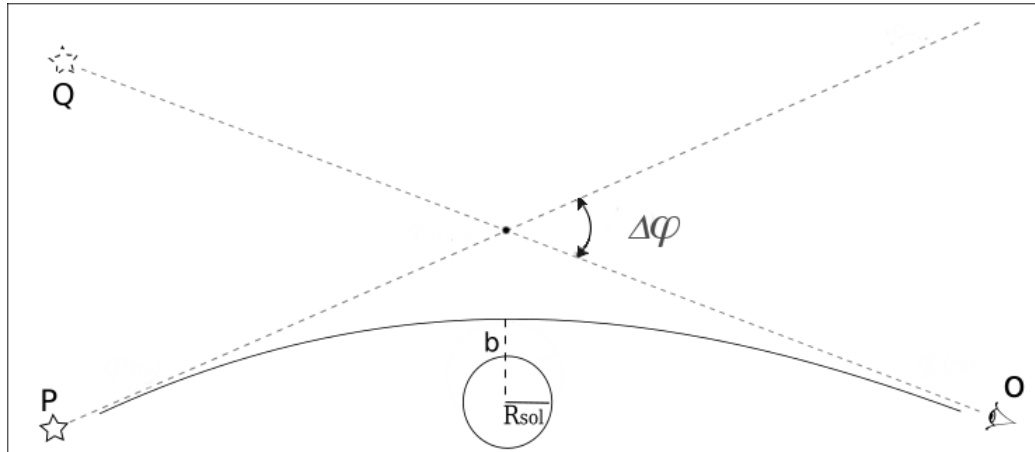
no qual $r_s = 2GM/c^2$ é o raio de Schwarzschild e utilizou-se que $r_s/b \ll 1$. De fato, no caso do sol $r_s \sim 10^3$ m e uma vez que no mínimo $b \sim R_{sol}$ tem-se no máximo $r_s/b \sim 10^{-6}$ (luz rasante à superfície)⁴.

Conhecidos ε e L é possível determinar a excentricidade da órbita por meio da equação (2.24). Usando (2.26) e (2.27), obtém-se de (2.24) que

$$e = \sqrt{1 + 4 \left(\frac{b}{r_s} \right)^2}. \quad (2.28)$$

⁴ O raio do sol é $R_{sol} \approx 696.342 \times 10^3$ m, a massa solar $M_{sol} \approx 2 \times 10^{30}$ kg e o raio de Schwarzschild correspondente é $r_s \approx 3 \times 10^3$ m (WEINBERG, 1972).

Figura 2.3 – Deflexão da luz.



Na figura, P é a posição real da fonte de luz e Q a posição aparente da fonte. O raio do sol é denotado na figura por R_{sol} , o ângulo de deflexão total por $\Delta\varphi$ e o observador O . b representa a menor distância entre a trajetória e o sol, também chamado de parâmetro de impacto. Para maior clareza, as escalas foram exageradas.

Desse modo, a (2.28) mostra que $e \gg 1$ e que portanto a trajetória da luz corresponde a uma hipérbole muito alongada nas extremidades, conforme mostra a Figura 2.3. A partir dos resultados (2.18) e (2.27), o desvio da trajetória da luz (deflexão da luz) pode ser calculado por dois métodos distintos como segue.

2.3.1 Método I

Com a hipótese de que a luz possui velocidade c , a uma distância r onde os efeitos gravitacionais são desprezíveis, o ângulo de deflexão pode ser calculado a partir de (2.22) por meio da integral definida

$$\varphi(b) - \varphi(\infty) = - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + \alpha x + \beta x^2}}, \quad (2.29)$$

na qual foi feita a mudança de variável $x = b/r$, em que

$$\alpha = \frac{r_s}{b} \quad \text{e} \quad \beta = -1. \quad (2.30)$$

Os parâmetros α e β acima são obtidos utilizando as equações (2.26) e (2.27).

A solução da integral acima é conhecida (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \alpha x + \beta x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \arccos \left[-\frac{\alpha + 2\beta x}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \right]. \quad (2.31)$$

Note que na (2.29) foi adotado $r_0 \rightarrow \infty$, que corresponde à coordenada em que a velocidade da luz possui o valor c . Pode-se expressar essa condição alternativamente como $r_0 \gg b$.

Substituindo o resultado de (2.31) em (2.29) chega-se a

$$\varphi(b) - \varphi(r_0) \approx -\arccos \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{1 + \alpha}} \right) + \arccos \left(-\frac{\alpha}{2\sqrt{1 + \alpha}} \right), \quad (2.32)$$

Para obter a expressão acima foram desprezados termos de ordem $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Como $\alpha \ll 1$, os argumentos do arco-cosseno do lado direito de (2.32) podem ser expandidos em torno de $\alpha = 0$ usando as séries de Taylor

$$\frac{1 + \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{1 + \alpha}} = 1 + \frac{\alpha^2}{8} + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (2.33)$$

e

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{1 + \alpha}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (2.34)$$

Desprezando os termos de segunda ordem tem-se que a (2.32) será dada por

$$\varphi(b) - \varphi(r_0) \approx \arccos \left(-\frac{1}{2} \frac{r_s}{b} \right) \approx \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{r_s}{b}. \quad (2.35)$$

O ângulo de deflexão corresponde à variação total em φ quando r decresce da distância r_0 até seu valor mínimo b — variação angular de $\varphi(b) - \varphi(r_0)$ — e depois cresce novamente até r_0 — variação angular de $\varphi(r_0) - \varphi(b)$. Desse modo, a variação angular total é dada por $2 | \varphi(b) - \varphi(r_0) |$. Se a trajetória da luz fosse uma linha reta, essa variação seria de π , logo a deflexão total da luz $\Delta\varphi$ é obtida por meio da relação (WEINBERG, 1972)

$$\pi + \Delta\varphi = 2 | \varphi(b) - \varphi(r_0) |. \quad (2.36)$$

Substituindo a equação (2.35) em (2.36), obtém-se a deflexão total da luz

$$\Delta\varphi = \frac{r_s}{b} = \frac{2GM}{c^2 b}. \quad (2.37)$$

Para comparação com as observações astronômicas, adota-se a trajetória da luz rasante à superfície do Sol com $b = R_{sol}$ (ver Figura 2.3). Utilizando os valores conhecidos do raio do sol $R_{sol} \approx 696.342 \times 10^3 \text{ m}$ e da massa solar $M_{sol} \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ obtém-se

$$\frac{r_s}{R_{sol}} = \frac{2GM}{c^2 R_{sol}} \approx 4,239 \times 10^{-6} \ll 1. \quad (2.38)$$

Substituindo (2.38) em (2.37), a deflexão total da luz é $\Delta\varphi \approx 0,87''$, em que $\Delta\varphi$ é dado em radianos e foi utilizado que $1'' = 4,848 \times 10^{-6} \text{ rad}$.

Henry Cavendish e Johann Soldner calcularam em 1784 e 1801, respectivamente, a deflexão da luz (WILL, 1988) por meio de métodos diferentes dos utilizados no presente trabalho. Cavendish considerou em seu cálculo um raio de luz emitido com velocidade c no infinito e recebido por um observador em um ponto A. Por sua vez, Soldner considerou que o raio foi emitido com velocidade c no ponto A e recebido no infinito. Ambos obtiveram o mesmo valor de $0,87''$. Isso deve-se ao fato de que ambos obtiveram o termo dominante de (2.29), o qual é independente de r_0 conforme mostrado acima.

2.3.2 Método II

Sabe-se pela equação (2.26) que $\varepsilon > 0$, portanto a trajetória da luz é hiperbólica (ver Tabela 2.1). Nesse caso, existe um método muito simples para determinar a deflexão da luz baseado na geometria de cônicas. De fato, existe uma relação entre a excentricidade da órbita e o ângulo de deflexão da luz dada por ⁵

$$\tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (2.39)$$

Substituindo a excentricidade da órbita da luz (2.28) na expressão acima e mantendo somente contribuições de primeira ordem em r_s/b ($r_s \ll b$) obtém-se

$$\tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{r_s}{b}. \quad (2.40)$$

Utilizando a aproximação de ângulos pequenos $\tan(\Delta\varphi/2) \approx \Delta\varphi/2$, assim o ângulo de deflexão total é

$$\Delta\varphi = \frac{2GM}{c^2 b}, \quad (2.41)$$

⁵ Uma dedução dessa identidade encontra-se no Apêndice B.

que é o mesmo resultado obtido na equação (2.37).

Trabalhos recentes alegam que o cálculo newtoniano para a deflexão da luz conduz ao resultado observacional (HUANG, 2017; MIGNONAT, 2018). Porém, na referência (HUANG, 2017) existe um fator numérico errado na primeira equação do artigo. Esse erro é decisivo e conduz ao resultado equivocado do autor. A equação correta pode ser encontrada na referência (KITTEL; KNIGHT; RUDERMAN, 1965). Por sua vez, na referência (MIGNONAT, 2018) o autor argumenta que existe um erro na definição do ângulo de deflexão. Pode-se identificar que o erro do autor é justamente dobrar o valor do resultado newtoniano com uma definição errada do ângulo de deflexão total. Entretanto, o presente trabalho utiliza a definição correta do ângulo de deflexão presente na referência (WEINBERG, 1972) e mostra por dois métodos distintos que o cálculo newtoniano é, de fato, metade do resultado obtido observacionalmente. Além disso, no próximo capítulo será mostrado que o resultado da relatividade geral corresponde ao valor observacional e possui como limite newtoniano o resultado (2.41).

3 FUNDAMENTOS DA RELATIVIDADE GERAL

Este capítulo abordará os fundamentos da RG: o princípio da equivalência e as equações de Einstein. Serão discutidos o limite newtoniano da Equação de Einstein, a solução de Schwarzschild e o cálculo relativístico da deflexão da luz.

3.1 Princípio da equivalência na Relatividade Geral

O princípio da equivalência afirma que a dinâmica de uma partícula em queda livre em um campo gravitacional é localmente equivalente a um movimento na ausência da gravidade. No contexto da RG, localmente significa que dado um ponto P e um campo gravitacional arbitrário descrito pela métrica $g_{\mu\nu}(x)$ ¹, nas vizinhanças desse ponto são satisfeitas as seguintes condições (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006):

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

e

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}(P) = 0, \quad (3.2)$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski da teoria da relatividade restrita². Fisicamente, as condições (3.1) e (3.2) serão aplicáveis quando as dimensões do sistema físico forem muito menores do que a escala característica do campo gravitacional (WEINBERG, 1972).

A RG, proposta por Einstein em 1915, fornece uma descrição relativística da gravidade e incorpora naturalmente o princípio da equivalência. Na teoria o campo gravitacional é interpretado como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo induzida pela presença de matéria e energia (EINSTEIN, 1915).

O princípio da equivalência requer que em qualquer evento P em um espaço-tempo curvo seja possível definir um sistema de coordenadas X^μ , no qual $\mu = 0, 1, 2, 3$, tal que o elemento de linha (distância entre dois pontos do espaço-tempo) na vizinhança de P tome a forma

$$ds^2 \approx \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu, \quad (3.3)$$

¹ Detalhes sobre a definição da métrica e sua relação com o campo gravitacional serão discutidas posteriormente nesta seção e na seção seguinte.

² Relatividade Restrita é a teoria física que descreve as relações entre espaço e tempo na ausência de campo gravitacional (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). Detalhes a seguir.

no qual $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ é o tensor métrico da geometria de Minkowski em coordenadas cartesianas, ou seja, uma matriz diagonal 4×4 que representa a geometria de um espaço-tempo plano. A igualdade na equação (3.3) é exata no evento P, conforme indicam as equações (3.1) e (3.2) (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). O elemento de linha (métrica) é invariante sob transformações de Lorentz³.

Para um sistema de coordenadas arbitrário x^μ , a métrica toma a forma geral

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (3.4)$$

no qual $g_{\mu\nu}(x)$ é o tensor métrico que representa a geometria de um espaço-tempo arbitrário. A partir do elemento de linha ds define-se também o invariante denominado tempo próprio $d\tau$ por

$$ds^2 = c^2 d\tau^2. \quad (3.5)$$

Em cada ponto P a trajetória de uma partícula está contida no cone de luz do futuro desse ponto. Para partículas massivas tem-se $ds^2 > 0$, porém para o fóton $ds^2 = 0$ e portanto $d\tau = 0$ ⁴(HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

3.2 Equação da geodésica

De acordo com o princípio da equivalência, uma partícula em queda livre descreve localmente um movimento retilíneo uniforme na ausência de forças externas. Em outras palavras, a equação de movimento de uma partícula descrita no sistema de coordenadas local ξ^μ satisfaz

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (3.6)$$

que afirma que a quadri-aceleração da partícula é zero. Contudo, a expressão (3.6) pode ser reescrita em outro sistema de coordenadas arbitrário x^μ . Esse novo sistema de coordenadas pode ser cartesiano bem como curvilíneo, acelerado, ter rotação e etc. Dessa forma, tem-se que ξ^μ é uma função de x^μ tal que

$$\frac{d\xi^\mu}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (3.7)$$

³ Transformações de Lorentz corresponde ao conjunto de transformações lineares entre sistemas de coordenadas cartesianas que mantém ds^2 invariante (LANDAU; LIFSHITZ, 1971).

⁴ O cone de luz determina a estrutura causal local do espaço-tempo através de distâncias tipo-tempo ($ds^2 > 0$), tipo-luz ($ds^2 = 0$) e tipo-espaço ($ds^2 < 0$) (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

Ao escrever a equação de movimento (3.6) no sistema arbitrário de coordenadas x^μ , utilizando a transformação (3.7), obtém-se (WEINBERG, 1972)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (3.8)$$

na qual a conexão afim $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ é definida por

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (3.9)$$

A equação de movimento (3.8) é conhecida por equação da geodésica e tem como solução uma curva $x^\mu(\tau)$ (geodésica ou linha de mundo) que representa a trajetória de uma partícula livre em um sistema de coordenadas arbitrário. O princípio da equivalência postula que os efeitos do campo gravitacional são obtidos ao se passar do sistema local para o sistema de coordenadas do laboratório. Por esse motivo a equação (3.8) descreve a dinâmica de uma partícula livre sob a ação de um campo gravitacional. A geodésica é interpretada também como a menor distância entre dois pontos em um espaço-tempo curvo, uma vez que $x^\mu(\tau)$ é a generalização de uma reta em outras geometrias (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

É possível mostrar também que a equação (3.9) pode ser escrita em termos do tensor métrico e suas derivadas como (LANDAU; LIFSHITZ, 1971)

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\nu\mu,\lambda} - g_{\lambda\mu,\nu}), \quad (3.10)$$

na qual foi utilizada a notação

$$g_{\nu\lambda,\mu} = \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}. \quad (3.11)$$

Também chamado de símbolo de Christoffel, a equação (3.10) introduz na equação de movimento os efeitos da geometria de um espaço-tempo curvo por meio da equação (3.8). Além disso, nota-se que para um tensor métrico de componentes constantes, como a métrica de Minkowski, todas as componentes da equação (3.10) são nulas de modo que a equação (3.8) retoma (3.6). Portanto, seguindo a RG, percebe-se que o símbolo de Christoffel está diretamente relacionado com o efeito do campo gravitacional no caso de um espaço-tempo com curvatura não nula.

3.3 Equações de Einstein

Como mencionado anteriormente, na RG o campo gravitacional é interpretado como um efeito da curvatura do espaço-tempo. Matematicamente, essa ideia significa que a existência de um campo gravitacional em uma região do espaço-tempo está associada à componentes não nulas do tensor de Riemann $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$ ⁵, o qual é definido por

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}. \quad (3.12)$$

As equações do campo gravitacional (Equações de Einstein) estabelecem uma relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria e energia de um sistema. Na forma explicitamente covariante⁶, as equações de Einstein são dadas por (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

Nesse sistema de 10 equações, $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho}^{\rho}$ é o tensor de Ricci e $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura, quantidades associadas à curvatura do espaço-tempo. Explicitamente, o tensor de Ricci é dado por

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\rho} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\rho}^{\rho}. \quad (3.14)$$

Do lado direito da (3.13) aparece o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, que representa a distribuição de matéria e energia do sistema.

No presente trabalho uma distribuição de matéria e energia no espaço-tempo será modelada como um fluido perfeito⁷ e em equilíbrio termodinâmico⁸. Nesse caso o tensor energia-momento pode ser escrito na forma (LANDAU; LIFSHITZ, 1971; WEINBERG, 1972; HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)u_{\mu}u_{\nu} + Pg_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

⁵ O tensor de Riemann é o único tensor que pode ser construído do tensor métrico de suas primeiras e segundas derivadas e o qual é linear na segunda derivada (WEINBERG, 1972).

⁶ Uma equação é explicitamente covariante quando é escrita em termos de tensores. Nesse caso a forma da equação não muda por uma transformação geral de coordenadas.

⁷ Fluido perfeito é o que não possui viscosidade, não conduz calor com o meio externo e não apresenta tensão de cisalhamento (LANDAU; LIFSHITZ, 1971).

⁸ Essa condição será necessária para que se possa usar uma equação de estado entre as variáveis P e ρ

na qual P é a pressão exercida pelo fluido e u^μ sua quadri-velocidade, definida por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.16)$$

No que segue a distribuição de matéria será considerada como poeira, ou seja, no limite em que $p \rightarrow 0$. Fisicamente, isso significa que a energia média das partículas do fluido é muito menor do que sua energia de repouso (LANDAU; LIFSHITZ, 1971). Nesse caso, a expressão para o tensor energia-momento (3.15) torna-se simplesmente

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (3.17)$$

3.4 Limite newtoniano

Para que seja condizente com fenômenos físicos conhecidos, a RG deve reproduzir a física newtoniana no limite não-relativístico. Isso significa que deve-se considerar um campo gravitacional suficientemente fraco e a velocidade de uma partícula nesse campo como sendo muito menor do que a velocidade da luz ($u^i \ll u^0$)⁹. Para obter o limite newtoniano da RG considera-se uma pequena perturbação $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ no espaço-tempo de Minkowski, tal que a métrica do espaço-tempo possa ser escrita como (WEINBERG, 1972; LANDAU; LIFSHITZ, 1971)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.18)$$

que corresponde fisicamente ao limite de campos fracos.

A partir dessas considerações sobre a geometria é possível calcular as equações do campo gravitacional no limite newtoniano. É necessário, no entanto, conhecer a distribuição de matéria e energia no espaço-tempo. Para tal, dispõe-se do fato de que as componentes espaciais da quadri-velocidade u^i são desprezíveis comparadas à componente temporal u^0 . Realmente, uma vez que em coordenadas cartesianas $x^\mu = (ct, x, y, z)$, obtém-se de (3.16) que $u^0 \approx c$ no limite não-relativístico, já que $dt/d\tau \approx 1$. Nesse caso, em que $u^i \ll u^0$ e o fluido é isotrópico¹⁰,

⁹ O índice latino i toma os valores 1, 2 e 3.

¹⁰ A isotropia de um fluido ideal segue do fato de que termos fora da diagonal estariam associadas com anisotropias produzidas por efeitos de viscosidade. Pode-se mostrar que nesse caso o tensor energia-momento é diagonal (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

o tensor energia-momento (3.17) pode ser escrito como uma matriz diagonal

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2, 0, 0, 0). \quad (3.19)$$

As considerações acima são suficientes para encontrar o limite newtoniano das equações de Einstein. Desse modo, ao substituir a métrica (3.18) e o tensor energia-momento (3.19) nas equações de campo (3.13) obtém-se

$$R_{00} \approx \frac{4\pi G\rho}{c^2}. \quad (3.20)$$

Ademais, a componente R_{00} pode ser calculada também por meio da definição do tensor de Ricci (3.14) que fornece

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}, \quad (3.21)$$

em que foram desprezados termos de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$ e u^i/u^0 . Consequentemente, igualando as equações (3.20) e (3.21) obtém-se a expressão

$$\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \approx \frac{4\pi G\rho}{c^2}, \quad (3.22)$$

que é a equação de Poisson. Comparando a equação (3.22) com a (2.5) obtém-se que $h_{00} = 2\Phi/c^2$.

Dessa forma, mostra-se que a Relatividade Geral recupera a equação de campo gravitacional correta no limite não-relativístico de campo fraco e baixas velocidades.

3.5 Solução estática e esférica: a métrica de Schwarzschild

O alto grau de não linearidade nas equações de Einstein faz com que seja extremamente difícil encontrar uma solução analítica e geral para uma distribuição de massa e energia arbitrária. No entanto, em geral é mais simples buscar soluções associadas a um espaço-tempo que apresente simetrias. A primeira solução exata das equações de Einstein foi encontrada por Karl Schwarzschild e corresponde a um espaço-tempo estático e com simetria esférica. A métrica de Schwarzschild no entorno de uma distribuição esfericamente simétrica de massa M pode ser

escrita em coordenadas esféricas (r, θ, φ) como (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.23)$$

A métrica de Schwarzschild representa o espaço-tempo curvo externo a uma distribuição esférica de massa estática. Com isso, essa métrica é uma boa aproximação para a descrição do campo gravitacional na vizinhança próxima de um objeto com simetria esférica, como uma estrela, um planeta ou até um buraco negro. É importante notar que a singularidade em $r = 2GM/c^2$ não é física, mas simplesmente um artefato do sistema de coordenadas utilizado na representação de (3.23). De fato, essa singularidade pode ser removida por uma mudança do sistema de coordenadas (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

A solução de Schwarzschild foi de extrema importância para a validação da RG como uma teoria física. De fato, a deflexão da luz na proximidade do Sol e a precessão do periélio de Mercúrio são exemplos importantes de aplicação dessa geometria. No caso da deflexão da luz, a teoria prevê o dobro do valor obtido pela teoria newtoniana. A RG também explica o desvio de cerca de 43 segundos de arco por século da órbita de Mercúrio em relação à predição newtoniana (WEINBERG, 1972) e é corroborada pelos dados observacionais disponíveis (BRUNS, 2018; WILL, 2018; ADE et al., 2016; PEEBLES; RATRA, 2003).

3.6 Deflexão da Luz na Relatividade Geral

Como visto na seção 2, a deflexão da luz é interpretada na mecânica newtoniana como uma mudança na trajetória da luz devido à força gravitacional exercida pelo Sol. Nesse caso supõe-se que a luz seja constituída de partículas massivas e portanto satisfaz o princípio da equivalência (igualdade entre as massas inercial e gravitacional). Como é sabido, isso não condiz com a descrição moderna da luz nos padrões da teoria eletromagnética de Maxwell.

Na teoria da relatividade a trajetória da luz satisfaz $d\tau^2 = 0$, ou seja, a trajetória é uma geodésica nula. Desse modo, deve-se utilizar uma parametrização da trajetória diferente do tempo próprio. Usando um parâmetro p a fim de parametrizar a trajetória de uma partícula tipo luz, a equação da geodésica para a luz é dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\sigma}{dp} = 0. \quad (3.24)$$

Na RG o desvio da trajetória da luz pelo Sol é interpretado como um efeito da curvatura do espaço-tempo e será determinado a partir da equação de movimento (3.24). Nesse caso, a geometria associada à esse espaço-tempo curvo é dada pela geometria de Schwarzschild (3.23).

A equação de movimento para a luz (3.24) no espaço-tempo de Schwarzschild pode ser escrita como (WEINBERG, 1972)

$$\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{L^2}{r^3 A(r)} - \frac{B'(r)}{2A(r)B(r)^2} = 0, \quad (3.25)$$

em que $L = r^2 \dot{\phi}$ é uma constante de movimento e

$$B(r) = A(r)^{-1} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} = 1 - \frac{r_s}{r} \quad (3.26)$$

com $r_s = 2GM/c^2$ sendo o raio de Schwarzschild e $B'(r)$ a derivada de $B(r)$ em relação à p . Para obter a equação (3.25) calcula-se as componentes do símbolo de Christoffel (3.10) a partir das componentes

$$g_{00} = B(r), \quad g_{rr} = -A(r), \quad g_{\theta\theta} = -r^2, \quad g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (3.27)$$

obtidas da métrica de Schwarzschild (3.23). Substituindo as componentes $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$ na equação (3.8) obtém-se um conjunto de equações que quando combinadas resultam na (3.25)¹¹.

Além de L , existe uma segunda constante de movimento associada à equação (3.25):

$$A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{c^2}{B(r)} = -\varepsilon. \quad (3.28)$$

As constantes de movimento L e ε também podem ser obtidas pelo formalismo Lagrangiano por meio das equações de Euler-Lagrange, como mostra o apêndice C.

A partir de (3.28), (3.23) e (3.24) mostra-se que

$$d\tau^2 = \varepsilon dp^2. \quad (3.29)$$

Como no caso da luz $d\tau^2 = 0$, adotando-se $\varepsilon = 0$. Utilizando a parametrização

$$\frac{dr}{dp} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dp} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi}, \quad (3.30)$$

¹¹ Os detalhes desse cálculo estão descritos na referência (WEINBERG, 1972).

a equação (3.28) pode ser reescrita como

$$\varphi(b) - \varphi(\infty) = \frac{L}{c} \int_{\infty}^b \frac{\sqrt{A(r)}}{\sqrt{A(r) - \frac{L^2}{c^2 r^2}}} \frac{dr}{r^2}, \quad (3.31)$$

em que b é a distância mínima entre o feixe de luz e o sol e adotou-se a velocidade c para a luz na coordenada $r_0 \gg b$.

O parâmetro L pode ser obtido por meio da condição de aproximação máxima da trajetória, ou seja, no caso em que $r = b$. Assim, fazendo $dr/d\varphi = 0$ em (3.28) e utilizando a parametrização (3.30), obtém-se em primeira ordem na razão $r_s/b \ll 1$

$$L = bc \left(1 - \frac{r_s}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx bc. \quad (3.32)$$

Substituindo (3.32) e (3.26) em (3.31) obtém-se

$$\varphi(b) - \varphi(\infty) = - \int_0^1 \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_s}{b} x\right) dx}{(1 + \alpha x + \beta x^2)^{1/2}}, \quad (3.33)$$

em que, como no caso newtoniano, foram definidos

$$\alpha = \frac{r_s}{b} \quad \text{e} \quad \beta = -1 \quad (3.34)$$

e foi feita a mudança de variável

$$x = \frac{b}{r}. \quad (3.35)$$

Portanto a equação (3.31) pode ser reescrita como

$$\varphi(b) - \varphi(\infty) = I_n + I_{rg}, \quad (3.36)$$

na qual I_n corresponde à contribuição newtoniana dada em (2.29) e I_{rg} fornece a correção relativística dada por

$$I_{rg} = -\frac{1}{2} \frac{r_s}{b} \int_0^1 \frac{x dx}{(1 + \alpha x + \beta x^2)^{1/2}}. \quad (3.37)$$

É interessante notar que esta correção provém do fator $\sqrt{A(r)}$ que aparece na equação (3.31). Desse modo, a correção relativística para o caso newtoniano vem da curvatura espacial da geometria de Schwarzschild.

Utilizando a identidade

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + \alpha x + \beta x^2)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} \frac{\alpha + 2\beta x}{(1 + \alpha x + \beta x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.38)$$

pode-se mostrar que a integral

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1 + \alpha x + \beta x^2)^{1/2}} \sim -1 \quad (3.39)$$

Levando o resultado acima na equação (3.37) tem-se que

$$I_{rg} = \frac{1}{2} \frac{r_s}{b}. \quad (3.40)$$

Uma vez que pela (2.35) o resultado newtoniano é dado por

$$I_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{r_s}{b}, \quad (3.41)$$

logo a variação angular (3.36) é

$$\varphi(b) - \varphi(\infty) = \frac{\pi}{2} + \frac{r_s}{b}, \quad (3.42)$$

que é válida na aproximação em que $r_s/b \ll 1$. Usando a definição do ângulo de deflexão total dado em (2.36) tem-se que

$$\Delta\varphi = 2 \frac{r_s}{b} = \frac{4GM}{c^2 b}, \quad (3.43)$$

que corresponde ao dobro do resultado newtoniano (2.41). Considerando $b = R_{sol}$ e $M = M_{sol}$ (ver nota de rodapé da página 16) obtém-se o ângulo de deflexão da luz de $1,75''$. Esse valor é compatível com os dados observacionais disponíveis em (BRUNS, 2018; WILL, 2018).

4 EFEITOS DA CONSTANTE COSMOLÓGICA NA DEFLEXÃO DA LUZ

A única forma de uma distribuição de massa não sucumbir ao colapso gravitacional é sob a ação de um agente externo que compense a força gravitacional atrativa (LIMA; SANTOS, 2018,). Por acreditar em um universo estático e com o intuito de evitar o colapso gravitacional, Einstein adicionou uma constante às equações de campo da RG. Com isso, as equações de Einstein (3.13) com a modificação da constante cosmológica Λ tornam-se (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Atualmente, as observações de supernovas do tipo IA mostram que o universo está em expansão acelerada (PERLMUTTER et al., 1999; RIESS et al., 1998). No modelo cosmológico padrão (Λ CDM) atribui-se à Λ a expansão acelerada do universo. Portanto, uma vez que Λ introduz modificações importantes nas soluções cosmológicas e possui um efeito observável, pode-se esperar que ela também introduza modificações em fenômenos físicos oriundos de outras geometrias. Nesse capítulo será abordado o efeito da constante cosmológica na deflexão da luz. Esse fenômeno será discutido no contexto da geometria de Kottler, que é uma extensão da geometria de Schwarzschild e que leva em conta possíveis efeitos locais da constante cosmológica.

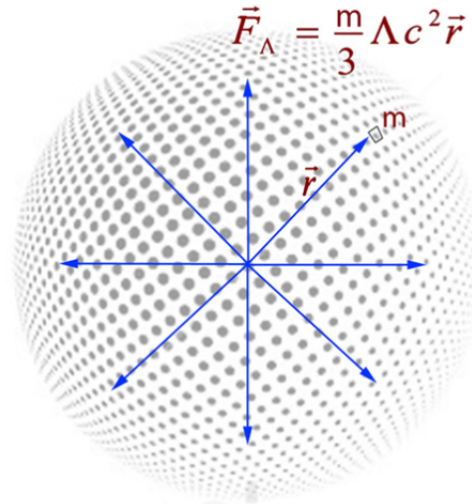
4.1 Contribuição de Λ no limite newtoniano

O limite newtoniano calculado na seção 3.4 apresenta modificações quando obtido por meio de (4.1). O potencial gravitacional newtoniano corrigido por Λ pode ser obtido inserindo a métrica (3.18) na (4.1) e seguindo um processo análogo ao da seção 3.4. Desse modo, a correção da equação de campo no limite newtoniano é dada por (HARVEY; SCHUCKING, 2000)

$$\nabla^2\Phi(r) = 4\pi G\rho - \Lambda c^2, \quad (4.2)$$

cuja solução é

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{6}\Lambda c^2 r^2. \quad (4.3)$$

Figura 4.1 – Efeito de Λ .

Representação da força repulsiva gerada por Λ . Fonte: *100 anos de Cosmologia* (LIMA; SANTOS, 2018,)

O primeiro termo da equação (4.3) é o potencial gravitacional newtoniano, enquanto o segundo é a correção introduzida pela constante cosmológica. Isso significa que Λ modifica o campo gravitacional na vizinhança do objeto de massa M . Além disso, a força gravitacional é obtida de $\vec{F}/m = -\nabla\Phi$, em que m é a massa de uma partícula teste. Logo, tem-se que

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} + \frac{1}{3} \Lambda c^2 \vec{r}, \quad (4.4)$$

em que \hat{r} é o vetor unitário na mesma direção e sentido de \vec{r} . Como esperado, a força newtoniana é recuperada no limite $\Lambda \rightarrow 0$ (LIMA; SANTOS, 2018,). Note que $\vec{F} = 0$ na coordenada

$$r_0 = \sqrt[3]{3 \frac{GM}{\Lambda c^2}} \sim 10^{19} \text{ m}, \quad (4.5)$$

em que foi utilizado $\Lambda \sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ (AGHANIM et al., 2018).

Ao analisar a equação (4.4), pode-se observar que o primeiro termo corresponde a lei da gravitação universal de Newton. Ademais, nota-se que o segundo termo gera uma repulsão gravitacional na partícula com massa m como mostra a figura (4.1). Qualitativamente, a contribuição de Λ poderia ser interpretada como o agente responsável pelo afastamento de galáxias distantes uma vez que para $r \rightarrow \infty$ a contribuição de Λ é dominante.

4.2 Cálculo newtoniano da deflexão da luz corrigido por Λ

Como visto na seção anterior, a constante cosmológica acrescenta um termo repulsivo ao potencial gravitacional newtoniano. A partir dessa modificação, o cálculo newtoniano da deflexão da luz pode ser retomado com o intuito de verificar se a constante cosmológica altera o resultado encontrado em (2.41).

É importante ressaltar que com a introdução de Λ o potencial gravitacional (4.3) ainda é um potencial central. Isso implica que o momento angular e a energia total do sistema continuam sendo quantidades conservadas. De forma análoga aos cálculos realizados nas seções 2.2 e 2.3, ε e L podem ser obtidos por meio da equação de movimento utilizando o formalismo lagrangiano. Dessa forma, obtém-se

$$\varepsilon = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{GM}{r} - \frac{1}{6}\Lambda c^2 r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \quad (4.6)$$

e

$$L = r^2 \dot{\phi}. \quad (4.7)$$

Uma vez que a velocidade da luz é c na distância r_0 onde os efeitos gravitacionais são nulos (LIMA; SANTOS, 2019), pela (4.5) pode-se concluir que a equação (4.6) é dominada pelo primeiro termo $\dot{r}^2/2$, ou seja,

$$\varepsilon \approx \frac{c^2}{2}. \quad (4.8)$$

Usando o valor da constante ε dada acima, a equação (4.6) permite encontrar a constante de movimento L . Desse modo, na distância mínima $r = b$ entre a partícula de luz e o objeto massivo, coordenada que satisfaz a condição $\frac{dr}{d\phi} = 0$, tem-se que o momento angular por unidade de massa é

$$L = bc \sqrt{1 + \frac{r_s}{b} + \frac{1}{3}\Lambda b^2} \approx bc, \quad (4.9)$$

uma vez que $\Lambda b^2 \sim 10^{-34}$. De forma análoga à seção 2.2, a partir da (4.6) e da (4.7) pode-se mostrar que

$$\varphi(b) - \varphi(r_0) = - \int_{x_0}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{r_s}{b}x - x^2 + \frac{1}{3}\Lambda b^2 x^{-2}}}, \quad (4.10)$$

em que r_0 é dado em (4.5). No caso da integral (4.10) não é possível adotar $x_0 = 0$ devido ao termo singular x^{-2} que aparece no denominador. Fisicamente isso ocorre por que a contribuição de Λ para o campo gravitacional aumenta com a distância, divergindo quadraticamente para

$r_0 \rightarrow \infty$. Dito isso, o cálculo deve ser realizado para uma escala fixa r_0 , que deve ser fornecida pela teoria. Expandindo a equação (4.10) em potências de Λb^2 obtém-se

$$\varphi(b) - \varphi(r_0) = - \int_{x_0}^1 \frac{dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{6}\Lambda b^2 \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x^2 \left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.11)$$

Usando a identidade

$$\int_{x_0}^1 \frac{dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \int_0^{x_0} \frac{dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.12)$$

na (4.11) obtém-se

$$\varphi(b) - \varphi(r_0) = I_n + \int_0^{x_0} \frac{dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{6}\Lambda b^2 \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x^2 \left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.13)$$

em que I_n corresponde ao resultado newtoniano dado em (3.41). As integrais que aparecem nos segundo e terceiro termos da (4.13) fornecem a correção da constante cosmológica à deflexão da luz.

Usando a equação (2.31) tem-se que

$$\int_0^{x_0} \frac{dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} \approx -x_0, \quad (4.14)$$

enquanto que (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \left(1 + \alpha x - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} &= - \left(\frac{1}{x} + \frac{\alpha(10 + 3\alpha^2)}{(4 + \alpha^2)} - \frac{(8 + 3\alpha^2)x}{(4 + \alpha^2)} \right) \left(1 + \alpha x - x^2\right)^{-1/2} \\ &+ \frac{3\alpha}{2} \operatorname{arccosh} \left[\frac{2 + \alpha x}{x\sqrt{4 + \alpha^2}} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

obtém-se no limite de $x_0 \ll 1$

$$\int_{x_0}^1 \frac{dx}{x^2 \left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{1}{x_0}. \quad (4.16)$$

Portanto, substituindo (3.41), (4.14) e (4.16) em (4.13) tem-se

$$\varphi(b) - \varphi(r_0) \approx \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{r_s}{b} - x_0 - \frac{\Lambda b^2}{6x_0}. \quad (4.17)$$

Usando a definição do ângulo de deflexão total (2.36)

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_n - 2x_0 - \frac{\Lambda b^2}{3x_0}, \quad (4.18)$$

em que $\Delta\varphi_n$ corresponde a deflexão newtoniana obtida em (2.41) e $x_0 = b/r_0$. Como o modelo newtoniano fornece a escala $r_0 \gg b$ em (4.5), a equação (4.18) pode ser escrita como

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_n \left[1 - \sqrt[3]{\frac{16\Lambda b^2}{3\Delta\varphi_n^4}} - \sqrt[3]{\frac{\Lambda^2 b^4}{18\Delta\varphi_n^2}} \right], \quad (4.19)$$

em que

$$\Delta\varphi_n = \frac{2GM}{bc^2}. \quad (4.20)$$

Note que a contribuição da constante cosmológica reduz o ângulo de deflexão total. Fisicamente isso é esperado devido ao efeito repulsivo de Λ . Contudo, os efeitos da constante cosmológica são extremamente pequenos. No caso em que a luz é defletida pelo campo gravitacional do sol, $\Delta\varphi_n \sim 10^{-6}$ radianos. Por sua vez, utilizando $\Lambda b^2 \sim 10^{-34}$, os segundo e terceiro termos que aparecem entre os colchetes de (4.19) são, respectivamente, da ordem de 10^{-3} e 10^{-19} .

4.3 Cálculo relativístico da deflexão da luz corrigido por Λ

Uma vez que as equações de Einstein foram modificadas pela constante cosmológica, a solução de Schwarzschild também sofrerá correção nessa nova geometria. Dessa forma, a métrica com simetria esférica e estática mais geral será dada pelo espaço-tempo de Kottler, também chamado de Schwarzschild-de Sitter (ISLAM, 1983; FREIRE; BEZERRA; LIMA, 2001; LAKE, 2002; RINDLER; ISHAK, 2007; ARAKIDA, 2018). A solução da equação de Einstein nessa geometria é dada pela métrica

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.21)$$

em que

$$B(r) = A(r)^{-1} = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}. \quad (4.22)$$

No limite em que $\Lambda \rightarrow 0$ a métrica (4.21) se reduz à métrica de Schwarzschild. Para $M \rightarrow 0$ tem-se a métrica de de Sitter (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

Como $B(r)$ e $A(r)$ em (4.22) dependem apenas da variável r , a primeira integral de movimento para a métrica de Kottler (4.21) é obtida de forma análoga à equação (3.28):

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2MG}{rc^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) - \frac{c^2}{L^2} = 0. \quad (4.23)$$

Note que na equação acima o termo de Λ é independente da coordenada r . Desse modo, a equação de movimento (derivada da equação (4.23)) não depende explicitamente de Λ . Por um lado, este fato levou alguns autores à conclusão de que a constante cosmológica não contribui na deflexão da luz (ISLAM, 1983; FREIRE; BEZERRA; LIMA, 2001; KERR; HAUCK; MASHHOON, 2003; KAGRAMANOVA; KUNZ; LÄMMERZAHN, 2006; FINELLI; GALAVERNI; GRUPPUSO, 2007; SERENO; JETZER, 2006). Embora a equação de movimento não seja alterada, a constante cosmológica altera o ângulo de deflexão, como será mostrado pelo cálculo explícito a partir de (4.23). Por outro lado, outros autores chegaram a mesma conclusão utilizando diferentes métodos para obter o ângulo de deflexão total da luz (LAKE, 2002; RINDLER; ISHAK, 2007; ARAKIDA; KASAI, 2012; BATIC; NELSON; NOWAKOWSKI, 2015). Um método de cálculo que tem a vantagem de utilizar somente a técnica padrão para o cálculo do desvio da luz na RG (WEINBERG, 1972) será apresentado a seguir.

De forma análoga a seção 3.6, pode-se mostrar a partir de (4.23) que

$$\varphi(b) - \varphi(r_0) = - \int_{x_0}^1 \frac{\sqrt{1 + \frac{r_s}{b}x} \left(1 + \frac{1}{3}\Lambda b^2 x^{-2} + \frac{1}{3}\Lambda r_s x^{-1} \right) dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2 + \frac{1}{3}\Lambda b^2 x^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.24)$$

em que $x = b/r$.

A integral (4.24) pode ser expandida em torno de potências de $\Lambda b^2 \sim 10^{-34}$ e reescrita como

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(r_0) \approx & - \int_0^1 \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_s}{b}x \right) dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + \int_0^{x_0} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_s}{b}x \right) dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{1}{6}\Lambda b^2 \int_{x_0}^1 \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_s}{b}x \right) F(x) dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

em que

$$F(x) = x^{-2} \left(1 + \frac{r_s}{b}x - x^2 \right)^{-1} - 2 \left(x^{-2} + \frac{r_s}{b}x^{-1} \right). \quad (4.26)$$

O primeiro termo em (4.25) é a integral (3.33) obtida na Relatividade Geral e resulta no ângulo de deflexão (3.42). As demais integrais em (4.25) são conhecidas (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014) e podem ser aproximadas por

$$\int_0^{x_0} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_s}{b} x\right) dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b} x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} \approx -x_0 \quad (4.27)$$

e

$$\int_{x_0}^1 \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_s}{b} x\right) F(x) dx}{\left(1 + \frac{r_s}{b} x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} \approx -\frac{3}{x_0}. \quad (4.28)$$

Utilizando o resultado da Relatividade Geral (3.42), substituindo (4.27) e (4.28) em (4.25) e utilizando a definição do ângulo de deflexão total (2.36) obtém-se

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{rg} - 2x_0 - \frac{\Lambda b^2}{x_0}, \quad (4.29)$$

em que

$$\Delta\varphi_{rg} = \frac{4GM}{bc^2} \quad (4.30)$$

corresponde ao resultado da Relatividade Geral para a deflexão da luz, obtida em (3.43).

A escala x_0 pode ser determinada diretamente da geometria de Kottler. De fato, o horizonte para a métrica de Kottler pode ser determinado de

$$1 - \frac{r_s}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 = 0, \quad (4.31)$$

que possui as seguintes soluções aproximadas (GHAFARNEJAD, 2018)

$$r_b = r_s(1 + \xi) \quad \text{e} \quad r_c = \frac{r_s}{\sqrt{\xi}}, \quad (4.32)$$

nas quais

$$\xi = \frac{\Lambda r_s^2}{3} \ll 1. \quad (4.33)$$

Nessa aproximação r_b é o raio de Schwarzschild enquanto r_c corresponde ao horizonte de de Sitter, o qual fornece a escala $x_0 = r_c/b \ll 1$ que será utilizada em (4.29). Com isso, e usando

r_c dado em (4.32), a expressão (4.29) torna-se

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{rg} \left(1 - \frac{5}{\sqrt{3}} \frac{b\sqrt{\Lambda}}{\Delta\varphi_{rg}} \right). \quad (4.34)$$

Como $\Delta\varphi_{rg} = 2\Delta\varphi_n \sim 10^{-6}$ radianos (ver (4.20) e (4.30)), a correção de Λ entre os parênteses na (4.34) é da ordem de 10^{-11} . Como ocorreu no caso newtoniano, a constante cosmológica diminui o ângulo de deflexão total.

5 CONCLUSÃO

Essa dissertação teve o propósito de abordar os efeitos da constante cosmológica ao fenômeno da deflexão da luz na teoria newtoniana e na Relatividade Geral.

Na análise newtoniana foram utilizados dois métodos com diferentes abordagens. O primeiro método permite encontrar correções de ordens superiores ao desvio da luz e ser utilizado no caso relativístico. O segundo método, embora muito mais prático e direto do que o primeiro, fornece apenas a contribuição dominante para a deflexão da luz. Isso ocorre porque o método dispõe da hipótese de que a trajetória é hiperbólica, condição satisfeita pela trajetória da luz na teoria newtoniana. Portanto, pequenas modificações à trajetória hiperbólica introduzidas pela RG fazem com que nesse caso o segundo método não seja aplicável.

O cálculo newtoniano conduz aos resultados de Cavendish e Soldner em ordem dominante (WILL, 1988). Ambos os métodos utilizados fornecem o mesmo valor de aproximadamente $0,87''$ para o desvio da luz em torno do sol, reafirmando que o resultado newtoniano é a metade do valor observacional, o qual é de aproximadamente $1,75''$. Portanto, constata-se que a alegação dos autores (MIGNONAT, 2018) e (HUANG, 2017) de que o cálculo newtoniano da deflexão da luz fornece corretamente o valor observacional está equivocada. De fato, os trabalhos citados acima apresentam problemas conceituais acerca da definição do ângulo de deflexão (MIGNONAT, 2018) e a equação de movimento errada (HUANG, 2017).

A Relatividade Geral, por sua vez, fornece o ângulo de deflexão da luz correspondente ao valor observado do fenômeno (BRUNS, 2018; WILL, 2018). Esse e outros resultados foram importantes para a validação da Relatividade Geral como uma teoria de gravitação (WEINBERG, 1972). Com o método de análise utilizado nessa dissertação, foi possível isolar o termo que corrige o resultado newtoniano e identificar que o responsável por essa correção é o fator de curvatura espacial na geometria de Schwarzschild.

A introdução da constante cosmológica nas equações de Einstein modifica o potencial gravitacional no limite newtoniano, criando uma força contrária à força gravitacional. Essa modificação no potencial gravitacional gera correções no cálculo newtoniano da deflexão da luz. No entanto, as correções de Λ para a deflexão divergem no limite $r \rightarrow \infty$, de modo que o cálculo deve ser feito para uma escala cosmológica fixa r_0 que deve ser fornecida pela teoria. No caso newtoniano, a escala r_0 é fornecida pela condição de que a velocidade da luz é igual a c na posição onde a força resultante é nula sobre a partícula de luz. Isso ocorre em $r_0 = (3GM/\Lambda c^2)^{1/3} \sim 10^{19}\text{m}$. O ângulo de deflexão da luz corrigido por Λ obtido em ordem

dominante a partir de r_0 é

$$\Delta\varphi \approx \Delta\varphi_n \left[1 - \sqrt[3]{\frac{16\Lambda b^2}{3\Delta\varphi_n^4}} \right].$$

O sinal negativo da contribuição de Λ indica que o efeito da deflexão da luz é diminuído pela constante cosmológica. Isso era esperado, uma vez que Λ é um termo de natureza repulsiva na expressão da força gravitacional. Além disso, o efeito da constante cosmológica no cálculo newtoniano da deflexão da luz é da ordem de 10^{-3} , ou seja, mil vezes menor do que o ângulo de deflexão $\Delta\varphi_n$.

Por meio da geometria de Kottler, a contribuição de Λ na deflexão da luz pode ser obtida na RG. Essa contribuição realmente desaparece na equação de movimento da luz. Contudo, é equivocado dizer que a constante cosmológica não modifica o ângulo de deflexão. A partir da primeira integral de movimento verifica-se que há de fato correções de Λ , como pode-se observar no resultado newtoniano exibido acima. Assim como no caso newtoniano, a primeira integral de movimento deve ser calculada em um limite superior r_0 , correspondente à escala cosmológica fornecida pela teoria. Isso é necessário pois as correções relativísticas de Λ também divergem no limite $r \rightarrow \infty$. No entanto, a escala r_0 na RG é determinada a partir do horizonte cosmológico associado à geometria de Schwarzschild-de Sitter, o qual é dado por $r_0 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sim 10^{26}\text{m}$, que é aproximadamente o tamanho do universo observável (AGHANIM et al., 2018). Utilizando essa escala, o ângulo de deflexão para a luz é de

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{rg} \left(1 - \frac{5}{\sqrt{3}} \frac{b\sqrt{\Lambda}}{\Delta\varphi_{rg}} \right).$$

Nota-se que a correção relativística de Λ também é negativa, diminuindo o ângulo de deflexão como no caso newtoniano. A ordem de grandeza dessa contribuição é igual a 10^{-11} , ou seja, quase um trilhão de vezes menor do que a deflexão $\Delta\varphi_{rg}$.

Assim, tanto no caso newtoniano como na RG, o método de cálculo utilizado nessa dissertação deixa claro que a constante cosmológica fornece uma contribuição à deflexão da luz, porém essa contribuição é extremamente pequena quando comparada com a ordem de grandeza do ângulo de deflexão $\Delta\varphi_{rg}$.

Um próximo passo interessante é comparar o limite newtoniano de outros métodos relativísticos conhecidos na literatura com o cálculo newtoniano apresentado neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical review letters**, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. **Astronomy & Astrophysics**, v. 594, p. A13, 2016.
- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. **arXiv preprint arXiv:1807.06209**, 2018.
- ARAKIDA, H. Light deflection and gauss–bonnet theorem: definition of total deflection angle and its applications. **General Relativity and Gravitation**, v. 50, n. 5, p. 48, 2018.
- ARAKIDA, H.; KASAI, M. Effect of the cosmological constant on the bending of light and the cosmological lens equation. **Physical Review D**, v. 85, n. 2, p. 023006, 2012.
- BATIC, D.; NELSON, S.; NOWAKOWSKI, M. Light on curved backgrounds. **Physical Review D**, v. 91, n. 10, p. 104015, 2015.
- BLANEY, T. G. et al. Measurement of the speed of light. **Nature**, v. 251, n. 5470, p. 46–46, 1974.
- BRUNS, D. G. Gravitational starlight deflection measurements during the 21 august 2017 total solar eclipse. **Classical and Quantum Gravity**, v. 35, n. 7, p. 075009, 2018.
- EINSTEIN, A. The field equations of gravitation. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)**, v. 1915, p. 844–847, 1915.
- FINELLI, F.; GALAVERNI, M.; GRUPPUSO, A. Light bending as a probe of the nature of dark energy. **Physical Review D**, v. 75, n. 4, p. 043003, 2007.
- FITZPATRICK, R. Newtonian dynamics. Austin: The University of Texas, 2011.
- FREIRE, W. H. C.; BEZERRA, V. B.; LIMA, J. A. S. Cosmological constant, conical defect and classical tests of general relativity. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 33, n. 8, p. 1407–1414, 2001.
- GHAFFARNEJAD, H. Schwarzschild-de sitter black hole in canonical quantization. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2018. v. 1141, n. 1, p. 012048.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical mechanics**. [S.l.]: AAPT, 2002.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. [S.l.]: Academic press, 2014.
- HARVEY, A.; SCHUCKING, E. Einstein’s mistake and the cosmological constant. **American Journal of Physics**, v. 68, n. 8, p. 723–727, 2000.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. **General relativity: an introduction for physicists**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- HUANG, F. Accurate solution to the gravitational bending of starlight by a massive object. **Journal of Modern Physics**, v. 8, n. 11, p. 1894, 2017.

- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929.
- ISLAM, J. N. The cosmological constant and classical tests of general relativity. **Physics Letters A**, v. 97, n. 6, p. 239–241, 1983.
- KAGRAMANOVA, V.; KUNZ, J.; LÄMMERZAHN, C. Solar system effects in schwarzschild–de sitter space–time. **Physics Letters B**, v. 634, n. 5-6, p. 465–470, 2006.
- KERR, A. W.; HAUCK, J. C.; MASHHOON, B. Standard clocks, orbital precession and the cosmological constant. **Classical and Quantum Gravity**, v. 20, n. 13, p. 2727, 2003.
- KITTEL, C.; KNIGHT, W. D.; RUDERMAN, M. A. Berkeley physics course. McGraw-Hill, 1965.
- LAKE, K. Bending of light and the cosmological constant. **Physical Review D**, v. 65, n. 8, p. 087301, 2002.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. The classical theory of fields. Pergamon, 1971.
- LIMA, J. A. S.; SANTOS, R. C. 100 anos de cosmologia relativística (1917–2017). parte i: Das origens à descoberta da expansão universal (1929). **Revista Brasileira de Ensino de Física**, arXiv:1709.03693 [astro-ph.CO], v. 40, n. 1, e1313, 2018,.
- LIMA, J. A. S.; SANTOS, R. C. Do eclipse solar de 1919 ao espetáculo das lentes gravitacionais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, (Submetido para publicação), v. 40, n. 1, e1313, 2019.
- MARION, J. B.; THORNTON, S. T. Classical mechanics of particles and systems. **Saunders Colledge Pub., quarta edição**, 1995.
- MARTIN, J. Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask). **Comptes Rendus Physique**, v. 13, n. 6-7, p. 566–665, 2012.
- MIGNONAT, M. Soldner had found in 1802 the deflection of the light by the sun as the general relativity shows. **Journal of Modern Physics**, v. 9, n. 08, p. 1545, 2018.
- PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The cosmological constant and dark energy. **Reviews of modern physics**, v. 75, n. 2, p. 559, 2003.
- PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.
- POUND, R. V. Weighing photons, i. **Physics in Perspective**, v. 2, n. 3, p. 224–268, 2000.
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.
- RINDLER, W.; ISHAK, M. Contribution of the cosmological constant to the relativistic bending of light revisited. **Physical Review D**, 2007.
- SERENO, M.; JETZER, P. Solar and stellar system tests of the cosmological constant. **Physical Review D**, v. 73, n. 6, p. 063004, 2006.

TANABASHI, M. et al. Review of particle physics. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 98, n. 3, p. 030001, 2018.

WEINBERG, S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. 1972.

WILL, C. M. Henry cavendish, johann von soldner, and the deflection of light. **American Journal of Physics**, v. 56, n. 5, p. 413–415, 1988.

WILL, C. M. **Theory and experiment in gravitational physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018.

APÊNDICE A – Dedução da equação de Poisson gravitacional.

O fluxo de campo gravitacional que emana de uma distribuição de massa M e atravessa uma superfície arbitrária S pode ser calculado pela integral de superfície (MARION; THORNTON, 1995)

$$\Phi_m = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{a} \quad (1)$$

A solução da integral acima para um campo gravitacional \vec{g} dado por (2.2) é

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{a} = -GM \int_S \left(\frac{1}{r^2} \right) da = -4\pi GM. \quad (2)$$

Entretanto, como a massa é uma distribuição arbitrária, ela pode ser representada por

$$M = \int_v \rho dv. \quad (3)$$

E usando o teorema de divergência de Gauss, pode-se reescrever a equação (2) como (MARION; THORNTON, 1995)

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{a} = \int_v \nabla \cdot \vec{g} dv = \int_v (-4\pi G) \rho dv. \quad (4)$$

Como os volumes nas integrais são arbitrários, os integrandos são iguais. Dessa forma,

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (5)$$

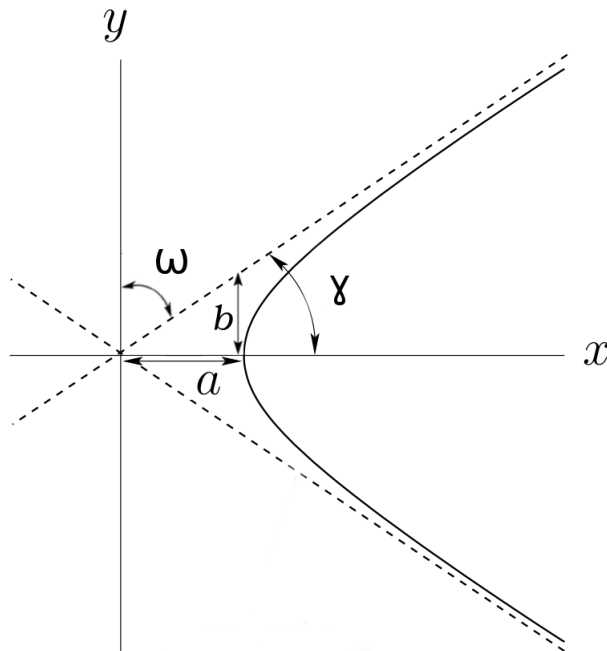
mas substituindo a equação (2.3) em (5), e sabendo que $\nabla \cdot \nabla x = \nabla^2 x$, logo

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \quad (6)$$

que é a equação de Poisson gravitacional.

APÊNDICE B – Geometria da hipérbole.

Figura 1 – Geometria da Hipérbole.



Representação de uma hipérbole de semi-eixo real (a) e semi-eixo imaginário (b). Os ângulos γ e ω representam respectivamente os ângulos entre as assíntotas e os eixos de coordenadas x e y . Fonte: Adaptada de (FITZPATRICK, 2011)

Hipérbole é uma seção cônica, ou seja, uma função gerada da interseção entre um plano e uma superfície cônica. A equação matemática que descreve uma hipérbole, com o ponto de interseção das assíntotas ¹ centrado na origem, é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (7)$$

na qual a é o semi-eixo real da hipérbole e b o semi-eixo imaginário (FITZPATRICK, 2011).

Uma das assíntotas descreve um ângulo γ , como mostra a figura (1), tal que

$$\tan \gamma = \frac{b}{a}. \quad (8)$$

A distância r_1 de um ponto qualquer de uma seção cônica à origem é dada por $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, enquanto uma distância r_2 é definida por $r_2 = x + d$ na qual d é uma distância fixa entre a origem e uma reta $x = -d$ como mostra a figura (2). Uma definição de hipérbole com

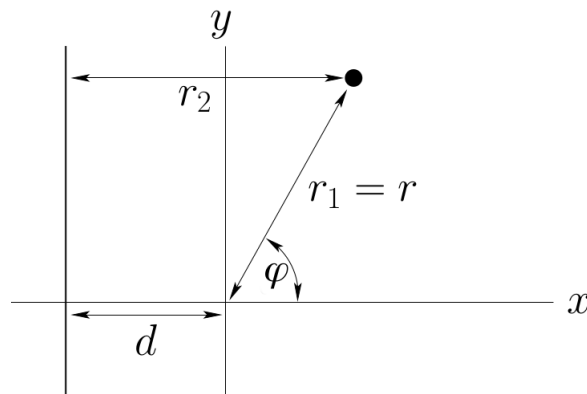
¹ Assíntotas são linhas imaginárias cujas suas distâncias às curvas da hipérbole tendem a zero no infinito (FITZPATRICK, 2011)

maior rigor matemático requer que a razão entre r_1 e r_2 para o grupo de pontos que a descrevem seja fixa, ou seja

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + d} = e, \quad (9)$$

em que e é constante e representa a excentricidade da hipérbole (FITZPATRICK, 2011). Em coordenadas polares $r_1 = r$ e $r_2 = r \cos \varphi + d$ como pode ser visto na figura (2). A equação (9)

Figura 2 – Esquema de coordenadas polares



Sistema de coordenadas polares no qual r_1 , r_2 e φ são variáveis e d uma distância fixa da origem. Fonte: Adaptada de (FITZPATRICK, 2011)

em coordenadas polares torna-se

$$r = \frac{r_c}{1 - e \cos \varphi}, \quad (10)$$

em que $r_c = ed$. Nota-se que a equação acima é equivalente à equação de movimento (2.23) ao se identificar $r_c = L/GM$. Em coordenadas cartesianas, a equação (9) pode ser reescrita na forma

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (11)$$

para $e > 1$, na qual

$$a = \frac{r_c}{e^2 - 1}, \quad (12)$$

$$b = \frac{r_c}{\sqrt{e^2 - 1}} = \sqrt{e^2 - 1}a, \quad (13)$$

e

$$x_c = -\frac{er_c}{e^2 - 1} = -ea. \quad (14)$$

Percebe-se portanto que a equação (11) é a equação de uma hipérbole com o ponto de interseção das assíntotas em $(x_c, 0)$. Ao substituir (12) e (13) em (8) obtém-se a relação

$$\tan \gamma = \sqrt{e^2 - 1}. \quad (15)$$

No entanto, para o presente trabalho é interessante escrever a excentricidade não em termos do ângulo γ , e sim do seu complementar. O ângulo complementar de γ representa metade da variação da trajetória e corresponde à $\omega = (\pi/2) - \gamma$. Dessa forma, utilizando a idade trigonométrica

$$\tan(a + b) = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}, \quad (16)$$

tem-se que $\omega = 1/\tan \gamma$ em módulo. A relação entre ω e a excentricidade torna-se

$$\tan \omega = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (17)$$

Além disso, identifica-se nas figuras (2) e (2.3) (ver seção 2.3) uma relação entre ω e o ângulo de deflexão da luz $\Delta\varphi$ tal que $\Delta\varphi = 2\omega$. A relação entre $\Delta\varphi$ e a excentricidade da hipérbole é, portanto,

$$\tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (18)$$

APÊNDICE C – Cálculo alternativo da deflexão da luz

Em um dos testes clássicos da RG calcula-se o ângulo de deflexão de um raio de luz ao passar pelo campo gravitacional do sol. Como visto no capítulo 2, uma forma alternativa de encontrar a trajetória de uma partícula é por meio da Lagrangiana dessa partícula. Entretanto, a discussão acerca da Lagrangiana no capítulo 2 diz respeito à mecânica newtoniana e é definida pela energia cinética menos a energia potencial. No caso relativístico, a atração gravitacional é uma característica intrínseca da geometria do espaço-tempo e portanto não é considerada um potencial proveniente de uma força. Assim, o análogo relativístico da Lagrangiana é dado por (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}, \quad (19)$$

em que p é um parâmetro afim definido ao longo da curva. Ao calcular a Lagrangiana (19) para o caso da luz obtém-se $\mathcal{L} = 0$. Isso deve-se ao fato de que a geodésica no caso da luz é nula (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). Na geometria de Schwarzschild a Lagrangiana torna-se

$$\mathcal{L} = A(r)\dot{t}^2 - A(r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 0. \quad (20)$$

A partir da Lagrangiana (20) é possível calcular as equações de movimento por meio das equações de Euler-Lagrange (2.20) para as coordenadas (t, r, θ, ϕ) . O fato da Lagrangiana (20) não depender das variáveis t e ϕ implica na existência de duas quantidades conservadas ao longo da trajetória do feixe. Essas quantidades são a energia $\varepsilon = A(r)\dot{t}$ e o momento angular $L = r^2\dot{\phi}$. Como em casos de partículas sob um potencial central o momento angular da partícula é conservado. Dessa forma a trajetória estará sempre contida em um plano e por simplicidade pode-se escolher o plano $\theta = \pi/2$. Utilizando a parametrização (3.30) a equação da trajetória da luz no plano equatorial é escrita na forma

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2, \quad (21)$$

na qual $u \equiv 1/r$.

Na ausência de matéria ($M = 0$), a solução de (21) é dada por

$$u \equiv u_0 = \frac{\sin\phi}{R_s}, \quad (22)$$

uma vez que na ausência de massa o espaço-tempo é plano, a trajetória da luz será retilínea e terá uma distância $R_{sol}/\sin\varphi$ do sol. Para obter o efeito relativístico da trajetória da luz defletida considera-se (22) como sendo o efeito dominante e acrescenta-se uma perturbação Δu , ou seja, escreve-se a solução da (21) como $u = u_0 + \Delta u$. Substituindo a expressão perturbada de u na equação de movimento (21) obtém-se a equação de evolução da perturbação

$$\frac{d^2\Delta u}{d\varphi^2} + \Delta u = \frac{3GM}{R_{sol}^2 c^2} \sin^2\varphi, \quad (23)$$

em que somente termos de primeira ordem em Δu foram mantidos². A solução perturbada contendo a correção relativística é dada por

$$u = R_{sol}^{-1} \left[\sin\varphi + \frac{3GM}{2c^2 R_{sol}} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right) \right]. \quad (24)$$

Nota-se a ocorrência do parâmetro $\ell/R_{sol} = GM/c^2 R_{sol} \ll 1$ como coeficiente da correção relativística. Nota-se também que fazendo $M = 0$ em (24) a solução retoma (22).

No caso em que a luz provem de uma fonte muito longe, considera-se que a observação é feita em $r \rightarrow \infty$, ou seja $u = 0$. Definindo a coordenada φ tem-se que o observador em $r \rightarrow \infty$ medirá um ângulo $\varphi = \pi + \Delta\varphi$, em que $\Delta\varphi$ corresponde ao ângulo de deflexão. Ademais, como trata-se de uma pequena deflexão, pode-se considerar também a aproximação de pequenos ângulos, em que $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$ e $\cos 2\Delta\varphi \approx 1$. Usando essas condições acima na equação (24) obtém-se o ângulo de deflexão

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 R_{sol}}. \quad (25)$$

Como esperado, a ordem de grandeza do ângulo de deflexão é determinada pela razão ℓ/R_{sol} .

No caso do Sol, o valor teórico para a deflexão total é $\Delta\varphi = 1,75''$. Em 1919, durante um eclipse, Eddington encontrou dois conjuntos de dados experimentais da deflexão da luz. O primeiro indicou que $\Delta\varphi = 1.98'' \pm 0.16''$ e o segundo $\Delta\varphi = 1.61'' \pm 0.4''$, ambos consistentes com a teoria da Relatividade (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

² Também foi ignorado um termo da forma $(\ell/R_{sol})\Delta u$, em que $\ell = GM/c^2$ define uma escala de comprimento. Realmente, a escala ℓ é muito menor do que a escala característica do problema não perturbado. Admitiu-se então que $(\ell/R_{sol})\Delta u$ é da ordem de $(\Delta u)^2$