



PEDRO GONÇALVES DE OLIVEIRA

**CONSISTÊNCIA NOS CÁLCULOS PERTURBATIVOS DAS
ANOMALIAS GRAVITACIONAIS BIDIMENSIONAIS**

LAVRAS – MG

2018

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

de Oliveira, Pedro Gonçalves.

Consistência nos cálculos perturbativos das anomalias
gravitacionais bidimensionais / Pedro Gonçalves de Oliveira. -
2018.

126 p. : il.

Orientador(a): Gilson Dallabona.

Coorientador(a): Orimar Antonio Battistel.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Lavras, 2018.

Bibliografia.

1. Anomalias gravitacionais. 2. TQC perturbativa. 3.
Divergências. I. Dallabona, Gilson. II. Battistel, Orimar Antonio.
III. Título.

PEDRO GONÇALVES DE OLIVEIRA

**CONSISTÊNCIA NOS CÁLCULOS PERTURBATIVOS DAS ANOMALIAS
GRAVITACIONAIS BIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Campos e Partículas, para a obtenção do título de Mestre.

Gilson Dallabona

Orientador

Orimar Antonio Battistel

Coorientador

LAVRAS – MG

2018

PEDRO GONÇALVES DE OLIVEIRA

**CONSISTÊNCIA NOS CÁLCULOS PERTURBATIVOS DAS ANOMALIAS
GRAVITACIONAIS BIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Campos e Partículas, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 26 de Abril de 2018.

Gilson Dallabona	UFLA
Rodrigo Bufalo	UFLA
Rodolfo Alván Casana Sifuentes	UFMA

Gilson Dallabona
Orientador

Orimar Antonio Battistel
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2018**

AGRADECIMENTOS

A Deus, minha família, meus mestres e meus amigos. À CAPES pelo apoio financeiro voluntário ao projeto, e principalmente aos cidadãos brasileiros pelo apoio financeiro involuntário à CAPES.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo principal calcular as anomalias gravitacionais (Einstein e Weyl) que surgem em uma teoria onde férmions de Weyl são acoplados a um espaço-tempo curvo bidimensional. As eventuais divergências e/ou indeterminações, que são típicas do cálculo perturbativo de teorias quânticas de campos, são tratadas sob a ótica de uma prescrição alternativa e de caráter universal, onde regularizações não desempenham nenhum papel relevante. As amplitudes perturbativas são manipuladas de maneira que o seu conteúdo matemático permanece intacto até o fim dos cálculos: as divergências básicas não são integradas de fato, sendo apenas organizadas em objetos padronizados e livres de quantidades físicas, enquanto a parte finita é escrita em termos de uma classe de funções bem-comportadas e carrega todo o conteúdo físico da amplitude. A função de Green estudada, denominada por nós *amplitude gravitacional*, é calculada ao nível 1-loop de aproximação e dá a correção fermiônica para a propagação do gráviton. A amplitude gravitacional é sistematizada como uma soma de sub-amplitudes que podem ser identificadas, eventualmente, com amplitudes pertencentes às usuais teorias de *gauge* como, por exemplo, a eletrodinâmica de Schwinger. Além do caráter organizacional, esta sistematização permite identificar a origem dos possíveis termos anômalos. Através da contração das sub-amplitudes com o momento externo e a métrica podemos construir um conjunto de relações entre amplitudes que denominamos *relações entre funções de Green*. Estas são utilizadas como vínculos de consistência que devem ser satisfeitos pelas sub-amplitudes calculadas. A manutenção do conteúdo de simetria associado a cada sub-amplitude é testado através da verificação das identidades de Ward. Mostramos que é possível obter os tradicionais resultados para as anomalias gravitacionais, que são bem conhecidos da literatura, os quais tem como origem a parte finita da amplitude. Entretanto, dentro deste cenário onde nascem as anomalias gravitacionais, as relações entre funções de Green associadas às mesmas contrações também são violadas, o que mostra uma violação da linearidade da operação de integração.

Palavras-chave: Anomalias gravitacionais. Consistência. Divergências. TQC perturbativa.

ABSTRACT

The present study has as its main goal calculating the gravitational anomalies (Einstein and Weyl) that emerge in a theory where Weyl fermions are coupled to a two-dimensional curved space-time. The eventual divergences and/or indeterminations, which are typical of perturbative calculations in quantum field theories, are treated with an alternative approach of universal nature, where regularizations play no relevant role. The perturbative amplitudes are manipulated in a way such that their mathematical content remains intact until the end of the calculations: the basic divergences are not integrated, but organized as standardized objects free from physical content, while the finite part is written in terms of a class of well-behaved functions and carries all the physical content of the amplitude. The Green function investigated, called by us *gravitational amplitude*, is calculated at 1-loop level and gives the fermionic correction to the graviton propagation. The gravitational amplitude is organized as a sum of sub-amplitudes that can be identified, eventually, with amplitudes that belong to usual gauge theories, e.g, the Schwinger electrodynamics. Besides the organizational character, this systematization allows us to identify the origin of the possible anomalous terms. Through the contraction of the sub-amplitudes with the external momentum and with the metric we can build a set of relations between the amplitudes, which we call *relations among Green functions*. These are used as consistency constraints that must be satisfied by the calculated sub-amplitudes. The preservation of the symmetry content associated with each sub-amplitude is tested through the verification of the Ward identities. We show that it is possible to obtain the usual results to the gravitational anomalies, which are well known from the literature, and come from the the finite part of the amplitude. However, within this frame where the gravitational anomalies emerge, the relations among Green functions associated with the same contractions are violated too, showing a violation on the linearity of the integration operation.

Keywords: Gravitational anomalies. Consistency. Divergences. Perturbative QFT.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação diagramática da amplitude perturbativa estudada	26
Figura 3.1 – Representação diagramática da RFG (3.8)	31
Figura 3.2 – Representação diagramática da RFG (3.22)	33
Figura 3.3 – Representação diagramática da RFG (3.31)	35

SUMÁRIO

1	Introdução	7
2	O Modelo de Férmions em um Espaço-tempo Curvo Bidimensional	14
2.1	Introdução e Definições	14
2.2	Transformações e Simetrias	20
2.3	A Amplitude Gravitacional	25
3	Identities de Ward e Relações entre Funções de Green	29
3.1	Sub-Amplitudes	29
3.1.1	Amplitudes vetor-vetor	29
3.1.2	Amplitudes axial-axial	32
3.1.3	Amplitudes axial-vetor	35
3.2	A Amplitude Gravitacional	37
4	Método para Manipulação e Cálculo de Amplitudes Perturbativas em TQC	42
5	Cálculo Explícito e Consistência das Sub-Amplitudes	46
5.1	Amplitudes com dois vértices vetoriais	46
5.1.1	Amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$	47
5.1.2	Amplitude $T_{\rho;\mu\nu}^{VV}$	51
5.1.3	Amplitude $T_{\rho\sigma;\mu\nu}^{VV}$	56
5.2	Amplitudes com dois vértices axiais	64
5.2.1	Amplitude $T_{\mu\nu}^{AA}$	64
5.2.2	Amplitude $T_{\rho;\mu\nu}^{AA}$	66
5.2.3	Amplitude $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}$	69
5.3	Amplitudes com vértices vetoriais e axiais	73
5.3.1	Amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$	74
5.3.2	Amplitude $T_{\rho;\mu\nu}^{AV}$	77
5.3.3	Amplitude $T_{\rho\sigma;\mu\nu}^{AV}$	80
6	As Anomalias de Einstein e Weyl	82
6.1	Relações entre Funções de Green	83
6.2	Identities de Ward - Cálculo Explícito das Anomalias Gravitacionais . .	89
6.2.1	Anomalia de Einstein	89
6.2.2	Anomalia de Weyl	95
7	Resumo e Análise Final dos Resultados	99

APENDICE A – Integrais	113
APENDICE B – Objetos divergentes	116
APENDICE C – Amplitudes complementares	121
APENDICE D – Funções finitas	125

1 INTRODUÇÃO

Sabe-se de longa data que as simetrias têm um papel fundamental na física, tanto no regime clássico quanto no quântico. No formalismo da mecânica Lagrangiana uma simetria é uma transformação no sistema que não altera a ação e, por conseguinte, não altera as equações de movimento dos corpos ou campos envolvidos, mantendo a fenomenologia intacta (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002). O teorema de Noether garante que para cada simetria do sistema existe uma corrente localmente conservada, que é interpretada como uma propriedade física do sistema. Em teorias de campos, existem basicamente dois tipos de simetrias: simetrias no espaço-tempo, onde transformações das coordenadas não alteram a ação do sistema; e simetrias de *gauge*, onde as transformações são no espaço interno dos campos e não envolvem as coordenadas. Em ambos os casos, pode-se tratar as transformações dentro do formalismo da teoria de grupos e representações. Cada transformação está, então, relacionada a um grupo, e suas representações classificam os tipos de campos da teoria. O grupo de Poincaré, por exemplo, rege as transformações de Lorentz (rotações e *boosts*) e translações, que são transformações no espaço-tempo. As diferentes representações de tal grupo são responsáveis por classificar os campos ou partículas em estados de *spin* e momento (ou massa) bem definidos (DAS, 2008). Isto é uma afirmação deveras surpreendente, pois propriedades anteriormente tomadas *a priori* pelos físicos, por serem simplesmente detectadas experimentalmente, surgem naturalmente da teoria quando usa-se a matemática adequada. E de fato é este o entendimento dos físicos atualmente: tanto quanto possível, as propriedades físicas devem surgir como consequência natural da teoria.

Esta tendência é ainda mais forte ao estudarmos os grupos de *gauge*. As transformações de *gauge* são de certa maneira mais abstratas, pois são definidas em um espaço interno dos campos e não representam uma transformação concreta propriamente dita - como as transformações de Poincaré representam uma mudança no referencial do observador, por exemplo. A existência de grupos de transformação de *gauge*, entretanto, é crucial para explicar como diferentes tipos de partículas interagem entre si. O clássico exemplo é a interação eletromagnética de férmions carregados. Ao impor-se uma simetria de *gauge* $U(1)$ local ao campo de Dirac, que descreve férmions de $spin\ 1/2$, a Lagrangeana ganha naturalmente um termo de interação que acopla os férmions a um novo campo (chamado campo de *gauge*), que por sua vez deve se transformar frente a uma outra representação do mesmo grupo $U(1)$. Esta teoria é a eletrodinâmica quântica (QED), que descreve o acoplamento dos elétrons/pósitrons com o campo eletromagnético, neste

caso interpretado como o campo de *gauge*. Novamente, uma física anteriormente bem conhecida, que é a interação de partículas carregadas via campo eletromagnético, surge naturalmente a partir de um tratamento matemático rigoroso dos campos que descrevem seus elementos. Os grupos de *gauge* são, portanto, uma ferramenta essencial para explicar a física de partículas interagentes.

Tão importante quanto as simetrias geradas pelos grupos de *gauge* são as violações destas simetrias - por mais paradoxal que isto possa soar. O exemplo mais icônico é a quebra espontânea da simetria gerada pelo mecanismo de Higgs na teoria eletrofraca. A teoria eletrofraca é uma teoria de *gauge* com grupo de simetria $SU(2) \times U(1)$ e descreve, em conjunto, as interações nucleares fracas e eletromagnéticas da matéria. Nesta teoria há um campo escalar complexo (campo de Higgs) que acopla-se ao férmions via interação de Yukawa e aos bósons de *gauge* via derivada covariante (MANDL; SHAW, 2010). O formato específico do potencial de auto-interação do campo de Higgs é responsável por gerar um valor não-nulo para o campo no vácuo. Isto, por sua vez, gera uma *quebra espontânea da simetria* eletrofraca a baixas energias, que é responsável por uma redefinição nos campos de *gauge*, levando ao surgimento do fóton, dos bósons massivos W^\pm e Z^0 e dos termos de massa para os férmions.

Além das quebras espontâneas há um outro tipo de violação de simetria, conhecido como *anomalia*. Uma anomalia é um fenômeno que surge quando uma lei de conservação clássica não é obedecida na versão quântica da teoria. O estudo das anomalias é de extrema importância para a física de altas energias, seja porque explicam certos fatos experimentais (VELTMAN, 1967), seja porque a articulação das várias anomalias numa teoria é necessária para sua consistência interna (GROSS; JACKIW, 1972). Este último fato pode ser ilustrado pelo fato de que, no modelo padrão, o mecanismo de cancelamento de anomalias foi responsável por fixar o número de gerações de quarks e pela predição do quark *top* (BERTLMAN, 1996).

A anomalia mais importante é conhecida por *anomalia Adler-Bell-Jackiw (ABJ)*. Este fenômeno foi descoberto independentemente por Adler (1969), na QED spinorial sem massa, e Bell e Jackiw (1969), numa versão do modelo σ . Trata-se de um fenômeno que surge na amplitude perturbativa triangular onde duas correntes vetoriais se acoplam a uma corrente axial (AVV) via um *loop* de propagadores férmionicos. A análise das equações de movimento clássicas fixa uma proporcionalidade direta entre a corrente axial e a corrente pseudo-escalar, relação conhecida como *conservação parcial da corrente axial (PCAC)*. Porém, os cálculos perturbativos revelam que, na amplitude triangular citada, tal relação é violada por um termo extra.

Tal descoberta foi extremamente importante por estar relacionada ao chamado *paradoxo de Sutherland-Veltman* (SUTHERLAND, 1967) (VELTMAN, 1967). O paradoxo reside no fato de que, se a PCAC for obedecida, a taxa de decaimento de alguns mésons (incluindo o decaimento eletromagnético do pión neutro, $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) teria de ser nula, fato que não corresponde aos resultados experimentais. O termo anômalo na PCAC, então, seria o responsável pela taxa de decaimento detectada, reaproximando a teoria da fenomenologia. Na eletrodinâmica sem massa em duas dimensões (QED_2) há um análogo da anomalia ABJ, que foi descoberto mesmo antes desta (JOHNSON, 1963), e diz respeito à não-conservação da corrente axial em funções de dois pontos. As anomalias que envolvem a violação da PCAC (ou da conservação da corrente axial, no caso não-massivo) são chamadas genericamente de *anomalias quirais*.

Analogamente ao caso das anomalias quirais no espaço de Minkowski, sabe-se que também existem anomalias presentes quando campos fermiônicos são acoplados ao campo gravitacional. Dentro do formalismo de TQC perturbativa, Delbourgo e Salam (1972) mostraram que na dimensão física (1 + 3) há uma contribuição para a anomalia quiral proveniente do acoplamento de uma corrente axial e dois grávitons. Um dos diagramas responsáveis por tal anomalia é análogo ao triângulo AVV da anomalia ABJ, porém com tensores energia-momento no lugar dos vértices vetoriais. Em um contexto de férmions de Weyl e com o acoplamento de um campo de *gauge* à corrente axial, isto seria equivalente a uma quebra de simetria de *gauge*. Esta anomalia também pode ser vista de um ponto de vista topológico (EGUCHI; FREUND, 1976). Também foi mostrado que pode-se evitar a anomalia quiral, desde que se admita que a covariância geral (invariância de Einstein) seja violada (ALVAREZ-GAUME; WITTEN, 1984). A existência da anomalia seria um indício da impossibilidade de se obter uma teoria de *gauge* em um contexto gravitacional, a não ser que exista um mecanismo de cancelamento de anomalias.

Alvarez-Gaume e Witten (1984) também mostraram que existem anomalias em espaço-tempo curvo mesmo em teorias sem acoplamentos de *gauge*. Apesar de não existirem na dimensão física, estas anomalias "puramente gravitacionais", que nada mais são que a violação da invariância de Einstein, existem quando férmions de Weyl de spin 1/2 ou 3/2 são acoplados ao campo gravitacional em dimensão $4k + 2$ via tensor-energia momento ($k = 0, 1, 2, \dots$). As condições para o cancelamento de tais anomalias também foi estudada. Pouco tempo depois, mostrou-se que estas violações da simetria de Einstein são equivalentes a violações da invariância de Lorentz, podendo-se "transformar" anomalias de Einstein em anomalias de Lorentz

(e vice-versa) pela adição de correções locais ao funcional do vácuo (BARDEEN; ZUMINO, 1984).

Ainda antes da descoberta das anomalias de Lorentz e Einstein, um outro tipo de violação de simetria já era conhecida. É o caso da *anomalia de Weyl* (ou anomalia de traço), que surge quando há uma violação da simetria conforme. Capper e Duff (1974) estudaram tais anomalias no contexto da propagação do gráviton perturbada pela interação com fótons e férmions de Weyl a nível *1-loop* usando a regularização dimensional. No caso dos *loops* fotônicos, a violação da simetria é exclusiva da dimensão física ($1 + 3$), enquanto para *loops* de férmions a anomalia está presente em qualquer dimensão.

As anomalias de Lorentz, Einstein e Weyl são chamadas conjuntamente de *anomalias gravitacionais*. Tanto as anomalias quirais no espaço-tempo plano quanto as gravitacionais foram estudadas inicialmente num contexto perturbativo, mas sua análise não é restrita a métodos perturbativos. Sabe-se que as anomalias, na verdade, são um fenômeno topológico, e podem ser descritas pelo teorema de índice de Atiyah-Singer (ATIYAH; SINGER, 1968), que é um resultado de geometria diferencial. As primeiras considerações sobre tal descrição foram feitas no contexto das anomalias quirais, quando relatou-se que estas estão relacionadas à estrutura topológica não-trivial do espaço das transformações de *gauge* (ALVAREZ-GAUME; GINSPARG, 1984). A anomalia quiral é a primeira de uma classe de obstruções à construção de um operador de Dirac covariante (ATIYAH; SINGER, 1984), mostrando assim que a estrutura geral da TQC pode ser analisada do ponto de vista da topologia e geometria diferencial (e é deveras surpreendente que um fenômeno puramente quântico, como as anomalias, possa ser descrito por um formalismo clássico). Dentro do contexto das anomalias gravitacionais, também há resultados importantes obtidos sob a ótica da topologia. Alvarez-Gaume e Ginsparg (1985) mostraram que as anomalias de Lorentz e Einstein podem ser descritas por um teorema de índices em alta dimensionalidade. Esta abordagem também reproduziu o resultado de Bardeen e Zumino (1984) que mostra a equivalência entre estas duas anomalias. Alvarez (1987) estudou a anomalia de Weyl em $(1 + 1)D$ segundo o teorema de índice, e Deser e Schwimmer (1993) fizeram uma descrição geométrica completa desta anomalia para todas as dimensões pares. Um *review* exaustivo sobre as implicações topológicas das anomalias quirais e gravitacionais pode ser encontrado na Ref. (EGUCHI; GILKEY; HANSON, 1980).

Ainda uma outra abordagem não-perturbativa que pode ser usada para descrever as anomalias é o método da integral funcional. Uma descrição das anomalias quirais neste formalismo

foi feita por Fujikawa (1984), onde foi obtido um resultado invariante de *gauge* (ao contrário das primeiras abordagens perturbativas da anomalia ABJ, onde a invariância de *gauge* era violada). As anomalias gravitacionais também podem ser analisadas com esta abordagem (NIEH, 1984). Uma descrição completa e detalhada do formalismo da integral funcional aplicado ao cálculo de anomalias pode ser encontrado na Ref. (FUJIKAWA; SUZUKI, 2004).

Em suma, o fenômeno das anomalias pode ser visto a partir de diferentes pontos de vista. Isto, aliado ao fato de que as anomalias explicam vários resultados experimentais, nos leva à conclusão de que este é de fato um fenômeno físico, e não uma particularidade do formalismo matemático utilizado. Ou seja: em última instância, as anomalias não devem ser explicadas por elementos exclusivos de uma abordagem matemática específica. Em particular, o valor das anomalias não deve depender de elementos da abordagem perturbativa (que é a que utilizaremos), por exemplo.

Voltando nossa atenção ao cálculo perturbativo, notamos que nesta abordagem surge naturalmente o problema das divergências. As divergências em TQC perturbativa ocorrem pelo fato de os campos interagentes serem mal-definidos na amplitude perturbativa (ASTE, 2008). Apesar de ser possível, em tese, fazer TQC perturbativa sem divergências e matematicamente rigorosa, com uma abordagem conhecida como *teoria de perturbação causal* e inaugurada por Epstein e Glaser (1973), a complexidade algébrica de tal abordagem é desencorajante (para mais detalhes, consultar (SCHARF, 1995)). Sendo assim, ao longo dos anos desenvolveu-se várias prescrições para se lidar com tais divergências, conhecidas genericamente como *regularizações*. As regularizações, como regra, introduzem uma modificação na amplitude perturbativa com o objetivo de torná-la "finita" (para uma comparação entre as diferentes regularizações, ver (GNENDIGER et al., 2017)). Após a integração dos momentos associados aos loops, deve-se tomar algum tipo de limite para se reobter as quantidades originais. Na prática, a tomada deste limite somente seria possível nas chamadas teorias renormalizáveis. Nestas teorias, todos os infinitos que resultariam deste processo de tomada de limite podem ser absorvidos numa reparametrização de certos parâmetros físicos da teoria (WEINBERG, 1995).

O grande problema associado com as amplitudes perturbativas divergentes é que estas são quantidades matematicamente indeterminadas, e sua manipulação descuidada pode levar a resultados inconsistentes. Exatamente por causa destas indeterminações muitos resultados em TQC perturbativa são dependentes do esquema de regularização utilizado. Esta é uma situação desconfortável, pois o resultado final depende de escolhas feitas nos passos intermediários do

cálculo, comprometendo assim o poder de previsão da teoria. Uma maneira de se contornar o problema é usar um esquema que trate as amplitudes de maneira que as quantidades indeterminadas sejam carregadas até o fim dos cálculos, e só então, usando-se argumentos de consistência que sejam universais, inferir um valor para tais quantidades. Também é desejável que tal esquema não tenha restrições de aplicabilidade sendo, portanto, aplicável a todas as amplitudes de todas as teorias, independentemente da dimensão na qual o modelo foi formulado. De fato um esquema deste tipo existe e foi proposto originalmente por Battistel (1999), e é às vezes chamado de Regularização Implícita por alguns autores (BRIZOLA et al., 1999). Tal abordagem tem a vantagem de manter intacto o conteúdo matemático da amplitude, para só ao fim dos cálculos fixar o valor das quantidades indefinidas com argumentos de consistência matemática e física (as chamadas *relações de consistência* (BATTISTEL; MOTA; NEMES, 1998)). Tal método, entre outras aplicações, mostrou-se útil na análise da anomalia ABJ (BATTISTEL; DALLABONA, 2002a) ao esclarecer que, ao contrário da interpretação inicial da literatura, as anomalias são independentes das ambiguidades referentes à rotulação dos momentos internos dos *loops*. O método também tem a vantagem de sistematizar a parte finita dos resultados na forma de funções bem comportadas com relações bem definidas entre si, facilitando assim a análise e a comparação de diferentes amplitudes perturbativas (BATTISTEL; DALLABONA, 2012).

Dentro do contexto do método acima citado, o presente trabalho tem por objetivo estudar as anomalias gravitacionais bidimensionais (ALVAREZ-GAUME; WITTEN, 1984) (HWANG, 1987) (BERGER, 1990) (BERTLMANN; KOHLPRATH, 2001) em um cenário físico descrito por um modelo que inclui férmions acoplados a um campo gravitacional de fundo. A escolha da dimensão $(1 + 1)$ se justifica pelo fato de ser um ótimo "laboratório" para se estudar a consistência geral da TQC na sua formulação perturbativa pela relativa facilidade algébrica dos cálculos. O modelo de Schwinger, por exemplo, pode ser resolvido exatamente (inclusive em espaço-tempo curvo (BARCELOS-NETO; DAS, 1986)), o que é uma vantagem no sentido de comparar os resultados perturbativos com os exatos. Não raramente, as conclusões obtidas em TQC bidimensional podem ser utilizadas como guias para a investigação de fenômenos similares em dimensões mais altas. Além disso, o estudo das anomalias gravitacionais bidimensionais propicia um bom cenário para a investigação da validade do método empregado para se lidar com as divergências. Até agora, ele tem se mostrado aplicável a diferentes TQCs em espaços-

tempo planos em diferentes dimensionalidades, e espera-se que também seja uma ferramenta útil para a investigação de TQCs em espaço-tempo curvo.

A presente investigação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2 descrevemos as principais características do modelo adotado e que são relevantes para o objetivo de investigar as anomalias gravitacionais. Entre outros aspectos, discutimos, de forma sucinta, as suas principais simetrias e correntes conservadas. A função de Green de dois pontos, que será o objeto principal de nossa investigação, também é definida dentro do contexto do cálculo perturbativo. Sistematizamos esta amplitude gravitacional em termos de um conjunto de sub-amplitudes, algumas das quais podem ser identificadas como sendo amplitudes que surgem naturalmente na QED_2 perturbativa. No Capítulo 3 estabelecemos as identidades de Ward (IW's) associadas à amplitude gravitacional e que são derivadas das correntes conservadas do modelo. Além disso deduzimos um conjunto de relações entre funções de Green (RFG's), envolvendo as sub-amplitudes que formam a amplitude gravitacional, e que desempenharão o importante papel de servir de teste de consistência das amplitudes calculadas. O método adotado para se tratar e calcular as amplitudes envolvidas no problema estudado é descrito no Capítulo 4. A sistemática do método é explicada através de um exemplo explícito. No Capítulo 5, calculamos explicitamente todas as sub-amplitudes pertinentes, utilizando o método citado para tratar as divergências que porventura surgirem, e verificamos explicitamente se as RFG's foram preservadas pelos resultados obtidos para cada uma das sub-amplitudes. O conteúdo de simetria das sub-amplitudes também foi testado através da verificação das correspondentes IW's. A função de Green gravitacional é estudada no Capítulo 6, onde analisamos as suas RFG's e as IW's, e a partir destas últimas calculamos o valor das anomalias de Einstein e Weyl. Finalmente, no Capítulo 7, analisamos globalmente os principais resultados obtidos sob a ótica da consistência física e matemática. Além disso, nossas conclusões e considerações finais também são elaboradas neste capítulo.

2 O MODELO DE FÉRMIONS EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO BIDIMENSIONAL

2.1 Introdução e Definições

O fenômeno das *anomalias gravitacionais bidimensionais* surge no contexto de uma teoria de campos onde os férmions são acoplados a um espaço-tempo curvo, e as propriedades do tensor energia-momento são vistas como oriundas de “simetrias de *gauge*”. Assim como as usuais teorias de *gauge* geradas pelos grupos $SU(N)$, podemos tratar as simetrias da gravitação como transformações de *gauge*, de modo que a cada uma delas está relacionada uma lei de conservação. Estas leis de conservação representam as propriedades clássicas do tensor energia-momento. De acordo com o pensamento recorrente na literatura, se alguma delas é violada no regime quântico, temos uma anomalia gravitacional.

No modelo estudado neste trabalho o campo fermiônico é quantizado segundo as regras canônicas da TQC; porém, o campo gravitacional aparece apenas como um campo de fundo, sem ser propriamente quantizado e sem dinâmica. Os férmions são representados por um campo spinorial que se transforma sob o grupo de Lorentz, e não sob o grupo de difeomorfismo, como no caso do campo gravitacional. Sendo assim, é natural descrever o campo fermiônico no espaço-tempo plano de Minkowski. Uma vantagem óbvia de tal abordagem é que as matrizes γ no espaço de Minkowski são constantes, e podemos usar todas as suas usuais propriedades de comutação, anti-comutação e traço provenientes do estudo da mecânica quântica relativística. Porém, o panorama geral do nosso modelo deve descrever os campos em espaço-tempo curvo com métrica $g_{\mu\nu}$ arbitrária. Ou seja: o processo de introdução de férmions em um espaço-tempo curvo requer um formalismo que conecte o espaço plano do tipo Minkowski, onde está definido o campo fermiônico $\psi(x)$, e o espaço-tempo curvo, onde se define toda a relatividade geral de Einstein. Como de praxe, associamos ao espaço-tempo uma variedade de Lorentz onde em cada ponto há um espaço plano tangente. A conexão entre estes dois espaços é feita por um objeto chamado *tetrad*. A tetrad conecta a métrica do tipo Minkowski

$$[\eta_{ab}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

do espaço tangente, com a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ do espaço-tempo. Se X^a são coordenadas do espaço tangente definido nas vizinhanças de um ponto P da variedade de Lorentz e x^μ coordenadas

generalizadas do espaço-tempo, então definimos as tetradas e_μ^a como

$$e_\mu^a(x) = \frac{\partial X^a}{\partial x^\mu}, \quad (2.2)$$

e sua inversa E_a^μ

$$E_a^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^a}, \quad (2.3)$$

de maneira que temos as seguintes propriedades

$$E_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b, \quad (2.4)$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e_\mu^a(x) e_\nu^b(x). \quad (2.5)$$

Como usual, os índices latinos indicam as coordenadas no espaço tangente e os índices gregos indicam as coordenadas do espaço-tempo curvo.

O método mais simples de introduzir férmions acoplados a um espaço-tempo com métrica arbitrária consiste em encontrar uma generalização covariante das equações formuladas em espaço-tempo plano. Isto significa que a ação S deve ser, no mínimo, invariante frente a transformações de Lorentz e a transformações gerais de coordenadas. No caso de um campo de Weyl (ou quiral) $\psi(x)$, a ação formulada no espaço de Minkowski é bem conhecida e dada por

$$S_f = \int d^2x \bar{\psi} (i\gamma^a \partial_a) \psi, \quad (2.6)$$

sendo γ^a as matrizes de Dirac que, em duas dimensões, podem ser representadas por

$$\gamma_0 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\gamma_1 = -i\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Para obtermos a generalização covariante de (2.6) podemos seguir a mesma estratégia adotada para se construir teorias invariantes de gauge. Essencialmente, isto significa substituir na ação (2.6) a derivada usual ∂_a por uma derivada covariante D_a . A derivada covariante é

obtida por meio da tetrada da seguinte forma

$$D_a \psi = E_a^\mu D_\mu \psi = E_a^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu) \psi, \quad (2.9)$$

onde a quantidade ω_μ é denominada de *conexão de spin* e tem componentes ω_μ^{ab} dadas por

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} \omega_\mu^{bc} \sigma_{bc}. \quad (2.10)$$

Na definição acima, σ_{ab} é o gerador das transformações de Lorentz agindo no espaço espinorial, definido por

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{4} [\gamma_a, \gamma_b]. \quad (2.11)$$

A versão covariante apropriada da ação (2.6), que denominaremos de S_g , pode então ser escrita na forma

$$S_g = \int d^2x e \bar{\psi} (i\gamma^a D_a) \psi, \quad (2.12)$$

onde $e = |\det e_\mu^a|$. Usando (2.9) e (2.10) temos

$$S_g = \int d^2x e \left\{ iE_a^\mu (\bar{\psi} \gamma^a \partial_\mu \psi) + \frac{i}{2} E_a^\mu \omega_{\mu bc} (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{bc} \psi) \right\}. \quad (2.13)$$

Podemos reescrever o segundo termo da expressão acima notando-se a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \gamma^a \sigma^{bc} &= \frac{1}{2} [\gamma^a, \sigma^{bc}] + \frac{1}{2} \{ \gamma^a, \sigma^{bc} \}, \\ &= \frac{1}{2} (\gamma^c \eta^{ba} - \gamma^b \eta^{ca}) + \frac{1}{2} \{ \gamma^a, \sigma^{bc} \}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Em duas dimensões, em particular, o anti-comutador $\{\gamma^a, \sigma^{bc}\}$ é nulo pois $\sigma^{bc} = \varepsilon^{bc} \gamma_5$ onde

$$[\varepsilon^{bc}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\gamma_5 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

de modo que

$$\{\gamma^a, \sigma^{bc}\} \sim \{\sigma^a, \sigma_z\} = 0, \quad (2.17)$$

onde σ^a são as matrizes de Pauli. Temos assim

$$S_g = \int d^2x e \left\{ iE_a^\mu (\bar{\psi} \gamma^a \partial_\mu \psi) + \frac{i}{2} E_b^\mu \omega_\mu^{ba} (\bar{\psi} \gamma_a \psi) \right\}. \quad (2.18)$$

A ação que define o modelo que utilizaremos neste trabalho é uma versão simetrizada, porém equivalente, da ação mostrada na equação acima e que tem a forma (BERTLMAN, 1996)

$$S_g = \int d^2x e \bar{\psi} \left(\frac{i}{2} E_a^\mu \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu P_\pm \right) \psi, \quad (2.19)$$

onde $\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$ atua somente nos espinores $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ e

$$P_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2},$$

é o operador quiralidade, que está presente por estarmos considerando férmions de Weyl.

Uma quantidade importante obtida a partir da ação (2.19) é o tensor energia-momento. Uma variação genérica δS_g da ação, formalmente, tem a forma

$$\delta S_g = \int d^2x \left\{ \frac{\delta S_g}{\delta \psi} \delta \psi + \frac{\delta S_g}{\delta \bar{\psi}} \delta \bar{\psi} + \frac{\delta S_g}{\delta e_\mu^a} \delta e_\mu^a \right\}. \quad (2.20)$$

Quando usamos as equações dinâmicas para os campos $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$

$$\frac{\delta S_g}{\delta \psi} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\delta S_g}{\delta \bar{\psi}} = 0, \quad (2.21)$$

obtemos

$$\delta S_g = \int d^2x \frac{\delta S_g}{\delta e_\mu^a} \delta e_\mu^a . \quad (2.22)$$

O tensor energia-momento T_a^μ é definido pela variação da ação com relação à tetrada e_μ^a

$$e T_a^\mu = \frac{\delta S_g}{\delta e_\mu^a} , \quad (2.23)$$

ou

$$\delta S_g = \int d^2x e T_a^\mu \delta e_\mu^a . \quad (2.24)$$

O tensor energia-momento *simétrico* $T^{\mu\nu}$, por sua vez, é definido como

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_a^\mu E^{a\nu} + T_a^\nu E^{a\mu}) .$$

Explicitamente, a variação de (2.19) com relação a e_μ^a pode ser escrita como

$$\delta S_g = \int d^2x (\delta e) \bar{\psi} \left(\frac{i}{2} E_a^\mu \gamma^\mu P_\pm \overleftrightarrow{\partial}_\mu \right) \psi . \quad (2.25)$$

A partir da identidade

$$e = \det(e_\mu^a) = \exp \left\{ \text{Tr} \ln(e_\mu^a) \right\} , \quad (2.26)$$

obtemos a variação δe

$$\delta e = e E_b^\nu (\delta e_\nu^b) . \quad (2.27)$$

Sendo assim, temos

$$\delta S_g = \int d^2x e \bar{\psi} \left(\frac{i}{2} E_a^\mu E_b^\nu \gamma^\mu P_\pm \overleftrightarrow{\partial}_\mu \right) \psi (\delta e_\nu^b) . \quad (2.28)$$

Lembrando da relação

$$g^{\mu\nu} = E_a^\mu E_b^\nu \eta^{ab} ,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\delta S_g &= \int d^2x e \bar{\psi} \left(\frac{i}{2} g^{\mu\nu} \eta_{ab} \gamma^a P_{\pm} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \right) \psi \left(\delta e_{\nu}^b \right), \\ &= \int d^2x e \bar{\psi} \left(\frac{i}{2} \gamma_b P_{\pm} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu} \right) \psi \left(\delta e_{\nu}^b \right).\end{aligned}\quad (2.29)$$

Pela definição (2.23) é fácil ver que

$$e T_a^{\mu} = \frac{i}{2} e \bar{\psi} \left(\gamma_a P_{\pm} \overleftrightarrow{\partial}^{\mu} \right) \psi, \quad (2.30)$$

e, por sua vez, o tensor energia momento simétrico é

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \left[\bar{\psi} \left(E^{a\nu} \gamma_a P_{\pm} \overleftrightarrow{\partial}^{\mu} \right) \psi + \bar{\psi} \left(E^{a\mu} \gamma_a P_{\pm} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu} \right) \psi \right]. \quad (2.31)$$

Para o estudo das anomalias de Einstein e Weyl é suficiente trabalharmos com a versão linearizada da ação (2.19), obtida considerando-se as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}e_{\mu}^a &= \delta_{\mu}^a + \frac{1}{2} h_{\mu}^a, \\ e &= 1 + \frac{1}{2} h_{\mu}^{\mu}, \\ E_a^{\mu} &= \delta_a^{\mu} - \frac{1}{2} h_a^{\mu}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Substituindo-se as expressões acima em (2.19)

$$S_g = \int d^2x \frac{i}{2} \left(1 + \frac{1}{2} h_{\nu}^{\nu} \right) \bar{\psi} \left[\left(\delta_a^{\mu} - \frac{1}{2} h_a^{\mu} \right) \gamma^a P_{\pm} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \right] \psi, \quad (2.33)$$

e mantendo termos de primeira ordem em h , temos

$$\begin{aligned}S_g &= \int d^2x \frac{i}{2} \bar{\psi} \left[\gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_a P_{\pm} \right] \psi \\ &\quad - \int d^2x \frac{i}{4} \left\{ h^{\mu a} \bar{\psi} \gamma_a P_{\pm} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \psi + h_{\mu}^{\mu} \bar{\psi} \gamma^a P_{\pm} \overleftrightarrow{\partial}_a \psi \right\}.\end{aligned}\quad (2.34)$$

A Lagrangeana de interação linearizada \mathcal{L}_I^{lin} assume então a forma

$$\mathcal{L}_I^{lin} = -\frac{i}{4} \left(h^{a\mu} \bar{\psi} \gamma_a P_{\pm} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \psi + h_{\mu}^{\mu} \bar{\psi} \gamma^a P_{\pm} \overleftrightarrow{\partial}_a \psi \right), \quad (2.35)$$

ou

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I^{lin} &= -\frac{1}{2}h_{\mu\nu} \left\{ \frac{i}{4} \left(E_a^\nu \bar{\Psi} \gamma^a P_\pm \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Psi + E_a^\mu \bar{\Psi} \gamma^a P_\pm \overleftrightarrow{\partial}^\nu \Psi \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2}h_{\mu\nu} T^{\mu\nu},\end{aligned}\tag{2.36}$$

onde descartamos termos proporcionais a $g^{\mu\nu}$ (BERTLMANN; KOHLPRATH, 2001). Desta Lagrangeana segue a regra de Feynman para os vértices das amplitudes perturbativas que estudaremos no presente trabalho, relativa à interação entre o gráviton e um par férmion-anti-férmion:

$$\Gamma_{\mu\nu}^G = -\frac{i}{4} \left[\gamma_\mu (k_1 - k_2)_\nu + \gamma_\nu (k_1 - k_2)_\mu \right] P_\pm.\tag{2.37}$$

Para o propagador fermiônico massivo interno, a regra de Feynman é a usual

$$S_F = \frac{1}{\not{k} + \not{k}_i - m} = \frac{\not{k} + \not{k}_i + m}{D_i},\tag{2.38}$$

onde $D_i \equiv (k + k_i)^2 - m^2$.

2.2 Transformações e Simetrias

Como já mencionado, a partir do conteúdo de simetria do modelo podemos deduzir algumas propriedades das amplitudes de transição da teoria. O procedimento é análogo ao caso das teorias de *gauge*, onde das simetrias de *gauge* deduz-se a conservação das correntes da teoria ou uma relação bem definida entre diferentes tipos de correntes. Estas relações devem ser estudadas no contexto quântico (a nível de funções de Green) em busca de possíveis anomalias.

No contexto de interesse as transformações pertinentes são transformações de Lorentz, Einstein e Weyl. Ao admitirmos que a ação da teoria é invariante frente a estas transformações, as promovemos à categoria de simetrias, e a partir destas podemos deduzir propriedades do tensor energia-momento clássico $T_{\mu\nu}$.

Analisamos primeiramente a invariância da ação frente a uma *transformação de Lorentz* local. Para uma transformação de Lorentz infinitesimal, com parâmetros de transformação

$\alpha_{ab} = -\alpha_{ba}$, temos transformações bem definidas para os campos (BERTLMAN, 1996):

$$\delta_{\alpha}^L e_{\mu}^a = -\alpha^a_b e_{\mu}^b \quad (2.39)$$

$$\delta_{\alpha}^L E_a^{\mu} = E_b^{\mu} \alpha^b_a \quad (2.40)$$

$$\delta_{\alpha}^L e = 0 \quad (2.41)$$

$$\delta_{\alpha}^L \omega^a_{b\mu} = D_{\mu} \alpha^a_b = \partial_{\mu} \alpha^a_b + \omega^a_{c\mu} \alpha^c_b - \alpha^a_c \omega^c_{b\mu} \quad (2.42)$$

$$\delta_{\alpha}^L \psi = -\frac{1}{2} \alpha_{ab} \sigma^{ab} \psi \quad (2.43)$$

$$\delta_{\alpha}^L \bar{\psi} = \frac{1}{2} \alpha_{ab} \bar{\psi} \sigma^{ab} . \quad (2.44)$$

A partir de (2.24), notamos que a variação total da ação depende apenas da variação δe_{μ}^a da tetrada, de modo que a ação se transforma como:

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha}^L S_g &= \int d^2x e T^{\mu}_a \left(\delta_{\alpha}^L e_{\mu}^a \right) = - \int d^2x e T^{\mu}_a \alpha^a_b e_{\mu}^b , \\ &= \int d^2x e \alpha_{ab} T^{ab} . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Deste resultado, vemos que a ação será invariante frente a esta transformação se e somente se

$$\begin{aligned} \alpha_{ab} T^{ab} &= 0 \\ &= \alpha_{ab} \left\{ \frac{1}{2} (T^{ab} - T^{ba}) + \frac{1}{2} (T^{ab} + T^{ba}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \alpha_{ab} (T^{ab} - T^{ba}) . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Nestas condições vemos claramente que o tensor T_{ab} (e também $T_{\mu\nu}$) deve ser simétrico. Ou seja, a invariância frente as transformações de Lorentz implica em um tensor energia-momento simétrico

$$\delta_{\alpha}^L S_g = 0 \Leftrightarrow T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} . \quad (2.47)$$

A segunda transformação relevante é uma transformação geral no sistema de coordenadas, ou *transformação de Einstein*. Os campos se transformam como

$$\delta_{\xi}^C e_{\mu}^a = \xi^{\nu} \nabla_{\nu} e_{\mu}^a + e_{\nu}^a \nabla_{\mu} \xi^{\nu} \quad (2.48)$$

$$\delta_{\xi}^C E_a^{\mu} = \xi^{\nu} \nabla_{\nu} E_a^{\mu} - \nabla_{\nu} \xi^{\mu} E_a^{\nu} \quad (2.49)$$

$$\delta_{\xi}^C e = \xi^{\nu} \partial_{\nu} e + e \partial_{\nu} \xi^{\nu} \quad (2.50)$$

$$\delta_{\xi}^C \omega^a{}_{b\mu} = \xi^{\nu} \partial_{\nu} \omega^a{}_{b\mu} + \omega^a{}_{b\nu} \partial_{\mu} \xi^{\nu} \quad (2.51)$$

$$\delta_{\xi}^C \psi = \xi^{\nu} \partial_{\nu} \psi \quad (2.52)$$

$$\delta_{\xi}^C \bar{\psi} = \xi^{\nu} \partial_{\nu} \bar{\psi} . \quad (2.53)$$

onde ξ^{ν} é o parâmetro da transformação em questão e ∇_{μ} é a derivada covariante. A correspondente variação na ação é

$$\delta_{\xi}^C S_g = \int d^2x e T_a^{\mu} \left(\delta_{\xi}^C e_{\mu}^a \right) = \int d^2x e T_a^{\mu} \left(\xi^{\nu} \nabla_{\nu} e_{\mu}^a + e_{\nu}^a \nabla_{\mu} \xi^{\nu} \right). \quad (2.54)$$

O primeiro termo desta variação é manipulado usando uma propriedade da conexão de spin

$$\omega^a{}_b = -E_b^{\mu} \nabla_{\mu} e^a, \quad (2.55)$$

de modo que obtemos

$$e \xi^{\nu} T_a^{\mu} \left(\nabla_{\nu} e_{\mu}^a \right) = \left(E_b^{\mu} \nabla_{\nu} e_{\mu}^a \right) e \xi^{\nu} T_a^b = e \xi^{\nu} \omega_{ab\nu} T^{ab}, \quad (2.56)$$

e o segundo termo é integrado por partes. Ignorando o termo de superfície gerado pela integração por partes, obtemos a expressão geral para a variação frente a uma transformação de Einstein

$$\delta_{\xi}^C S_g = \int d^2x e T_a^{\mu} \left(\delta_{\xi}^C e_{\mu}^a \right) = \int d^2x e \xi^{\nu} \left(\omega_{ab\nu} T^{ab} - \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} \right). \quad (2.57)$$

Incorporando ambas as invariâncias de Lorentz e Einstein, concluímos que o tensor energia-momento é conservado (a invariância de Lorentz é necessária para que o termo $\omega_{ab\nu} T^{ab}$ seja nulo através do resultado (2.47)):

$$\delta_{\xi}^C S_g = \delta_{\alpha}^L S_g = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.58)$$

A última transformação pertinente é a *transformação de Weyl*. Neste caso, os campos se transformam como:

$$\left[e_{\mu}^a(x) \right]' = \rho(x) e_{\mu}^a(x) \quad (2.59)$$

$$\left[E_a^{\mu}(x) \right]' = \rho^{-1}(x) e_{\mu}^a(x) \quad (2.60)$$

$$\left[e(x) \right]' = \rho^m(x) e(x) \quad (2.61)$$

$$\left[\omega_{\mu}(x) \right]' = \rho^{-r}(x) \omega_{\mu}(x) \rho^r(x) + \rho^{-r}(x) \partial_{\mu} \rho^r(x) \quad (2.62)$$

$$\left[\psi(x) \right]' = \rho^{-r}(x) \psi(x) \quad (2.63)$$

$$\left[\bar{\psi}(x) \right]' = \rho^{-r}(x) \bar{\psi}(x) , \quad (2.64)$$

onde

$$\rho(x) = e^{\sigma(x)} , \quad (2.65)$$

$$r = \frac{m-1}{2} , \quad (2.66)$$

$$m = \dim M , \quad (2.67)$$

e $\sigma(x)$ é um parâmetro de transformação local. Esta transformação altera a métrica da seguinte forma:

$$\left[g_{\mu\nu}(x) \right]' = \rho^2(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (2.68)$$

$$\left[g(x) \right]' = \rho^{2m}(x) g(x) . \quad (2.69)$$

Escolhemos o parâmetro σ como sendo infinitesimal, de modo que podemos expandir em primeira ordem:

$$\rho(x) = 1 + \sigma(x) , \quad (2.70)$$

obtendo assim as *transformações de Weyl infinitesimais*:

$$\delta_{\sigma}^W e_{\mu}^a = \sigma e_{\mu}^a \quad (2.71)$$

$$\delta_{\sigma}^W E_a^{\mu} = -\sigma E_a^{\mu} \quad (2.72)$$

$$\delta_{\sigma}^W e = m\sigma e \quad (2.73)$$

$$\delta_{\sigma}^W \omega_{b\mu}^a = \partial_{\nu}\sigma \left(e_{\mu}^a E_b^{\nu} - e_{\mu}^b E_a^{\nu} \right) \quad (2.74)$$

$$\delta_{\sigma}^W \psi = -r\sigma\psi \quad (2.75)$$

$$\delta_{\sigma}^W \bar{\psi} = -r\sigma\bar{\psi} . \quad (2.76)$$

Esta transformação geram uma uma variação na ação

$$\delta_{\sigma}^W S_g = \int d^2x e T_a^{\mu} \left(\delta_{\sigma}^W e_{\mu}^a \right) = \int d^2x e \sigma T_a^{\mu} e_{\mu}^a = \int d^2x e \sigma T_{\mu}^{\mu} . \quad (2.77)$$

Deste modo, ao promovermos a transformação de Weyl a uma simetria, deduzimos que o traço do tensor energia-momento deve ser nulo

$$\delta_{\sigma}^W S_g = 0 \Leftrightarrow T_{\mu}^{\mu} = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0 . \quad (2.78)$$

Resumindo então, temos três propriedades do tensor energia-momento clássico

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \quad (\text{simétrico}) \quad (2.79)$$

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{conservado}) \quad (2.80)$$

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{traço nulo}) \quad (2.81)$$

Tal como nas teorias de *gauge*, estas propriedades (análogas aos princípios de conservação de correntes de *gauge*) são herdadas para o regime quântico na forma de identidades entre funções de Green denominadas identidades de Ward. No caso do nosso modelo de férmions em espaço-tempo curvo, o tensor energia-momento (2.30) desempenha o papel de uma corrente. A função de Green de interesse em nosso trabalho corresponde ao valor esperado no vácuo do produto ordenado no tempo de dois tensores energia-momento, que no espaço das configurações é definido por

$$G_{\mu\nu\rho\sigma}(x) \equiv i \langle 0 | T [T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(0)] | 0 \rangle ,$$

e, no espaço dos momentos,

$$G_{\mu\nu\rho\sigma}(q) = i \int d^2x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T [T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(0)] | 0 \rangle .$$

A partir das propriedades (2.79)-(2.81) pode-se mostrar que as correspondentes identidades de Ward para $G_{\mu\nu\rho\sigma}(q)$ são

$$G_{\mu\nu\rho\sigma}(q) = G_{\nu\mu\rho\sigma}(q) , \quad (2.82)$$

$$q^\mu G_{\mu\nu\rho\sigma}(q) = 0 , \quad (2.83)$$

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu\rho\sigma}(q) = 0 . \quad (2.84)$$

O fenômeno das anomalias gravitacionais é caracterizado exatamente pela violação destas identidades de Ward (anomalia de Lorentz, Einstein e Weyl, respectivamente). No caso do nosso trabalho, a primeira propriedade é trivialmente satisfeita, uma vez que a Lagrangeana de interação (e a regra de Feynman para o vértice) é contruída com a versão simetrizada do tensor energia-momento (2.36). Deste modo, trabalhamos num cenário onde, por construção, não há anomalia de Lorentz. Esta aparente arbitrariedade não é um problema, visto que sabe-se a anomalia de Lorentz não é independente da anomalia de Einstein, e com a adição de um contra-termo (que não altera a dinâmica) pode-se passar de uma anomalia de Lorentz pura para uma anomalia de Einstein pura (BARDEEN; ZUMINO, 1984).

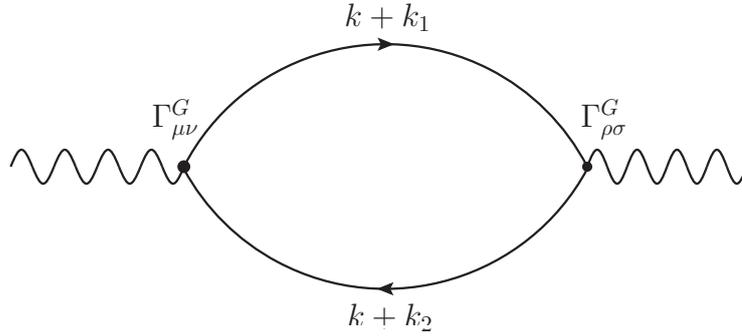
2.3 A Amplitude Gravitacional

Como já mencionado, a função de Green completa relevante para os objetivos do presente trabalho é definida por

$$G_{\mu\nu\rho\sigma}(q) = i \int d^2x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T [T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(0)] | 0 \rangle , \quad (2.85)$$

onde q é o momento externo. Esta amplitude, no nível de aproximação 1-loop, está representada na Fig. 2.1. Note que tomamos o cuidado de rotular os momentos dos propagadores internos da maneira mais geral possível, onde os momentos k_1 e k_2 são arbitrários. Devido à conservação do momento em cada vértice temos que o momento físico q é definido pela combinação $k_1 - k_2$. Qualquer outra combinação de k_1 e k_2 além desta caracterizará, portanto, uma ambiguidade e assim uma violação da invariância translacional.

Figura 2.1 – Representação diagramática da amplitude perturbativa estudada



Seguindo as regras de Feynman, percorremos o *loop* do diagrama, tomamos o traço e integramos no espaço bidimensional, para obter

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu\rho\sigma}^G &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \{t_{\mu\nu\rho\sigma}\} \\
 &= -\frac{i}{16} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \left[\gamma_\mu \left((k+k_1)_\nu + (k+k_2)_\nu \right) + \gamma_\nu \left((k+k_1)_\mu + (k+k_2)_\mu \right) \right] \right. \\
 &\quad \times \frac{(1 \pm \gamma_5)}{2} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \left[\gamma_\rho \left((k+k_1)_\sigma + (k+k_2)_\sigma \right) + \gamma_\sigma \left((k+k_1)_\rho + (k+k_2)_\rho \right) \right] \\
 &\quad \left. \times \frac{(1 \pm \gamma_5)}{2} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}, \tag{2.86}
 \end{aligned}$$

onde Tr é o traço sobre as matrizes de Dirac. Vamos considerar em nossos cálculos férmions massivos, sendo que, quando for pertinente, tomaremos o limite de massa nula. De modo a simplificar os cálculos bem como a análise dos resultados, podemos dividir o integrando de (2.86) em sub-estruturas mais fundamentais

$$t_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv -\frac{i}{64} [\tilde{t}_{\mu\nu\rho\sigma} + \tilde{t}_{\mu\nu\sigma\rho} + \tilde{t}_{\nu\mu\rho\sigma} + \tilde{t}_{\nu\mu\sigma\rho}], \tag{2.87}$$

onde o tensor $\tilde{t}_{\mu\nu\rho\sigma}$

$$\begin{aligned}
 \tilde{t}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \gamma_\mu [q_\nu - 2(k+k_1)_\nu] (1 \pm \gamma_5) \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \times \\
 &\quad \times \gamma_\rho [q_\sigma - 2(k+k_1)_\sigma] (1 \pm \gamma_5) \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m}, \tag{2.88}
 \end{aligned}$$

se repete com permutação de índices. Este, por sua vez, pode ser sistematizado de uma maneira conveniente em termos das seguintes sub-amplitudes

$$\begin{aligned} T_{\rho\sigma}^{ij} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ t_{\rho\sigma}^{ij} \right\} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ [\Gamma_i]_{\rho} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} [\Gamma_j]_{\sigma} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu;\rho\sigma}^{ij} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ t_{\mu;\rho\sigma}^{ij} \right\} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ (k + k_1)_{\mu} [\Gamma_i]_{\rho} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} [\Gamma_j]_{\sigma} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu;\rho\sigma}^{ij} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ t_{\mu\nu;\rho\sigma}^{ij} \right\} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ (k + k_1)_{\mu} (k + k_1)_{\nu} [\Gamma_i]_{\rho} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} [\Gamma_j]_{\sigma} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde os vértices Γ_i , neste caso, têm caráter vetorial ($[\Gamma_V]_{\mu} = \gamma_{\mu}$) ou axial ($[\Gamma_A]_{\mu} = \gamma_{\mu} \gamma_5$). A partir das definições acima podemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4 \left[t_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] - 2q_{\sigma} \left[t_{\nu;\mu\rho}^{VV} \right] - 2q_{\nu} \left[t_{\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + q_{\nu} q_{\sigma} \left[t_{\mu\rho}^{VV} \right] + \\ &\quad \pm 4 \left[t_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA} \right] \mp 2q_{\sigma} \left[t_{\nu;\mu\rho}^{VA} \right] \mp 2q_{\nu} \left[t_{\sigma;\mu\rho}^{VA} \right] \pm q_{\nu} q_{\sigma} \left[t_{\mu\rho}^{VA} \right] + \\ &\quad \pm 4 \left[t_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 2q_{\sigma} \left[t_{\nu;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 2q_{\nu} \left[t_{\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \pm q_{\nu} q_{\sigma} \left[t_{\mu\rho}^{AV} \right] + \\ &\quad + 4 \left[t_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] - 2q_{\sigma} \left[t_{\nu;\mu\rho}^{AA} \right] - 2q_{\nu} \left[t_{\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] + q_{\nu} q_{\sigma} \left[t_{\mu\rho}^{AA} \right]. \end{aligned} \quad (2.92)$$

De acordo com a notação estabelecida anteriormente, após a extração dos traços e integração sobre o momento do loop k obtemos as sub-amplitudes

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \tilde{t}_{\mu\nu\rho\sigma} \right\} \\ &= 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] - 2q_{\sigma} \left[T_{\nu;\mu\rho}^{VV} \right] - 2q_{\nu} \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + q_{\nu} q_{\sigma} \left[T_{\mu\rho}^{VV} \right] + \\ &\quad \pm 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA} \right] \mp 2q_{\sigma} \left[T_{\nu;\mu\rho}^{VA} \right] \mp 2q_{\nu} \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{VA} \right] \pm q_{\nu} q_{\sigma} \left[T_{\mu\rho}^{VA} \right] + \\ &\quad \pm 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 2q_{\sigma} \left[T_{\nu;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 2q_{\nu} \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \pm q_{\nu} q_{\sigma} \left[T_{\mu\rho}^{AV} \right] + \\ &\quad + 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] - 2q_{\sigma} \left[T_{\nu;\mu\rho}^{AA} \right] - 2q_{\nu} \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] + q_{\nu} q_{\sigma} \left[T_{\mu\rho}^{AA} \right]. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Notamos que as sub-amplitudes $T_{\mu\rho}^{VV}$, $T_{\mu\rho}^{VA}$, $T_{\mu\rho}^{AV}$ e $T_{\mu\rho}^{AA}$, que emergem da decomposição do tensor $\tilde{T}_{\mu\nu\rho\sigma}$, são naturalmente encontradas em teorias renormalizáveis, como na eletrodinâmica quântica bidimensional (QED_2). Estas amplitudes são típicas de teorias onde férmions são acoplados a campos vetoriais e axiais. As sub-amplitudes de três e quatro índices de Lorentz (Eqs. (2.90) e (2.91)), por outro lado, são típicas de teorias não-renormalizáveis, onde acoplamentos derivativos estão presentes, como é o caso do modelo considerado.

A organização apresentada na Eq. (2.93) desempenhará um papel importante em nossa investigação, pois permitirá que estudemos cada sub-amplitude separadamente, simplificando a análise da amplitude $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$. Além disso, a presença de sub-amplitudes pertencentes a teorias bem conhecidas, como a QED_2 , possibilita a identificação de vínculos de consistência, como aqueles referentes à invariância de *gauge*. Dessa forma, uma questão importante que podemos nos colocar neste momento é: podendo a amplitude $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ ser escrita em termos de sub-amplitudes, é possível relacionar as anomalias gravitacionais a anomalias mais fundamentais, provenientes destas sub-amplitudes? Esta questão poderá ser respondida nas discussões finais do nosso trabalho.

Todo o resto do nosso trabalho será dedicado a calcular e analisar a amplitude $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ em busca de possíveis anomalias dentro de um contexto onde a consistência dos cálculos perturbativos desempenhará um papel crucial. No próximo capítulo vamos estabelecer as relações entre funções de Green e as identidades de Ward envolvendo as sub-amplitudes de $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$.

3 IDENTIDADES DE WARD E RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN

Para identificarmos uma possível anomalia num determinado modelo ou teoria precisamos investigar as suas funções de Green. Esta investigação se baseia na verificação das chamadas *identidades de Ward (IW's)*, que são vínculos matemáticos entre as funções de Green que expressam princípios físicos: as simetrias clássicas implementadas no modelo. No espaço dos momentos, as identidades de Ward são identificadas, geralmente, pela contração dos momentos externos com os respectivos índices de Lorentz da função de Green.

Antes desta verificação, porém, podemos deduzir uma classe mais geral de identidades matemáticas que relacionam as amplitudes perturbativas, que chamamos *relações entre funções de Green (RFGs)*. Estas relações são deduzidas a nível do integrando das amplitudes perturbativas, e pressupõem apenas propriedades usuais do cálculo tensorial, como a ciclicidade do traço, a álgebra das matrizes de Dirac e a linearidade da operação de integração (em contraste com as identidades de Ward, que são consequência da imposição de uma corrente conservada). Portanto, dentro da filosofia adotada no presente trabalho, a análise da consistência dos cálculos perturbativos passa pela verificação das RFGs.

3.1 Sub-Amplitudes

Como vimos no Capítulo 2, a amplitude $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ pode ser reorganizada em termos de sub-amplitudes. Sendo assim, primeiramente obteremos as RFGs e as IWs para cada sub-amplitude, e posteriormente para a amplitude completa.

3.1.1 Amplitudes vetor-vetor

Primeiramente, deduzimos a RFG pertinente à amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$, que é o tensor de polarização do vácuo da QED_2 , e que aparece como sub-amplitude da amplitude gravitacional $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$. Segundo nossas definições, o tensor pode ser representado a nível de integrando como

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr t_{\mu\nu}^{VV}, \quad (3.1)$$

onde

$$t_{\mu\nu}^{VV} = \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m}. \quad (3.2)$$

A contração da amplitude pode ser manipulada apenas a nível de integrando, pois

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{VV} \right] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr q^\mu t_{\mu\nu}^{VV}. \quad (3.3)$$

Trabalhando agora somente com o integrando, notamos que a contração de $t_{\mu\nu}^{VV}$ com o momento externo no primeiro índice nos leva a

$$Tr q^\mu t_{\mu\nu}^{VV} = Tr \left\{ \not{q} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}. \quad (3.4)$$

Através da identidade algébrica

$$\not{q} = \not{k}_1 - \not{k}_2 = (\not{k} + \not{k}_1 - m) - (\not{k} + \not{k}_2 - m), \quad (3.5)$$

e das propriedades de linearidade e ciclicidade da operação de traço, podemos escrever o integrando contraído (3.4) como uma soma:

$$Tr q^\mu t_{\mu\nu}^{VV} = Tr \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\} - Tr \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \right\}. \quad (3.6)$$

Após a substituição deste resultado em (3.3), identificamos cada termo do lado direito da igualdade como uma função de um ponto vetorial da QED_2 ,

$$T_\mu^V(k_i) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_i - m} \right\}, \quad (3.7)$$

o que implica em

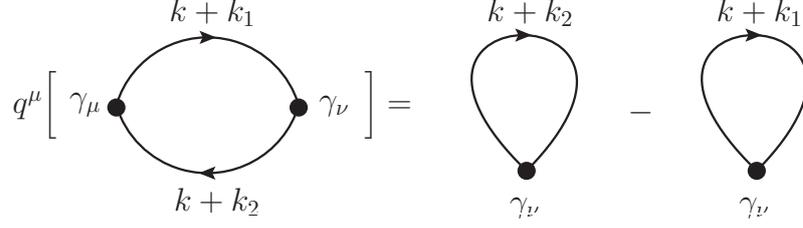
$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = -T_\nu^V(k_1) + T_\nu^V(k_2). \quad (3.8)$$

A identidade acima fornece uma relação precisa entre a contração de uma função de dois pontos com a diferença entre duas funções de um ponto. Esta é a RFG para a amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$ relativa à contração do momento externo no primeiro índice (q^μ). Sua representação diagramática, Fig. 3.1, deixa transparente seu significado.

Pelo fato de o tensor ser simétrico pela troca de índices, sabe-se que a contração no segundo índice, $q^\nu T_{\mu\nu}^{VV}$, gera um resultado idêntico ao anterior

$$q^\nu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = q^\nu \left[T_{\nu\mu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = -T_\mu^V(k_1) + T_\mu^V(k_2). \quad (3.9)$$

Figura 3.1 – Representação diagramática da RFG (3.8)



As demais RFGs pertinentes às amplitudes com dois vértices vetoriais pode ser obtidas da mesma maneira. O porquê de serem estas as contrações pertinentes ficará mais claro na próxima seção, onde a amplitude gravitacional $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ será contraída com o momento externo e a métrica. Estas contrações da amplitude total geram contrações das sub-amplitudes, que para as sub-amplitudes do tipo VV são:

$$q^\mu \left[T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_{\rho;\nu}^V(k_1) \right] + \left[T_{\rho;\nu}^V(k_2) \right] , \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} q^\rho \left[T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] &= - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} q^\alpha \left[T_\alpha^V(k_1) + T_\alpha^V(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} q_\mu \left[T_\nu^V(k_1) - T_\nu^V(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} q_\nu \left[T_\mu^V(k_1) + T_\mu^V(k_2) \right] \\ &\quad - \left[T_{\mu;\nu}^V(k_1) - T_{\mu;\nu}^V(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} q^2 \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] , \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$g^{\mu\rho} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = \left[T_\nu^V(k_2) \right] + m \left[T_\nu^{SV}(k_1, k_2) \right] . \quad (3.12)$$

$$q^\mu \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_{\sigma\rho;\nu}^V(k_1) \right] + \left[T_{\sigma\rho;\nu}^V(k_2) \right] , \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} q^\sigma \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] &= - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} q^\alpha \left[T_{\rho;\alpha}^V(k_1) + T_{\rho;\alpha}^V(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} q_\mu \left[T_{\rho;\nu}^V(k_1) - T_{\rho;\nu}^V(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} q_\nu \left[T_{\rho;\mu}^V(k_1) + T_{\rho;\mu}^V(k_2) \right] \\ &\quad - \left[T_{\rho\mu;\nu}^V(k_1) - T_{\rho\mu;\nu}^V(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} q^2 \left[T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] , \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = \left[T_{\rho;\nu}^V(k_2) \right] + m \left[T_{\rho;\nu}^{SV}(k_1, k_2) \right] . \quad (3.15)$$

As sub-amplitudes de dois pontos nos lados direitos das equações já foram definidas em (2.89)-(2.91). As de um ponto são definidas de maneira análoga:

$$T^i(k_i) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ [\Gamma_i] \frac{1}{\not{k} + \not{k}_i - m} \right\}, \quad (3.16)$$

$$T_{\mu}^i(k_i) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k + k_1)_\mu Tr \left\{ [\Gamma_i] \frac{1}{\not{k} + \not{k}_i - m} \right\}, \quad (3.17)$$

$$T_{\mu\nu}^i(k_i) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k + k_1)_\mu (k + k_1)_\nu Tr \left\{ [\Gamma_i] \frac{1}{\not{k} + \not{k}_i - m} \right\}, \quad (3.18)$$

onde os vértices Γ_i foram definidos no Capítulo 2. Já mencionamos que $T_\mu^V(k_i)$ é a função de 1-ponto da QED_2 . Também notamos que o objeto T_ν^{SV} , na Eq. (3.12), é típico de teorias onde há acoplamento de uma partícula escalar com uma vetorial, representando a função de dois pontos escalar-vetor a nível 1-loop.

As RFGs apresentadas acima foram obtidas usando-se como ingrediente básico apenas a validade da linearidade da operação de integração e as propriedades algébricas usuais dos elementos que compõem as amplitudes. Do nosso ponto de vista, estas relações podem ser usadas para estabelecer um teste de consistência mínimo das amplitudes calculadas. Em outras palavras, quando calcularmos explicitamente uma amplitude, qualquer que seja o procedimento de cálculo usado, a contração do resultado final com o momento externo para cada vértice da amplitude deve reproduzir as RFGs esperadas.

Para a amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$, além da RFG (3.8), também está definida a IW

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = q^\nu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = 0. \quad (3.19)$$

Isto ocorre porque este objeto pertence à QED_2 , que tem simetria de *gauge* $U(1)$. Esta simetria dita a conservação da corrente vetorial, que no contexto perturbativo, é representada pela IW acima.

3.1.2 Amplitudes axial-axial

A dedução das relações para as amplitudes do tipo axial-axial são análogas. Se tratando da amplitude $T_{\mu\nu}^{AA}$, por exemplo, a contração pertinente é com o momento externo. Da mesma

maneira que no caso da função vetor-vetor, temos a contração a nível de integrando

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} q^\mu t_{\mu\nu}^{AA}, \quad (3.20)$$

onde $\text{Tr} q^\mu t_{\mu\nu}^{AA}$ é

$$\text{Tr} q^\mu t_{\mu\nu}^{AA} = \text{Tr} \left\{ \not{k} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}. \quad (3.21)$$

Novamente, usando a identificação $\not{k} = (\not{k}_1 + \not{k} - m) - (\not{k}_2 + \not{k} - m)$ e a álgebra da matriz γ_5

$$\{ \gamma_5, \gamma_\mu \} = 0,$$

podemos chegar à seguinte expressão

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) = -T_\nu^V(k_1) + T_\nu^V(k_2) - 2m T_\nu^{PA}(k_1, k_2), \quad (3.22)$$

que é representada em termos de diagramas na Fig. 3.2.

Figura 3.2 – Representação diagramática da RFG (3.22)

$$q^\mu \left[\gamma_\mu \gamma_5 \right] = \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} - 2m \left[\gamma_5 \right]$$

As outras contrações pertinentes foram calculadas da mesma maneira

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) = -T_\nu^V(k_1) + T_\nu^V(k_2) - 2m T_\nu^{PA}(k_1, k_2), \quad (3.23)$$

$$q^\mu \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_{\rho;\nu}^V(k_1) \right] + \left[T_{\rho;\nu}^V(k_2) \right] - 2m \left[T_{\rho;\nu}^{PA}(k_1, k_2) \right], \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} q^\rho \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}q^\alpha \left[T_\alpha^V(k_1) + T_\alpha^V(k_2) \right] + \frac{1}{2}q_\mu \left[T_\nu^V(k_1) - T_\nu^V(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}q_\nu \left[T_\mu^V(k_1) + T_\mu^V(k_2) \right] - \left[T_{\mu;\nu}^V(k_1) - T_{\mu;\nu}^V(k_2) \right] \\ &\quad + mg_{\mu\nu} \left[T^S(k_1) - T^S(k_2) \right] - m\varepsilon_{\mu\nu} \left[T^P(k_1) + T^P(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}q^2 \left[T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$g^{\mu\rho} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] = \left[T_\nu^V(k_2) \right] - m \left[T_\nu^{PA}(k_1, k_2) \right], \quad (3.26)$$

$$q^\mu \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_{\sigma\rho;\nu}^V(k_1) \right] + \left[T_{\sigma\rho;\nu}^V(k_2) \right] - 2m \left[T_{\sigma\rho;\nu}^{PA}(k_1, k_2) \right], \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} q^\sigma \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}q^\alpha \left[T_{\rho;\alpha}^V(k_1) + T_{\rho;\alpha}^V(k_2) \right] + \frac{1}{2}q_\mu \left[T_{\rho;\nu}^V(k_1) - T_{\rho;\nu}^V(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}q_\nu \left[T_{\rho;\mu}^V(k_1) + T_{\rho;\mu}^V(k_2) \right] - \left[T_{\rho\mu;\nu}^V(k_1) - T_{\rho\mu;\nu}^V(k_2) \right] \\ &\quad + mg_{\mu\nu} \left[T_\rho^S(k_1) - T_\rho^S(k_2) \right] - m\varepsilon_{\mu\nu} \left[T_\rho^P(k_1) + T_\rho^P(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}q^2 \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] = \left[T_{\rho;\nu}^V(k_2) \right] - m \left[T_{\rho;\nu}^{PA}(k_1, k_2) \right]. \quad (3.29)$$

Notamos aqui a presença das amplitudes de um ponto escalar, pseudo-escalar e vetorial ($T^S(k_i)$, $T^P(k_i)$ e $T_\mu^V(k_i)$ respectivamente); e das amplitudes de dois pontos $T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2)$ e $T_\nu^{PA}(k_1, k_2)$. Estas amplitudes podem ser interpretadas dentro de uma teoria mais fundamental, em espaço-tempo plano, onde bósons escalares, pseudo-escalares, vetoriais e axiais se acoplam aos férmions. Nesta teoria há um princípio de conservação da corrente vetorial (devido à simetria de gauge $U(1)$) e um princípio de conservação parcial da corrente axial, que relaciona as correntes axiais e pseudo-escalares, gerando uma IW para as funções de Green no regime quântico. Deste modo, além da RFG (3.23), amplitude $T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2)$ deve obedecer a uma IW axial dada por

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) = -2m T_\nu^{PA}(k_1, k_2). \quad (3.30)$$

3.1.3 Amplitudes axial-vetor

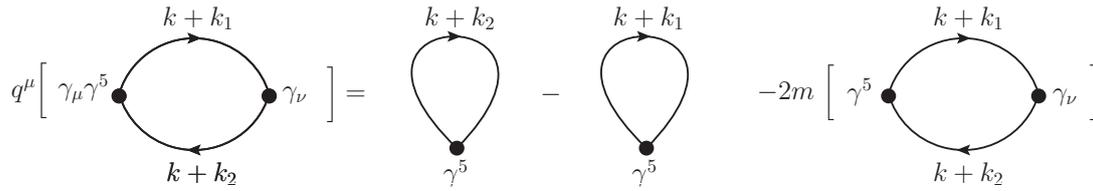
Para as amplitudes axial-vetor, as relações envolvem contrações tanto no vértice vetorial quanto no axial. Sendo assim, para a amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$, as relações deduzidas foram

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_\nu^A(k_1) \right] + \left[T_\nu^A(k_2) \right] - 2m \left[T_\nu^{PV}(k_1, k_2) \right] \quad (3.31)$$

$$q^\nu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_\mu^A(k_1) \right] + \left[T_\mu^A(k_2) \right]. \quad (3.32)$$

A identidade (3.31) será importante em nosso trabalho, pois é exatamente nesta amplitude que, dentro do contexto da QED_2 , surge a anomalia quiral. A Fig. 3.3 mostra sua representação esquemática.

Figura 3.3 – Representação diagramática da RFG (3.31)



Apesar de ser possível a dedução de todas as relações para contrações com índices vetoriais e axiais, para todas as amplitudes, notamos que esta análise pode ser simplificada. Em $(1+1)D$ existe uma identidade conectando as matrizes γ_μ e γ_5 , que na representação utilizada neste trabalho, é

$$\gamma_\mu \gamma_5 = -\varepsilon_{\mu\beta} \gamma^\beta, \quad (3.33)$$

$$\text{ou } \left[\Gamma_\mu^A \right] = -\varepsilon_{\mu\beta} g^{\beta\alpha} \left[\Gamma_\alpha^V \right].$$

Reescrevendo assim os vértices axiais e termos de vértices vetoriais, as amplitudes do tipo axial-vetor são escritas em termos de amplitudes vetor-vetor

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = -\varepsilon_{\mu\beta} g^{\beta\alpha} \left[T_{\alpha\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right], \quad (3.34)$$

$$T_{\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = -\varepsilon_{\mu\beta} g^{\beta\alpha} \left[T_{\rho;\alpha\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right], \quad (3.35)$$

$$T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = -\varepsilon_{\mu\beta} g^{\beta\alpha} \left[T_{\sigma\rho;\alpha\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right], \quad (3.36)$$

assim como a amplitude de um ponto

$$T_{\mu}^A(k_i) = -\varepsilon_{\mu\beta}g^{\beta\alpha} [T_{\alpha}^V(k_i)].$$

De posse desta propriedade, notamos que qualquer RFG que não envolva contrações no índice axial pode ser reescrita como uma relação entre funções com índices exclusivamente vetoriais. Por exemplo, observamos a relação (3.32):

$$q^{\nu} [T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)] = - [T_{\mu}^A(k_1)] + [T_{\mu}^A(k_2)], \quad (3.37)$$

e notamos que usando a referida identidade entre vértices podemos reescrever

$$\begin{aligned} q^{\nu} [-\varepsilon_{\mu\beta}g^{\beta\alpha}T_{\alpha\nu}^{VV}(k_1, k_2)] &= \varepsilon_{\mu\beta}g^{\beta\alpha} [T_{\alpha}^V(k_1)] - \varepsilon_{\mu\beta}g^{\beta\alpha} [T_{\alpha}^V(k_2)] \\ \implies q^{\nu}T_{\alpha\nu}^{VV}(k_1, k_2) &= -T_{\alpha}^V(k_1) + T_{\alpha}^V(k_2), \end{aligned} \quad (3.38)$$

que por sua vez é uma identidade que envolve amplitudes que contêm apenas vértices vetoriais, e já foi apresentada mais acima (Eq. 3.8).

Este procedimento pode ser aplicado para todas as RFGs das amplitudes do tipo axial-vetor que não envolvam contrações no índice axial. Desta maneira, grande parte das relações se reduzem àquelas que já foram estabelecidas anteriormente. As únicas relações com novo conteúdo são as que envolvem contração no índice axial

$$q^{\mu} [T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)] = - [T_{\nu}^A(k_1)] + [T_{\nu}^A(k_2)] - 2m [T_{\nu}^{PV}(k_1, k_2)], \quad (3.39)$$

$$q^{\mu} [T_{\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)] = - [T_{\rho;\nu}^A(k_1)] + [T_{\rho;\nu}^A(k_2)] - 2m [T_{\rho;\nu}^{PV}(k_1, k_2)], \quad (3.40)$$

$$g^{\mu\rho} [T_{\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)] = [T_{\nu}^A(k_2)] - m [T_{\nu}^{PV}(k_1, k_2)], \quad (3.41)$$

$$q^{\mu} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)] = - [T_{\sigma\rho;\nu}^A(k_1)] + [T_{\sigma\rho;\nu}^A(k_2)] - 2m [T_{\sigma\rho;\nu}^{PV}(k_1, k_2)], \quad (3.42)$$

$$g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)] = [T_{\rho;\nu}^A(k_2)] - m [T_{\rho;\nu}^{PV}(k_1, k_2)]. \quad (3.43)$$

Além destas RFGs, temos também identidades de Ward associadas à amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$. Tal qual nos casos das amplitudes $T_{\mu\nu}^{VV}$ e $T_{\mu\nu}^{AA}$, estas relações vêm de princípios de conservação de teorias mais fundamentais, bem estabelecidos pela literatura. Para a amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$ estas identidades são

$$q^\nu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = 0 \quad (3.44)$$

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = -2m \left[T_\nu^{PV}(k_1, k_2) \right], \quad (3.45)$$

e representam a conservação da corrente vetorial e a conservação parcial da corrente axial, respectivamente. Sabe-se que há um fenômeno de anomalia relacionado a estes princípios de conservação. Este é um ponto importante da nossa análise, e será discutido posteriormente.

3.2 A Amplitude Gravitacional

A partir de (2.87) e (2.93), a expressão completa pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} (64) \quad iT_{\mu\nu\rho\sigma}^G &= 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] - 2q_\sigma \left[T_{\nu;\mu\rho}^{VV} \right] - 2q_\nu \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + q_\nu q_\sigma \left[T_{\mu\rho}^{VV} \right] \\ &\pm 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA} \right] \mp 2q_\sigma \left[T_{\nu;\mu\rho}^{VA} \right] \mp 2q_\nu \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{VA} \right] \pm q_\nu q_\sigma \left[T_{\mu\rho}^{VA} \right] \\ &\pm 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 2q_\sigma \left[T_{\nu;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 2q_\nu \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \pm q_\nu q_\sigma \left[T_{\mu\rho}^{AV} \right] \\ &+ 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] - 2q_\sigma \left[T_{\nu;\mu\rho}^{AA} \right] - 2q_\nu \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] + q_\nu q_\sigma \left[T_{\mu\rho}^{AA} \right] \\ &+ (\sigma \leftrightarrow \rho) + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\mu \leftrightarrow \nu, \sigma \leftrightarrow \rho) . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Por uma questão de clareza do desenvolvimento dos cálculos, podemos escrever (3.46) como

$$T_{\mu\nu\rho\sigma}^G = -\frac{i}{64} \left\{ \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} + \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VA} + \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AA} \right\}, \quad (3.47)$$

onde cada tensor do lado direito desta equação contém todas as sub-amplitudes com dois vértices vetoriais (VV), um vértice vetorial e um axial (AV e VA) e dois axiais (AA), respectivamente.

Os testes de consistência são realizados a partir das contrações $q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ e $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$, que dizem respeito às invariâncias de Einstein e Weyl apresentadas no Capítulo 2, Eqs. (2.80) e

(2.81). A partir da forma acima, a contração com o momento externo q^μ vai gerar

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu\rho\sigma}^G \right] = -\frac{i}{64} \left\{ \left[q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} \right] + \left[q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AV} \right] + \left[q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AA} \right] \right\}. \quad (3.48)$$

Analisando inicialmente apenas a contração $q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV}$, notamos que ao escrever explicitamente o tensor temos

$$\begin{aligned} q^\mu \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} \right] = & 4 \left\{ \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] \right\} + 4 \left\{ \left[q^\mu T_{\nu\rho;\mu\sigma}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu\rho;\nu\sigma}^{VV} \right] \right\} \\ & - 2q_\sigma \left\{ \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{VV} \right] \right\} - 2q_\rho \left\{ \left[q^\mu T_{\mu;\nu\sigma}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\nu;\mu\sigma}^{VV} \right] \right\} \\ & - 2q_\nu \left\{ \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\rho;\mu\sigma}^{VV} \right] \right\} + q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VV} \right] + q_\nu q_\rho \left[q^\mu T_{\mu\sigma}^{VV} \right] \\ & + q^2 \left\{ q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{VV} \right] + q_\rho \left[T_{\nu\sigma}^{VV} \right] - 2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{VV} + T_{\rho;\nu\sigma}^{VV} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

ou ainda, numa notação mais compacta,

$$\begin{aligned} q^\mu \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} \right] = & 4 \left\{ \left[q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] \right\} - 2q_\sigma \left\{ \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{VV} \right] \right\} \\ & - 2q_\nu \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VV} \right] + q^2 \left\{ q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{VV} \right] - 2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] \right\} \\ & + (\sigma \leftrightarrow \rho). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Substituindo as RFGs relativas às sub-amplitudes da expressão acima, conforme mostrado nas Eqs. (3.8)-(3.15), temos

$$\begin{aligned} q^\mu \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} \right] = & -8 \left[T_{\nu\sigma;\rho}^V(k_1) - T_{\nu\sigma;\rho}^V(k_2) \right] + 4q_\sigma \left[T_{\nu;\rho}^V(k_1) - T_{\nu;\rho}^V(k_2) \right] \\ & + 4q_\nu \left[T_{\sigma;\rho}^V(k_1) - T_{\sigma;\rho}^V(k_2) \right] + 2q_\rho \left[T_{\sigma;\nu}^V(k_1) + T_{\sigma;\nu}^V(k_2) \right] \\ & - 2g_{\nu\rho} q^\alpha \left[T_{\sigma;\alpha}^V(k_1) + T_{\sigma;\alpha}^V(k_2) \right] - 2q_\nu q_\sigma \left[T_\rho^V(k_1) - T_\rho^V(k_2) \right] \\ & - q_\sigma q_\rho \left[T_\nu^V(k_1) + T_\nu^V(k_2) \right] + g_{\nu\rho} q_\sigma q^\alpha \left[T_\alpha^V(k_1) + T_\alpha^V(k_2) \right] \\ & + (\sigma \leftrightarrow \rho). \end{aligned} \quad (3.51)$$

O mesmo raciocínio é feito para a parte axial-axial da amplitude $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$. Após a contração, observamos que

$$\begin{aligned}
q^\mu \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AA} \right] = & 4 \left\{ \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] + \left[q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AA} \right] \right\} - 2q_\sigma \left\{ \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{AA} \right] + \left[q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{AA} \right] \right\} \\
& - 2q_\nu \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] + q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{AA} \right] + q^2 \left\{ q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{AA} \right] - 2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{AA} \right] \right\} \\
& + (\sigma \leftrightarrow \rho) .
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Substituindo as respectivas RFGs temos (ver Eqs. (3.23)-(3.29))

$$\begin{aligned}
q^\mu \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AA} \right] = & -8 \left[T_{\nu\sigma;\rho}^V(k_1) - T_{\nu\sigma;\rho}^V(k_2) \right] + 4q_\sigma \left[T_{\nu;\rho}^V(k_1) - T_{\nu;\rho}^V(k_2) \right] \\
& + 4q_\nu \left[T_{\sigma;\rho}^V(k_1) - T_{\sigma;\rho}^V(k_2) \right] + 2q_\rho \left[T_{\sigma;\nu}^V(k_1) + T_{\sigma;\nu}^V(k_2) \right] \\
& - 2g_{\nu\rho} q^\alpha \left[T_{\sigma;\alpha}^V(k_1) + T_{\sigma;\alpha}^V(k_2) \right] - 2q_\nu q_\sigma \left[T_\rho^V(k_1) - T_\rho^V(k_2) \right] \\
& - q_\sigma q_\rho \left[T_\nu^V(k_1) + T_\nu^V(k_2) \right] + g_{\nu\rho} q_\sigma q^\alpha \left[T_\alpha^V(k_1) + T_\alpha^V(k_2) \right] \\
& + m \left\{ -8 \left[T_{\nu\sigma;\rho}^{PA}(k_1, k_2) \right] + 4q_\nu \left[T_{\sigma;\rho}^{PA}(k_1, k_2) \right] \right. \\
& \quad + 4q_\sigma \left[T_{\nu;\rho}^{PA}(k_1, k_2) \right] - 2q_\nu q_\sigma \left[T_\rho^{PA}(k_1, k_2) \right] \\
& \quad + 4g_{\nu\rho} \left[T_\sigma^S(k_1) - T_\sigma^S(k_2) \right] - 2q_\sigma g_{\nu\rho} \left[T^S(k_1) - T^S(k_2) \right] \\
& \quad \left. - 4\varepsilon_{\nu\rho} \left[T_\sigma^P(k_1) + T_\sigma^P(k_2) \right] + 2q_\sigma \varepsilon_{\nu\rho} \left[T^P(k_1) + T^P(k_2) \right] \right\} \\
& + (\sigma \leftrightarrow \rho) .
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Por último, para a parte axial-vetor, organizamos a contração da forma

$$\begin{aligned}
q^\mu \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AV} \right] = & \pm 4 \left\{ \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AV} \right] \right\} \\
& \mp 2q_\sigma \left\{ \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{AV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{AV} \right] \right\} \\
& \mp 2q_\nu \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \pm q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu\rho}^{AV} \right] \\
& \pm q^2 \left\{ q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{VA} + T_{\nu\rho}^{AV} \right] - 2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{VA} + T_{\sigma;\nu\rho}^{AV} \right] \right\} \\
& + (\sigma \leftrightarrow \rho) .
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Novamente, a substituição das respectivas RFGs das sub-amplitudes, Eqs. (3.8)-(3.15) e (3.39)-(3.43), nos fornece a expressão

$$\begin{aligned}
q^\mu \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AV} \right] = & \mp 12 \left[T_{\nu\sigma;\rho}^A(k_1) - T_{\nu\sigma;\rho}^A(k_2) \right] \pm 6q_\sigma \left[T_{\nu;\rho}^A(k_1) - T_{\nu;\rho}^A(k_2) \right] \\
& \pm 6q_\nu \left[T_{\sigma;\rho}^A(k_1) - T_{\sigma;\rho}^A(k_2) \right] \mp 3q_\sigma q_\nu \left[T_\rho^A(k_1) - T_\rho^A(k_2) \right] \\
& \pm 2q_\rho \left[T_{\sigma;\nu}^A(k_1) + T_{\sigma;\nu}^A(k_2) \right] \mp q_\sigma q_\rho \left[T_\nu^A(k_1) + T_\nu^A(k_2) \right] \\
& \mp \left(-\varepsilon_\nu^\lambda \right) 4 \left[T_{\sigma\lambda;\rho}^V(k_1) - T_{\sigma\lambda;\rho}^V(k_2) \right] \pm \left(-\varepsilon_\nu^\lambda \right) 2q_\sigma \left[T_{\lambda;\rho}^V(k_1) - T_{\lambda;\rho}^V(k_2) \right] \\
& \pm \left(-\varepsilon_\nu^\lambda \right) 2q_\lambda \left[T_{\sigma;\rho}^V(k_1) - T_{\sigma;\rho}^V(k_2) \right] \mp \left(-\varepsilon_\nu^\lambda \right) q_\sigma q_\lambda \left[T_\rho^V(k_1) - T_\rho^V(k_2) \right] \\
& \pm \left(-\varepsilon_\rho^\lambda \right) 2q_\lambda \left[T_{\sigma;\nu}^V(k_1) + T_{\sigma;\nu}^V(k_2) \right] \mp \left(-\varepsilon_\rho^\lambda \right) q_\sigma q_\lambda \left[T_\nu^V(k_1) + T_\nu^V(k_2) \right] \\
& + m \left\{ \mp 8 \left[T_{\nu\sigma;\rho}^{PV}(k_1, k_2) \right] \pm 4q_\sigma \left[T_{\nu;\rho}^{PV}(k_1, k_2) \right] \right. \\
& \quad \left. \pm 4q_\nu \left[T_{\sigma;\rho}^{PV}(k_1, k_2) \right] \mp 2q_\nu q_\sigma \left[T_\rho^{PV}(k_1, k_2) \right] \right\} \\
& + (\sigma \leftrightarrow \rho) .
\end{aligned} \tag{3.55}$$

A contração $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ é feita exatamente como no caso da contração com o momento, dividindo a amplitude em tensores com diferentes caracteres de vértice e contraindo separadamente

$$g^{\mu\nu} \left[T_{\mu\nu\rho\sigma}^G \right] = -\frac{i}{64} \left\{ \left[g^{\mu\nu} \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} \right] + \left[g^{\mu\nu} \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AV} \right] + \left[g^{\mu\nu} \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AA} \right] \right\} . \tag{3.56}$$

A contração das formas explícitas de cada tensor, após algumas manipulações algébricas, nos dá

$$g^{\mu\nu} \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} \right] = 8 \left[g^{\mu\nu} T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] - 4q^\sigma \left[g^{\mu\nu} T_{\mu;\nu\rho}^{VV} \right] - 4 \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + 2q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VV} \right] + (\sigma \leftrightarrow \rho) , \quad (3.57)$$

$$g^{\mu\nu} \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AA} \right] = 8 \left[g^{\mu\nu} T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AA} \right] - 4q^\sigma \left[g^{\mu\nu} T_{\mu;\nu\rho}^{AA} \right] - 4 \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] + 2q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{AA} \right] + (\sigma \leftrightarrow \rho) , \quad (3.58)$$

$$g^{\mu\nu} \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AV} \right] = \pm 8 \left[g^{\mu\nu} T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA} + g^{\mu\nu} T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 4q_\sigma \left[g^{\mu\nu} T_{\nu;\mu\rho}^{VA} + g^{\mu\nu} T_{\nu;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 4 \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \pm 2q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu\rho}^{AV} \right] + (\sigma \leftrightarrow \rho) . \quad (3.59)$$

Através dos resultados (3.8)-(3.15), (3.23)-(3.29) e (3.39)-(3.43), obtemos

$$g^{\mu\nu} \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} \right] = 4 \left[T_{\sigma;\rho}^V(k_1) + T_{\sigma;\rho}^V(k_2) \right] - 2q_\sigma \left[T_\rho^V(k_1) + T_\rho^V(k_2) \right] + 8m \left[T_{\sigma;\rho}^{SV}(k_1, k_2) \right] - 4q_\sigma m \left[T_\rho^{SV}(k_1, k_2) \right] + (\sigma \leftrightarrow \rho) , \quad (3.60)$$

$$g^{\mu\nu} \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AA} \right] = 4 \left[T_{\sigma;\rho}^V(k_1) + T_{\sigma;\rho}^V(k_2) \right] - 2q_\sigma \left[T_\rho^V(k_1) + T_\rho^V(k_2) \right] + (\sigma \leftrightarrow \rho) , \quad (3.61)$$

$$g^{\mu\nu} \left[\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AV} \right] = \pm 8 \left[T_{\sigma;\rho}^A(k_1) + T_{\sigma;\rho}^A(k_2) \right] \mp 4q_\sigma \left[T_\rho^A(k_1) + T_\rho^A(k_2) \right] \pm 8m \left[T_{\sigma;\rho}^{SA}(k_1, k_2) \right] \mp 4q_\sigma m \left[T_\rho^{SA}(k_1, k_2) \right] + (\sigma \leftrightarrow \rho) . \quad (3.62)$$

Os resultados apresentados nesta seção serão úteis para as análises que serão feitas no próximos capítulos. No próximo capítulo vamos apresentar o método que utilizaremos para manipular a calcular as sub-amplitudes de $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$.

4 MÉTODO PARA MANIPULAÇÃO E CÁLCULO DE AMPLITUDES PERTURBATIVAS EM TQC

As amplitudes perturbativas pertencentes a um determinado processo físico da TQC, dentro de uma aproximação *1-loop* ou superior, são combinações de integrais de Feynman, que não raramente são divergentes no regime ultravioleta do momento de integração. Do ponto de vista matemático, uma integral de Feynman divergente é caracterizada por uma estrutura matemática indefinida e que tem como origem o produto de distribuições (deltas de Dirac e funções degrau de Heaviside) tomadas no mesmo ponto do espaço-tempo (ASTE, 2008).

O procedimento usual para lidar com as divergências é a introdução de algum tipo de modificação *e/ou cutoff* que torna as amplitudes finitas. Após os cálculos, se toma um "limite de conexão" para voltar ao regime original. Estas modificações caracterizam os métodos tradicionais de regularização. Idealmente, um método de regularização deveria ser apenas uma ferramenta útil para se desenvolver os cálculos intermediários necessários para fazermos previsões de observáveis relacionados a processos físicos de interesse. No entanto, na prática, não é isso que ocorre. Os resultados finais são comumente dependentes do método particular adotado, e os eventuais parâmetros introduzidos devem ser incorporados ao modelo ao qual as integrais de Feynman são oriundas. Esta é a uma das arbitrariedades associada aos métodos de regularização, cuja escolha em particular passa a ter um papel decisivo nos resultados obtidos. Como o poder de predição de uma teoria reside exatamente no fato de que os resultados devem ser independentes das escolhas de quem os aplica, temos uma situação no mínimo desconfortável do ponto de vista epistemológico.

Em particular, sabe-se que uma das consequências da utilização de um método de regularização é o estabelecimento de um valor específico para os chamados termos de superfície. A Regularização Dimensional (HOOFT; VELTMAN, 1972), que é o método de regularização mais utilizado na literatura, tem como hipótese fundamental que os termos de superfície são nulos. No espaço-tempo $(1 + 3)$ -dimensional este é um resultado importante, porque permite associar um resultado nulo à amplitude AV , o que seria esperado por considerações de simetria de conjugação de carga e paridade (JACKIW; GERSTEIN, 1969). Além disso, os termos de superfície geralmente estão associados com as ambiguidades provenientes da liberdade de escolha dos rótulos atribuídos aos momentos internos aos *loops*.

Porém, em algumas situações importantes, parece ser necessário admitir um valor não-nulo para os termos de superfície. Este foi o caso da já citada anomalia ABJ, onde, nos primei-

ros estudos sobre a mesma, um valor não-nulo para um termo de superfície foi necessário para explicar a fenomenologia do decaimento do pión neutro (BELL; JACKIW, 1969) (JACKIW; GERSTEIN, 1969). Nesta interpretação, o fenômeno das anomalias está intrinsicamente relacionado às divergências e ambiguidades, que são ingredientes exclusivos dos cálculos perturbativos. Em oposição a isto, se aderirmos ao ponto de vista de que as anomalias são fenômenos físicos inevitáveis e com consequências verificáveis experimentalmente, então o seu resultado não pode, em última instância, depender de qualquer ingrediente metodológico utilizado em passos intermediários. Do contrário, cometeríamos a falácia de confundir o método utilizado com o objeto estudado.

Tudo isso nos leva a crer que para termos uma teoria consistente devemos, no mínimo, tratar todas as amplitudes, independentemente do modelo ou teoria, da mesma maneira. Do nosso ponto de vista, o correto manejo das divergências deve ser baseado em alguma prescrição que trate os mesmos objetos matemáticos, independente do seu caráter indefinido, da mesma forma em todos processos físicos ao qual ele possa pertencer. Não nos parece plausível admitir uma interpretação que seja mais conveniente caso-a-caso, atribuindo diferentes valores para o mesmo objeto matemático, como parece ser o caso dos termos de superfície, visto que isto seria o equivalente a abrir mão do poder de predição da teoria. O resultado, obviamente, seria arbitrário.

A situação descrita acima claramente não é a ideal, devendo-se buscar uma estratégia alternativa de modo que todos os problemas podem ser tratados consistentemente dentro de uma única receita. De fato tal método existe e foi proposto alguns anos atrás por Battistel (1999). O referido método é universal e de fácil aplicação baseando-se na utilização recursiva de uma identidade algébrica para reescrever de maneira conveniente os integrandos das integrais divergentes (para aplicações do método o leitor pode consultar, por exemplo, as Refs. (BATTISTEL; MOTA; NEMES, 1998), (BRIZOLA et al., 1999) e (BATTISTEL; DALLABONA, 2002a)). Esta identidade pode ser da forma

$$\frac{1}{(k+k_i)^2-m^2} = \sum_{j=0}^N (-1)^j \frac{(2k \cdot k_i + k_i^2 + \lambda^2 - m^2)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} + (-1)^{N+1} \frac{(2k \cdot k_i + k_i^2 + \lambda^2 - m^2)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} [(k+k_i)^2 - m^2]}. \quad (4.1)$$

Aqui, N é o grau superficial de divergência da integral, λ é um parâmetro arbitrário com dimensão de massa e k_i é o momento (arbitrário) associado às linhas internas dos *loops*. Esta identidade faz simplesmente o papel de separar a parte finita da puramente divergente, alocando as divergências irreduzíveis em objetos que não dependem de parâmetros físicos, e que são levados até o fim dos cálculos sem serem calculados explicitamente.

Para exemplificar o método de forma explícita, vamos aplicá-lo no cálculo simples de uma função de 1-ponto vetorial em $(1+1)D$, definida como

$$\begin{aligned} T_\mu^V(k_i) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{(k+k_i)^\alpha \gamma_\alpha + m}{D_i} \right\}, \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k+k_i)^\alpha}{D_i} \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha] \\ &\quad + m \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{D_i} \text{Tr} [\gamma_\mu]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Toma-se também o cuidado de rotular o momento interno da maneira mais geral possível, de modo que as ambiguidades associadas possam ser facilmente rastreáveis. A substituição dos traços das matrizes de Dirac nos leva a

$$T_\mu^V(k_i) = 2 [I_{1\mu}(k_i)] + k_{i\mu} [I_1(k_i)]. \quad (4.3)$$

Os objetos $I_{1\mu}$ e I_1 fazem parte de uma classe de integrais de 1-ponto definidas como

$$[I_1, I_{1\mu}, I_{1\mu\nu}, \dots](k_i) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[1, k_\mu, k_\mu k_\nu, \dots]}{D_1}. \quad (4.4)$$

Explicitamente, a integral I_1 diverge logicamente, de modo que aplicamos a identidade com $N = 0$ e obtemos

$$\begin{aligned} I_1(k_i) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{D_i}, \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k \cdot k_i + k_i^2 + \lambda^2 - m^2}{(k^2 - \lambda^2) D_i}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Notamos que a primeira integral diverge logicamente e não carrega nenhum parâmetro físico, enquanto a segunda, onde esperamos que a "física" esteja contida, é finita. A

integral finita pode ser integrada resultando em

$$I_1(k_i) = I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)} \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right), \quad (4.6)$$

onde definimos o primeiro objeto divergente irreduzível (divergência logarítmica)

$$I_{\log}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}. \quad (4.7)$$

Aplicando a mesma identidade com $N = 1$ para a integral $I_{1\mu}$ obtemos

$$\begin{aligned} I_{1\mu}(k_i) = & \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)} \\ & - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu (k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\ & + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu (k_i^2 + 2k \cdot k_i + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_i}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Após a integração da parte finita obtemos

$$I_{1\mu}(k_i) = -(k_i)^\xi [\Delta_{2;\mu\xi}(\lambda^2)] - (k_i)_\mu \left\{ [I_{\log}(\lambda^2)] - \frac{i}{(4\pi)} \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \right\}, \quad (4.9)$$

onde $\Delta_{2;\mu\xi}$ é um segundo tipo de objeto divergente definido como

$$\Delta_{2;\mu\xi}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\xi}{(k^2 - \lambda^2)^2} - g_{\mu\xi} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - \lambda^2}. \quad (4.10)$$

A expressão para $T_\mu^V(k_i)$, então, torna-se simples

$$T_\mu^V(k_i) = -2k_i^\xi [\Delta_{2;\mu\xi}(\lambda^2)]. \quad (4.11)$$

Note que o resultado (4.11) é totalmente ambíguo, pois depende diretamente da rotulação do momento interno k_i .

O mesmo procedimento pode ser igualmente aplicado para calcularmos qualquer outra amplitude perturbativa a nível 1-loop. No Apêndice C listamos os resultados das funções de 1 e 2-pontos que serão necessárias para o estudo das sub-amplitudes que formam a amplitude $T_{\mu\nu\sigma\rho}^G(q)$ e que serão apresentadas no próximo capítulo.

5 CÁLCULO EXPLÍCITO E CONSISTÊNCIA DAS SUB-AMPLITUDES

Tendo apresentado o problema que será objeto de estudo no presente trabalho assim como o esquema utilizado para tratar as correspondentes integrais de Feynman, partimos agora para o cálculo explícito da amplitude gravitacional $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$. Vimos na Eq. (3.46) que esta amplitude pode ser organizada como uma combinação de sub-estruturas compostas por vértices vetoriais e axiais que possuem dois, três e quatro índices de Lorentz. Estas sub-estruturas formam um conjunto de amplitudes que podem ser estudadas separadamente. Vamos exigir que cada sub-amplitude separadamente esteja de acordo com suas propriedades de simetrias. Isto significa, por exemplo, que a corrente vetorial deve ser conservada e a divergência da corrente axial deve ser proporcional à pseudo-escalar. Como vimos no Capítulo 3, estas propriedades de simetria são usadas para estabelecermos as identidades de Ward.

Antes da análise das identidades de Ward vamos considerar, como uma exigência de consistência mínima, a análise das RFGs. Estas relações são obtidas sempre que contraímos um ou mais índices de Lorentz de uma amplitude perturbativa com um momento externo ou, no caso de $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$, com a métrica, conforme discussão feita no Capítulo 3. Como já dissemos anteriormente, a análise das RFGs pode ser usada como uma ferramenta importante na busca por técnicas consistentes de tratamento de amplitudes perturbativas divergentes.

Neste capítulo vamos considerar o estudo detalhado de todas as sub-amplitudes que formam $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$. Dividiremos esta análise em três etapas: (1) cálculo explícito das amplitudes, (2) verificação das relações entre funções de Green usando as formas explícitas das amplitudes e (3) verificação das identidades de Ward para as amplitudes onde estas estejam definidas. A riqueza de detalhes dos cálculos apresentados será muito importante para enfatizarmos alguns passos críticos do tratamento das sub-amplitudes e que serão fundamentais para as conclusões finais do trabalho. Entretanto, por questões de clareza das discussões, sempre que possível apresentaremos alguns resultados em forma de apêndices.

5.1 Amplitudes com dois vértices vetoriais

A primeira classe de sub-amplitudes que vamos estudar são as funções de dois pontos com dois vértices vetoriais.

5.1.1 Amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$

Iniciamos nossos cálculos pela função de dois pontos vetor-vetor ($T_{\mu\nu}^{VV}$) que, no contexto da QED_2 , é chamada de *tensor de polarização do vácuo* e é de extrema importância por dar a correção em ordem 1-loop do propagador do fóton. Nossa primeira tarefa é o cálculo explícito da amplitude. Para isso temos que manipular objetos matemáticos formados por produtos matriciais de vértices e propagadores fermiônicos livres que, quando integrados no momento do *loop*, podem resultar em quantidades divergentes. Portanto, precisamos utilizar algum método ou procedimento para trabalhar com tais quantidades. Neste trabalho todas as manipulações e cálculos envolvendo quantidades divergentes e/ou finitas serão feitas de acordo com as prescrições e filosofia do método apresentado no Capítulo 4.

Cálculo explícito

A amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$ é definida a partir de (2.89) tomando-se $\Gamma_i = \gamma_\mu$ e $\Gamma_j = \gamma_\nu$

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}. \quad (5.1)$$

Após a extração dos traços das matrizes de Dirac a nível de integrando temos

$$t_{\mu\nu}^{VV} = 2 \frac{1}{D_{12}} \left[(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu \right] + g_{\mu\nu} \left\{ -2 \frac{1}{D_{12}} \left[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2 \right] \right\}. \quad (5.2)$$

É conveniente colocarmos esta estrutura tensorial na seguinte forma

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) = T_{\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2) + g_{\mu\nu} [T^{PP}(k_1, k_2)], \quad (5.3)$$

onde definimos o tensor simétrico

$$T_{\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2) = 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu}{D_{12}}, \quad (5.4)$$

e a amplitude de dois pontos pseudoescalar-pseudoescalar

$$T^{PP}(k_1, k_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}. \quad (5.5)$$

O tensor $T_{\mu\nu}^{(+)}$ e a amplitude T^{PP} podem ser facilmente organizados em termos de integrais de Feynman usuais. Obtemos

$$T_{\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2) = 4 [I_{2\mu\nu}] + 2Q_\nu [I_{2\mu}] + 2Q_\mu [I_{2\nu}] + (Q_\mu Q_\nu - q_\mu q_\nu) [I_2] , \quad (5.6)$$

$$T^{PP}(k_1, k_2) = q^2 [I_2] - [I_1(k_1)] - [I_1(k_2)] . \quad (5.7)$$

Aqui, Q é definido como a soma dos momentos internos dos propagadores do *loop*, $Q_\mu = (k_1 + k_2)_\mu$, e é totalmente ambíguo. As integrais são definidas por

$$\{I_{2\mu\nu}; I_{2\mu}; I_2\} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\{k_\mu k_\nu; k_\mu; 1\}}{\left[(k+k_1)^2 - m^2\right] \left[(k+k_2)^2 - m^2\right]} , \quad (5.8)$$

$$I_1(k_i) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{\left[(k+k_i)^2 - m^2\right]} . \quad (5.9)$$

Os resultados destas integrais, obtidos segundo as prescrições do método discutido na Seção 4, são apresentados no Apêndice A. Enfatizamos apenas que as únicas integrais divergentes e que, portanto, necessitam atenção especial, são $I_{2\mu\nu}(k_1, k_2)$ e $I_1(k_i)$. As integrais finitas, por outro lado, são calculadas através de técnicas bem estabelecidas. Após a utilização dos resultados (30), (31) e (32) obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2) = & 2 [\Delta_{2;\mu\nu}] + 2g_{\mu\nu} [I_{\log}(m^2)] \\ & + \left(\frac{i}{\pi}\right) (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left[\xi_2^{(-1)}(q^2, m^2) - \xi_1^{(-1)}(q^2, m^2)\right] \\ & - \left(\frac{i}{4\pi}\right) g_{\mu\nu} q^2 \left[\xi_0^{(-1)}(q^2, m^2)\right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

e

$$T^{PP}(k_1, k_2) = -2 [I_{\log}(m^2)] + \left(\frac{i}{4\pi}\right) q^2 \left[\xi_0^{(-1)}(q^2, m^2)\right] . \quad (5.11)$$

Como é possível ver nas expressões acima, a parte puramente divergente não foi integrada mas simplesmente organizada em termos dos objetos divergentes básicos, $I_{\log}(m^2)$ e $\Delta_{2;\mu\nu}(m^2)$, definidos nas Eqs. (4.7) e (4.10). A parte finita, por sua vez, foi organizada em

termos das funções $\xi_k^{(N)}(q^2, m^2)$, definidas por

$$\xi_k^{(0)}(q^2, m^2; m^2) = \int_0^1 dz z^k \ln\left(\frac{Q(z)}{-m^2}\right), \quad (5.12)$$

$$\xi_k^{(-1)}(q^2, m^2) = \int_0^1 dz \frac{z^k}{Q(z)}, \quad (5.13)$$

onde $Q(z)$ é o polinômio $Q(z) \equiv q^2 z(1-z) - m^2$ e $k \geq 0$. Este será o padrão dos resultados apresentados de todas as amplitudes que calcularemos neste trabalho.

Inserindo os resultados apresentados acima na expressão (5.3) obtemos

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) = 2 [\Delta_{2;\mu\nu}] + \left(\frac{i}{\pi}\right) (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left[\xi_2^{(-1)}(q^2, m^2) - \xi_1^{(-1)}(q^2, m^2) \right]. \quad (5.14)$$

Como próximo passo vamos submeter o resultado (5.14) a um teste de consistência mínima através da verificação das suas RFGs.

Relações entre Funções de Green

A fim de testar a consistência mínima do resultado (5.14) vamos verificar se as RFGs foram preservadas pelas manipulações realizadas. Como já mostrado no Capítulo 3, as RFGs que esperamos serem satisfeitas pela amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$ são

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_\nu^V(k_1) \right] + \left[T_\nu^V(k_2) \right], \quad (5.15)$$

$$q^\nu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_\mu^V(k_1) \right] + \left[T_\mu^V(k_2) \right]. \quad (5.16)$$

Para verificar estas relações, necessitamos reorganizar o resultado explícito da contração de (5.14) com o momento externo q de modo que possamos identificar uma diferença entre duas funções de um ponto vetorial. Notamos que a contração com q^μ elimina trivialmente o termo finito do resultado pois

$$q^\mu (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) = 0. \quad (5.17)$$

Obtemos então

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = 2 (k_1)^\mu [\Delta_{2;\mu\nu}] - 2 (k_2)^\mu [\Delta_{2;\mu\nu}]. \quad (5.18)$$

De fato, este valor é igual à diferença $T_V^V(k_2) - T_V^V(k_1)$, como podemos constatar a partir do resultado (4.11). Sendo assim, a RFG (5.15) é identicamente satisfeita. Convém notar que esta relação é satisfeita apesar do caráter divergente dos objetos que a compõem. A mesma análise e conclusões são igualmente válidas para a contração com o índice ν , relação (5.16).

Como próximo passo podemos verificar se o conteúdo de simetria básico pode ser mantido pela expressão (5.14).

Identidades de Ward

Para as chamadas teorias de *gauge* é fundamental que as amplitudes do cálculo perturbativo preservem a simetria de *gauge*. No caso do tensor de polarização do vácuo, a invariância de gauge (conservação da corrente vetorial) implica que a contração com o momento externo deve anular-se,

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = q^\nu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = 0. \quad (5.19)$$

Porém, é fácil notar que isto só será verdade se o lado direito da Eq. (5.18) for nulo, ou seja,

$$-(k_2)^\mu [\Delta_{2;\mu\nu}] + (k_1)^\mu [\Delta_{2;\mu\nu}] = 0. \quad (5.20)$$

Visto que não podemos tomar ambos os momentos internos k_1 e k_2 nulos, pois tal escolha obviamente implicaria num momento externo também nulo, nota-se que a única possibilidade da expressão acima ser satisfeita é se o objeto $\Delta_{2;\mu\nu}$ for identicamente nulo

$$\Delta_{2;\mu\nu} = 0. \quad (5.21)$$

Esta relação é comumente denominada *relação de consistência para a invariância de gauge*, e é uma condição necessária e suficiente para manter a simetria de *gauge* (BATTISTEL, 1999).

É interessante notarmos que o tensor $\Delta_{2;\mu\nu}$ tem a estrutura de um termo de superfície, pois podemos escrever

$$\Delta_{2;\mu\nu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(-\frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)} \right). \quad (5.22)$$

Sendo assim, no contexto da Regularização Dimensional, por exemplo, $\Delta_{2;\mu\nu}$ seria automaticamente nulo. Isto deve-se ao fato que, por construção, no método da Regularização

Dimensional termos de superfície são tomados como sendo nulos, apesar do integrando não satisfazer os critérios de convergência necessários na dimensão considerada. A mesma conclusão também pode ser obtida segundo a prescrição de Pauli-Villars (BATTISTEL; DALLABONA, 2002b).

Por outro lado, se assumirmos válida a integração simétrica e a linearidade na operação de integração, encontraríamos um resultado não nulo pois

$$\begin{aligned}
\Delta_{2;\mu\nu} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} , \\
&= g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} , \\
&= g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^2} , \\
&= -\frac{i}{4\pi} g_{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Este resultado é comumente encontrado em algumas análises sobre o fenômeno das anomalias. Por ora deixaremos estes fatos apenas como observações, adiando a análise das suas consequências para mais adiante.

5.1.2 Amplitude $T_{\rho;\mu\nu}^{VV}$

A próxima amplitude a ser investigada tem três índices de Lorentz, sendo que um deles é atrelado a um momento interno do loop e não a uma matriz de Dirac. Isto se deve à presença de um acoplamento derivativo na Lagrangeana do modelo. Tais amplitudes não são típicas de modelos renormalizáveis mas, por outro lado, podem ser parte de modelos efetivos, que são não-renormalizáveis. Primeiramente consideremos o cálculo explícito da amplitude.

Cálculo explícito

A amplitude é definida como

$$T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k+k_1)_\rho \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\} . \tag{5.24}$$

De maneira análoga ao cálculo da $T_{\mu\nu}^{VV}$, podemos decompor a amplitude em duas estruturas tensoriais

$$T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) = \left[T_{\rho;\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2) \right] + g_{\mu\nu} \left[T_\rho^{PP}(k_1, k_2) \right] , \tag{5.25}$$

onde definimos

$$T_{\rho;\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2) = 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k+k_1)_\rho \text{Tr} \left\{ \frac{(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu}{D_{12}} \right\}, \quad (5.26)$$

$$T_\rho^{PP}(k_1, k_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k+k_1)_\rho \text{Tr} \left\{ \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}. \quad (5.27)$$

Em termos de integrais de Feynman temos

$$\begin{aligned} T_{\rho;\mu\nu}^{(+)} = & 4 \{ [I_{2\mu\nu\rho}] + k_{1\rho} [I_{2\mu\nu}] \} + 2 (k_2 + k_1)_\nu \{ [I_{2\mu\rho}] + k_{1\rho} [I_{2\mu}] \} \\ & + 2 (k_2 + k_1)_\mu \{ [I_{2\nu\rho}] + k_{1\rho} [I_{2\nu}] \} \\ & + 2 (k_{1\nu} k_{2\mu} + k_{1\mu} k_{2\nu}) \{ [I_{2\rho}] + k_{1\rho} [I_2] \}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} T_\rho^{PP} = & - [I_{1\rho}(k_1)] - k_{1\rho} [I_1(k_1)] - [I_{1\rho}(k_2)] - k_{1\rho} [I_1(k_2)] \\ & + (k_2 - k_1)^2 \{ [I_{2\rho}] + k_{1\rho} [I_2] \}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Substituindo nas expressões acima os resultados das integrais, que podem ser encontradas no Apêndice A, obtemos

$$\begin{aligned} T_{\rho;\mu\nu}^{(+)} = & -Q^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\alpha k_\mu k_\nu k_\rho}{(k^2 - m^2)^3} + Q_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \\ & + Q_\mu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + 2k_{1\rho} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\ & - 2g_{\mu\nu} q_\rho \left[\xi_1^{(0)}(q^2; m^2) \right] + 4q_\rho q_\mu q_\nu \left[\xi_3^{(-1)}(q^2; m^2) - \xi_2^{(-1)}(q^2; m^2) \right], \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$T_\rho^{PP} = Q^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} - 2k_{1\rho} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} + q_\rho q^2 \left[\xi_1^{(-1)}(q^2, m^2) \right]. \quad (5.31)$$

Substituindo os resultados acima em (5.25) obtemos

$$\begin{aligned} T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(q, Q) = & -Q^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\nu k_\mu k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} + Q_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \\ & + Q_\mu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + g_{\mu\nu} Q^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \\ & + Q_\rho \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - Q_\rho g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ & + \frac{q_\rho}{2} \left[T_{\mu\nu}^{VV}(q) \right]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Notamos que a amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$ aparece como uma sub-estrutura de $T_{\rho;\mu\nu}^{VV}$ e carrega todo o seu conteúdo finito. As integrais puramente divergentes, entretanto, podem ser reduzidas tensorialmente utilizando as definições dos termos de superfície apresentadas no Apêndice B, nos levando à seguinte expressão para a amplitude:

$$\begin{aligned} T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(q, Q) = & -Q^\alpha [\square_{3;\rho\nu\alpha\mu}] + Q_\nu [\Delta_{2;\mu\rho}] + Q_\mu [\Delta_{2;\nu\rho}] \\ & + Q^\alpha \{g_{\mu\nu} [\Delta_{2;\rho\alpha}] - g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\alpha\mu}] - g_{\rho\mu} [\Delta_{2;\nu\alpha}]\} \\ & + \frac{q_\rho}{2} [T_{\mu\nu}^{VV}(q)] , \end{aligned} \quad (5.33)$$

Seguindo nosso roteiro de análise, devemos agora nos questionar se o resultado acima satisfaz as relações entre funções de Green esperadas para $T_{\rho;\mu\nu}^{VV}$.

Relações entre Funções de Green

As RFGs pertinentes para a amplitude $T_{\rho;\mu\nu}^{VV}$ são as seguintes (vide Capítulo 3)

$$q^\mu [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] = - [T_{\rho;\nu}^V(k_1)] + [T_{\rho;\nu}^V(k_2)] , \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} q^\rho [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] = & -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}q^\alpha [T_\alpha^V(k_1) + T_\alpha^V(k_2)] \\ & + \frac{1}{2}q_\mu [T_\nu^V(k_1) - T_\nu^V(k_2)] \\ & + \frac{1}{2}q_\nu [T_\mu^V(k_1) + T_\mu^V(k_2)] \\ & - [T_{\mu;\nu}^V(k_1) - T_{\mu;\nu}^V(k_2)] \\ & + \frac{1}{2}q^2 [T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] , \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$g^{\mu\rho} [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] = [T_\nu^V(k_2)] + m [T_\nu^{SV}(k_1, k_2)] . \quad (5.36)$$

Verificaremos estas relações individualmente, a começar por (5.34). Inicialmente contraímos o momento externo q^μ com a expressão (5.33). Ao longo dos cálculos, nos valem da expansão

$$Q^\alpha q^\beta = (k_1 + k_2)^\alpha (k_1 - k_2)^\beta = k_1^\alpha k_1^\beta - k_2^\alpha k_2^\beta + [k_2^\alpha k_1^\beta - k_1^\alpha k_2^\beta] ,$$

e notamos que o elemento entre colchetes é antissimétrico frente à troca de índices de Lorentz. Deste modo, sabemos que todos os termos em que este elemento estiver multiplicando um tensor simétrico são identicamente nulos, o que permite um cancelamento de termos. Esta

é uma propriedade útil nos nossos cálculos, que eventualmente envolvem integrais que são tensores simétricos pela troca de dois índices.

Também notamos que a contração com o último termo de (5.33) já foi calculada anteriormente, e gera o seguinte resultado

$$q^\mu \left\{ \frac{q_\rho}{2} [T_{\mu\nu}^{VV}] \right\} = q_\rho q^\mu [\Delta_{2;\mu\nu}] ,$$

eliminando totalmente os elementos finitos de $q^\mu [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}]$. Após uma certa quantidade de manipulações algébricas, pudemos reorganizar a contração da seguinte forma

$$\begin{aligned} q^\mu [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}] &= - \left(k_1^\alpha k_1^\beta - k_2^\alpha k_2^\beta \right) [\square_{3;\rho\nu\alpha\beta}] \\ &\quad - \left(k_1^\alpha k_1^\beta - k_2^\alpha k_2^\beta \right) g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\alpha\beta}] + 2 (k_{1\nu} k_1^\alpha - k_{2\nu} k_2^\alpha) [\Delta_{2;\alpha\rho}] \\ &\quad + (k_1^2 - k_2^2) [\Delta_{2;\nu\rho}] - 2k_2^\alpha (k_1 - k_2)_\rho [\Delta_{2;\alpha\nu}] . \end{aligned}$$

Por outro lado, no Apêndice C temos o resultado da amplitude de 1-ponto $T_{\rho;\nu}^V(k_i)$. A partir deste resultado, é uma tarefa simples identificar que a expressão obtida acima corresponde à diferença das funções de 1-ponto $[T_{\rho;\nu}^V(k_2)] - [T_{\rho;\nu}^V(k_1)]$, estando portanto verificada a RFG (5.34).

A segunda relação também deve ser manipulada com o mesmo objetivo: reorganizar os termos para tentar-se identificar as sub-estruturas representadas no lado direito da igualdade em (5.35). Após a contração com o momento q^ρ e algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} q^\rho [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}] &= - q^\rho Q^\alpha \{ [\square_{3;\rho\nu\alpha\mu}] - g_{\mu\nu} [\Delta_{2;\alpha\rho}] \} + [q^\rho Q_\nu - q_\nu Q^\rho] [\Delta_{2;\mu\rho}] \\ &\quad + [q^\rho Q_\mu - q_\mu Q^\rho] [\Delta_{2;\nu\rho}] + \frac{q^2}{2} [T_{\mu\nu}^{VV}] . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Se utilizarmos os resultados das amplitudes $T_{\mu;\nu}^V(k_i)$ e $T_\mu^V(k_i)$ (Apêndice C) podemos identificar, no resultado acima, as somas de sub-amplitudes representadas em (5.35). Logo a relação entre funções de Green também é automaticamente satisfeita.

A última RFG a ser verificada é (5.36). A contração $g^{\mu\rho}$ com a forma explícita (5.32) fornece

$$\begin{aligned} g^{\rho\mu} [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}] &= -Q^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\nu k_\alpha k^2}{(k^2 - m^2)^3} + Q_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k^2}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad + 3Q^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} - Q_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ &\quad + \frac{q^\rho}{2} [T_{\rho\nu}^{VV}] . \end{aligned} \quad (5.38)$$

Pelas definições dos objetos $\square_{3;\alpha\nu\mu\rho}$ e $\Delta_{2;\mu\rho}$ (Apêndice B), é fácil ver que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\mu k_\nu k^2}{(k^2 - m^2)^3} &= [g^{\mu\rho} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho}] + g_{\nu\alpha} [g^{\mu\rho} \Delta_{2;\mu\rho}] \\ &\quad + 2[\Delta_{2;\alpha\nu}] + 4g_{\alpha\nu} [I_{\log}(m^2)] , \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k^2}{(k^2 - m^2)^2} = [g^{\mu\rho} \Delta_{2;\mu\rho}] + 2 [I_{\log}(m^2)] , \quad (5.40)$$

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} = [\Delta_{2;\rho\nu}] + g_{\rho\nu} [I_{\log}(m^2)] . \quad (5.41)$$

Então obtemos

$$\begin{aligned} g^{\rho\mu} [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}] &= -Q^\alpha [g^{\mu\rho} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho}] + Q_\nu [g^{\mu\rho} \Delta_{2;\mu\rho}] \\ &\quad - Q^\alpha [\Delta_{2;\alpha\nu}] + \frac{q^\mu}{2} [T_{\mu\nu}^{VV}] . \end{aligned} \quad (5.42)$$

De acordo com o resultado (5.18) temos também

$$q^\mu [T_{\mu\nu}^{VV}] = 2q^\mu [\Delta_{2;\mu\nu}] , \quad (5.43)$$

e assim

$$g^{\rho\mu} [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}] = -Q^\alpha \{ [g^{\rho\mu} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho}] - g_{\alpha\nu} [g^{\rho\mu} \Delta_{2;\mu\rho}] \} - 2k_2^\rho [\Delta_{2;\rho\nu}] . \quad (5.44)$$

Porém, o resultado esperado, de acordo com o cálculo explícito do lado direito da identidade (5.36) seria simplesmente

$$g^{\rho\mu} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{VV} \right] = -2k_2^\rho [\Delta_{2;\rho\nu}] . \quad (5.45)$$

Há, portanto, termos potencialmente violadores da RFG (5.36) na contração explícita da amplitude com a métrica. Estes termos são:

$$g^{\rho\mu} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{VV} \right] \Big|_{\text{viol}} = -Q^\alpha \{ [g^{\rho\mu} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho}] - g_{\alpha\nu} [g^{\rho\mu} \Delta_{2;\mu\rho}] \} \quad (5.46)$$

Para que a RFG (5.36) seja satisfeita deveríamos esperar que $g^{\rho\mu} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{VV} \right] \Big|_{\text{viol}}$ seja nulo. Como $Q^\alpha = (k_1 + k_2)^\alpha$ não pode ser dito nulo arbitrariamente, a única possibilidade da RFG ser satisfeita é o termo entre chaves ser nulo, o que implica em

$$\begin{aligned} g^{\mu\rho} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho} &= g_{\alpha\nu} g^{\mu\rho} \Delta_{2;\mu\rho} , \\ \Rightarrow g^{\alpha\nu} g^{\mu\rho} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho} &= 2g^{\mu\rho} \Delta_{2;\mu\rho} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Por ora, podemos observar que a RFG (5.36) não é automaticamente satisfeita mas depende da existência de uma relação específica entre dois objetos divergentes. Voltaremos a esta discussão em um momento mais oportuno em nosso trabalho.

Passamos agora para a análise da última amplitude de dois vértices vetoriais, $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}$.

5.1.3 Amplitude $T_{\rho\sigma;\mu\nu}^{VV}$

É válido enfatizar, novamente, que a riqueza de detalhes apresentada nos cálculos a seguir tem um caráter pedagógico e também permite ao leitor verificar explicitamente as afirmações e conclusões baseadas neles.

Cálculo explícito

A amplitude de quatro índices $T_{\rho\sigma;\mu\nu}^{VV}$ é definida como

$$T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k + k_1)_\sigma (k + k_1)_\rho \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\} . \quad (5.48)$$

Seguindo a mesma filosofia de cálculo adotada para as amplitudes de dois e três índices, podemos decompor a amplitude como

$$T_{\mu\nu;\sigma\rho}^{VV}(k_1, k_2) = T_{\mu\nu;\sigma\rho}^{(+)} + g_{\sigma\rho} \left[T_{\mu\nu}^{PP}(k_1, k_2) \right], \quad (5.49)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{(+)} = & 4 \left\{ [I_{2\mu\nu\sigma\rho}] + k_{1\sigma} [I_{2\mu\nu\rho}] + k_{1\rho} [I_{2\mu\nu\sigma}] + k_{1\sigma} k_{1\rho} [I_{2\mu\nu}] \right\} \\ & + 2 (k_2 + k_1)_\nu \left\{ [I_{2\mu\sigma\rho}] + k_{1\sigma} [I_{2\mu\rho}] + k_{1\rho} [I_{2\mu\sigma}] + k_{1\sigma} k_{1\rho} [I_{2\mu}] \right\} \\ & + 2 (k_2 + k_1)_\mu \left\{ [I_{2\nu\sigma\rho}] + k_{1\sigma} [I_{2\nu\rho}] + k_{1\rho} [I_{2\nu\sigma}] + k_{1\sigma} k_{1\rho} [I_{2\nu}] \right\} \\ & + 2 (k_{1\nu} k_{2\mu} + k_{1\mu} k_{2\nu}) \left\{ [I_{2\sigma\rho}] + k_{1\sigma} [I_{2\rho}] + k_{1\rho} [I_{2\sigma}] + k_{1\sigma} k_{1\rho} [I_2] \right\}, \quad (5.50) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{PP} = & \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k + k_1)_\mu (k + k_1)_\nu Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\} \\ = & - [I_{1\mu\nu}(k_1)] - k_{1\mu} [I_{1\nu}(k_1)] - k_{1\nu} [I_{1\mu}(k_1)] - k_{1\mu} k_{1\nu} [I_1(k_1)] \\ & - [I_{1\mu\nu}(k_2)] - k_{1\mu} [I_{1\nu}(k_2)] - k_{1\nu} [I_{1\mu}(k_2)] - k_{1\mu} k_{1\nu} [I_1(k_2)] \\ & + (k_2 - k_1)^2 \left\{ [I_{2\mu\nu}] + k_{1\mu} [I_{2\nu}] + k_{1\nu} [I_{2\mu}] + k_{1\mu} k_{1\nu} [I_2] \right\}. \quad (5.51) \end{aligned}$$

Os resultados das integrais de Feynman representadas nas expressões acima podem ser consultadas no Apêndice A. De posse destes resultados obtemos, após um cálculo longo e

tedioso,

$$\begin{aligned}
T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV} = & -g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)} + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\mu k_\nu k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \\
& - (k_1^2 + k_2^2) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\mu k_\nu k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^3} - g_{\mu\nu} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\sigma k_\rho k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} \\
& - 2(g_{\sigma\chi} g_{\rho\xi} + g_{\rho\chi} g_{\sigma\xi}) k_{1\xi} (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\chi k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \\
& - (g_{\mu\chi} g_{\nu\xi} + g_{\nu\chi} g_{\mu\xi}) (k_2 + k_1)_\xi (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\chi k_\sigma k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \\
& + \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{16k_\mu k_\nu k_\sigma k_\rho k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \\
& + \left[g_{\mu\nu} \left(k_1^2 + k_2^2 + (k_1 - k_2)^2 \right) + 2(k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{1\nu} k_{2\mu}) \right] \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + k_{1\sigma} \left\{ (k_1 + k_2)_\mu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + (k_1 + k_2)_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\
& + k_{1\rho} \left\{ (k_1 + k_2)_\mu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\sigma}{(k^2 - m^2)^2} + (k_1 + k_2)_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\sigma}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\
& + g_{\mu\nu} (k_1 + k_2)^\alpha \left\{ k_{1\sigma} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} + k_{1\rho} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\sigma k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\
& + \left(2k_{1\sigma} k_{1\rho} - \frac{1}{2} q_\sigma q_\rho \right) \left\{ \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} \right\} \\
& + \frac{i}{4\pi} \left\{ 2 \frac{q_\mu q_\nu q_\sigma q_\rho}{q^2} + q^2 (g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma} g_{\mu\rho}) - q_\nu (g_{\mu\sigma} q_\rho + g_{\mu\rho} q_\sigma) \right. \\
& \quad \left. - q_\mu (g_{\nu\rho} q_\sigma + g_{\nu\sigma} q_\rho) \right\} \left[2\xi_2^{(0)}(q^2; m^2) - \xi_1^{(0)}(q^2; m^2) \right] \\
& + \frac{i}{4\pi} \frac{2}{q^2} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \left[\xi_2^{(0)}(q^2; m^2) - \xi_1^{(0)}(q^2; m^2) \right] \\
& + \frac{1}{4} q_\rho q_\sigma \left[T_{\mu\nu}^{VV} \right]. \tag{5.52}
\end{aligned}$$

Após a redução tensorial das integrais divergentes básicas em termos dos objetos divergentes básicos, podemos escrever

$$\begin{aligned}
T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV} &= \mathcal{D}_{\sigma\rho\mu\nu} + (g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} + g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) [I_{quad}(m^2)] \\
&+ \left\{ \frac{1}{3} (g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}q^2 - g_{\mu\nu}q_{\rho}q_{\sigma} - g_{\sigma\rho}q_{\mu}q_{\nu}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{6} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}q^2 - g_{\mu\rho}q_{\nu}q_{\sigma} - g_{\nu\sigma}q_{\mu}q_{\rho}) \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} (g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}q^2 - g_{\nu\rho}q_{\mu}q_{\sigma} - g_{\mu\sigma}q_{\nu}q_{\rho}) \right\} [I_{\log}(m^2)] \\
&+ \frac{i}{4\pi} \left\{ 2 \frac{q_{\mu}q_{\nu}q_{\sigma}q_{\rho}}{q^2} + q^2 (g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}) - q_{\nu} (g_{\mu\sigma}q_{\rho} + g_{\mu\rho}q_{\sigma}) \right. \\
&\quad \left. - q_{\mu} (g_{\nu\rho}q_{\sigma} + g_{\nu\sigma}q_{\rho}) \right\} [2\xi_2^{(0)}(q^2; m^2) - \xi_1^{(0)}(q^2; m^2)] \\
&+ \frac{i}{4\pi} \frac{2}{q^2} (q_{\sigma}q_{\rho} - q^2 g_{\sigma\rho}) (q_{\mu}q_{\nu} - q^2 g_{\mu\nu}) [\xi_2^{(0)}(q^2; m^2) - \xi_1^{(0)}(q^2; m^2)] \\
&+ \frac{1}{4} q_{\rho}q_{\sigma} [T_{\mu\nu}^{VV}] , \tag{5.53}
\end{aligned}$$

onde isolamos os termos de superfície no tensor $\mathcal{D}_{\sigma\rho\mu\nu}$, que está definido no Apêndice B.

As expressões acima são longas devido ao caráter tensorial da sub-amplitude $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}$. Observamos novamente a presença do tensor de polarização do vácuo como parte da sub-estrutura tensorial de $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}$.

Relações entre funções de Green

Similarmente aos casos anteriores, as relações entre funções de Green pertinentes são obtidas pela contração da amplitude com o momento externo e com a métrica tal que

$$q^{\mu} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] = - [T_{\sigma\rho;\nu}^V(k_1)] + [T_{\sigma\rho;\nu}^V(k_2)] , \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}
q^{\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] &= - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} q^{\alpha} [T_{\rho;\alpha}^V(k_1) + T_{\rho;\alpha}^V(k_2)] \\
&\quad + \frac{1}{2} q_{\mu} [T_{\rho;\nu}^V(k_1) - T_{\rho;\nu}^V(k_2)] \\
&\quad + \frac{1}{2} q_{\nu} [T_{\rho;\mu}^V(k_1) + T_{\rho;\mu}^V(k_2)] \\
&\quad - [T_{\rho\mu;\nu}^V(k_1) - T_{\rho\mu;\nu}^V(k_2)] \\
&\quad + \frac{1}{2} q^2 [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] , \tag{5.55}
\end{aligned}$$

$$g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] = [T_{\rho;\nu}^V(k_2)] + m [T_{\rho;\nu}^{SV}(k_1, k_2)] . \tag{5.56}$$

Para verificarmos a primeira relação, contraímos q^μ com a expressão explícita (5.53). Primeiramente, notamos que a contração com os termos que contém funções do tipo $\xi_i^{(0)}$ gera um resultado nulo (dizemos que estes termos são invariantes de gauge) pois

$$\begin{aligned}
& q^\mu \left\{ \frac{2q_\mu q_\nu q_\sigma q_\rho}{q^2} + q^2 (g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma} g_{\mu\rho}) + \right. \\
& \quad \left. - q_\nu (g_{\mu\sigma} q_\rho + g_{\mu\rho} q_\sigma) - q_\mu (g_{\nu\rho} q_\sigma + g_{\nu\sigma} q_\rho) \right\} \\
& = \left\{ 2q_\nu q_\sigma q_\rho + q^2 (g_{\nu\rho} q_\sigma + g_{\nu\sigma} q_\rho) + \right. \\
& \quad \left. - q_\nu (q_\sigma q_\rho + q_\rho q_\sigma) - q^2 (g_{\nu\rho} q_\sigma + g_{\nu\sigma} q_\rho) \right\} \\
& = 0 \quad , \tag{5.57}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& q^\mu \left\{ 2 (q_\sigma q_\rho - g_{\sigma\rho} q^2) (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \right\} \\
& = 2 (q_\sigma q_\rho - g_{\sigma\rho} q^2) (q^2 q_\nu - q_\nu q^2) = 0 \quad . \tag{5.58}
\end{aligned}$$

O termo proporcional a $I_{\log}(m^2)$ também é invariante de *gauge*, se anulando na contração. De fato, é fácil mostrar que estes termos sempre geram um resultado nulo quando contraídos com momento externo q em qualquer um dos quatro índices. Já mostramos que a contração $q^\mu T_{\mu\nu}^{VV}$ gera um resultado puramente divergente. Desta maneira, todos os termos finitos são eliminados, e a expressão de $q^\mu T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}$ contém somente objetos divergentes básicos. O resultado final é

$$\begin{aligned}
q^\mu \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] & = q^\mu \mathcal{D}_{\sigma\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} q_\rho q_\sigma q^\mu [\Delta_{2;\mu\nu}] \\
& \quad + (q_\rho g_{\sigma\nu} + q_\sigma g_{\rho\nu}) [I_{quad}(m^2)] \quad . \tag{5.59}
\end{aligned}$$

A expressão acima de fato coincide com a diferença $\left[T_{\sigma\rho;\nu}^V(k_2) \right] - \left[T_{\sigma\rho;\nu}^V(k_1) \right]$, provando que a contração $q^\mu T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}$ está de acordo com a relação (5.54).

A próxima RFG a ser verificada é a contração do momento externo com o índice σ . Após uma certa quantidade de operações algébricas, podemos organizar o resultado na forma

$$\begin{aligned}
q^\sigma \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV} \right] &= q^\sigma \mathcal{D}_{\sigma\rho\mu\nu} + (q_\nu g_{\rho\mu} + q_\mu g_{\rho\nu}) [I_{quad}(m^2)] + \\
&+ \frac{1}{2} q^2 \left\{ Q^\alpha [\square_{3;\rho\nu\alpha\mu}] - Q_\nu [\Delta_{2;\mu\rho}] - Q_\mu [\Delta_{2;\nu\rho}] \right. \\
&\quad \left. - Q^\alpha (g_{\mu\nu} [\Delta_{2;\rho\alpha}] - g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\alpha\mu}] - g_{\rho\mu} [\Delta_{2;\nu\alpha}]) \right\} \\
&+ \frac{1}{2} q^2 \left[T_{\rho;\mu\nu}^{VV} \right]. \tag{5.60}
\end{aligned}$$

O termo $\frac{1}{2} q^2 \left[T_{\rho;\mu\nu}^{VV} \right]$ pode ser imediatamente identificado em (5.55). Os resultados das amplitudes de 1-ponto vetorial $T_{\rho\mu;\nu}^V(k_i)$ e $T_{\mu;\nu}^V(k_i)$ são apresentados no Apêndice C. A partir destes podemos constatar que a expressão mostrada acima de fato coincide com o lado direito da igualdade em (5.55).

A última RFG a ser verificada é (5.56). A contração de $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}$ na forma (5.52) com a métrica resulta na expressão

$$\begin{aligned}
g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV} \right] = & - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)} + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k^2 k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\
& - (k_1^2 + k_2^2) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k^2 k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\
& - 2k_{1\rho} (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k^2 k_\nu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \\
& - (k_1 + k_2)_\nu (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k^2 k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \\
& + k_{1\rho} (k_2 + k_1)_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k^2}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + \left(k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_1^\beta \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{16k^2 k_\rho k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \\
& - \left(4k_{1\beta} k_{2\alpha} + 4k_1^\alpha k_1^\beta + 2k_2^\alpha k_2^\beta \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\rho k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} \\
& + (2k_1^2 + k_2^2) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + 2k_{1\rho} (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + 2(k_1^\alpha k_{2\nu} + k_{1\nu} k_1^\alpha + k_{1\nu} k_2^\alpha) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + 2k_1^\alpha k_{1\rho} \left\{ \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\alpha\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \right\} \\
& + \frac{i}{4\pi} (q_\nu q_\rho - g_{\rho\nu} q^2) \left\{ \frac{1}{3} + 2m^2 \left[2\xi_2^{(-1)}(q^2, m^2) - \xi_1^{(-1)}(q^2, m^2) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Para chegar à expressão acima foi necessário usar

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{VV} \right] = 2q^\mu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} \right\}. \tag{5.62}$$

$$6\xi_2^{(0)}(q^2, m^2) - 4\xi_1^{(0)}(q^2, m^2) = -\frac{1}{3} - 2m^2 \left[2\xi_2^{(-1)}(q^2, m^2) - \xi_1^{(-1)}(q^2, m^2) \right], \tag{5.63}$$

Uma lista completa das relações entre as diferentes funções $\xi_i^{(N)}$, como a representada acima, pode ser encontrada no Apêndice D.

Como no caso da contração $g^{\rho\mu} [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}]$, ao substituímos as integrais divergentes básicas pelos objetos divergentes básicos na expressão (5.61), a identidade (5.56) não é automaticamente satisfeita. Do contrário, existem termos potencialmente violadores da relação, que são:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}] \Big|_{\text{viol}} = & \left[g^{\lambda\xi} \square_{2;\lambda\xi\rho\nu} \right] - \frac{1}{2} (k_1^2 + k_2^2) \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\nu\rho} \right] \\
& - k_{1\rho} (k_1 + k_2)^\alpha \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\nu\alpha} \right] \\
& - \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\nu (k_1 + k_2)^\alpha \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\rho\alpha} \right] \\
& + \frac{1}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta \right) \left[g^{\lambda\xi} \Sigma_{4;\lambda\xi\rho\nu\alpha\beta} \right] \\
& + (k_1 + k_2)_\nu k_{1\rho} \left[g^{\lambda\xi} \Delta_{2;\lambda\xi} \right] \\
& - \frac{5}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) \left[\square_{3;\beta\rho\nu\alpha} \right] \\
& + \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) \left[\square_{3;\rho\nu\beta\alpha} \right] \\
& + \frac{1}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) \left[\square_{3;\nu\rho\alpha\beta} \right] \\
& + \frac{1}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) \left[\square_{3;\alpha\rho\nu\beta} \right] \\
& + \frac{2}{3} (k_{1\rho} k_1^\alpha + k_{2\rho} k_2^\alpha - k_{1\rho} k_2^\alpha + 2k_{2\rho} k_1^\alpha) \left[\Delta_{2;\nu\alpha} \right] \\
& - \frac{2}{3} (k_{1\nu} k_1^\alpha + k_{2\nu} k_2^\alpha + 2k_{1\nu} k_2^\alpha - k_{2\nu} k_1^\alpha) \left[\Delta_{2;\rho\alpha} \right] \\
& - \left[\frac{4}{3} (k_1^2 + k_2^2 + k_1 \cdot k_2) + 2m^2 \right] \left[\Delta_{2;\nu\rho} \right] \\
& + \frac{4}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) g_{\rho\nu} \left[\Delta_{2;\alpha\beta} \right] \\
& + 2 \left[\Delta_{1;\rho\nu} (m^2) \right] + 2g_{\rho\nu} \left[I_{quad} (m^2) \right] - 2m^2 g_{\rho\nu} \left[I_{\log} (m^2) \right] \\
& + \frac{i}{4\pi} \frac{1}{3} (q_\nu q_\rho - g_{\nu\rho} q^2) .
\end{aligned} \tag{5.64}$$

A RFG só é satisfeita, portanto, se $g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}] \Big|_{\text{viol}} = 0$. Esta condição estabelece um vínculo entre os vários objetos divergentes.

Convém mencionar que a forma de $g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}] \Big|_{\text{viol}}$ representada acima não é única, pois os objetos $\Sigma_{4;\mu\nu\rho\sigma}$, $\square_{3;\mu\nu\rho\sigma}$ e $\square_{2;\mu\nu\rho\sigma}$ não são simetrizados em todos os índices, de modo que pode-se escolher um "índice preferencial" para expandir as integrais divergentes em função destes objetos. Porém, isto não desqualifica a análise, que nos diz que a RFG só será

satisfeita se a soma de objetos acima (ou alguma outra representação de $g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV} \right] \Big|_{\text{viol}}$) for nula.

5.2 Amplitudes com dois vértices axiais

Após a análise das amplitudes do tipo vetor-vetor, passamos para a análise das amplitudes com dois índices axiais, que é feita de maneira completamente análoga ao caso anterior.

5.2.1 Amplitude $T_{\mu\nu}^{AA}$

A função $T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2)$ pode ser interpretada dentro de uma teoria onde um campo bosônico de caráter axial (spin 1 e paridade par) se acopla aos campos férmionicos, representando a correção a nível 1-*loop* da propagação do bóson axial.

Cálculo explícito

Após a extração dos traços, chegamos à seguinte expressão

$$T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) = T_{\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2) - g_{\mu\nu} T^{SS}(k_1, k_2). \quad (5.65)$$

A sub-amplitude $T_{\mu\nu}^{(+)}$ já foi definida e calculada anteriormente. O objeto $T^{SS}(k_1, k_2)$ representa a função de dois pontos escalar-escalar, como definido em (2.89)

$$T^{SS}(k_1, k_2) \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}, \quad (5.66)$$

que podemos escrever em termos de integrais

$$T^{SS}(k_1, k_2) = -[q^2 - 4m^2] I_2 + I_1(k_1) + I_1(k_2). \quad (5.67)$$

Após substituírmos os resultados das integrais (ver Apêndice A), temos

$$T^{SS}(k_1, k_2) = 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{i}{4\pi} (q^2 - 4m^2) \left[\xi_0^{(-1)} \right], \quad (5.68)$$

que juntamente com o valor de $T_{\mu\nu}^{(+)}$, Eq. (5.10), nos leva ao resultado

$$T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) = 2[\Delta_{2;\mu\nu}] + \frac{i}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) [\xi_2^{(-1)} - \xi_1^{(-1)}] - \frac{i}{\pi} g_{\mu\nu} m^2 [\xi_0^{(-1)}]. \quad (5.69)$$

O próximo passo é a análise da consistência da amplitude, quando as RFGs e IWs são investigadas e as possíveis relações de consistência são identificadas.

Relações entre funções de Green

A RFG para esta amplitude é referente à contração com o momento externo, Eq. (3.23)

$$q^\mu [T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2)] = -T_\nu^V(k_1) + T_\nu^V(k_2) - 2m [T_\nu^{PA}(k_1, k_2)]. \quad (5.70)$$

A contração de q^μ com a forma explícita (5.69) gera um termo divergente e um termo finito

$$q^\mu [T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2)] = 2q^\mu [\Delta_{2;\mu\nu}] - 4m^2 \frac{i}{4\pi} q_\nu [\xi_0^{(-1)}]. \quad (5.71)$$

Este resultado deixa evidente que pode-se, de fato, escrever a contração como a soma de sub-amplitudes, pois a parte divergente é identificada com a diferença de funções de 1-ponto $T_\nu^V(k_2) - T_\nu^V(k_1)$, como no caso de $q^\mu T_{\mu\nu}^{VV}$, enquanto a parte finita é a amplitude $T_\nu^{PA}(k_1, k_2)$ (Apêndice C). A relação (3.23) está, então, verificada.

Identidade de Ward

Para a amplitude $T_{\mu\nu}^{AA}$ também há uma IW definida. O motivo disto é que esta amplitude pode ser interpretada dentro de um contexto onde partículas axiais se acoplam aos férmions, representando a correção a nível 1-loop da função de Green para dois campos bosônicos - o que fisicamente corresponde a uma correção quântica para a propagação do bóson axial. Assim, a amplitude perturbativa $T_{\mu\nu}^{AA}$ deve herdar o conteúdo de simetria da teoria, que foi definido para a amplitude completa. Este conteúdo de simetria é referente à PCAC, e é representada matematicamente pela IW

$$q^\mu [T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2)] = -2m [T_\nu^{PA}(k_1, k_2)]. \quad (5.72)$$

A verificação desta identidade é trivial. Comparando (5.71) com o resultado explícito de $T_V^{PA}(k_1, k_2)$, notamos que isto só será verdade se o termo $q^\mu \Delta_{2;\mu\nu}$ for identicamente nulo. Isto pode ser realizado novamente se admitirmos um valor nulo para o objeto $\Delta_{2;\mu\nu}$, que é a mesma condição obtida para $T_{\mu\nu}^{VV}$.

5.2.2 Amplitude $T_{\rho;\mu\nu}^{AA}$

A segunda amplitude com dois vértices axiais tem três índices de Lorentz e é definida por

$$T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k+k_1)_\rho \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}. \quad (5.73)$$

Cálculo explícito

Para calculá-la, a escrevemos em termos de sub-amplitudes

$$T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) = T_{\rho;\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2) - g_{\mu\nu} T_\rho^{SS}(k_1, k_2). \quad (5.74)$$

$T_{\rho;\mu\nu}^{(+)}$ já foi definida em (5.26), e T_ρ^{SS} é definida como

$$T_\rho^{SS}(k_1, k_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k+k_1)_\rho \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}. \quad (5.75)$$

Em termos de integrais, podemos escrever

$$\begin{aligned} T_\rho^{SS} &= [I_{1\rho}(k_1)] + [I_{1\rho}(k_2)] - (q^2 - 4m^2) [I_{2\rho}] \\ &\quad + k_{1\rho} \{ [I_1(k_1)] + [I_1(k_2)] - (q^2 - 4m^2) [I_2] \}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

E substituindo o valor das integrais, obtemos o resultado explícito

$$\begin{aligned} T_\rho^{SS} &= -Q^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} + 2k_{1\rho} [I_{\log}(m^2)] \\ &\quad - \frac{i}{(4\pi)} q_\rho (q^2 - 4m^2) [\xi_1^{(-1)}]. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Este resultado, juntamente com o valor explícito de $T_{\rho;\mu\nu}^{(+)}$, nos dá a expressão explícita para $T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2)$

$$\begin{aligned}
T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(q, Q) = & -Q^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\nu k_\mu k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} + Q_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + Q_\mu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + g_{\mu\nu} Q^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + Q_\rho \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\mu\nu} Q_\rho \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\
& + \frac{q_\rho}{2} \left[T_{\mu\nu}^{AA}(q) \right], \tag{5.78}
\end{aligned}$$

que após a reorganização em termos dos objetos divergentes básicos toma a forma

$$\begin{aligned}
T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(q, Q) = & -Q^\alpha [\square_{3;\rho\nu\alpha\mu}] + Q_\nu [\Delta_{2;\mu\rho}] + Q_\mu [\Delta_{2;\nu\rho}] \\
& + Q^\alpha \{g_{\mu\nu} [\Delta_{2;\rho\alpha}] - g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\alpha\mu}] - g_{\rho\mu} [\Delta_{2;\nu\alpha}]\} \\
& + \frac{q_\rho}{2} \left[T_{\mu\nu}^{AA}(q) \right]. \tag{5.79}
\end{aligned}$$

O resultado é bastante similar a $T_{\rho;\mu\nu}^{VV}$, exceto pelo último termo. De posse deste resultado, verificamos as RFGs, que é o teste de consistência mínima.

Relações entre funções de Green

Como já mostrado no Capítulo 3, as contrações de $T_{\rho;\mu\nu}^{AA}$ pertinentes ao nosso estudo nos levam às seguintes RFGs:

$$q^\mu \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_{\rho;\nu}^V(k_1) \right] + \left[T_{\rho;\nu}^V(k_2) \right] - 2m \left[T_{\rho;\nu}^{PA}(k_1, k_2) \right], \tag{5.80}$$

$$\begin{aligned}
q^\rho \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] = & -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} q^\alpha \left[T_\alpha^V(k_1) + T_\alpha^V(k_2) \right] \\
& + \frac{1}{2} q_\mu \left[T_\nu^V(k_1) - T_\nu^V(k_2) \right] \\
& + \frac{1}{2} q_\nu \left[T_\mu^V(k_1) + T_\mu^V(k_2) \right] - \left[T_{\mu;\nu}^V(k_1) - T_{\mu;\nu}^V(k_2) \right] \\
& + m g_{\mu\nu} \left[T^S(k_1) - T^S(k_2) \right] - m \varepsilon_{\mu\nu} \left[T^P(k_1) + T^P(k_2) \right] \\
& + \frac{1}{2} q^2 \left[T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right], \tag{5.81}
\end{aligned}$$

$$g^{\mu\rho} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] = \left[T_\nu^V(k_2) \right] - m \left[T_\nu^{PA}(k_1, k_2) \right], \tag{5.82}$$

Para verificarmos a primeira relação, contraímos o resultado explícito com o momento externo e organizamos a expressão da seguinte forma

$$q^\mu \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA} \right] = -q^\alpha Q^\beta \left[\square_{3;\rho\nu\alpha\beta} \right] - g_{\rho\nu} q^\alpha Q^\beta \left[\Delta_{2;\alpha\beta} \right] + (q_\nu Q^\alpha + q^\alpha Q_\nu) \left[\Delta_{2;\alpha\rho} \right] \\ + q^\alpha Q_\alpha \left[\Delta_{2;\nu\rho} \right] + (q - Q)^\alpha q_\rho \left[\Delta_{2;\alpha\nu} \right] - 2m^2 \frac{i}{(4\pi)} q_\rho q_\nu \left[\xi_0^{(-1)} \right], \quad (5.83)$$

onde o termo finito vem da contração do último termo de (5.79), representada em (5.71). Observando os resultados explícitos do Apêndice C, pode-se de fato ver que este resultado é idêntico à combinação $\left[T_{\rho;\nu}^V(k_2) \right] - \left[T_{\rho;\nu}^V(k_1) \right] - 2m \left[T_{\rho;\nu}^{PA}(k_1, k_2) \right]$, provando assim a identidade (5.80).

A relação (5.81) é provada da mesma forma, contraindo explicitamente e reorganizando os termos de modo a identificar o lado direito da equação. A contração de (5.79) e algumas operações algébricas nos gera o resultado

$$q^\rho \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA} \right] = -q^\rho Q^\alpha \left\{ \square_{3;\rho\nu\alpha\mu} - g_{\mu\nu} \left[\Delta_{2;\alpha\rho} \right] \right\} + (q^\rho Q_\nu - q_\nu Q^\rho) \left[\Delta_{2;\mu\rho} \right] \\ + (q^\rho Q_\mu - q_\mu Q^\rho) \left[\Delta_{2;\nu\rho} \right] + \frac{q^2}{2} \left[T_{\mu\nu}^{AA} \right]. \quad (5.84)$$

De posse dos resultados de $T_\alpha^V(k_i)$, $T_\alpha^S(k_i)$ e $T_\alpha^P(k_i)$, notamos que o resultado acima de fato reproduz o lado direito de (5.81), provando assim a relação.

Para a verificação da terceira relação, contraímos o resultado (5.78)

$$g^{\rho\mu} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA} \right] = -Q^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\nu k_\alpha k^2}{(k^2 - m^2)^3} + Q_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k^2}{(k^2 - m^2)^2} \\ + 3Q^\rho \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} - Q_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ + \frac{q^\rho}{2} \left[T_{\rho\nu}^{AA} \right]. \quad (5.85)$$

Novamente, substituímos aqui as integrais divergentes em termos dos objetos divergentes básicos, de modo a obter

$$g^{\rho\mu} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA} \right] = -Q^\alpha \left[g^{\mu\rho} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho} \right] + Q_\nu \left[g^{\mu\rho} \Delta_{2;\mu\rho} \right] - Q^\alpha \left[\Delta_{2;\alpha\nu} \right] + \frac{q^\rho}{2} \left[T_{\rho\nu}^{AA} \right], \quad (5.86)$$

e ao substituir o resultado (5.71),

$$q^\rho \left[T_{\rho\nu}^{AA} \right] = 2q^\rho \left[\Delta_{2;\rho\nu} \right] - 4m^2 \frac{i}{(4\pi)} q_\nu \left[\xi_0^{(-1)} \right], \quad (5.87)$$

obtemos

$$g^{\rho\mu} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA} \right] = -Q^\alpha \left\{ [g^{\rho\mu} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho}] - g_{\alpha\nu} [g^{\rho\mu} \Delta_{2;\mu\rho}] \right\} \\ - 2k_2^\rho [\Delta_{2;\rho\nu}] - 2m^2 \frac{i}{(4\pi)} q_\nu \left[\xi_0^{(-1)} \right]. \quad (5.88)$$

Comparando com o lado direito de (5.82), notamos que, segundo os resultados do Apêndice C, o termo finito pode ser identificado exatamente com $-m [T_V^{PA}]$. A parte divergente, por sua vez, contém exatamente o mesmo termo potencialmente violador da RFG (5.46). Similarmente ao caso de $g^{\rho\mu} [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}]$, a RFG só é satisfeita se este termo for nulo, o que equivale a exigir a relação

$$g^{\alpha\nu} g^{\rho\mu} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho} = 2g^{\mu\rho} \Delta_{2;\mu\rho}. \quad (5.89)$$

Novamente, notamos que a RFG só pode ser satisfeita se os objetos divergentes se relacionarem precisamente da forma acima.

5.2.3 Amplitude $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}$

A última amplitude com dois vértices axiais é $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2)$:

$$T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k+k_1)_\sigma (k+k_1)_\rho \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}. \quad (5.90)$$

Cálculo explícito

Após tomar os traços obtemos

$$T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) = T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2) - g_{\mu\nu} T_{\sigma\rho}^{SS}(k_1, k_2). \quad (5.91)$$

A sub-amplitude $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{(+)}$ já foi definida anteriormente, enquanto $T_{\sigma\rho}^{SS}$ pode ser escrita em termos de integrais como

$$T_{\rho\sigma}^{SS} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (k+k_1)_\sigma (k+k_1)_\rho \text{Tr} \left\{ \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}, \\ = [I_{1\rho\sigma}(k_1)] + k_{1\sigma} [I_{1\rho}(k_1)] + k_{1\rho} [I_{1\sigma}(k_1)] + k_{1\sigma} k_{1\rho} [I_1(k_1)] \\ + [I_{1\rho\sigma}(k_2)] + k_{1\sigma} [I_{1\rho}(k_2)] + k_{1\rho} [I_{1\sigma}(k_2)] + k_{1\sigma} k_{1\rho} [I_1(k_2)] \\ - [(k_2 - k_1)^2 - 4m^2] \left\{ [I_{2\rho\sigma}] + k_{1\sigma} [I_{2\rho}] + k_{1\rho} [I_{2\sigma}] + k_{1\sigma} k_{1\rho} [I_2] \right\}.$$

Após substituir o valor das integrais, mostramos que (5.91), pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) = & \mathcal{D}_{\sigma\rho\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}m^2 [\Delta_{2;\sigma\rho}] \\
& + (g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} + g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) [I_{quad}(m^2)] \\
& + \left\{ \frac{1}{3} (g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}q^2 - g_{\mu\nu}q_{\rho}q_{\sigma} - g_{\sigma\rho}q_{\mu}q_{\nu}) + \right. \\
& \quad - \frac{1}{6} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}q^2 - g_{\mu\rho}q_{\nu}q_{\sigma} - g_{\nu\sigma}q_{\mu}q_{\rho}) + \\
& \quad - \frac{1}{6} (g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}q^2 - g_{\nu\rho}q_{\mu}q_{\sigma} - g_{\mu\sigma}q_{\nu}q_{\rho}) + \\
& \quad \left. - 2m^2 g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} \right\} [I_{\log}(m^2)] \\
& + \frac{i}{4\pi} \left\{ q^2 (g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}) + \right. \\
& \quad - q_{\nu} (g_{\mu\sigma}q_{\rho} + g_{\mu\rho}q_{\sigma}) + \\
& \quad - q_{\mu} (g_{\nu\rho}q_{\sigma} + g_{\nu\sigma}q_{\rho}) + \\
& \quad \left. + 2 \frac{q_{\mu}q_{\nu}q_{\sigma}q_{\rho}}{q^2} \right\} [2\xi_2^{(0)} - \xi_1^{(0)}] \\
& + 2 \frac{i}{4\pi} \frac{1}{q^2} (q_{\sigma}q_{\rho} - q^2 g_{\sigma\rho}) (q_{\mu}q_{\nu} - q^2 g_{\mu\nu}) [\xi_2^{(0)} - \xi_1^{(0)}] \\
& - 2 \frac{i}{4\pi} \frac{m^2}{q^2} g_{\mu\nu} (q_{\sigma}q_{\rho} - q^2 g_{\sigma\rho}) [\xi_0^{(0)}] \\
& + \frac{1}{4} q_{\rho}q_{\sigma} [T_{\mu\nu}^{AA}], \tag{5.92}
\end{aligned}$$

onde o tensor $\mathcal{D}_{\sigma\rho\mu\nu}$ já foi definido anteriormente. Notamos, comparando este resultado com (5.53), que o valor é similar a $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}$, porém com alguns termos adicionais proporcionais a m^2 .

Relações entre Funções de Green

As relações entre funções de Green para esta amplitude são

$$q^\mu \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_{\sigma\rho;\nu}^V(k_1) \right] + \left[T_{\sigma\rho;\nu}^V(k_2) \right] - 2m \left[T_{\sigma\rho;\nu}^{PA}(k_1, k_2) \right], \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} q^\sigma \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] &= - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} q^\alpha \left[T_{\rho;\alpha}^V(k_1) + T_{\rho;\alpha}^V(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} q_\mu \left[T_{\rho;\nu}^V(k_1) - T_{\rho;\nu}^V(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} q_\nu \left[T_{\rho;\mu}^V(k_1) + T_{\rho;\mu}^V(k_2) \right] - \left[T_{\rho\mu;\nu}^V(k_1) - T_{\rho\mu;\nu}^V(k_2) \right] \\ &\quad + m g_{\mu\nu} \left[T_\rho^S(k_1) - T_\rho^S(k_2) \right] - m \epsilon_{\mu\nu} \left[T_\rho^P(k_1) + T_\rho^P(k_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} q^2 \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right], \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] = \left[T_{\rho;\nu}^V(k_2) \right] - m \left[T_{\rho;\nu}^{PA}(k_1, k_2) \right]. \quad (5.95)$$

A verificação da primeira relação exige a contração de q^μ com a forma explícita (5.92). Nesta contração, notamos que alguns termos, proporcionais a $\xi_i^{(0)}$ e a I_{\log} , se anulam por serem invariantes de *gauge*, simplificando bastante a expressão:

$$\begin{aligned} q^\mu \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] &= q^\mu \mathcal{D}_{\sigma\rho\mu\nu} - 2q_\nu m^2 \left[\Delta_{2;\sigma\rho} \right] \\ &\quad + (q_\rho g_{\sigma\nu} + q_\sigma g_{\rho\nu}) \left[I_{quad}(m^2) \right] - 2m^2 q_\nu g_{\sigma\rho} \left[I_{\log}(m^2) \right] \\ &\quad - 2 \frac{i}{(4\pi)} \frac{m^2}{q^2} q_\nu (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) \left[\xi_0^{(0)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} q_\rho q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\nu}^{AA} \right]. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Neste ponto, substituímos a valor explícito da contração $q^\mu T_{\mu\nu}^{AA}$, Eq. (5.71), e também usamos uma relação entre as funções $\xi_i^{(N)}$ para reescrever o objeto $\xi_0^{(0)}$:

$$\xi_0^{(0)} = q^2 \left(2\xi_2^{(-1)} - \xi_1^{(-1)} \right). \quad (5.97)$$

Após as substituições a expressão é finalmente organizada da forma

$$\begin{aligned}
q^\mu \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] &= q^\mu \mathcal{D}_{\sigma\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} q_\rho q_\sigma q^\mu [\Delta_{2;\mu\nu}] \\
&+ (q_\rho g_{\sigma\nu} + q_\sigma g_{\rho\nu}) [I_{quad}(m^2)] \\
&- m^2 q_\nu \left\{ \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + \right. \\
&\quad + \frac{i}{4\pi} 2 (q_\sigma q_\rho - g_{\sigma\rho} q^2) \left[2\xi_2^{(-1)} - \xi_1^{(-1)} \right] + \\
&\quad \left. + \frac{i}{4\pi} q_\sigma q_\rho \left[\xi_0^{(-1)} \right] \right\}, \tag{5.98}
\end{aligned}$$

o que coincide com o lado direito da igualdade de (5.93), provando a RFG.

A relação (5.94) é verificada contraindo-se a amplitude total com o momento externo q^σ . Novamente, alguns termos se anulam, e após algumas manipulações, organizamos a expressão da seguinte forma

$$\begin{aligned}
q^\sigma \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right] &= q^\sigma \mathcal{D}_{\sigma\rho\mu\nu} + (g_{\rho\mu} q_\nu + g_{\rho\nu} q_\mu) [I_{quad}(m^2)] \\
&+ \frac{1}{2} q^2 \left\{ Q^\alpha [\square_{3;\rho\nu\alpha\mu}(m^2)] \right. \\
&\quad - Q_\nu [\Delta_{2;\mu\rho}(m^2)] - Q_\mu [\Delta_{2;\nu\rho}(m^2)] \\
&\quad - Q^\alpha \left(g_{\mu\nu} [\Delta_{2;\rho\alpha}(m^2)] - g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\alpha\mu}^{(2)}(m^2)] \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - g_{\rho\mu} [\Delta_{2;\nu\alpha}(m^2)] \right) \right\} \\
&- 2m^2 g_{\mu\nu} q^\alpha \left\{ [\Delta_{2;\rho\alpha}(m^2)] + g_{\rho\alpha} [I_{\log}(m^2)] \right\} \\
&+ \frac{1}{2} q^2 \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right]. \tag{5.99}
\end{aligned}$$

O termo $\frac{1}{2} q^2 \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AA}(k_1, k_2) \right]$ é imediatamente identificado no lado direito de (5.94), enquanto o termo proporcional a m^2 é identificado com $mg_{\mu\nu} \left[T_\rho^S(k_1) - T_\rho^S(k_2) \right]$. Os demais termos correspondem precisamente à combinação de amplitudes $T_{\rho\mu;\nu}^V(k_i)$ e $T_{\mu;\nu}^V(k_i)$ na RFG, provando que ela é automaticamente satisfeita.

A última relação a ser verificada é (5.95). Usando o resultado explícito e após algumas organizações, a contração resulta em

$$\begin{aligned}
g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA} \right] = & - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)} + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k^2 k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\
& - 2k_{1\rho} (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k^2 k_\nu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} - (k_1^2 + k_2^2) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k^2 k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\
& - (k_1 + k_2)_\nu (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k^2 k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \\
& + k_{1\rho} (k_2 + k_1)_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k^2}{(k^2 - m^2)^2} + 2k_{1\rho} (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + \left(k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_1^\beta \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{16k^2 k_\rho k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \\
& - \left(4k_1^\beta k_2^\alpha + 4k_1^\alpha k_1^\beta + 2k_2^\alpha k_2^\beta \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\rho k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} \\
& + (2k_1^2 + k_2^2 - 2m^2) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + 2(k_1^\alpha k_{2\nu} + k_{1\nu} k_1^\alpha + k_{1\nu} k_2^\alpha) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + 2k_1^\alpha k_{1\rho} \left\{ \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\alpha\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \right\} \\
& - m^2 q_\rho q_\nu \left(\frac{i}{4\pi} \right) \left[\xi_0^{(-1)} \right] + \frac{1}{3} \left(\frac{i}{4\pi} \right) (q_\nu q_\rho - g_{\rho\nu} q^2). \tag{5.100}
\end{aligned}$$

Este resultado não é imediatamente idêntico ao lado direito de igualdade em (5.95), mas pode-se mostrar que os termos violadores são exatamente os mesmos do que no caso $g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV} \right]$ (vide (5.64)). Sendo assim, a RFG para a contração com a métrica só é satisfeita se

$$g^{\mu\sigma} T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA} \Big|_{\text{viol}} = g^{\mu\sigma} T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV} \Big|_{\text{viol}} = 0,$$

5.3 Amplitudes com vértices vetoriais e axiais

As últimas amplitudes a serem calculadas e analisadas são as que contém um vértice de caráter vetorial e um vértice de caráter axial: $T_{\mu\nu}^{AV}$, $T_{\rho;\mu\nu}^{AV}$, e $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}$. Conforme a discussão feita na Seção 3.1.3, usando a identidade (3.33) podemos reescrever estas amplitudes em função das

amplitudes do tipo VV:

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = -\varepsilon_{\mu\beta} g^{\beta\alpha} T_{\alpha\nu}^{VV}(k_1, k_2) \quad (5.101)$$

$$T_{\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = -\varepsilon_{\mu\beta} g^{\beta\alpha} T_{\rho;\alpha\nu}^{VV}(k_1, k_2) \quad (5.102)$$

$$T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) = -\varepsilon_{\mu\beta} g^{\beta\alpha} T_{\sigma\rho;\alpha\nu}^{VV}(k_1, k_2), \quad (5.103)$$

Assim, as formas explícitas das amplitudes axial-vetor não precisam ser calculadas novamente. Sempre que necessitarmos destas formas recorreremos às já calculadas funções vetor-vetor ((5.14), (5.33) e (5.53)). Passamos, então, diretamente para o estudo da consistência de cada uma das amplitudes.

5.3.1 Amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$

Relações entre funções de Green

A RFG pertinente à amplitude do tipo axial-vetor mais simples, $T_{\mu\nu}^{AV}$, é dada pela Eq. (3.39):

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_\nu^A(k_1) \right] + \left[T_\nu^A(k_2) \right] - 2m \left[T_\nu^{PV}(k_1, k_2) \right] \quad (5.104)$$

A verificação é feita comparando a contração explícita $q^\mu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)$ com as sub-amplitudes do lado direito da equação acima. Usando o resultado explícito de $T_{\mu\nu}^{AV}$ e uma propriedade das funções $\xi_i^{(N)}$,

$$q^2 \left[\xi_2^{(-1)} - \xi_1^{(-1)} \right] = -m^2 \xi_0^{(-1)} - 1, \quad (5.105)$$

mostramos que a contração explícita pode ser escrita como

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) &= -q^\mu \varepsilon_\mu^\alpha \left[T_{\alpha\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] \\ &= -2q^\mu \varepsilon_\mu^\alpha \left[\Delta_{2;\alpha\nu}(m^2) \right] \\ &\quad - 4 \frac{i}{4\pi} q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} - 4m^2 \frac{i}{4\pi} q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left[\xi_0^{(-1)} \right]. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Precisamos comparar esta forma com a combinação de sub-amplitudes do lado direito de (5.104), que explicitamente tem o valor de (vide Apêndice C):

$$\begin{aligned}
& - \left[T_V^A(k_1) \right] + \left[T_V^A(k_2) \right] - 2m \left[T_V^{PV}(k_1, k_2) \right] \\
& = \varepsilon_\nu^\alpha \left\{ -2k_1^\lambda \left[\Delta_{2;\alpha\lambda}(m^2) \right] \right\} - \varepsilon_\nu^\alpha \left\{ -2k_2^\lambda \left[\Delta_{2;\alpha\lambda}^{(2)}(m^2) \right] \right\} + \\
& \quad - 2m \left\{ -2m \frac{i}{4\pi} \varepsilon_{\nu\alpha} q^\alpha \left[\xi_0^{(-1)} \right] \right\} \\
& = -2q^\mu \varepsilon_\nu^\alpha \left[\Delta_{2;\alpha\mu}(m^2) \right] - 4m^2 \frac{i}{4\pi} q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left[\xi_0^{(-1)} \right] . \tag{5.107}
\end{aligned}$$

Notamos que há uma dificuldade em comparar as duas últimas expressões acima pelo fato de que, no termo $-2q^\mu \varepsilon_\nu^\alpha \left[\Delta_{2;\alpha\mu}(m^2) \right]$ em (5.106), o índice livre ν é carregado pelo objeto Δ_2 , enquanto em (5.107), está sendo carregado pelo tensor ε . Esta situação pode ser resolvida usando-se a seguinte identidade de Schouten:

$$\varepsilon_{\mu\beta} \Delta_{2;\alpha\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} \Delta_{2;\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\nu} \Delta_{2;\alpha\mu} = 0 . \tag{5.108}$$

Deste modo, podemos reescrever a contração como:

$$\begin{aligned}
q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] & = -2q^\mu g^{\beta\alpha} \left\{ \varepsilon_{\mu\nu} \left[\Delta_{2;\alpha\beta}(m^2) \right] + \varepsilon_{\nu\beta} \left[\Delta_{2;\alpha\mu}(m^2) \right] \right\} + \\
& \quad - 4 \frac{i}{4\pi} q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} - 4m^2 \frac{i}{4\pi} q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left[\xi_0^{(-1)} \right] \\
& = -2q^\mu \varepsilon_\nu^\alpha \left[\Delta_{2;\alpha\mu}(m^2) \right] - 4m^2 \frac{i}{4\pi} q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left[\xi_0^{(-1)} \right] \\
& \quad - q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ 2g^{\alpha\beta} \left[\Delta_{2;\alpha\beta}(m^2) \right] + \frac{i}{\pi} \right\} . \tag{5.109}
\end{aligned}$$

Com a contração explícita nesta forma, pode-se compará-la com a expressão (5.107). O resultado é

$$\begin{aligned}
q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] & = - \left[T_V^A(k_1) \right] + \left[T_V^A(k_2) \right] - 2m \left[T_V^{PV}(k_1, k_2) \right] \\
& \quad - q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ 2g^{\alpha\beta} \left[\Delta_{2;\alpha\beta}(m^2) \right] + \frac{i}{\pi} \right\} \tag{5.110}
\end{aligned}$$

Notamos que existe um termo potencialmente violador da igualdade

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AV} \Big|_{\text{viol}} = -q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ 2g^{\alpha\beta} \left[\Delta_{2;\alpha\beta}(m^2) \right] + \frac{i}{\pi} \right\} , \tag{5.111}$$

e a RFG só é satisfeita se tal termo for nulo, o que implica a fixação do traço do tensor $\Delta_{2;\alpha\beta}$ dado por:

$$\begin{aligned} -q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ 2g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}(m^2)] + \frac{i}{\pi} \right\} &= 0 \\ \Rightarrow g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}(m^2)] &= -\frac{i}{2\pi} . \end{aligned} \quad (5.112)$$

Esta é a condição necessária e suficiente para que a RFG (5.104) seja satisfeita.

Identidades de Ward

A análise da consistência de $T_{\mu\nu}^{AV}$ também requer que verifiquemos as suas IWs, que são:

$$q^\nu [T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)] = 0 \quad (5.113)$$

$$q^\mu [T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)] = -2m [T_\nu^{PV}(k_1, k_2)] , \quad (5.114)$$

e representam a conservação da corrente vetorial e a conservação parcial da corrente axial, respectivamente. Como já notado antes, contrações com o índice vetorial apenas reproduzem relações de amplitudes puramente vetoriais. Neste caso, (5.113) se reduz a

$$q^\nu [T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] = 0 , \quad (5.115)$$

e já estabelecemos que a relação de consistência para que esta identidade seja satisfeita é (vide Seção 5.1):

$$\Delta_{2;\mu\nu}(m^2) = 0 . \quad (5.116)$$

Porém, notamos que a relação de consistência acima, apesar de ser necessária e suficiente para a invariância de *gauge*, é responsável por violar a segunda IW, (5.114). Isto pode ser visto no resultado explícito da contração (5.106), que ao incorporar (5.116) se torna

$$\left[q^\mu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right]_{RC} = -\frac{i}{\pi} q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} - 4m^2 \frac{i}{4\pi} q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left[\xi_0^{(-1)} \right] . \quad (5.117)$$

Comparamos isto com o valor de

$$-2m [T_\nu^{PV}(k_1, k_2)] = -4m^2 \frac{i}{4\pi} q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left[\xi_0^{(-1)} \right] , \quad (5.118)$$

e podemos ver que ao incorporarmos a relação de consistência necessária para a invariância de *gauge*, necessariamente violamos a conservação parcial da corrente axial com o termo finito

$$-\frac{i}{\pi}q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} . \quad (5.119)$$

Este é o ponto de vista canônico sobre o fenômeno das anomalias: uma simetria classicamente implementada é quebrada no regime quântico (neste caso, a PCAC). No contexto da QED_2 , é necessário que incorporemos (5.116); de outro modo, violaríamos simetrias fundamentais como a homogeneidade espaço-temporal, simetria de Lorentz e CPT, e comprometeríamos a teoria por violar a IW para o tensor de polarização do vácuo $T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)$ (BATTISTEL; FONSECA; DALLABONA, 2012). Assim, parece inevitável que a PCAC seja violada. Esta violação caracteriza o fenômeno *anomalia quiral bidimensional*, que no modelo de Schwinger representa uma quebra da simetria quiral $U_A(1)$ (BERTLMAN, 1996). Dentro desta interpretação é fácil ver que, além da IW, a RFG para a contração com o índice axial, Eq. (5.104), também é violada. Isto se dá porque não é possível satisfazer a condição (5.112), pois já se estabeleceu um valor nulo para o objeto $\Delta_{2;\mu\nu}$. Estas observações serão importantes posteriormente quando analisarmos as contrações que dão origem às anomalias gravitacionais, no último capítulo.

5.3.2 Amplitude $T_{\rho;\mu\nu}^{AV}$

Relações entre funções de Green

Para a amplitude $T_{\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)$, as RFGs pertinentes são:

$$q^\mu \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_{\rho;\nu}^A(k_1) \right] + \left[T_{\rho;\nu}^A(k_2) \right] - 2m \left[T_{\rho;\nu}^{PV}(k_1, k_2) \right] , \quad (5.120)$$

$$g^{\mu\rho} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = \left[T_\nu^A(k_2) \right] - m \left[T_\nu^{PV}(k_1, k_2) \right] . \quad (5.121)$$

Começamos analisando a primeira delas. A contração explícita $q^\mu T_{\rho;\mu\nu}^{AV}$ nos dá o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
q^\mu \left[T_{\rho;\mu\nu}^{AV} \right] = & -q^\mu \varepsilon_\mu^\alpha \left\{ -2Q^\beta \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\nu k_\rho k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} + Q_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \right. \\
& + Q_\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + g_{\alpha\nu} Q^\lambda \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\lambda}{(k^2 - m^2)^2} \\
& \left. + 2k_{1\rho} \left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\alpha\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \right] \right\} \\
& + 2 \left(\frac{i}{4\pi} \right) \varepsilon_{\nu\alpha} q_\rho q^\alpha + 2m^2 \left(\frac{i}{4\pi} \right) \varepsilon_{\nu\alpha} q_\rho q^\alpha \left[\xi_0^{(-1)} \right]. \quad (5.122)
\end{aligned}$$

Porém, o lado direito de (5.120), segundo os resultados do Apêndice C, é:

$$\begin{aligned}
& -T_{\rho;\nu}^A(k_1) + T_{\rho;\nu}^A(k_2) - 2mT_{\rho;\nu}^{PV} \\
= & -\varepsilon_\nu^\alpha \left\{ -2 \left(k_1^\lambda k_1^\beta - k_2^\lambda k_2^\beta \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\alpha k_\rho k_\lambda k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} + \right. \\
& + 2 \left(k_{1\alpha} k_1^\lambda - k_{2\alpha} k_2^\lambda \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\lambda}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + \left(k_1^2 - k_2^2 \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + \\
& \left. + 2k_{1\rho} q^\lambda \left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\lambda k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\alpha\lambda} I_{\log}(m^2) \right] \right. \\
& \left. - 2m^2 \left(\frac{i}{4\pi} \right) q_\rho q_\alpha \left[\xi_0^{(-1)} \right] \right\}. \quad (5.123)
\end{aligned}$$

Novamente, notamos a dificuldade em comparar os dois resultados pelo fato de o tensor ε carregar índices diferentes em cada um deles. Usamos então a identidade de Schouten em (5.122),

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu\alpha} k_\nu + \varepsilon_{\alpha\nu} k_\mu + \varepsilon_{\nu\mu} k_\alpha & = 0 \\
\varepsilon_{\mu\alpha} Q_\nu + \varepsilon_{\alpha\nu} Q_\mu + \varepsilon_{\nu\mu} Q_\alpha & = 0, \quad (5.124)
\end{aligned}$$

para reorganizar os termos de modo que todos sejam proporcionais a $\varepsilon_{\nu\alpha}$, a fim de que seja possível a comparação com (5.123). Após este procedimento e algumas manipulações algébricas para reescrever as integrais divergentes em termo dos objetos divergentes básicos, chegamos à conclusão de que a contração explícita contém alguns termos potencialmente violadores da

RFG:

$$q^\mu T_{\rho;\mu\nu}^{AV} \Big|_{\text{viol}} = -q^\alpha \varepsilon_{\alpha\nu} \left\{ Q^\beta g^{\xi\lambda} [\square_{3;\xi\lambda\beta\rho}(m^2)] - 2k_{1\rho} g^{\xi\lambda} [\Delta_{\xi\lambda}(m^2)] - 2\frac{i}{4\pi} q_\rho \right\}. \quad (5.125)$$

Obviamente, a RFG só será satisfeita se o termo entre chaves for nulo, ou seja:

$$Q^\beta g^{\xi\lambda} [\square_{3;\xi\lambda\beta\rho}(m^2)] - 2k_{1\rho} g^{\xi\lambda} [\Delta_{\xi\lambda}(m^2)] = 2\frac{i}{4\pi} q_\rho. \quad (5.126)$$

Esta relação é necessária e suficiente para a verificação da RFG. Podemos também mostrar que ao incorporar (5.112) a expressão acima é equivalente a

$$g^{\alpha\beta} g^{\xi\lambda} [\square_{3;\alpha\beta\xi\lambda}(m^2)] = -\frac{i}{\pi}, \quad (5.127)$$

ou seja: a exigência de que ambas as relações entre funções de Green sejam verdadeiras,

$$\begin{aligned} q^\mu [T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)] &= -[T_v^A(k_1)] + [T_v^A(k_2)] - 2m [T_v^{PV}(k_1, k_2)] \\ q^\mu [T_{\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2)] &= -[T_{\rho;v}^A(k_1)] + [T_{\rho;v}^A(k_2)] - 2m [T_{\rho;v}^{PV}(k_1, k_2)], \end{aligned}$$

fixa o valor dos "traços" dos dois objetos divergentes:

$$g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}(m^2)] = -\frac{i}{2\pi} \quad (5.128)$$

$$g^{\alpha\beta} g^{\xi\lambda} [\square_{3;\alpha\beta\xi\lambda}(m^2)] = -\frac{i}{\pi}. \quad (5.129)$$

A segunda RFG para $T_{\rho;\mu\nu}^{AV}$, Eq. (3.41), também é analisada da mesma forma. Sem explicitar os detalhes do procedimento, apenas mostramos o termo potencialmente violador da RFG, que neste caso é

$$g^{\rho\mu} T_{\rho;\mu\nu}^{AV} \Big|_{\text{viol}} = -q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}(m^2)] + \frac{i}{2\pi} \right\}. \quad (5.130)$$

A exigência de que tal termo seja nulo implica no vínculo

$$g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}(m^2)] = -\frac{i}{2\pi}, \quad (5.131)$$

que é o mesmo encontrado para a RFG relativa à contração $q^\mu T_{\mu\nu}^{AV}$.

5.3.3 Amplitude $T_{\rho\sigma;\mu\nu}^{AV}$

Relação entre funções de Green

Para esta última amplitude analisada, as relações entre funções de Green pertinentes são:

$$q^\mu \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_{\sigma\rho;\nu}^A(k_1) \right] + \left[T_{\sigma\rho;\nu}^A(k_2) \right] - 2m \left[T_{\sigma\rho;\nu}^{PV}(k_1, k_2) \right], \quad (5.132)$$

$$g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = \left[T_{\rho;\nu}^A(k_2) \right] - m \left[T_{\rho;\nu}^{PV}(k_1, k_2) \right]. \quad (5.133)$$

A análise destas relações é feita de maneira análoga às análises anteriores: utilizando a identidade de Schouten para permutar o índice do tensor ε . Não mostraremos os passos intermediários em detalhes por não ser muito proveitoso à discussão, visto que o procedimento já foi explicado exhaustivamente nas seções anteriores. Nos contentaremos em explicitar os termos potencialmente violadores das relações RFGs.

Para a primeira relação, temos os seguintes termos violadores:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV} \Big|_{\text{viol}} = & \varepsilon_{\nu\alpha} \left\{ (k_1 - k_2)^\alpha \left[g^{\lambda\xi} \square_{2;\lambda\xi\sigma\rho} \right] + \right. \\ & - \frac{1}{2} (k_1 - k_2)^\alpha (k_1^2 + k_2^2) \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\sigma\rho} \right] \\ & - (k_1 - k_2)^\alpha k_{1\sigma} Q^\beta \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\rho\beta} \right] \\ & - (k_1 - k_2)^\alpha k_{1\rho} Q_\beta \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\sigma\beta} \right] \\ & + \frac{1}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\chi k_1^\beta + k_1^\chi k_2^\beta + k_2^\chi k_2^\beta \right) \left[g^{\lambda\xi} \Sigma_{4;\lambda\xi\chi\beta\rho\sigma} \right] \\ & + 2 (k_1 - k_2)^\alpha k_{1\rho} k_{1\sigma} \left[g^{\lambda\xi} \Delta_{2;\lambda\xi} \right] \\ & + \left\{ -\frac{2}{3} (k_1 - k_2)^\alpha k_1^\beta k_1^\lambda - \frac{2}{3} (k_1 - k_2)^\alpha k_2^\beta k_2^\lambda + \right. \\ & \quad \left. + (k_1 + k_2)^\alpha k_1^\lambda k_2^\beta - \frac{1}{3} (5k_1 + k_2)^\alpha k_1^\beta k_2^\lambda \right\} \left[\square_{3;\lambda\beta\sigma\rho} \right] \\ & + \frac{1}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\lambda k_1^\beta + k_1^\lambda k_2^\beta + k_2^\lambda k_2^\beta \right) \left[\square_{3;\rho\lambda\beta\sigma} \right] \\ & + \frac{1}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\lambda k_1^\beta + k_1^\lambda k_2^\beta + k_2^\lambda k_2^\beta \right) \left[\square_{3;\sigma\lambda\beta\rho} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}(k_1 - k_2)^\alpha (k_1^2 + k_2^2 + k_1 \cdot k_2) [\Delta_{2;\sigma\rho}] \\
& + \frac{2}{3}(2k_1 + k_2)^\alpha (k_{1\sigma}k_2^\beta - k_1^\beta k_{2\sigma}) [\Delta_{2;\beta\rho}] \\
& + \frac{2}{3}(2k_1 + k_2)^\alpha (k_{1\rho}k_2^\beta - k_1^\beta k_{2\rho}) [\Delta_{2;\beta\sigma}] \\
& + \frac{2}{3}(k_1 - k_2)^\alpha (k_1^\lambda k_1^\beta + k_1^\lambda k_2^\beta + k_2^\lambda k_2^\beta) g_{\sigma\rho} [\Delta_{2;\lambda\beta}] \\
& + 2(k_1 - k_2)^\alpha \{ [\Delta_{1;\sigma\rho}] + g_{\sigma\rho} [I_{quad}] \} \\
& - 2m^2(k_1 - k_2)^\alpha \{ [\Delta_{2;\sigma\rho}] + g_{\sigma\rho} [I_{log}] \} \\
& + \frac{i}{(4\pi)}(k_1 - k_2)^\alpha \left[\frac{1}{3}(q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) + q_\sigma q_\rho \right] \}. \tag{5.134}
\end{aligned}$$

Obviamente, a RFG só será satisfeita se tal termo for nulo, o que representa um novo vínculo entre os diferentes objetos divergentes. Também notamos que, tal qual em casos anteriores ($g^{\mu\sigma}T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}$ e $g^{\mu\sigma}T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}$), a forma do termo violador acima não é única, pois alguns objetos divergentes não são simetrizados e poderiam ser reescritos em formas equivalentes.

Finalmente, para (5.133), o termo potencialmente violador é :

$$g^{\mu\sigma}T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV} \Big|_{\text{viol}} = q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2}Q_\beta \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\beta\rho}(m^2) \right] - k_{1\rho} \left[g^{\lambda\xi} \Delta_{2;\lambda\xi}(m^2) \right] - \frac{i}{4\pi}q_\rho \right\}, \tag{5.135}$$

Finalizamos então a análise das sub-amplitudes que compõem $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$, e podemos agora reunir o conhecimento adquirido para estudar as anomalias gravitacionais.

6 AS ANOMALIAS DE EINSTEIN E WEYL

Após o estudo detalhado das sub-amplitudes podemos estudar a amplitude gravitacional $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$. Dentro da estratégia adotada, precisamos realizar o cálculo explícito da amplitude seguido dos testes de consistência, que são as RFGs e as correspondentes IWs. Por questões de clareza dividimos a amplitude em setores da seguinte forma

$$T_{\mu\nu\rho\sigma}^G = -\frac{i}{64} \left\{ \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} + \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VA} + \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AA} \right\}, \quad (6.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} = & 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] - 2q_\sigma \left[T_{\nu;\mu\rho}^{VV} \right] - 2q_\nu \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + q_\nu q_\sigma \left[T_{\mu\rho}^{VV} \right] \\ & + 4 \left[T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] - 2q_\sigma \left[T_{\mu;\nu\rho}^{VV} \right] - 2q_\mu \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] + q_\mu q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{VV} \right] \\ & + (\sigma \leftrightarrow \rho), \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VA} = & \pm 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA} \right] \mp 2q_\sigma \left[T_{\nu;\mu\rho}^{VA} \right] \mp 2q_\nu \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{VA} \right] \pm q_\nu q_\sigma \left[T_{\mu\rho}^{VA} \right] \\ & \pm 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 2q_\sigma \left[T_{\nu;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 2q_\nu \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \pm q_\nu q_\sigma \left[T_{\mu\rho}^{AV} \right] \\ & \pm 4 \left[T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VA} \right] \mp 2q_\sigma \left[T_{\mu;\nu\rho}^{VA} \right] \mp 2q_\mu \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{VA} \right] \pm q_\mu q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{VA} \right] \\ & \pm 4 \left[T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AV} \right] \mp 2q_\sigma \left[T_{\mu;\nu\rho}^{AV} \right] \mp 2q_\mu \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{AV} \right] \pm q_\mu q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{AV} \right] \\ & + (\sigma \leftrightarrow \rho), \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AA} = & 4 \left[T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] - 2q_\sigma \left[T_{\nu;\mu\rho}^{AA} \right] - 2q_\nu \left[T_{\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] + q_\nu q_\sigma \left[T_{\mu\rho}^{AA} \right] \\ & + 4 \left[T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AA} \right] - 2q_\sigma \left[T_{\mu;\nu\rho}^{AA} \right] - 2q_\mu \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{AA} \right] + q_\mu q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{AA} \right] \\ & + (\sigma \leftrightarrow \rho). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Todas as sub-amplitudes do lado direito já foram calculadas no Capítulo 5, de modo que a representação explícita de $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ envolveria a simples substituição de todas elas na expressão acima. Como o resultado de algumas sub-amplitudes tem uma forma algébrica relativamente complicada, não ganharíamos nada em termos de visualização ao fazer tal substituição. Deste modo, nos contentamos com afirmar que a amplitude completa foi calculada através de suas

sub-amplitudes, e é composta por uma parte finita (escrita em termos das funções $\xi_i^{(N)}$) e uma parte divergente que, por sua vez, é composta por objetos bem definidos e padronizados. Alguns destes objetos têm a forma de uma diferença entre integrais divergentes e podem ser identificados com termos de superfície ($\square_{2;\mu\nu\alpha\beta}$, $\Delta_{1;\mu\nu}$, $\Sigma_{4;\mu\nu\alpha\beta\xi\chi}$, $\square_{3;\mu\nu\alpha\beta}$, $\Delta_{2;\mu\nu}$). O método utilizado neste trabalho, para o tratamento das integrais de Feynman é caracterizado por carregar tais objetos até o fim dos cálculos sem efetivamente calculá-los, ao contrário dos usuais métodos de regularização onde, desde o início, é atribuído um valor aos objetos divergentes (mesmo que implicitamente). Considerações sobre tais objetos podem ser feitas ao fim da análise, levando em conta princípios de consistência física e matemática.

6.1 Relações entre Funções de Green

Assim como no caso das sub-amplitudes, as RFGs da amplitude $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ são estabelecidas a partir das contrações com o momento externo e a métrica ($q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ e $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$). Para a contração com o momento externo temos

$$\begin{aligned}
(64) \quad q^\mu \left[iT_{\mu\nu\rho\sigma}^G \right] = & 4 \left\{ \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] \right\} - 2q_\sigma \left\{ \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{VV} \right] \right\} \\
& - 2q_\nu \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VV} \right] + q^2 \left\{ q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{VV} \right] - 2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] \right\} \\
& + 4 \left\{ \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] + \left[q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AA} \right] \right\} - 2q_\sigma \left\{ \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{AA} \right] + \left[q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{AA} \right] \right\} \\
& - 2q_\nu \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] + q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{AA} \right] + q^2 \left\{ q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{AA} \right] - 2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{AA} \right] \right\} \\
& \pm 4 \left\{ \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AV} \right] \right\} \\
& \mp 2q_\sigma \left\{ \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{AV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{AV} \right] \right\} \\
& \mp 2q_\nu \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \pm q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu\rho}^{AV} \right] \\
& \pm q^2 \left\{ q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{VA} + T_{\nu\rho}^{AV} \right] - 2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{VA} + T_{\sigma;\nu\rho}^{AV} \right] \right\} + (\sigma \leftrightarrow \rho) \quad . \quad (6.5)
\end{aligned}$$

A RFG relativa a esta contração consiste em escrever cada contração do lado direito da igualdade como uma soma de sub-amplitudes, conforme o procedimento mostrado no Capítulo 3 (por exemplo, a partir da Eq. (3.4)). A RFG é verificada se o resultado da contração com a forma explícita coincide com a soma de sub-amplitudes. Já estudamos estas relações deta-

lhadamente para cada contração individual do membro direito de (6.5). É evidente que a RFG para a amplitude completa será satisfeita se as RFGs para cada sub-amplitude forem verificada separadamente.

Consideremos inicialmente o setor puramente vetorial:

$$(64) q^\mu \left[i\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV} \right] = 4 \left\{ \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] \right\} - 2q_\sigma \left\{ \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{VV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{VV} \right] \right\} \\ - 2q_\nu \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VV} \right] + q^2 \left\{ q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{VV} \right] - 2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] \right\} \\ + (\sigma \leftrightarrow \rho) . \quad (6.6)$$

Mostramos na Seção 5.1 que todas as RFGs relativas às contrações vistas na expressão acima são satisfeitas automaticamente pelas respectivas amplitudes calculadas. Sendo assim, fica claro que não temos nenhum termo potencialmente violador para o setor vetorial de $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$. Pelo mesmo raciocínio, podemos estabelecer as mesmas conclusões para o setor axial. Por outro lado, no setor axial-vetor temos

$$(64) q^\mu \left[i\widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VA} \right] = \pm 4 \left\{ \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AV} \right] \right\} \\ \mp 2q_\sigma \left\{ \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{AV} \right] + \left[q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{AV} \right] \right\} \\ \mp 2q_\nu \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \pm q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu\rho}^{AV} \right] \\ \pm q^2 \left\{ q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{VA} + T_{\nu\rho}^{AV} \right] - 2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{VA} + T_{\sigma;\nu\rho}^{AV} \right] \right\} \\ + (\sigma \leftrightarrow \rho) . \quad (6.7)$$

Na Seção 5.3 mostramos que as contrações $q^\mu T_{\mu\nu}^{AV}$, $q^\mu T_{\rho;\mu\nu}^{AV}$ e $q^\mu T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}$ não satisfazem automaticamente suas respectivas RFG. Os termos potencialmente violadores encontrados são

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AV} \Big|_{\text{viol}} = -q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ 2g^{\alpha\beta} \left[\Delta_{2;\alpha\beta} (m^2) \right] + \frac{i}{\pi} \right\} , \quad (6.8)$$

$$q^\mu T_{\rho;\mu\nu}^{AV} \Big|_{\text{viol}} = -q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ Q^\beta g^{\xi\lambda} \left[\square_{3;\xi\lambda\beta\rho} (m^2) \right] - 2k_{1\rho} g^{\xi\lambda} \left[\Delta_{\xi\lambda} (m^2) \right] - \frac{i}{2\pi} q_\rho \right\} , \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}
q^\mu T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV} \Big|_{\text{viol}} = & \varepsilon_{\nu\alpha} \left\{ (k_1 - k_2)^\alpha \left[g^{\lambda\xi} \square_{2;\lambda\xi\sigma\rho} \right] + \right. \\
& - \frac{1}{2} (k_1 - k_2)^\alpha (k_1^2 + k_2^2) \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\sigma\rho} \right] \\
& - (k_1 - k_2)^\alpha k_{1\sigma} Q^\beta \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\rho\beta} \right] \\
& - (k_1 - k_2)^\alpha k_{1\rho} Q_\beta \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\sigma\beta} \right] \\
& + \frac{1}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\chi k_1^\beta + k_1^\chi k_2^\beta + k_2^\chi k_2^\beta \right) \left[g^{\lambda\xi} \Sigma_{4;\lambda\xi\chi\beta\rho\sigma} \right] \\
& + 2 (k_1 - k_2)^\alpha k_{1\rho} k_{1\sigma} \left[g^{\lambda\xi} \Delta_{2;\lambda\xi} \right] \\
& + \left\{ -\frac{2}{3} (k_1 - k_2)^\alpha k_1^\beta k_1^\lambda - \frac{2}{3} (k_1 - k_2)^\alpha k_2^\beta k_2^\lambda + \right. \\
& \quad \left. + (k_1 + k_2)^\alpha k_1^\lambda k_2^\beta - \frac{1}{3} (5k_1 + k_2)^\alpha k_1^\beta k_2^\lambda \right\} \left[\square_{3;\lambda\beta\sigma\rho} \right] \\
& + \frac{1}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\lambda k_1^\beta + k_1^\lambda k_2^\beta + k_2^\lambda k_2^\beta \right) \left[\square_{3;\rho\lambda\beta\sigma} \right] \\
& + \frac{1}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\lambda k_1^\beta + k_1^\lambda k_2^\beta + k_2^\lambda k_2^\beta \right) \left[\square_{3;\sigma\lambda\beta\rho} \right] \\
& - \frac{2}{3} (k_1 - k_2)^\alpha (k_1^2 + k_2^2 + k_1 \cdot k_2) \left[\Delta_{2;\sigma\rho} \right] \\
& + \frac{2}{3} (2k_1 + k_2)^\alpha \left(k_{1\sigma} k_2^\beta - k_1^\beta k_{2\sigma} \right) \left[\Delta_{2;\beta\rho} \right] \\
& + \frac{2}{3} (2k_1 + k_2)^\alpha \left(k_{1\rho} k_2^\beta - k_1^\beta k_{2\rho} \right) \left[\Delta_{2;\beta\sigma} \right] \\
& + \frac{2}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\lambda k_1^\beta + k_1^\lambda k_2^\beta + k_2^\lambda k_2^\beta \right) g_{\sigma\rho} \left[\Delta_{2;\lambda\beta} \right] \\
& + 2 (k_1 - k_2)^\alpha \left\{ \left[\Delta_{1;\sigma\rho} \right] + g_{\sigma\rho} \left[I_{quad} \right] \right\} \\
& - 2m^2 (k_1 - k_2)^\alpha \left\{ \left[\Delta_{2;\sigma\rho} \right] + g_{\rho\sigma} \left[I_{\log} \right] \right\} \\
& + \frac{i}{(4\pi)} (k_1 - k_2)^\alpha \left[\frac{1}{3} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) + q_\sigma q_\rho \right] \Big\}. \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Estes termos, obviamente, serão também termos potencialmente violadores da RFG correspondente à contração $q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$. Desta maneira, entende-se que a RFG "completa" para a contração $q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ será satisfeita se e somente se as seguintes condições forem obedecidas concomitantemente (vide Seção 5.3):

$$g^{\alpha\beta} \left[\Delta_{2;\alpha\beta} (m^2) \right] = -\frac{i}{2\pi} \tag{6.11}$$

$$g^{\alpha\beta} g^{\xi\lambda} \left[\square_{3;\alpha\beta\xi\lambda} (m^2) \right] = -\frac{i}{\pi}. \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
& (k_1 - k_2)^\alpha \left[g^{\lambda\xi} \square_{2;\lambda\xi\sigma\rho} \right] + \\
& - \frac{1}{2} (k_1 - k_2)^\alpha (k_1^2 + k_2^2) \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\sigma\rho} \right] \\
& - (k_1 - k_2)^\alpha k_{1\sigma} Q^\beta \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\rho\beta} \right] \\
& - (k_1 - k_2)^\alpha k_{1\rho} Q_\beta \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\sigma\beta} \right] \\
& + \frac{1}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\lambda k_1^\beta + k_1^\lambda k_2^\beta + k_2^\lambda k_2^\beta \right) \left[g^{\lambda\xi} \Sigma_{4;\lambda\xi\chi\beta\rho\sigma} \right] \\
& + 2 (k_1 - k_2)^\alpha k_{1\rho} k_{1\sigma} \left[g^{\lambda\xi} \Delta_{2;\lambda\xi} \right] \\
& + \left\{ -\frac{2}{3} (k_1 - k_2)^\alpha k_1^\beta k_1^\lambda - \frac{2}{3} (k_1 - k_2)^\alpha k_2^\beta k_2^\lambda + \right. \\
& \quad \left. + (k_1 + k_2)^\alpha k_1^\lambda k_2^\beta - \frac{1}{3} (5k_1 + k_2)^\alpha k_1^\beta k_2^\lambda \right\} \left[\square_{3;\lambda\beta\sigma\rho} \right] \\
& + \frac{1}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\lambda k_1^\beta + k_1^\lambda k_2^\beta + k_2^\lambda k_2^\beta \right) \left[\square_{3;\rho\lambda\beta\sigma} \right] \\
& + \frac{1}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\lambda k_1^\beta + k_1^\lambda k_2^\beta + k_2^\lambda k_2^\beta \right) \left[\square_{3;\sigma\lambda\beta\rho} \right] \\
& - \frac{2}{3} (k_1 - k_2)^\alpha (k_1^2 + k_2^2 + k_1 \cdot k_2) \left[\Delta_{2;\sigma\rho} \right] \\
& + \frac{2}{3} (2k_1 + k_2)^\alpha \left(k_{1\sigma} k_2^\beta - k_1^\beta k_{2\sigma} \right) \left[\Delta_{2;\beta\rho} \right] \\
& + \frac{2}{3} (2k_1 + k_2)^\alpha \left(k_{1\rho} k_2^\beta - k_1^\beta k_{2\rho} \right) \left[\Delta_{2;\beta\sigma} \right] \\
& + \frac{2}{3} (k_1 - k_2)^\alpha \left(k_1^\lambda k_1^\beta + k_1^\lambda k_2^\beta + k_2^\lambda k_2^\beta \right) g_{\sigma\rho} \left[\Delta_{2;\lambda\beta} \right] \\
& + 2 (k_1 - k_2)^\alpha \left\{ \left[\Delta_{1;\sigma\rho} \right] + g_{\sigma\rho} \left[I_{quad} \right] \right\} \\
& - 2m^2 (k_1 - k_2)^\alpha \left\{ \left[\Delta_{2;\sigma\rho} \right] + g_{\rho\sigma} \left[I_{log} \right] \right\} \\
& + \frac{i}{(4\pi)} (k_1 - k_2)^\alpha \left[\frac{1}{3} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) + q_\sigma q_\rho \right] = 0. \tag{6.13}
\end{aligned}$$

A mesma análise é feita para a contração $g^{\mu\nu} \left[T_{\mu\nu\rho\sigma}^G \right]$. Sabemos que ao contraírmós a expressão (3.46) com $g^{\mu\nu}$ temos

$$\begin{aligned}
(64) \quad g^{\mu\nu} \left[iT_{\mu\nu\rho\sigma}^G \right] &= 8 \left[g^{\mu\nu} T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VV} \right] - 4q^\sigma \left[g^{\mu\nu} T_{\mu;\nu\rho}^{VV} \right] - 4 \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VV} \right] + 2q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VV} \right] \\
&+ 8 \left[g^{\mu\nu} T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AA} \right] - 4q^\sigma \left[g^{\mu\nu} T_{\mu;\nu\rho}^{AA} \right] + 4 \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AA} \right] + 2q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{AA} \right] \\
&\pm 8 \left[g^{\mu\nu} T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA} + g^{\mu\nu} T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \mp 4q_\sigma \left[g^{\mu\nu} T_{\nu;\mu\rho}^{VA} + g^{\mu\nu} T_{\nu;\mu\rho}^{AV} \right] \\
&\mp 4 \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AV} \right] \pm 2q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VA} + q^\mu T_{\mu\rho}^{AV} \right] \\
&+ (\sigma \leftrightarrow \rho) . \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Seguindo a filosofia de que as considerações para as sub-amplitudes individuais são herdadas para a amplitude completa, notamos, a partir das análises feitas no Capítulo 5, que as seguintes contrações na expressão acima não têm suas RFGs automaticamente satisfeitas

$$q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AV}, q^\mu T_{\mu\rho}^{AV}, g^{\mu\nu} T_{\mu;\nu\rho}^{VV}, g^{\mu\nu} T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VV}, g^{\mu\nu} T_{\mu;\nu\rho}^{AA}, g^{\mu\nu} T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AA}, g^{\mu\nu} T_{\mu;\nu\rho}^{AV}, g^{\mu\nu} T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AV}.$$

Os termos potencialmente violadores associados às contrações $q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AV}$ e $q^\mu T_{\mu\rho}^{AV}$ já foram encontrados e apresentados nas Eqs. (6.8) e (6.9). Quanto à contração com a métrica $g^{\mu\nu}$ temos os seguintes termos potencialmente violadores

$$g^{\rho\mu} T_{\rho;\mu\nu}^{VV} \Big|_{\text{viol}} = g^{\rho\mu} T_{\rho;\mu\nu}^{AA} \Big|_{\text{viol}} = -Q^\alpha \left\{ [g^{\rho\mu} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho}] - g_{\alpha\nu} [g^{\rho\mu} \Delta_{2;\mu\rho}] \right\}, \quad (6.15)$$

$$g^{\rho\mu} T_{\rho;\mu\nu}^{AV} \Big|_{\text{viol}} = -q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}(m^2)] + \frac{i}{2\pi} \right\}, \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}] \Big|_{\text{viol}} &= g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}] \Big|_{\text{viol}} = \\ &= [g^{\lambda\xi} \square_{2;\lambda\xi\rho\nu}] - \frac{1}{2} (k_1^2 + k_2^2) [g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\nu\rho}] \\ &\quad - k_{1\rho} (k_1 + k_2)^\alpha [g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\nu\alpha}] \\ &\quad - \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\nu (k_1 + k_2)^\alpha [g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\rho\alpha}] \\ &\quad + \frac{1}{3} (k_1^\alpha k_1^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta) [g^{\lambda\xi} \Sigma_{4;\lambda\xi\rho\nu\alpha\beta}] \\ &\quad + (k_1 + k_2)_\nu k_{1\rho} [g^{\lambda\xi} \Delta_{2;\lambda\xi}] \\ &\quad - \frac{5}{3} (k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha) [\square_{3;\beta\rho\nu\alpha}] \\ &\quad + (k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha) [\square_{3;\rho\nu\beta\alpha}] \\ &\quad + \frac{1}{3} (k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha) [\square_{3;\nu\rho\alpha\beta}] \\ &\quad + \frac{1}{3} (k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha) [\square_{3;\alpha\rho\nu\beta}] \\ &\quad + \frac{2}{3} (k_{1\rho} k_1^\alpha + k_{2\rho} k_2^\alpha - k_{1\rho} k_2^\alpha + 2k_{2\rho} k_1^\alpha) [\Delta_{2;\nu\alpha}] \\ &\quad - \frac{2}{3} (k_{1\nu} k_1^\alpha + k_{2\nu} k_2^\alpha + 2k_{1\nu} k_2^\alpha - k_{2\nu} k_1^\alpha) [\Delta_{2;\rho\alpha}] \\ &\quad - \left[\frac{4}{3} (k_1^2 + k_2^2 + k_1 \cdot k_2) + 2m^2 \right] [\Delta_{2;\nu\rho}] \\ &\quad + \frac{4}{3} (k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha) g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\alpha\beta}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 [\Delta_{1;\rho\nu} (m^2)] + 2g_{\rho\nu} [I_{quad} (m^2)] - 2m^2 g_{\rho\nu} [I_{\log} (m^2)] \\
& + \frac{i}{4\pi} \frac{1}{3} (q_\nu q_\rho - g_{\nu\rho} q^2) .
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$g^{\mu\sigma} T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV} \Big|_{\text{viol}} = q^\mu \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2} Q_\beta \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\beta\rho} (m^2) \right] - k_{1\rho} \left[g^{\lambda\xi} \Delta_{2;\lambda\xi} (m^2) \right] - \frac{i}{4\pi} q_\rho \right\} . \tag{6.18}$$

A condição para que as RFGs sejam satisfeitas é, então, que tais termos violadores sejam identicamente nulos. Segundo as Seções 5.1, 5.2 e 5.3, isto é obtido a partir dos vínculos

$$g^{\alpha\beta} g^{\lambda\xi} [\square_{3;\alpha\beta\lambda\xi}] = 2g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}] , \tag{6.19}$$

$$g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}] = -\frac{i}{2\pi} , \tag{6.20}$$

$$g^{\alpha\beta} g^{\xi\lambda} [\square_{3;\alpha\beta\xi\lambda}] = -\frac{i}{\pi} , \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}
& \left[g^{\lambda\xi} \square_{2;\lambda\xi\rho\nu} \right] + \frac{1}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta \right) \left[g^{\lambda\xi} \Sigma_{4;\lambda\xi\rho\nu\alpha\beta} \right] \\
& - \frac{1}{2} (k_1^2 + k_2^2) \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\nu\rho} \right] - k_{1\rho} (k_1 + k_2)^\alpha \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\nu\alpha} \right] \\
& - \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\nu (k_1 + k_2)^\alpha \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\rho\alpha} \right] + (k_1 + k_2)_\nu k_{1\rho} \left[g^{\lambda\xi} \Delta_{2;\lambda\xi} \right] \\
& - \frac{5}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) [\square_{3;\beta\rho\nu\alpha}] + \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) [\square_{3;\rho\nu\beta\alpha}] \\
& + \frac{1}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) [\square_{3;\nu\rho\alpha\beta}] + \frac{1}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) [\square_{3;\alpha\rho\nu\beta}] \\
& + \frac{2}{3} (k_{1\rho} k_1^\alpha + k_{2\rho} k_2^\alpha - k_{1\rho} k_2^\alpha + 2k_{2\rho} k_1^\alpha) [\Delta_{2;\nu\alpha}] \\
& - \frac{2}{3} (k_{1\nu} k_1^\alpha + k_{2\nu} k_2^\alpha + 2k_{1\nu} k_2^\alpha - k_{2\nu} k_1^\alpha) [\Delta_{2;\rho\alpha}] \\
& - \frac{4}{3} (k_1^2 + k_2^2 + k_1 \cdot k_2) [\Delta_{2;\nu\rho}] \\
& + \frac{4}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\alpha\beta}] \\
& + 2 \{ [\Delta_{1;\rho\nu}] + g_{\rho\nu} [I_{quad}] \} - 2m^2 \{ [\Delta_{2;\rho\nu}] + g_{\rho\nu} [I_{\log}] \} \\
& = -\frac{i}{4\pi} \frac{1}{3} (q_\nu q_\rho - g_{\nu\rho} q^2) .
\end{aligned} \tag{6.22}$$

É fácil ver a condição (6.19) é identicamente satisfeita ao considerarmos (6.11) e (6.12), e ao considerarmos todas as condições em conjunto, ela não traz nenhuma informação adicional.

Deste modo, é suficiente que as condições (6.11), (6.12), (6.13) e (6.22) sejam satisfeitas para que as duas RFGs estabelecidas para $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ sejam obedecidas. Como mostrado no Capítulo 3, as RFGs não são uma imposição de caráter físico, mas apenas relações matemáticas entre as amplitudes perturbativas, e foram deduzidas utilizando propriedades gerais como linearidade da integração, linearidade e ciclicidade do traço e a álgebra das matrizes de Dirac. Se algumas das condições citadas não for obedecida, pode-se ter certeza que alguma propriedade matemática básica foi violada.

6.2 Identidades de Ward - Cálculo Explícito das Anomalias Gravitacionais

Finalmente, após a análise detalhada de cada sub-amplitude componente da amplitude gravitacional $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$, podemos reunir nossos resultados e de fato verificar as IW para o modelo estudado, relacionadas às invariâncias de Einstein e Weyl

$$q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^G = 0, \quad (6.23)$$

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma}^G = 0. \quad (6.24)$$

De acordo com a literatura do assunto, espera-se que estas identidades sejam violadas, caracterizando assim as anomalias de Einstein e Weyl.

Dentro da estratégia utilizada, as integrais divergentes básicas foram mantidas sem integração até o fim dos cálculos, atribuindo aos resultados obtidos um caráter mais universal. É natural, então, que o resultado explícito das contrações acima carreguem uma parte finita e uma parte divergente. Para cada anomalia, por uma simples questão organizacional, analisamos separadamente cada uma destas partes. Ao fim, faremos considerações sobre como interpretar a parte divergente.

6.2.1 Anomalia de Einstein

Parte finita

Para o estudo da IW de Einstein, começamos escrevendo a amplitude completa na forma (3.47)

$$T_{\mu\nu\rho\sigma}^G = -\frac{i}{64} \left\{ \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VV} + \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,AA} + \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VA} \right\}, \quad (6.25)$$

de modo que podemos saber a contribuição de cada tipo de amplitude (vetor-vetor, axial-axial e axial-vetor) para a anomalia. Como explicado acima, analisaremos primeiramente a parte finita da amplitude

$$T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{fin})} = -\frac{i}{64} \left\{ \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VV(\text{fin})} + \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,AA(\text{fin})} + \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VA(\text{fin})} \right\}. \quad (6.26)$$

A contração com o momento externo no leva a

$$q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{fin})} = -\frac{i}{64} \left\{ q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VV(\text{fin})} + q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,AA(\text{fin})} + q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VA(\text{fin})} \right\}, \quad (6.27)$$

sendo que analisaremos cada termo separadamente.

Quanto ao setor vetorial, sua representação em termos de sub-amplitudes é

$$\begin{aligned} q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VV(\text{fin})} = & 4 \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VV(\text{fin})} + q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VV(\text{fin})} \right] \\ & - 2q_\sigma \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{VV(\text{fin})} + q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{VV(\text{fin})} \right] \\ & + q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{VV(\text{fin})} \right] - 2q_\nu \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VV(\text{fin})} \right] \\ & + q^2 q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{VV(\text{fin})} \right] - 2q^2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{VV(\text{fin})} \right] \\ & + (\sigma \leftrightarrow \rho). \end{aligned} \quad (6.28)$$

O resultado final pode ser calculado exatamente usando os seguintes resultados (ver Seção 5.1)

$$\begin{aligned} T_{\rho;\mu\nu}^{VV(\text{fin})} &= \frac{1}{2} q_\rho \left[T_{\mu\nu}^{VV(\text{fin})} \right], \\ q^\mu T_{\mu\nu}^{VV(\text{fin})} &= 0, \\ q^\mu T_{\rho;\mu\nu}^{VV(\text{fin})} &= 0, \\ q^\rho T_{\rho;\mu\nu}^{VV(\text{fin})} &= \frac{1}{2} q^2 \left[T_{\mu\nu}^{VV(\text{fin})} \right], \\ q^\mu T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV(\text{fin})} &= 0, \\ q^\sigma T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV(\text{fin})} &= \frac{1}{4} q^2 q_\rho \left[T_{\mu\nu}^{VV(\text{fin})} \right], \end{aligned} \quad (6.29)$$

que podem ser facilmente verificadas através das expressões explícitas das amplitudes. Substituindo tais resultados em (6.28), vemos que todas as contribuições das sub-amplitudes se cancelam

$$q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VV(\text{fin})} = 0. \quad (6.30)$$

No setor axial podemos proceder da mesma forma. A expressão em termos de sub-amplitudes é

$$\begin{aligned}
q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,AA(\text{fin})} = & 4 \left[q^\mu T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AA(\text{fin})} + q^\mu T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AA(\text{fin})} \right] \\
& - 2q_\sigma \left[q^\mu T_{\nu;\mu\rho}^{AA(\text{fin})} + q^\mu T_{\mu;\nu\rho}^{AA(\text{fin})} \right] \\
& - 2q_\nu \left[q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AA(\text{fin})} + q^\mu T_{\rho;\mu\sigma}^{AA(\text{fin})} \right] \\
& + q_\nu q_\sigma \left[q^\mu T_{\mu\rho}^{AA(\text{fin})} \right] \\
& - 2q^2 \left[T_{\sigma;\nu\rho}^{AA(\text{fin})} \right] + q^2 q_\sigma \left[T_{\nu\rho}^{AA(\text{fin})} \right].
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Utilizando os resultados obtidos na Seção 5.2

$$\begin{aligned}
T_{\rho;\mu\nu}^{AA(\text{fin})} &= \frac{1}{2} q_\rho \left[T_{\mu\nu}^{AA(\text{fin})} \right], \\
q^\mu T_{\rho;\mu\nu}^{AA(\text{fin})} &= \frac{1}{2} q_\rho \left[q^\mu T_{\mu\nu}^{AA(\text{fin})} \right], \\
q^\rho T_{\rho;\mu\nu}^{AA(\text{fin})} &= \frac{q^2}{2} \left[T_{\mu\nu}^{AA(\text{fin})} \right], \\
q^\mu T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA(\text{fin})} &= -\frac{i}{(4\pi)} \frac{2m^2}{q^2} q_\nu (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) \left[\xi_0^{(0)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} q_\sigma q_\rho \left[q^\mu T_{\mu\nu}^{AA(\text{fin})} \right], \\
q^\sigma T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA(\text{fin})} &= \frac{1}{4} q^2 q_\rho \left[T_{\mu\nu}^{AA(\text{fin})} \right],
\end{aligned}$$

chegamos a

$$\begin{aligned}
q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,AA(\text{fin})} = & -\frac{i}{(4\pi)} \frac{8m^2}{q^2} q_\rho (q_\nu q_\sigma - q^2 g_{\nu\sigma}) \left[\xi_0^{(0)} \right] \\
& -\frac{i}{(4\pi)} \frac{8m^2}{q^2} q_\sigma (q_\nu q_\rho - q^2 g_{\nu\rho}) \left[\xi_0^{(0)} \right].
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Observe que para $m = 0$ o lado direito da expressão acima se anula.

Finalmente, para o setor axial-vetor, a contração é

$$\begin{aligned}
q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VA(\text{fin})} &= \pm 4q^\mu \left(T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA(\text{fin})} + T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV(\text{fin})} \right) \\
&\pm 4q^\mu \left(T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VA(\text{fin})} + T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AV(\text{fin})} \right) \\
&\mp 2q_\sigma q^\mu \left(T_{\nu;\mu\rho}^{VA(\text{fin})} + T_{\nu;\mu\rho}^{AV(\text{fin})} \right) \\
&\mp 2q_\sigma q^\mu \left(T_{\mu;\nu\rho}^{VA(\text{fin})} + T_{\mu;\nu\rho}^{AV(\text{fin})} \right) \\
&\mp 2q_\nu q^\mu \left(T_{\sigma;\mu\rho}^{VA(\text{fin})} + T_{\sigma;\mu\rho}^{AV(\text{fin})} \right) \\
&\pm q_\nu q_\sigma q^\mu \left(T_{\mu\rho}^{VA(\text{fin})} + T_{\mu\rho}^{AV(\text{fin})} \right) \\
&\mp 2q^2 \left(T_{\sigma;\nu\rho}^{VA(\text{fin})} + T_{\sigma;\nu\rho}^{AV(\text{fin})} \right) \\
&\pm q^2 q_\sigma \left(T_{\nu\rho}^{VA(\text{fin})} + T_{\nu\rho}^{AV(\text{fin})} \right) .
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Usamos os resultados obtidos na Seção 5.3

$$T_{\rho;\mu\nu}^{AV(\text{fin})} = \frac{q_\rho}{2} \left[T_{\mu\nu}^{AV(\text{fin})} \right] , \tag{6.34}$$

$$q^\mu T_{\rho;\mu\nu}^{AV(\text{fin})} = \frac{q_\rho}{2} \left[q^\mu T_{\mu\nu}^{AV(\text{fin})} \right] , \tag{6.35}$$

$$q^\rho T_{\rho;\mu\nu}^{AV(\text{fin})} = \frac{q^2}{2} \left[T_{\mu\nu}^{AV(\text{fin})} \right] , \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}
q^\mu T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV(\text{fin})} &= \frac{1}{3} \varepsilon_\nu^\alpha q_\alpha (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) \\
&\quad + 2\varepsilon_\nu^\alpha q_\alpha \frac{m^2}{q^2} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) \left[\xi_0^{(0)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} q_\sigma q_\rho \left[q^\mu T_{\mu\nu}^{AV(\text{fin})} \right] ,
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$$q^\sigma T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV(\text{fin})} = \frac{1}{4} q^2 q_\rho \left[T_{\mu\nu}^{AV(\text{fin})} \right] , \tag{6.38}$$

para chegar a

$$\begin{aligned}
q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VA(\text{fin})} &= \pm \frac{i}{(4\pi)} \frac{8}{3} \varepsilon_\nu^\alpha q_\alpha \left[q_\rho q_\sigma - q^2 g_{\rho\sigma} \right] \\
&\pm \frac{i}{(4\pi)} \frac{16m^2}{q^2} \varepsilon_\nu^\alpha q_\alpha (q_\rho q_\sigma - q^2 g_{\rho\sigma}) \left[\xi_0^{(0)} \right] .
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Substituindo os resultados acima em (6.27) obtemos

$$\begin{aligned}
q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{fin})} = & \pm \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{24} \varepsilon_\nu^\alpha q_\alpha (q_\rho q_\sigma - q^2 g_{\rho\sigma}) \\
& \pm \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{4} \frac{m^2}{q^2} \varepsilon_\nu^\alpha q_\alpha (q_\rho q_\sigma - q^2 g_{\rho\sigma}) \left[\xi_0^{(0)} \right] \\
& - \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{8} \frac{m^2}{q^2} q_\rho (q_\nu q_\sigma - q^2 g_{\nu\sigma}) \left[\xi_0^{(0)} \right] \\
& - \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{8} \frac{m^2}{q^2} q_\sigma (q_\nu q_\rho - q^2 g_{\nu\rho}) \left[\xi_0^{(0)} \right].
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Notamos aqui que as IWs foram definidas para férmions de Weyl, e nossos cálculos foram feitos para férmions massivos. Ao tomarmos o valor local de massa nula no resultado acima, finalmente chegamos à parte da anomalia de Einstein que surge da parte finita

$$q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{fin})} = \pm \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{24} \varepsilon_\nu^\alpha q_\alpha (q_\rho q_\sigma - q^2 g_{\rho\sigma}). \tag{6.41}$$

Notamos aqui que, para massa nula, o termo anômalo obtido acima vem inteiramente da parte axial-vetor. Resta-nos agora calcular a contribuição da parte divergente.

Parte divergente

A parte divergente é calculada da mesma forma, escrevendo a contração total em termos da soma de amplitudes com diferentes caracteres de vértice

$$q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{div})} = -\frac{i}{64} \left\{ q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VV(\text{div})} + q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,AA(\text{div})} + q^\mu \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VA(\text{div})} \right\},$$

e, sabendo os resultados explícitos das sub-amplitudes calculadas no Capítulo 5, substituímos estes resultados para obter o resultado final da anomalia. Como a parte divergente das amplitudes é escrita em termos de uma grande quantidade de objetos divergentes tensoriais, sendo sua

manipulação longa e tediosa, vamos apenas mostrar o resultado final da contração, que é

$$\begin{aligned}
q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{div})} = & -\frac{i}{16} \left\{ 2q^\mu \mathcal{D}_{\nu\sigma\mu\rho} + 2q^\mu \mathcal{D}_{\mu\sigma\nu\rho} \right. \\
& \pm \left(-\varepsilon_\rho^\lambda \right) q^\mu \mathcal{D}_{\nu\sigma\mu\lambda} \pm \left(-\varepsilon_\rho^\lambda \right) q^\mu \mathcal{D}_{\mu\sigma\nu\lambda} \\
& \pm \left(-\varepsilon_\nu^\lambda \right) q^\mu \mathcal{D}_{\mu\sigma\rho\lambda} \pm \left(-\varepsilon_\mu^\lambda \right) q^\mu \mathcal{D}_{\nu\sigma\lambda\rho} \\
& + 2\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{VV} + \mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{1,AV} + \mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{2,AV} \\
& - 2m^2 q_\rho \left\{ [\Delta_{2;\nu\sigma}] + g_{\nu\sigma} [I_{\log}(m^2)] \right\} \\
& - 2m^2 g_{\nu\rho} q^\alpha \left\{ [\Delta_{2;\sigma\alpha}] + g_{\sigma\alpha} [I_{\log}(m^2)] \right\} \\
& \left. + 4(q_\sigma g_{\rho\nu} + q_\nu g_{\rho\sigma}) [I_{quad}(m^2)] \right\} + (\rho \leftrightarrow \sigma). \tag{6.42}
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{VV}$, $\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{1,AV}$, $\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{2,AV}$ são definidos no Apêndice B.

Notamos aqui que ao tomar o limite de massa nula, os termo proporcionais a m^2 se anulam, assim como o termo $I_{quad}(0)$. Isto pode ser observado na própria definição do objeto (Apêndice B):

$$I_{quad}(0) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)} \ln \left(\frac{k^2}{k^2 - m^2} \right)_{m=0} = 0.$$

Deste modo, a contribuição da parte divergente para a anomalia é

$$\begin{aligned}
q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{div})} = & -\frac{i}{16} \left\{ 2q^\mu \mathcal{D}_{\nu\sigma\mu\rho} + 2q^\mu \mathcal{D}_{\mu\sigma\nu\rho} \right. \\
& \pm \left(-\varepsilon_\rho^\lambda \right) q^\mu \mathcal{D}_{\nu\sigma\mu\lambda} \pm \left(-\varepsilon_\rho^\lambda \right) q^\mu \mathcal{D}_{\mu\sigma\nu\lambda} \\
& \pm \left(-\varepsilon_\nu^\lambda \right) q^\mu \mathcal{D}_{\mu\sigma\rho\lambda} \pm \left(-\varepsilon_\mu^\lambda \right) q^\mu \mathcal{D}_{\nu\sigma\lambda\rho} \\
& \left. + 2\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{VV} + \mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{1,AV} + \mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{2,AV} \right\} + (\rho \leftrightarrow \sigma). \tag{6.43}
\end{aligned}$$

e $\mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma}$, $\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{VV}$, $\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{1,AV}$, $\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{2,AV}$ são objetos tensoriais definidos como somas de termos de superfícies.

Um comentário importante pode ser feito a respeito do resultado final da anomalia, que é a soma da parte finita com a divergente:

$$q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^G = q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{fin})} + q^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{div})}.$$

Já foi dito na Seções 5.1 e 5.3 que a condição para a invariância de *gauge* na QED_2 é a fixação de um valor nulo para o termos de superfície $\Delta_{2;\mu\nu}$, o que chamamos de *relação de consistência para a invariância de gauge*. Dentro do contexto da anomalia AV bidimensional, esta relação de consistência é a responsável por tornar a IW vetorial automaticamente satisfeita, enquanto a IW axial é violada por um termo anômalo finito, caracterizando o fenômeno da anomalia. Na dimensão física $(3 + 1)$, em teorias onde a simetria de *gauge* está definida, as relações de consistência para que a invariância de gauge não seja violada são análogas: todos os termos de superfície devem ser nulos. No contexto da anomalia ABJ, estas relações "salvam" a invariância de *gauge* enquanto são responsáveis pelo termo anômalo na identidade de Ward axial (analogamente à anomalia AV bidimensional), o que está de acordo com os resultados experimentais para o decaimento do pión neutro.

Levando estes resultados em conta, podemos nos perguntar qual seria o efeito das relações de consistência para a amplitude gravitacional. Fica evidente que, sendo a parte divergente (6.43) formada apenas por termos de superfície, a incorporação das relações de consistência (termos de superfície nulos) leva a um resultado finito para a anomalia:

$$q^\mu \mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^G = \pm \frac{1}{24} \frac{1}{(4\pi)} \varepsilon_\nu^\alpha q_\alpha (q_\rho q_\sigma - q^2 g_{\rho\sigma}), \quad (6.44)$$

onde aqui definimos $\mathcal{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ como uma amplitude consistente, como todos termos de superfície nulos. Lembramos que este termo anômalo vem apenas da parte AV da amplitude total, e está de acordo com a literatura.

6.2.2 Anomalia de Weyl

Para o estudo da anomalia de Weyl, precisamos da contração da amplitude com a métrica

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma}^G = -\frac{i}{64} \left\{ g^{\mu\nu} \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VV} + g^{\mu\nu} \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,AA} + g^{\mu\nu} \widehat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{G,VA} \right\}, \quad (6.45)$$

O estudo da anomalia de Weyl é análogo à anomalia de Einstein, de modo que vamos poupar o leitor de passos intermediários e já estabelecer o resultado para a parte finita e divergente.

Parte finita

Para a parte finita, os resultados encontrados para cada setor de sub-amplitudes foi

$$g^{\mu\nu}\hat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{VV(\text{fin})} = \frac{i}{(4\pi)} \frac{16}{3} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) + \frac{i}{(4\pi)} \frac{32m^2}{q^2} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) \left[\xi_0^{(0)} \right], \quad (6.46)$$

$$g^{\mu\nu}\hat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AA(\text{fin})} = \frac{i}{(4\pi)} \frac{16}{3} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}), \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\hat{T}_{\mu\nu\rho\sigma}^{AV(\text{fin})} &= \mp \frac{i}{(4\pi)} \frac{8}{3} (\varepsilon_{\rho\alpha} q^\alpha q_\sigma + \varepsilon_{\sigma\alpha} q^\alpha q_\rho) \\ &\mp \frac{i}{(4\pi)} \frac{16m^2}{q^2} (\varepsilon_{\rho\alpha} q^\alpha q_\sigma + \varepsilon_{\sigma\alpha} q^\alpha q_\rho) \left[\xi_0^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (6.48)$$

que substituídas em (6.45) levam a

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{fin})} &= \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{6} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) \mp \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{24} (\varepsilon_{\rho\alpha} q^\alpha q_\sigma + \varepsilon_{\sigma\alpha} q^\alpha q_\rho) \\ &+ \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{2} \frac{m^2}{q^2} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) \left[\xi_0^{(0)} \right] \\ &\mp \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{4} \frac{m^2}{q^2} (\varepsilon_{\rho\alpha} q^\alpha q_\sigma + \varepsilon_{\sigma\alpha} q^\alpha q_\rho) \left[\xi_0^{(0)} \right]. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Para massa nula, temos o valor da parte finita da anomalia de Weyl

$$g^{\mu\nu}T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{fin})} = \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{6} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) \mp \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{24} (\varepsilon_{\rho\alpha} q^\alpha q_\sigma + \varepsilon_{\sigma\alpha} q^\alpha q_\rho). \quad (6.50)$$

Notamos aqui que, ao contrário da anomalia de Einstein, os termos que contribuem para esta resultado não vêm apenas da parte AV, mas têm contribuições de todos os setores VV, AV e AA.

Parte divergente

Para a parte divergente temos

$$\begin{aligned}
(64) g^{\mu\nu} [iT_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{div})}] &= 8 [g^{\mu\nu} T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{VV(\text{div})}] - 4q^\sigma [g^{\mu\nu} T_{\mu;\nu\rho}^{VV(\text{div})}] \\
&\quad - 4 [q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VV(\text{div})}] + 2q_\sigma [q^\mu T_{\mu\rho}^{VV(\text{div})}] \\
&\quad + 8 [g^{\mu\nu} T_{\mu\sigma;\nu\rho}^{AA(\text{div})}] - 4q^\sigma [g^{\mu\nu} T_{\mu;\nu\rho}^{AA(\text{div})}] \\
&\quad - 4 [q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AA(\text{div})}] + 2q_\sigma [q^\mu T_{\mu\rho}^{AA(\text{div})}] \\
&\quad \pm 8 [g^{\mu\nu} T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{VA(\text{div})} + g^{\mu\nu} T_{\nu\sigma;\mu\rho}^{AV(\text{div})}] \\
&\quad \mp 4q_\sigma [g^{\mu\nu} T_{\nu;\mu\rho}^{VA(\text{div})} + g^{\mu\nu} T_{\nu;\mu\rho}^{AV(\text{div})}] \\
&\quad \mp 4 [q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{VA(\text{div})} + q^\mu T_{\sigma;\mu\rho}^{AV(\text{div})}] \\
&\quad \pm 2q_\sigma [q^\mu T_{\mu\rho}^{VA(\text{div})} + q^\mu T_{\mu\rho}^{AV(\text{div})}] \\
&\quad + (\sigma \leftrightarrow \rho) , \tag{6.51}
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados encontrados no Capítulo 5 temos

$$\begin{aligned}
(64) g^{\mu\nu} [iT_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{div})}] &= \pm 2 (-\varepsilon_\rho^\lambda) g^{\mu\nu} \mathcal{D}_{\mu\sigma\nu\lambda} \pm 2 (-\varepsilon_\nu^\lambda) \mathcal{D}_{\nu\rho\lambda\sigma} \\
&\quad + 4g^{\mu\nu} \mathcal{D}_{\mu\sigma\nu\rho} + 2\mathcal{S}_{\rho\sigma}^{VV} + \mathcal{S}_{\rho\sigma}^{AV} \\
&\quad + 6g_{\sigma\rho} [I_{quad}(m^2)] - 4m^2 \{ \Delta_{2;\sigma\rho} + g_{\sigma\rho} [I_{\log}(m^2)] \} \\
&\quad + (\rho \leftrightarrow \sigma) , \tag{6.52}
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{S}_{\rho\sigma}^{VV}$ e $\mathcal{S}_{\rho\sigma}^{AV}$ são tensores definidos como soma de termos de superfície (ver Apêndice B).

Ao tomarmos o valor de massa nula para os férmions, temos então o valor da parte divergente da anomalia de Weyl

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{div})} &= -\frac{i}{16} \left\{ \pm 2 (-\varepsilon_\rho^\lambda) g^{\mu\nu} \mathcal{D}_{\mu\sigma\nu\lambda} \pm 2 (-\varepsilon_\nu^\lambda) \mathcal{D}_{\nu\rho\lambda\sigma} \right. \\
&\quad \left. + 4g^{\mu\nu} \mathcal{D}_{\mu\sigma\nu\rho} + 2\mathcal{S}_{\rho\sigma}^{VV} + \mathcal{S}_{\rho\sigma}^{AV} \right\} + (\rho \leftrightarrow \sigma) . \tag{6.53}
\end{aligned}$$

Levando em conta, então, que o valor total da anomalia é a soma da parte finita com a divergente

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma}^G = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{fin})} + g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma}^{G(\text{div})} , \tag{6.54}$$

podemos fazer as mesmas considerações sobre consistência que fizemos para a anomalia de Einstein. Ao incorporar as relações de consistência, anulando assim os termos de superfície, temos um resultado completamente finito para a anomalia

$$g^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma}^G = \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{6} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) \mp \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{24} (\varepsilon_{\rho\alpha} q^\alpha q_\sigma + \varepsilon_{\sigma\alpha} q^\alpha q_\rho) . \quad (6.55)$$

Tendo calculado as anomalias e interpretado a parte divergente com argumentos de consistência física, faremos agora uma análise e discussão dos resultados para estabelecer nosso ponto de vista sobre as anomalias gravitacionais.

7 RESUMO E ANÁLISE FINAL DOS RESULTADOS

O fenômeno das anomalias certamente está entre os mais intrigantes e surpreendentes fenômenos que surgem como consequência do formalismo da TQC. Depois da descoberta da anomalia triangular AVV , por Adler, Bell e Jackiw (BELL; JACKIW, 1969) (ADLER, 1969), e seu sucesso na descrição da fenomenologia do pión neutro, muitas outras foram descobertas e estudadas exaustivamente. Apesar das incontáveis investigações feitas dentro dos mais variados contextos da TQC, este assunto ainda desperta muito interesse na literatura mesmo nos dias de hoje. Isto se deve ao fato das anomalias estarem relacionadas à consistência interna dos modelos de TQC. De fato, para exibir unitariedade e renormalizabilidade, um modelo não deve possuir uma anomalia em uma simetria dinâmica, como é o caso, por exemplo, da bem conhecida simetria de *gauge* no modelo de Weinberg-Salam (GEORGI; GLASHOW, 1972) (GROSS; JACKIW, 1972).

No contexto dos modelos gravitacionais, a importância do fenômeno das anomalias não é menor, especialmente depois do trabalho seminal de Alvarez-Gaume e Witten (1984). Neste trabalho os referidos autores apresentam o primeiro estudo mais geral sobre a existência de anomalias em modelos gravitacionais formulados em diversas dimensões do espaço-tempo.

A tarefa de unificar todas as quatro interações conhecidas, incluindo a gravitacional, através de uma única teoria, representa hoje uma importante área de pesquisa na física, a qual tem se mostrado muito árdua. No contexto da TQC, a referida unificação envolve necessariamente o desafio de formular modelos gravitacionais que sejam consistentes com os princípios da mecânica quântica. Para que tais modelos tenham a desejada consistência interna, o conhecimento das possíveis anomalias associadas desempenha um papel importante.

Em particular, modelos de TQC formulados em duas dimensões do espaço-tempo fornecem laboratórios teóricos geralmente mais simples para se investigar o fenômeno das anomalias gravitacionais, pois a complexidade algébrica é naturalmente menor nesta dimensão. É exatamente dentro deste contexto que a presente investigação se insere, com o objetivo de dar uma contribuição a fim de aprimorar o entendimento do fenômeno das anomalias de modo geral. Nossa investigação tem como base um modelo de férmions quirais acoplados a um campo gravitacional de fundo, formulado num espaço-tempo curvo bidimensional. Enquanto os férmions são quantizados segundo as regras canônicas da TQC, o campo gravitacional é tomado como sendo clássico (ver Capítulo 2). Tal modelo (ou similar) já foi utilizado em investigações sobre anomalias gravitacionais em vários trabalhos na literatura como, por exemplo, nas Refs.

(ALVAREZ-GAUME; WITTEN, 1984), (BERTLMANN; KOHLPRATH, 2001), (HWANG, 1987) e (BERGER, 1990), sendo que as respectivas conclusões apontam para a existência de anomalias.

Concretamente, o objeto alvo de nossa investigação é a função de Green de dois pontos $G_{\mu\nu\rho\sigma}(q)$ que é definida como sendo o valor esperado no vácuo do produto de dois tensores energia-momento:

$$G_{\mu\nu\rho\sigma}(q) = i \int d^2x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T [T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(0)] | 0 \rangle .$$

Esta função de Green, quando tratada perturbativamente no nível de aproximação *1-loop* (denominada neste contexto de $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$), pode ser decomposta em termos de uma combinação de sub-amplitudes de dois pontos possuindo vértices vetoriais e axiais. Entre estas sub-amplitudes podemos identificar o tensor de polarização do vácuo (*VV*) e a amplitude anômala *AV*, ambas pertencentes à QED_2 . Podemos citar algumas vantagens desta decomposição. A primeira e mais óbvia, é a possibilidade de dividir os cálculos de $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$, que são longos e tediosos, em blocos menores e algebricamente mais simples de manipular e analisar. A segunda, é que podemos exigir que cada sub-amplitude satisfaça os seus próprios vínculos de consistência, como é o caso da invariância de *gauge* associada com as amplitudes *VV* e *AV*. Uma terceira vantagem, talvez menos óbvia, é a possibilidade de identificar a origem dos possíveis termos anômalos de $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$.

O cálculo de amplitudes perturbativas de TQC envolvendo correções que contenham *loops* é, geralmente, um processo delicado devido à presença de objetos matematicamente indefinidos dado o seu caráter divergente. As regularizações, que são as ferramentas mais usadas para se tratar as divergências, não são livres de problemas. Entre eles podemos citar a presença ambiguidades, violações de simetrias e unitariedade além de limitações de aplicabilidade. Em geral, podemos dizer que existem métodos de regularização que exibem consistência mínima porém não são universais, enquanto outros são universais mas não possuem consistência mínima. Neste trabalho adotamos um método alternativo e que não possui limitações de aplicabilidade (BATTISTEL, 1999) para calcular as sub-amplitudes de $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$. A grande vantagem deste método, além de ser totalmente algébrico, talvez seja a de isolar as quantidades básicas indefinidas sem calculá-las explicitamente para, somente numa análise final, através de imposições gerais de consistência do cálculo perturbativo, aferir seus possíveis valores. O referido método já foi aplicado com sucesso em vários modelos e fenômenos físicos dentro

da TQC, incluindo-se o fenômeno das anomalias em duas, quatro e seis dimensões (BATTISTEL; FONSECA; DALLABONA, 2012) (BATTISTEL; DALLABONA, 2002a) (FONSECA; DALLABONA; BATTISTEL, 2014).

Dentro desta abordagem calculamos explicitamente (Capítulo 5) todas as sub-amplitudes que formam $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$. Todos os resultados foram organizados utilizando-se a mesma sistemática. Para cada integral de Feynman, separamos a parte finita da puramente divergente, através de uma identidade algébrica, sempre supondo válida a linearidade da operação de integração. A parte finita obtida foi integrada sem qualquer restrição e organizada em termos das funções $\xi_k^{(N)}(q^2, m^2)$, que são definidas por integrais nos parâmetros de Feynman. Por outro lado, as peças divergentes, agora “desprovidas” de conteúdo físico, foram simplesmente organizadas através de um conjunto de objetos convenientes definidos no Apêndice B. Parte deste conjunto de objetos divergentes é formada por diferenças de integrais que podem ser identificadas como termos de superfície.

As RFGs obtidas no Capítulo 3 desempenham o importante papel de estabelecer testes de consistência mínimos para estas sub-amplitudes calculadas. As RFGs podem ser vistas como vínculos que as sub-amplitudes devem satisfazer quando contraídas com o momento externo ou a métrica. A violação de uma RFG tem como uma consequência a violação da linearidade da operação de integração.

No setor vetorial de $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ verificamos que as RFGs definidas para a sub-amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$ são todas automaticamente satisfeitas. Para a amplitude $T_{\rho;\mu\nu}^{VV}$, por outro lado, vimos que a RFG associada à contração com a métrica, Eq. (3.12), apresentou um termo potencialmente violador dado por

$$g^{\rho\mu} \left[T_{\rho;\mu\nu}^{VV} \right] \Big|_{\text{viol}} = -Q^\alpha \left\{ [g^{\rho\mu} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho}] - g_{\alpha\nu} [g^{\rho\mu} \Delta_{2;\mu\rho}] \right\} . \quad (7.1)$$

Esta RFG pode então ser satisfeita se a relação envolvendo o traço dos tensores $\square_{3;\alpha\nu\mu\rho}$ e $\Delta_{2;\mu\rho}$,

$$g^{\alpha\nu} g^{\mu\rho} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho} = 2g^{\mu\rho} \Delta_{2;\mu\rho} , \quad (7.2)$$

for verdadeira. De fato este resultado pode ser obtido se assumirmos como válidas as seguintes operações

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\nu} [\square_{3;\alpha\nu\mu\rho}] &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k^2 k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^3} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8(k^2 - m^2) k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^3} + m^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \\
&= m^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^3}. \tag{7.3}
\end{aligned}$$

A integral resultante é finita e pode ser integrada facilmente para obtermos o valor

$$g^{\alpha\nu} [\square_{3;\alpha\nu\mu\rho}] = - \left(\frac{i}{2\pi} \right) g_{\mu\rho}. \tag{7.4}$$

Sendo assim, se nos permitirmos realizar tais operações, concluímos que apesar do tensor $\square_{3;\alpha\nu\mu\rho}$ ser uma quantidade divergente e indeterminada, seu traço é finito e não-nulo. Da mesma forma, considerando agora o lado esquerdo de (7.2), temos

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}] &= g^{\alpha\beta} \left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\alpha\beta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \right] \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k^2}{(k^2 - m^2)^2} - 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - m^2}. \tag{7.5}
\end{aligned}$$

Ao admitirmos que a linearidade da integração é válida para integrais divergentes, podemos escrever

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}] &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2(k^2 - m^2) + 2m^2}{(k^2 - m^2)^2} - 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2}{k^2 - m^2} + 2m^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\
&\quad - 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \\
&= 2m^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \tag{7.6}
\end{aligned}$$

que é uma integral finita e integrável segundo procedimentos bem estabelecidos. Obtemos então

$$g^{\alpha\beta} [\Delta_{2;\alpha\beta}] = -\frac{i}{2\pi}, \quad (7.7)$$

de modo que a condição

$$g^{\rho\mu} [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}] \Big|_{\text{viol}} = 0$$

é satisfeita e a RFG

$$g^{\mu\rho} [T_{\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] = [T_V^V(k_2)] + m [T_V^{SV}(k_1, k_2)],$$

portanto, é preservada.

Para a amplitude $T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}$, as RFGs definidas pelas contrações com o momento externo são automaticamente satisfeitas. Em contraste, a preservação da RFG relativa à contração com a métrica, Eq. (3.15), depende da condição

$$\begin{aligned} & \left[g^{\lambda\xi} \square_{2;\lambda\xi\rho\nu} \right] + \frac{1}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta \right) \left[g^{\lambda\xi} \Sigma_{4;\lambda\xi\rho\nu\alpha\beta} \right] \\ & - \frac{1}{2} (k_1^2 + k_2^2) \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\nu\rho} \right] - k_{1\rho} (k_1 + k_2)^\alpha \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\nu\alpha} \right] \\ & - \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\nu (k_1 + k_2)^\alpha \left[g^{\lambda\xi} \square_{3;\lambda\xi\rho\alpha} \right] + (k_1 + k_2)_\nu k_{1\rho} \left[g^{\lambda\xi} \Delta_{2;\lambda\xi} \right] \\ & - \frac{5}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) \left[\square_{3;\beta\rho\nu\alpha} \right] + \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) \left[\square_{3;\rho\nu\beta\alpha} \right] \\ & + \frac{1}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) \left[\square_{3;\nu\rho\alpha\beta} \right] + \frac{1}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) \left[\square_{3;\alpha\rho\nu\beta} \right] \\ & + \frac{2}{3} (k_{1\rho} k_1^\alpha + k_{2\rho} k_2^\alpha - k_{1\rho} k_2^\alpha + 2k_{2\rho} k_1^\alpha) [\Delta_{2;\nu\alpha}] \\ & - \frac{2}{3} (k_{1\nu} k_1^\alpha + k_{2\nu} k_2^\alpha + 2k_{1\nu} k_2^\alpha - k_{2\nu} k_1^\alpha) [\Delta_{2;\rho\alpha}] \\ & - \frac{4}{3} (k_1^2 + k_2^2 + k_1 \cdot k_2) [\Delta_{2;\nu\rho}] \\ & + \frac{4}{3} \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\beta k_2^\alpha \right) g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\alpha\beta}] \\ & + 2 \{ [\Delta_{1;\rho\nu}] + g_{\rho\nu} [I_{quad}] \} - 2m^2 \{ [\Delta_{2;\rho\nu}] + g_{\rho\nu} [I_{log}] \} \\ & = -\frac{i}{4\pi} \frac{1}{3} (q_\nu q_\rho - g_{\nu\rho} q^2). \end{aligned} \quad (7.8)$$

ser satisfeita. Novamente, a verificação da identidade acima passa pelo cálculo do traço de tensores que podem ser identificados como termos de superfície. Usando-se a mesma sequência

de passos mostrados nos cálculos acima, temos

$$\begin{aligned}
g^{\lambda\xi} [\square_{2;\lambda\xi\rho\nu}] &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k^2 k_\rho k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\rho k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4(k^2 - m^2) k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} + m^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} + \\
&\quad - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)} \\
&= -2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)} + m^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\
&= -2 [\Delta_{1;\alpha\beta}] - 2g_{\alpha\beta} [I_{quad}(m^2)] + \\
&\quad + 2m^2 [\Delta_{2;\alpha\beta}] + 2m^2 g_{\alpha\beta} [I_{log}(m^2)] , \tag{7.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{\lambda\xi} [\Sigma_{4;\lambda\xi\rho\nu\alpha\beta}] &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{48k^2 k_\alpha k_\beta k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^4} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{48k_\alpha k_\beta k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{48(k^2 - m^2) k_\alpha k_\beta k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^4} + m^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{48k_\alpha k_\beta k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^4} \\
&\quad - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{48k_\alpha k_\beta k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \tag{7.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{48k_\alpha k_\beta k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^4} \\
&= -2 \left(\frac{i}{4\pi} \right) (g_{\nu\rho} g_{\alpha\beta} + g_{\nu\alpha} g_{\rho\beta} + g_{\nu\beta} g_{\rho\alpha}) , \tag{7.11}
\end{aligned}$$

Substituindo estes resultados para os traços, assim como a expressão explícita dos termos de superfícies (Apêndice B), podemos verificar que o termo violador se anula de modo que a RFG

$$g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2)] = [T_{\rho;\nu}^V(k_2)] + m [T_{\rho;\nu}^{SV}(k_1, k_2)] ,$$

é satisfeita.

No setor axial encontramos uma situação inteiramente semelhante. Ou seja, as RFGs relativas às contrações das sub-amplitudes com o momento externo são automaticamente satisfeitas enquanto às relativas as contrações com a métrica dependem da validade das mesmas condições encontradas no setor vetorial, conforme discutido nos parágrafos acima.

Finalmente, no setor axial-vetor vimos que até mesmo as RFGs derivadas das contrações com o momento externo podem não ser automaticamente satisfeitas. No caso importante da

sub-amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$, a RFG

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_\nu^A(k_1) \right] + \left[T_\nu^A(k_2) \right] - 2m \left[T_\nu^{PV}(k_1, k_2) \right] \quad (7.12)$$

somente pode ser satisfeita se a condição (7.7) for válida. Condições semelhantes às discutidas acima também são encontradas nas contrações $q^\mu T_{\rho;\mu\nu}^{AV}$, $q^\mu T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}$, $g^{\rho\mu} T_{\rho;\mu\nu}^{AV}$ e $g^{\rho\mu} T_{\rho\sigma;\mu\nu}^{AV}$. Sendo assim, desta análise da consistência das sub-amplitudes podemos concluir que *as condições necessárias para que todas as RFGs sejam satisfeitas envolvem traços de tensores, os quais podem ser identificados com termos de superfície, que são não-nulos.*

Por outro lado, as IWs exigem condições distintas para que sejam satisfeitas pelas sub-amplitudes calculadas. No setor vetorial, a preservação da invariância de *gauge* associada a sub-amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$ exige que

$$\Delta_{2;\mu\nu} = 0 . \quad (7.13)$$

Obviamente, o traço deste tensor também se anula

$$g^{\mu\nu} \Delta_{2;\mu\nu} = 0 , \quad (7.14)$$

em clara contradição com a condição (7.7). Entretanto, se assumirmos válida a integração simétrica e a linearidade na operação de integração, encontraríamos um resultado não nulo para $\Delta_{2;\mu\nu}$ pois

$$\begin{aligned} \Delta_{2;\mu\nu} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} , \\ &= g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} , \\ &= g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^2} , \\ &= -\frac{i}{4\pi} g_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (7.15)$$

Este resultado é comumente encontrado em algumas análises sobre o fenômeno das anomalias (BELL; JACKIW, 1969). Neste caso o traço seria

$$g^{\mu\nu} \Delta_{2;\mu\nu} = -\frac{i}{2\pi} , \quad (7.16)$$

o que está em concordância com (7.7). Porém com este resultado não podemos preservar a invariância de *gauge* da QED_2 .

No setor axial-vetor temos a sub-amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$. A RFG

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = - \left[T_V^A(k_1) \right] + \left[T_V^A(k_2) \right] - 2m \left[T_V^{PV}(k_1, k_2) \right], \quad (7.17)$$

é satisfeita somente se

$$g^{\mu\nu} \Delta_{2;\mu\nu} = -\frac{i}{2\pi}.$$

Entretanto a IW vetorial

$$q^\nu \left[T_{\mu\nu}^{AV} \right] = 0, \quad (7.18)$$

é verificada somente se

$$\Delta_{2;\mu\nu} = 0,$$

resultado que também implica que a IW axial

$$q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = -2m \left[T_V^{PV}(k_1, k_2) \right],$$

é violada por um termo anômalo. Neste cenário, a manutenção da invariância de *gauge* implica na violação tanto da RFG quanto da IW, ambas ligadas à contração $q^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV} \right]$.

Se $\Delta_{2;\mu\nu} = 0$, a condição (7.2) implica que

$$g^{\alpha\nu} \square_{3;\alpha\nu\mu\rho} = 0.$$

Este resultado, porém, tem como consequência que a condição (7.8) não pode ser satisfeita. Deste modo as RFGs para as contrações $g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV} \right]$, $g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA} \right]$, $g^{\mu\sigma} \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV} \right]$ e $q^\mu \left[T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV} \right]$ são violadas também. Em suma, podemos perceber claramente que *as condições que permitem manter as RFGs são incompatíveis com àquelas necessárias para preservar as IWs*.

Da análise da amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$, Seção 5.3, vimos que o termo anômalo, que é bem conhecido na literatura, emerge na situação na qual $\Delta_{2;\mu\nu} = 0$. Esta é a mesma condição que garante a preservação da invariância de *gauge* da QED_2 . Quais seriam, então, as consequências destas mesmas condições para a amplitude gravitacional $T_{\mu\nu\rho\sigma}^G$?

Generalizando o resultado $\Delta_{2;\mu\nu} = 0$, temos que

$$[\Sigma_{4;\mu\nu\alpha\beta\xi\chi}] = [\square_{3;\mu\nu\alpha\beta}] = [\square_{2;\mu\nu\alpha\beta}] = [\Delta_{1;\mu\nu}] = 0. \quad (7.19)$$

Com a imposição destas *relações de consistência* obtemos as sub-amplitudes “físicas”:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{VV}(q) = \left(\frac{i}{\pi}\right) (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left[\xi_2^{(-1)} - \xi_1^{(-1)}\right], \quad (7.20)$$

$$\mathcal{T}_{\rho;\mu\nu}^{VV}(q) = \frac{q_\rho}{2} \left[T_{\mu\nu}^{VV}(q)\right], \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}(q) &= (g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} + g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) [I_{quad}(m^2)] \\ &+ \left\{ \frac{1}{3} (g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}q^2 - g_{\mu\nu}q_\rho q_\sigma - g_{\sigma\rho}q_\mu q_\nu) \right. \\ &\quad - \frac{1}{6} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}q^2 - g_{\mu\rho}q_\nu q_\sigma - g_{\nu\sigma}q_\mu q_\rho) \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} (g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}q^2 - g_{\nu\rho}q_\mu q_\sigma - g_{\mu\sigma}q_\nu q_\rho) \right\} [I_{\log}(m^2)] \\ &+ \left\{ 2 \frac{q_\mu q_\nu q_\sigma q_\rho}{q^2} + q^2 (g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}) - q_\nu (g_{\mu\sigma}q_\rho + g_{\mu\rho}q_\sigma) \right. \\ &\quad \left. - q_\mu (g_{\nu\rho}q_\sigma + g_{\nu\sigma}q_\rho) \right\} \frac{i}{4\pi} \left[2\xi_2^{(0)} - \xi_1^{(0)}\right] \\ &+ \frac{2}{q^2} (q_\sigma q_\rho - q^2 g_{\sigma\rho}) (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \frac{i}{4\pi} \left[\xi_2^{(0)} - \xi_1^{(0)}\right] \\ &+ \frac{1}{4} q_\rho q_\sigma \left[T_{\mu\nu}^{VV}\right], \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{AA}(q) = \frac{i}{\pi} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left[\xi_2^{(-1)} - \xi_1^{(-1)}\right] - \frac{i}{\pi} g_{\mu\nu} m^2 \left[\xi_0^{(-1)}\right],$$

$$\mathcal{T}_{\rho;\mu\nu}^{AA}(q) = \frac{q_\rho}{2} \left[T_{\mu\nu}^{AA}(q)\right], \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}(q) &= (g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} + g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) [I_{quad}(m^2)] \\
&+ \left\{ \frac{1}{3} (g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}q^2 - g_{\mu\nu}q_{\rho}q_{\sigma} - g_{\sigma\rho}q_{\mu}q_{\nu}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{6} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}q^2 - g_{\mu\rho}q_{\nu}q_{\sigma} - g_{\nu\sigma}q_{\mu}q_{\rho}) \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} (g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}q^2 - g_{\nu\rho}q_{\mu}q_{\sigma} - g_{\mu\sigma}q_{\nu}q_{\rho}) - 2m^2 g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} \right\} [I_{\log}(m^2)] \\
&+ \left\{ 2 \frac{q_{\mu}q_{\nu}q_{\sigma}q_{\rho}}{q^2} + q^2 (g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}) \right. \\
&\quad \left. - q_{\nu} (g_{\mu\sigma}q_{\rho} + g_{\mu\rho}q_{\sigma}) - q_{\mu} (g_{\nu\rho}q_{\sigma} + g_{\nu\sigma}q_{\rho}) \right\} \frac{i}{4\pi} [2\xi_2^{(0)} - \xi_1^{(0)}] \\
&+ \frac{1}{q^2} (q_{\sigma}q_{\rho} - q^2 g_{\sigma\rho}) (q_{\mu}q_{\nu} - q^2 g_{\mu\nu}) \frac{i}{2\pi} [\xi_2^{(0)} - \xi_1^{(0)}] \\
&- \frac{m^2}{q^2} g_{\mu\nu} (q_{\sigma}q_{\rho} - q^2 g_{\sigma\rho}) \frac{i}{2\pi} [\xi_0^{(0)}] + \frac{1}{4} q_{\rho}q_{\sigma} [T_{\mu\nu}^{AA}] , \tag{7.24}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{AV}(q) = -\varepsilon_{\mu\beta}g^{\beta\alpha} [\mathcal{F}_{\alpha\nu}^{VV}(q)] , \tag{7.25}$$

$$\mathcal{F}_{\rho;\mu\nu}^{AV}(q) = -\varepsilon_{\mu\beta}g^{\beta\alpha} [\mathcal{F}_{\rho;\alpha\nu}^{VV}(q)] , \tag{7.26}$$

$$\mathcal{F}_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}(q) = -\varepsilon_{\mu\beta}g^{\beta\alpha} [\mathcal{F}_{\sigma\rho;\alpha\nu}^{VV}(q)] . \tag{7.27}$$

Como podemos observar, todos os termos ambíguos foram eliminados das sub-amplitudes.

Com estas sub-amplitudes, as IWs de $\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma}^G$ ficam (para $m = 0$)

$$q^{\mu} \mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma}^G = \pm \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{24} \varepsilon_{\nu}^{\alpha} q_{\alpha} (q_{\rho}q_{\sigma} - q^2 g_{\rho\sigma}) , \tag{7.28}$$

$$g^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma}^G = \frac{1}{(4\pi)} \left[\frac{1}{6} (q_{\sigma}q_{\rho} - q^2 g_{\sigma\rho}) \mp \frac{1}{24} (\varepsilon_{\rho\alpha}q^{\alpha}q_{\sigma} + \varepsilon_{\sigma\alpha}q^{\alpha}q_{\rho}) \right] . \tag{7.29}$$

Os resultados acima mostram que as invariâncias de Einstein e Weyl não são preservadas pelas amplitudes calculadas. Os termos violadores são conhecidos como anomalias gravitacionais bidimensionais. Os resultados acima são idênticos aos que são encontrados nas referências padrão sobre o assunto (ver por exemplo, Bertlmann e Kohlprath (2001)).

Podemos também mapear a origem destes termos anômalos através das sub-amplitudes. No caso da anomalia de Einstein, vemos que sua origem está localizada exclusivamente em amplitudes do setor axial-vetor, pois as correspondentes RFGs ($q^{\mu} [T_{\mu\nu}^{AV}]$, $q^{\mu} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}]$ e $q^{\mu} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}]$) não são satisfeitas quando as relações de consistência são adotadas como válidas. Portanto, podemos constatar que a anomalia de Einstein tem uma relação direta com a anomalia encontrada

na QED_2 . Por outro lado, a anomalia de Weyl tem também como origem amplitudes do setor vetorial e axial. Nestes setores as contrações $g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{VV}]$ e $g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AA}]$ tem suas correspondentes RFGs violadas. Além destas, no setor axial-vetor também observamos violações das RFGs para as contrações $g^{\mu\sigma} [T_{\sigma;\mu\nu}^{AV}]$ e $g^{\mu\sigma} [T_{\sigma\rho;\mu\nu}^{AV}]$.

Dentro de um cenário onde regularizações não desempenham papel algum, obtivemos as anomalias de Einstein e de Weyl, no caso de um modelo de férmions acoplados a um espaço-tempo curvo bidimensional. Como consequência da sistematização da amplitude gravitacional em termos de um conjunto de sub-amplitudes, três delas pertencentes a QED_2 , pudemos isolar a origem dos termos anômalos e identificar sua conexão com a amplitude anômala $T_{\mu\nu}^{AV}$. Além disso, vimos que as mesmas condições exigidas sobre os objetos indefinidos, que fornecem a bem conhecida anomalia bidimensional AV, também são suficientes para a obtenção das anomalias gravitacionais. A filosofia de não efetuar a integração do momento do *loop* de integrais que são divergentes, eliminando-se assim a necessidade concreta de algum tipo regularização, possibilitou ainda a identificação de uma outra consequência das anomalias além da violação de uma identidade de Ward, que consiste na inevitável violação das RFGs e portanto da linearidade da operação de integração. Este é um fato importante e que é mascarado quando regularizações estão presentes, por isso não vemos tais discussões na literatura do assunto. Certamente investigações adicionais serão necessárias para compreendermos melhor este aspecto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADLER, S. L. Axial-vector vertex in spinor electrodynamics. **Physical Review**, v. 177, n. 5, 1969.
- ALVAREZ-GAUME, L.; GINSPARG, P. The topological meaning of non-abelian anomalies. **Nuclear Physics**, B243, n. 3, 1984.
- ALVAREZ-GAUME, L.; GINSPARG, P. H. The structure of gauge and gravitational anomalies. **Annals of Physics**, v. 161, 1985.
- ALVAREZ-GAUME, L.; WITTEN, E. Gravitational anomalies. **Nuclear Physics**, B234, 1984.
- ALVAREZ, O. Conformal anomalies and the index theorem. **Nuclear Physics**, B286, 1987.
- ASTE, A. Finite field theories and causality. **Proceedings of Science**, PoS LC2008, 2008.
- ATIYAH, M. F.; SINGER, I. M. The index of elliptic operators: I. **The Annals of Mathematics**, v. 87, n. 3, 1968.
- ATIYAH, M. F.; SINGER, I. M. Dirac operators coupled to vector potentials. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 81, 1984.
- BARCELOS-NETO, J.; DAS, A. Path integrals and the solution of the Schwinger model in curved space-time. **Physical Review D**, v. 33, 1986.
- BARDEEN, W. A.; ZUMINO, B. Consistent and covariant anomalies in gauge and gravitational theories. **Nuclear Physics**, B244, n. 2, 1984.
- BATTISTEL, O. A. **Uma Nova Estratégia para Manipulações e Cálculos envolvendo Divergências em TCQ**. Tese (Doutorado) — UFMG, 1999.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. Anomalies dismissed of ambiguities and the neutral pion decay. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 28, n. 10, 2002.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. From arbitrariness to ambiguities in the evaluation of perturbative physical amplitudes and their symmetry relations. **Physical Review D**, v. 65, n. 12, 2002.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. A systematization for one-loop 4D Feynman integrals - different species of massive fields. **Journal of Modern Physics**, v. 3, 2012.
- BATTISTEL, O. A.; FONSECA, M. V. S.; DALLABONA, G. Anomalies in finite amplitudes: two-dimensional single axial-vector triangle. **Physical Review D**, v. 85, n. 8, 2012.
- BATTISTEL, O. A.; MOTA, A. L.; NEMES, M. C. Consistency conditions for 4-D regularizations. **Modern Physics Letters A**, v. 13, n. 20, 1998.
- BELL, J. S.; JACKIW, R. A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -model. **Il Nuovo Cimento**, A60, n. 1, 1969.
- BERGER, T. Fermions in two (1+1)-dimensional anomalous gauge theories: The chiral Schwinger model and the chiral quantum gravity. **DESY-90-084**, 1990.
- BERTLMAN, R. A. **Anomalies in Quantum Field Theories**. Oxford: Oxford University Press, 1996.

BERTLMANN, R. A.; KOHLPRATH, E. Two-dimensional gravitational anomalies, Schwinger terms, and dispersion relations. **Annals of Physics**, v. 288, n. 1, 2001.

BRIZOLA, A. et al. Implicit regularisation technique: calculation of the two-loop ϕ_4^4 -theory β -function. **Modern Physics Letters A**, v. 14, n. 22, 1999.

CAPPER, D. M.; DUFF, M. J. Trace anomalies in dimensional regularization. **Il Nuovo Cimento**, A23, 1974.

DAS, A. **Quantum Field Theory**. Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

DELBOURGO, R.; SALAM, A. The gravitational correction to PCAC. **Physics Letters B**, v. 40, n. 3, 1972.

DESER, S.; SCHWIMMER, A. Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions. **Physics Letters B**, v. 309, n. 3, 1993.

EGUCHI, T.; FREUND, P. G. O. Quantum gravity and world topology. **Physical Review Letters**, v. 37, 1976.

EGUCHI, T.; GILKEY, P. B.; HANSON, A. J. Gravitation, gauge theories and differential geometry. **Physics Reports**, v. 66, n. 6, 1980.

EPSTEIN, H.; GLASER, V. The role of locality in perturbation theory. **Annales de l'Institut Henri Poincaré, physique théorique**, A19, 1973.

FONSECA, M. V. S.; DALLABONA, G.; BATTISTEL, O. A. Perturbative calculations in space-time having extra dimensions: The 6D single axial box anomaly. **International Journal of Modern Physics A**, v. 29, n. 29, 2014.

FUJIKAWA, K. Evaluation of the chiral anomaly in gauge theories with γ_5 couplings. **Physical Review D**, v. 29, 1984.

FUJIKAWA, K.; SUZUKI, H. **Path Integrals and Quantum Anomalies**. Oxford: Clarendon Press, 2004.

GEORGI, H.; GLASHOW, S. L. Gauge theories without anomalies. **Physical Review D**, v. 6, 1972.

GNENDIGER, C. et al. To d , or not to d : recent developments and comparisons of regularization schemes. **European Physics Journal**, C77, n. 7, 2017.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. Boston: Addison Wesley, 2002.

GROSS, D. J.; JACKIW, R. Effect of anomalies on quasi-renormalizable theories. **Physical Review D**, v. 6, 1972.

HOOFT, G. 't; VELTMAN, M. Regularization and renormalization of gauge fields. **Nuclear Physics**, B44, 1972.

HWANG, D. S. Gauge and gravitational anomalies in two dimensions. **Physical Review D**, v. 35, n. 4, Feb 1987.

JACKIW, R.; GERSTEIN, I. S. Anomalies in Ward identities for three-point functions. **Physical Review**, v. 181, n. 5, 1969.

JOHNSON, K. γ_5 invariance. **Physics Letters**, v. 5, n. 4, 1963.

MANDL, F.; SHAW, G. **Quantum Field Theory**. 2. ed. Chichester: John Wiley and Sons Ltd., 2010.

NIEH, H. T. Quantum effects on four-dimensional space-time symmetries. **Physical Review Letters**, v. 53, 1984.

SCHARF, G. **Finite Quantum Electrodynamics**. 2. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

SUTHERLAND, D. G. Current algebra and some non-strong mesonic decays. **Nuclear Physics**, B2, n. 1, 1967.

VELTMAN, M. Theoretical aspects of high energy neutrino interactions. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 301, n. 1465, 1967.

WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields**. Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1995.

APÊNDICE A – Integrais

Em amplitudes de dois-pontos precisamos calcular as seguintes integrais

$$[I_2, I_{2\mu}, I_{2\mu\nu}, \dots] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[1, k_\mu, k_\mu k_\nu, \dots]}{D_1 D_2} .$$

Usando-se a estratégia definida no Capítulo 4. obtemos

$$I_2(k_1, k_2) = \frac{i}{(4\pi)} \left[\xi_0^{(-1)}(q^2; m^2) \right] , \quad (30)$$

$$I_{2\mu}(k_1, k_2) = \frac{i}{(4\pi)} \left[-\frac{Q_\mu}{2} \xi_0^{(-1)}(q^2; m^2) \right] , \quad (31)$$

$$\begin{aligned} I_{2\mu\nu}(k_1, k_2) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\ &+ \frac{i}{(4\pi)} (q_\mu q_\nu - g_{\nu\mu} q^2) \left[\xi_2^{(-1)}(q^2; m^2) - \frac{1}{2} \xi_1^{(-1)}(q^2; m^2) \right] \\ &+ \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{4} Q_\mu Q_\nu \left[\xi_0^{(-1)}(q^2; m^2) \right] , \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} I_{2\mu\nu\sigma}(k_1, k_2) &= -Q_\xi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\sigma k_\rho k_\xi}{(k^2 - m^2)^3} + k_{1\rho} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\sigma}{(k^2 - m^2)^2} \\ &+ k_{1\sigma} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + k_{1\mu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \\ &- \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\sigma\rho} q_\mu \left[\xi_1^{(0)}(q^2; m^2) \right] - \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} q_\rho \left[\xi_1^{(0)}(q^2; m^2) \right] \\ &- \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\mu\rho} q_\sigma \left[\xi_1^{(0)}(q^2; m^2) \right] + \frac{i}{(4\pi)} q_\mu q_\sigma q_\rho \left[\xi_3^{(-1)}(q^2; m^2) \right] \\ &- k_{1\sigma} [I_{2\mu\nu}] - k_{1\mu} [I_{2\sigma\nu}] - k_{1\nu} [I_{2\sigma\mu}] \\ &- k_{1\sigma} k_{1\mu} [I_{2\nu}] - k_{1\sigma} k_{1\nu} [I_{2\mu}] - k_{1\mu} k_{1\nu} [I_{2\sigma}] \\ &- k_{1\sigma} k_{1\mu} k_{1\nu} [I_2] , \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
I_{2\mu\nu\sigma\rho}(k_1, k_2) = & \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} - (k_1^2 + k_2^2) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^3} + \\
& + 4(k_{1\xi} k_{1\chi} + k_{1\xi} k_{2\chi} + k_{2\xi} k_{2\chi}) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu k_\sigma k_\rho k_\xi k_\chi}{(k^2 - m^2)^4} + \\
& + k_{1\sigma} k_{1\rho} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} + k_{1\sigma} k_{1\mu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\rho k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} + \\
& + k_{1\sigma} k_{1\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\rho k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} + k_{1\rho} k_{1\mu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} + \\
& + k_{1\rho} k_{1\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} + k_{1\mu} k_{1\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + \\
& - 2k_{1\sigma} Q_\xi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\rho k_\mu k_\nu k_\xi}{(k^2 - m^2)^3} - 2k_{1\rho} Q_\xi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\mu k_\nu k_\xi}{(k^2 - m^2)^3} + \\
& - 2k_{1\mu} Q_\xi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\rho k_\nu k_\xi}{(k^2 - m^2)^3} - 2k_{1\nu} Q_\xi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\rho k_\mu k_\xi}{(k^2 - m^2)^3} + \\
& + \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu}) \left[\xi_0^{(1)}(q^2, m^2) - m^2 \right] + \\
& - \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} q_\sigma q_\rho \left[\xi_2^{(0)}(q^2, m^2) \right] - \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} q_\nu q_\rho \left[\xi_2^{(0)}(q^2, m^2) \right] + \\
& - \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\mu\rho} q_\nu q_\sigma \left[\xi_2^{(0)}(q^2, m^2) \right] - \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\nu\sigma} q_\mu q_\rho \left[\xi_2^{(0)}(q^2, m^2) \right] + \\
& - \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\nu\rho} q_\mu q_\sigma \left[\xi_2^{(0)}(q^2, m^2) \right] - \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} g_{\sigma\rho} q_\mu q_\nu \left[\xi_2^{(0)}(q^2, m^2) \right] + \\
& + \frac{i}{(4\pi)} q_\mu q_\nu q_\sigma q_\rho \left[\xi_4^{(-1)}(q^2, m^2) \right] + \\
& - k_{1\sigma} [I_{2\rho\mu\nu}] - k_{1\rho} [I_{2\sigma\mu\nu}] - k_{1\mu} [I_{2\sigma\rho\nu}] - k_{1\nu} [I_{2\sigma\rho\mu}] + \\
& - k_{1\sigma} k_{1\rho} [I_{2\mu\nu}] - k_{1\sigma} k_{1\mu} [I_{2\rho\nu}] - k_{1\sigma} k_{1\nu} [I_{2\rho\mu}] + \\
& - k_{1\rho} k_{1\mu} [I_{2\sigma\nu}] - k_{1\rho} k_{1\nu} [I_{2\sigma\mu}] - k_{1\mu} k_{1\nu} [I_{2\sigma\rho}] + \\
& - k_{1\sigma} k_{1\rho} k_{1\mu} [I_{2\nu}] - k_{1\sigma} k_{1\rho} k_{1\nu} [I_{2\mu}] + \\
& - k_{1\sigma} k_{1\mu} k_{1\nu} [I_{2\rho}] - k_{1\rho} k_{1\mu} k_{1\nu} [I_{2\sigma}] + \\
& - k_{1\sigma} k_{1\rho} k_{1\mu} k_{1\nu} [I_2] .
\end{aligned} \tag{34}$$

Eventualmente também precisamos de algumas integrais que surgem em amplitudes de 1-ponto, definidas como:

$$[I_1, I_{1\mu}, I_{1\mu\nu}, \dots](k_i) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[1, k_\mu, k_\mu k_\nu, \dots]}{D_i} .$$

Após a aplicação do método, obtemos:

$$I_1(k_i) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)}, \quad (35)$$

$$I_{1\mu}(k_i) = -k_i^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} I_{1\mu\nu}(k_i) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)} \\ &\quad - k_1^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad + k_1^\alpha k_1^\beta \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} I_{1\mu\nu\sigma}(k_i) &= -k_i^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu k_\sigma k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad + k_i^2 k_i^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\mu k_\nu k_\sigma k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad - k_i^\alpha k_{i\chi}^\beta k_i^\xi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\mu k_\nu k_\sigma k_\alpha k_\beta k_\xi}{(k^2 - m^2)^4}. \end{aligned} \quad (38)$$

APÊNDICE B – Objetos divergentes

Ao longo do texto usamos uma notação para objetos divergentes básicos, definidos neste apêndice. Os mais simples deles são definidos apenas como integrais divergentes:

$$I_{\log}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (39)$$

$$I_{quad}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2 - \lambda^2}\right). \quad (40)$$

Outros deles são definidos como diferenças de integrais divergentes e tem estrutura de termos de superfície:

$$\begin{aligned} [\Delta_{1;\mu\nu}(\lambda^2)] &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[k_\nu \left(2 - \ln \frac{k^2}{k^2 - \lambda^2} \right) \right] \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} - g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2 - \lambda^2}\right), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} [\Delta_{2;\mu\nu}(\lambda^2)] &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(-\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} \right) \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} [\square_{2;\mu\nu\alpha\beta}(\lambda^2)] &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(-\frac{2k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)} \right) \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^2} - g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)} \\ &\quad - g_{\mu\alpha} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)} - g_{\mu\beta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
[\square_{3;\mu\nu\alpha\beta}(\lambda^2)] &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(-\frac{2k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right) \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\
&\quad - g_{\mu\alpha} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^2} - g_{\mu\beta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Sigma_{4;\mu\nu\alpha\beta\xi\chi}] &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(-\frac{8k_\nu k_\alpha k_\beta k_\xi k_\chi}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right) \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{48k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta k_\xi k_\chi}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\alpha k_\beta k_\xi k_\chi}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&\quad - g_{\mu\alpha} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\nu k_\beta k_\xi k_\chi}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\beta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\nu k_\alpha k_\xi k_\chi}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&\quad - g_{\mu\xi} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\nu k_\alpha k_\beta k_\chi}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\chi} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\nu k_\alpha k_\beta k_\xi}{(k^2 - \lambda^2)^3}, \quad (45)
\end{aligned}$$

Também definimos alguns tensores que são formados por somas de termos de superfície:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\sigma\rho\mu\nu} &= [\square_{2;\rho\sigma\mu\nu}] + g_{\rho\sigma} [\Delta_{1;\mu\nu}] + g_{\rho\mu} [\Delta_{1;\sigma\nu}] + g_{\rho\nu} [\Delta_{1;\sigma\mu}] - g_{\mu\nu} [\Delta_{1;\sigma\rho}] \\
&\quad + \frac{1}{3} (k_{1\alpha} k_{1\beta} + k_{1\alpha} k_{2\beta} + k_{2\alpha} k_{2\beta}) [\Sigma_{4;\rho\sigma\alpha\beta\mu\nu}] \\
&\quad + \frac{1}{3} (k_{1\alpha} k_{1\beta} + k_{1\alpha} k_{2\beta} + k_{2\alpha} k_{2\beta}) \{ g_{\rho\sigma} [\square_{3;\alpha\beta\nu\mu}] \\
&\quad\quad + g_{\rho\beta} [\square_{3;\sigma\alpha\mu\nu}] + g_{\rho\alpha} [\square_{3;\sigma\beta\mu\nu}] \\
&\quad\quad + g_{\rho\mu} [\square_{3;\sigma\alpha\beta\nu}] + g_{\rho\nu} [\square_{3;\sigma\alpha\beta\mu}] \} \\
&\quad - k_{1\rho} (k_1 + k_2)_\alpha [\square_{3;\sigma\mu\nu\alpha}] - \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\mu (k_1 + k_2)_\alpha [\square_{3;\rho\nu\alpha\sigma}] \\
&\quad - k_{1\sigma} (k_1 + k_2)_\alpha [\square_{3;\rho\mu\nu\alpha}] - \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\nu (k_1 + k_2)_\alpha [\square_{3;\rho\mu\alpha\sigma}] \\
&\quad - \frac{1}{2} (k_1^2 + k_2^2) [\square_{3;\rho\nu\mu\sigma}] - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta) [\square_{3;\rho\sigma\alpha\beta}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} (k_{1\alpha} k_{1\beta} + k_{1\alpha} k_{2\beta} + k_{2\alpha} k_{2\beta}) \{ g_{\rho\sigma} g_{\alpha\beta} [\Delta_{2;\mu\nu}] + g_{\rho\sigma} g_{\alpha\nu} [\Delta_{2;\beta\mu}] \\
& \quad + g_{\rho\sigma} g_{\alpha\mu} [\Delta_{2;\beta\nu}] + g_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} [\Delta_{2;\mu\nu}] \\
& \quad + g_{\rho\alpha} g_{\sigma\mu} [\Delta_{2;\beta\nu}] + g_{\rho\alpha} g_{\sigma\nu} [\Delta_{2;\beta\mu}] \\
& \quad + g_{\rho\beta} g_{\sigma\alpha} [\Delta_{2;\mu\nu}] + g_{\rho\beta} g_{\sigma\mu} [\Delta_{2;\alpha\nu}] \\
& \quad + g_{\rho\beta} g_{\sigma\nu} [\Delta_{2;\alpha\mu}] + g_{\rho\mu} g_{\sigma\alpha} [\Delta_{2;\beta\nu}] \\
& \quad + g_{\rho\mu} g_{\sigma\beta} [\Delta_{2;\alpha\nu}] + g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} [\Delta_{2;\alpha\beta}] \\
& \quad + g_{\rho\nu} g_{\sigma\alpha} [\Delta_{2;\beta\mu}] + g_{\rho\nu} g_{\sigma\beta} [\Delta_{2;\alpha\mu}] \\
& \quad \quad \quad + g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu} [\Delta_{2;\alpha\beta}] \} \\
& - \frac{1}{2} (k_1^2 + k_2^2) \{ g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\mu\sigma}] + g_{\rho\mu} [\Delta_{2;\nu\sigma}] + g_{\rho\sigma} [\Delta_{2;\nu\mu}] \} \\
& - k_{1\sigma} (k_1 + k_2)_\alpha \{ g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\mu\alpha}] + g_{\rho\mu} [\Delta_{2;\nu\alpha}] + g_{\rho\alpha} [\Delta_{2;\nu\mu}] \} \\
& - k_{1\rho} (k_1 + k_2)_\alpha \{ g_{\sigma\nu} [\Delta_{2;\mu\alpha}] + g_{\sigma\mu} [\Delta_{2;\nu\alpha}] + g_{\sigma\alpha} [\Delta_{2;\nu\mu}] \} \\
& - \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\mu (k_1 + k_2)_\alpha \{ g_{\rho\nu} [\Delta_{2;\alpha\sigma}] + g_{\rho\alpha} [\Delta_{2;\nu\sigma}] + g_{\rho\sigma} [\Delta_{2;\nu\alpha}] \} \\
& - \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\nu (k_1 + k_2)_\alpha \{ g_{\rho\mu} [\Delta_{2;\alpha\sigma}] + g_{\rho\alpha} [\Delta_{2;\mu\sigma}] + g_{\rho\sigma} [\Delta_{2;\mu\alpha}] \} \\
& - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta) \{ g_{\rho\sigma} [\Delta_{2;\alpha\beta}] + g_{\rho\alpha} [\Delta_{2;\sigma\beta}] + g_{\rho\beta} [\Delta_{2;\sigma\alpha}] \} \\
& + (k_1 + k_2)_\mu k_{1\sigma} [\Delta_{2;\nu\rho}] + (k_1 + k_2)_\nu k_{1\sigma} [\Delta_{2;\mu\rho}] \\
& + (k_1 + k_2)_\mu k_{1\rho} [\Delta_{2;\nu\sigma}] + (k_1 + k_2)_\nu k_{1\rho} [\Delta_{2;\mu\sigma}] \\
& + g_{\mu\nu} (k_1 + k_2)^\alpha k_{1\rho} [\Delta_{2;\sigma\alpha}] + g_{\mu\nu} (k_1 + k_2)^\alpha k_{1\sigma} [\Delta_{2;\rho\alpha}] \\
& + \frac{1}{2} \left\{ g_{\mu\nu} [(k_1 - k_2)^2 + k_1^2 + k_2^2] + 2(k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{1\nu} k_{2\mu}) \right\} [\Delta_{2;\sigma\rho}] \\
& + \left[2k_{1\sigma} k_{1\rho} - \frac{1}{2} (k_1 - k_2)_\sigma (k_1 - k_2)_\rho \right] [\Delta_{2;\mu\nu}] , \tag{46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\rho\sigma}^{VV} = & -q^\sigma \left\{ -Q^\alpha [g^{\mu\beta} \square_{3;\alpha\rho\mu\beta}] + Q_\rho [g^{\mu\alpha} \Delta_{2;\mu\alpha}] - Q^\alpha [\Delta_{2;\alpha\rho}] \right\} \\
& - \left\{ -q^\alpha Q^\beta [\square_{3;\sigma\rho\alpha\beta}] - q^\alpha Q^\beta g_{\sigma\rho} [\Delta_{2;\alpha\beta}] + (q_\rho Q^\alpha + q^\alpha Q_\rho) [\Delta_{2;\alpha\sigma}] \right. \\
& \quad \quad \quad \left. + q_\alpha Q^\alpha [\Delta_{2;\rho\sigma}] + (q - Q)^\alpha q_\sigma [\Delta_{2;\alpha\rho}] \right\} \\
& + q_\sigma q^\mu [\Delta_{\mu\rho}] , \tag{47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{VV} = & \frac{1}{2}q^2 \{ Q^\alpha [\square_{3;\sigma\rho\alpha\nu}] - Q_\rho [\Delta_{2;\nu\sigma}] - Q_\nu [\Delta_{2;\rho\sigma}] \\
& - Q^\alpha (g_{\nu\rho} [\Delta_{2;\sigma\alpha}] - g_{\sigma\rho} [\Delta_{2;\alpha\nu}] - g_{\sigma\nu} [\Delta_{2;\rho\alpha}]) \} \\
& - \frac{q\sigma}{2} \left\{ -q^\alpha Q^\beta [\square_{3;\nu\rho\alpha\beta}] - q^\alpha Q^\beta g_{\nu\rho} [\Delta_{2;\alpha\beta}] + (q_\rho Q^\alpha + q^\alpha Q_\rho) [\Delta_{2;\alpha\nu}] \right. \\
& \quad \left. + q^\alpha Q_\alpha [\Delta_{2;\rho\nu}] - (Q - q)_\alpha q_\nu [\Delta_{2;\alpha\rho}] \right\} \\
& - \frac{q\nu}{2} \left\{ -q^\alpha Q^\beta [\square_{3;\sigma\rho\alpha\beta}] - q^\alpha Q^\beta g_{\sigma\rho} [\Delta_{2;\alpha\beta}] + (q_\rho Q^\alpha + q^\alpha Q_\rho) [\Delta_{2;\alpha\sigma}] \right. \\
& \quad \left. + q^\alpha Q_\alpha [\Delta_{2;\rho\sigma}] - (Q - q)_\alpha q_\sigma [\Delta_{2;\alpha\rho}] \right\} \\
& - \frac{q\sigma}{2} \left\{ -q^\mu Q^\alpha [[\square_{3;\mu\rho\alpha\nu}] - g_{\nu\rho} [\Delta_{2;\alpha\mu}]] + [q^\mu Q_\rho - q_\rho Q^\mu] [\Delta_{2;\nu\mu}] \right. \\
& \quad \left. + [q^\mu Q_\nu - q_\nu Q^\mu] [\Delta_{2;\rho\mu}] \right\} \\
& + q_\nu q_\sigma q^\mu [\Delta_{2;\mu\rho}] , \tag{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\rho\sigma}^{AV} = & \mp (-\varepsilon_\rho{}^\lambda) q_\sigma \{ -Q^\alpha [g^{\mu\rho} \square_{3;\alpha\lambda\mu\rho}] + Q_\lambda [g^{\mu\rho} \Delta_{2;\mu\rho}] - Q^\alpha [\Delta_{2;\alpha\lambda}] \} \\
& \mp (-\varepsilon_\rho{}^\lambda) \left\{ -q^\alpha Q^\beta [\square_{3;\sigma\lambda\alpha\beta}] - q^\alpha Q^\beta g_{\sigma\lambda} [\Delta_{2;\alpha\beta}] + (q_\lambda Q^\alpha + q^\alpha Q_\lambda) [\Delta_{2;\alpha\sigma}] \right. \\
& \quad \left. + q_\alpha Q^\alpha [\Delta_{2;\lambda\sigma}] - (Q - q)^\alpha q_\sigma [\Delta_{2;\alpha\lambda}] \right\} \\
& \mp q_\sigma (-\varepsilon_\nu{}^\lambda) \left\{ -Q^\alpha [\square_{3;\nu\rho\alpha\lambda}] + Q_\rho [\Delta_{2;\lambda\nu}] + Q_\lambda [\Delta_{2;\rho\nu}] \right. \\
& \quad \left. + Q^\alpha \{ g_{\lambda\rho} [\Delta_{2;\nu\alpha}] - g_{\nu\rho} [\Delta_{2;\alpha\lambda}] - g_{\nu\lambda} [\Delta_{2;\rho\alpha}] \} \right\} \\
& \mp q^\nu (-\varepsilon_\nu{}^\lambda) \left\{ -Q^\alpha [\square_{3;\sigma\rho\alpha\lambda}] + Q_\rho [\Delta_{2;\lambda\sigma}] + Q_\lambda [\Delta_{2;\rho\sigma}] \right. \\
& \quad \left. + Q^\alpha \{ g_{\lambda\rho} [\Delta_{2;\sigma\alpha}] - g_{\sigma\rho} [\Delta_{2;\alpha\lambda}] - g_{\sigma\lambda} [\Delta_{2;\rho\alpha}] \} \right\} \\
& \pm (-\varepsilon_\rho{}^\lambda) q_\sigma q^\mu [\Delta_{\mu\lambda}] , \tag{49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{1,AV} = & \pm \left(-\varepsilon_\rho{}^\lambda\right) q^\mu \mathcal{D}_{\nu\sigma\mu\lambda} \pm \left(-\varepsilon_\rho{}^\lambda\right) q^\mu \mathcal{D}_{\mu\sigma\nu\lambda} \\
& \pm \left(-\varepsilon_\nu{}^\lambda\right) q^\mu \mathcal{D}_{\mu\sigma\rho\lambda} \pm \left(-\varepsilon_\mu{}^\lambda\right) q^\mu \mathcal{D}_{\nu\sigma\lambda\rho} \\
& \pm \left(-\varepsilon_\rho{}^\lambda\right) \frac{1}{2} q^2 Q^\mu [\square_{3;\sigma\lambda\mu\nu}] \pm \left(-\varepsilon_\nu{}^\lambda\right) \frac{1}{2} q^2 Q^\mu [\square_{3;\sigma\lambda\mu\rho}] \\
& \pm \left(-\varepsilon_\rho{}^\lambda\right) \frac{1}{2} q^2 \left\{ -Q_\lambda [\Delta_{2;\nu\sigma}] - Q_\nu [\Delta_{2;\lambda\sigma}] \right. \\
& \quad \left. - Q^\mu (g_{\nu\lambda} [\Delta_{2;\sigma\mu}] - g_{\sigma\lambda} [\Delta_{2;\mu\nu}] - g_{\sigma\nu} [\Delta_{2;\lambda\mu}]) \right\} \\
& \pm \left(-\varepsilon_\nu{}^\lambda\right) \frac{1}{2} q^2 \left\{ -Q_\lambda [\Delta_{2;\rho\sigma}] - Q_\rho [\Delta_{2;\lambda\sigma}] \right. \\
& \quad \left. - Q^\mu (g_{\rho\lambda} [\Delta_{2;\sigma\mu}] - g_{\sigma\lambda} [\Delta_{2;\mu\rho}] - g_{\sigma\rho} [\Delta_{2;\lambda\mu}]) \right\} \\
& \pm \left(-\varepsilon_\rho{}^\lambda\right) q_\sigma q_\nu q^\mu [\Delta_{2;\mu\lambda}] , \tag{50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\nu\rho\sigma}^{2,AV} = & \mp q^\mu \left(-\varepsilon_\mu{}^\lambda\right) \frac{q_\sigma}{2} \left\{ -Q^\alpha [\square_{3;\nu\rho\alpha\lambda}] + Q_\rho [\Delta_{2;\lambda\nu}] + Q_\lambda [\Delta_{2;\rho\nu}] \right. \\
& \quad \left. + Q^\alpha \{ g_{\lambda\rho} [\Delta_{2;\nu\alpha}] - g_{\nu\rho} [\Delta_{2;\alpha\lambda}] - g_{\nu\lambda} [\Delta_{2;\rho\alpha}] \} \right\} \\
& \mp q^\mu \left(-\varepsilon_\mu{}^\lambda\right) \frac{q_\nu}{2} \left\{ -Q^\alpha [\square_{3;\sigma\rho\alpha\lambda}] + Q_\rho [\Delta_{2;\lambda\sigma}] + Q_\lambda [\Delta_{2;\rho\sigma}] \right. \\
& \quad \left. + Q^\alpha \{ g_{\lambda\rho} [\Delta_{2;\sigma\alpha}] - g_{\sigma\rho} [\Delta_{2;\alpha\lambda}] - g_{\sigma\lambda} [\Delta_{2;\rho\alpha}] \} \right\} \\
& \mp \frac{q_\sigma}{2} \left(-\varepsilon_\rho{}^\lambda\right) \left\{ -q^\alpha Q^\beta [\square_{3;\nu\lambda\alpha\beta}] - q^\alpha Q^\beta g_{\nu\lambda} [\Delta_{2;\alpha\beta}] + (q_\lambda Q^\alpha + q^\alpha Q_\lambda) [\Delta_{2;\alpha\nu}] \right. \\
& \quad \left. + q^\alpha Q_\alpha [\Delta_{2;\lambda\nu}] - (Q - q)_\alpha q_\nu [\Delta_{2;\alpha\lambda}] \right\} \\
& \mp \frac{q_\nu}{2} \left(-\varepsilon_\rho{}^\lambda\right) \left\{ -q^\alpha Q^\beta [\square_{3;\sigma\lambda\alpha\beta}] - q^\alpha Q^\beta g_{\sigma\lambda} [\Delta_{2;\alpha\beta}] + (q_\lambda Q^\alpha + q^\alpha Q_\lambda) [\Delta_{2;\alpha\sigma}] \right. \\
& \quad \left. + q^\alpha Q_\alpha [\Delta_{2;\lambda\sigma}] - (Q - q)_\alpha q_\sigma [\Delta_{2;\alpha\lambda}] \right\} \\
& \mp \frac{q_\sigma}{2} \left(-\varepsilon_\rho{}^\lambda\right) \left\{ -q^\mu Q^\alpha ([\square_{3;\mu\nu\alpha\lambda}] - g_{\lambda\nu} [\Delta_{2;\alpha\mu}]) + (q^\mu Q_\nu - q_\nu Q^\mu) [\Delta_{2;\lambda\mu}] \right. \\
& \quad \left. + (q^\mu Q_\lambda - q_\lambda Q^\mu) [\Delta_{2;\nu\mu}] \right\} \\
& \mp \frac{q_\sigma}{2} \left(-\varepsilon_\nu{}^\lambda\right) \left\{ -q^\mu Q^\alpha ([\square_{3;\mu\rho\alpha\lambda}] - g_{\lambda\rho} [\Delta_{2;\alpha\mu}]) + (q^\mu Q_\rho - q_\rho Q^\mu) [\Delta_{2;\lambda\mu}] \right. \\
& \quad \left. + (q^\mu Q_\lambda - q_\lambda Q^\mu) [\Delta_{2;\rho\mu}] \right\} . \tag{51}
\end{aligned}$$

APÊNDICE C – Amplitudes complementares

Ao longo dos cálculos explícitos das amplitudes, ou das verificações das RFGs, Usamos os resultados de diversas amplitudes cujos cálculos não constam no corpo do texto. Aqui listamos seus resultados. O procedimento utilizado para calculá-las é análogo ao que foi exposto no texto principal.

Amplitudes de 1-ponto

$$T_{\mu}^V(k_i) = -2k_i^{\alpha} \left(\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_{\mu}k_{\alpha}}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\alpha\mu} I_{\log}(m^2) \right), \quad (52)$$

$$\begin{aligned} T_{\rho;\mu}^V(k_j) = & 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu}k_{\rho}}{(k^2 - m^2)} + 2k_i^{\alpha} k_i^{\beta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_{\mu}k_{\rho}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^3} \\ & - 2k_{i\mu} k_i^{\alpha} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_{\rho}k_{\alpha}}{(k^2 - m^2)^2} - k_i^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_{\mu}k_{\rho}}{(k^2 - m^2)^2} \\ & - 2k_{1\rho} k_i^{\alpha} \left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_{\mu}k_{\alpha}}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\alpha\mu} I_{\log}(m^2) \right], \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\sigma\rho;\mu}^V(k_i) = & 2 \left\{ -k_i^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\rho k_\sigma k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} + k_{i\mu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)} \right. \\
& - k_i^\alpha k_i^\beta k_i^\omega \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{8k_\mu k_\rho k_\sigma k_\alpha k_\beta k_\omega}{(k^2 - m^2)^4} + k_i^2 k_i^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\mu k_\rho k_\sigma k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \\
& \left. + k_{i\mu} k_i^\alpha k_i^\beta \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\sigma k_\rho k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} - k_{i\mu} k_i^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\
& + 2k_{1\sigma} \left\{ \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)} + k_i^\alpha k_i^\beta \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\mu k_\rho k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} \right. \\
& \left. - k_{i\mu} k_i^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} - k_i^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \right\} + \\
& + 2k_{1\rho} \left\{ \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\sigma}{(k^2 - m^2)} + k_i^\alpha k_i^\beta \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\mu k_\sigma k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} \right. \\
& \left. - k_{i\mu} k_i^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\sigma k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} - k_i^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\sigma}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\
& + 2k_{1\sigma} k_{1\rho} \left[k_{i\mu} I_{\log}(m^2) - k_i^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \right], \tag{54}
\end{aligned}$$

$$T^S(k_i) = 2m I_{\log}(m^2), \tag{55}$$

$$T_\rho^S(k_i) = 2m \left[k_{1\rho} I_{\log}(m^2) - k_i^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \right], \tag{56}$$

$$T^P(k_i) = T_\rho^P(k_i) = 0, \tag{57}$$

Amplitudes de 2-pontos

$$T^{SS} = -\frac{i}{(4\pi)} (q^2 - 4m^2) \left[\xi_0^{(-1)} \right] + 2I_{\log}(m^2), \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
T_\rho^{SS} = & -\frac{i}{(4\pi)} q_\rho (q^2 - 4m^2) \left[\xi_1^{(-1)} \right] \\
& - (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} + 2k_{1\rho} I_{\log}(m^2) , \tag{59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\sigma\rho}^{SS} = & 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)} + \left(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{4k_\sigma k_\rho k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} + \\
& - k_{1\sigma} (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\rho k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} + \\
& - k_{1\rho} (k_1 + k_2)^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\sigma k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} + \\
& - \left[(q^2 - 4m^2) + k_1^2 + k_2^2 \right] \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + \\
& + 2k_{1\rho} k_{1\sigma} I_{\log}(m^2) + \\
& - \frac{i}{(4\pi)} \frac{1}{2} (q^2 - 4m^2) \left\{ (q_\sigma q_\rho - g_{\sigma\rho} q^2) \left[2\xi_2^{(-1)} - \xi_1^{(-1)} \right] + q_\rho q_\sigma \left[\xi_1^{(-1)} \right] \right\} , \tag{60}
\end{aligned}$$

$$T_\mu^{SV} = 0 , \tag{61}$$

$$T_{\rho;\mu}^{SV} = 2m \left\{ \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} + \frac{i}{(4\pi)} (q_\mu q_\rho - g_{\mu\rho} q^2) \left[2\xi_2^{(-1)} - \xi_1^{(-1)} \right] \right\} , \tag{62}$$

$$T_\mu^{PA} = 2m \frac{i}{(4\pi)} q_\mu \left[\xi_0^{(-1)} \right] , \tag{63}$$

$$T_{\mu;\nu}^{PA} = m \frac{i}{(4\pi)} q_\mu q_\nu \left[\xi_0^{(-1)} \right] , \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
T_{\rho\mu;\nu}^{PA} = & 2mq_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\rho}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + \frac{i}{(4\pi)} mq_\nu (q_\mu q_\rho - g_{\mu\rho} q^2) \left[2\xi_2^{(-1)} - \xi_1^{(-1)} \right] \\
& + \frac{i}{(4\pi)} mq_\nu q_\mu q_\rho \left[\xi_1^{(-1)} \right] .
\end{aligned} \tag{65}$$

APÊNDICE D – Funções finitas

Conforme explicado no texto, a parte finita dos resultados explícitos das amplitudes é organizada em termos de funções com representações integrais. Para o nosso caso, as funções são definidas como:

$$\xi_k^{(1)}(m, q) = \int_0^1 dz \left\{ z^k \left[Q(z) \ln \left(\frac{Q(z)}{-m^2} \right) - Q(z) \right] \right\} \quad (66)$$

$$\xi_k^{(0)}(m, q) = \int_0^1 dz \left\{ z^k \ln \left(\frac{Q(z)}{-m^2} \right) \right\} \quad (67)$$

$$\xi_k^{(-1)}(m, q) = \int_0^1 dz \left\{ \frac{z^k}{Q(z)} \right\} \quad (68)$$

onde $Q(z) = q^2 z(1-z) - m^2$ e $k \geq 0$

Estas funções têm relações bem definidas entre si. Para o presente trabalho, as relações utilizadas para a organização e manipulação das expressões foram:

$$\left[\xi_0^{(1)} - m^2 \right] = q^2 \left[2\xi_2^{(0)} - \xi_1^{(0)} \right] \quad (69)$$

$$2\xi_1^{(0)} = \xi_0^{(0)} \quad (70)$$

$$\xi_2^{(0)} = -\frac{1}{18} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{m^2}{q^2} \right) \xi_0^{(0)} \quad (71)$$

$$(k+1)\xi_k^{(0)} = q^2 \left[2\xi_{(k+2)}^{(-1)} - \xi_{(k+1)}^{(-1)} \right] \quad (72)$$

$$2\xi_1^{(-1)} = \xi_0^{(-1)} \quad (73)$$

$$q^2 \left[\xi_2^{(-1)} - \xi_1^{(-1)} \right] = -m^2 \xi_0^{(-1)} - 1 \quad (74)$$

$$\xi_1^{(-1)} - 3\xi_2^{(-1)} + 2\xi_3^{(-1)} = 0 \quad (75)$$

Para um estudo completo deste tipo de funções e suas relações, consultar (BATTISTEL; DALLABONA, 2012)