

Bruno da Fonseca Gonçalves

# **O efeito dos termos de superfície no modelo de Nambu-Jona-Lasínio**

São João del-Rei – MG

23 de maio de 2015

Bruno da Fonseca Gonçalves

## **O efeito dos termos de superfície no modelo de Nambu-Jona-Lasínio**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei, em associação ampla com as Universidades Federais de Alfenas e Lavras, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Física de Partículas e Campos

Orientador: André Luiz Mota

Coorientador: Edson Wander Dias

Universidade Federal de São João del Rei – UFSJ

Departamento de Ciências Naturais

Programa de Pós-Graduação em Física

São João del-Rei – MG

23 de maio de 2015

---

Bruno da Fonseca Gonçalves

O efeito dos termos de superfície no modelo de Nambu-Jona-Lasínio/ Bruno da Fonseca Gonçalves. – São João del-Rei – MG, 23 de maio de 2015-

78 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: André Luiz Mota

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São João del Rei – UFSJ

Departamento de Ciências Naturais

Programa de Pós-Graduação em Física, 23 de maio de 2015.

1. Modelo de Nambu-Jona-Lasínio. 2. Termos de superfície. I. André Luiz Mota. II. Universidade Federal de São João del Rei. III. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. O efeito dos termos de superfície no modelo de Nambu-Jona-Lasínio

CDU 05:000:000.0

---



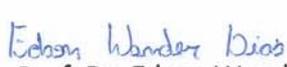
Pós-Graduação em Física – PPGF - [www.ufsj.edu.br/ppgf](http://www.ufsj.edu.br/ppgf)

### PARECER DA BANCA EXAMINADORA

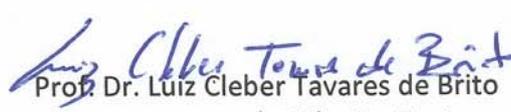
A presente dissertação, intitulada **O EFEITO DOS TERMOS DE SUPERFÍCIE NO MODELO DE NAMBU-JONA LASÍNIO**, de autoria de **Bruno da Fonseca Gonçalves**, submetida à Comissão Examinadora abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM CIÊNCIAS, ÁREA DE FÍSICA**, em 24 de março de 2015.

São João del-Rei, 24 de março de 2015.

  
Prof. Dr. André Luiz Mota  
Orientador do candidato e presidente da Banca Examinadora  
Departamento de Ciências Naturais  
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

  
Prof. Dr. Edson Wander Dias  
Co-orientador do candidato  
Departamento de Ciências Naturais  
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

  
Prof. Dr. Oswaldo Monteiro Del Cima  
Departamento de Física  
Universidade Federal de Viçosa - UFV

  
Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito  
Departamento de Ciências Exatas  
Universidade Federal de Lavras - UFLA

*Dedico este trabalho à minha esposa, pela paciência que só as esposas de pós-graduandos sabem ter.*

*Te amo Jú*

# Agradecimentos

A Deus, fonte de todo amor e misericórdia.

A minha esposa, pelo amor e compreensão em todos estes momentos. Você foi minha força quando fraquejei, minha motivação quando eu estava pra jogar tudo pro alto, meu refúgio quando estive cansado, meu farol quando estava perdido, meu tudo quando eu não fui nada. Muito obrigado!

A meus pais pela presença e compreensão da ausência.

Aos amigos, André e Edson, pela orientação e compreensão em meio à turbulência deste trabalho.

Aos amigos e professores do DCNAT pela companhia nos estudos e incentivo em meio às dificuldades.

Aos amigos do CEFET-MG/Leopoldina pela compreensão das faltas e atrasos.

À Prof. Maria Aline, ao Prof. Fernando Marroquim pela oportunidade, confiança e paciência durante este trabalho.

Aos amigos do Programa de Pós-Graduação em Física, Simão e Fernando, pelo companheirismo e ajuda.

Aos amigos Francisco, Tafarel e Victor pela acolhida em minha estadia quase perene.

Agradeço ainda a todos que contribuíram nesta empreitada, me desculpem por não citar todos. Seria outra dissertação.

*“Quem procura a verdade, consciente ou inconscientemente, procura a Deus” (Edith Stein, Santa Teresa Benedita da Cruz)*

*“Poderíamos pensar que a explicação verdadeira da quase simetria da natureza é essa: que Deus fez as leis apenas quase simétricas para que não tivéssemos ciúmes da Sua perfeição!” (Feynman, Lições de Física)*

# Resumo

O Modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) é um modelo extremamente bem sucedido na descrição da fenomenologia da mésons leves. Por outro lado, as interações quárticas na densidade lagrangiana de NJL tornam o modelo não-renormalizável, sendo então necessário empregar um esquema de regularização, a fim de calcular as integrais de Feynman. No entanto, é bem conhecido que, quando resolvemos essas integrais utilizando algum procedimento de regularização, como a regularização via cut-off, aparecem algumas limitações, devido a uma mudança de variáveis que fazemos na integração dos momentos nas integrais divergentes. Em particular, se as integrais de Feynman são, pelo menos, linearmente divergentes, ao realizarmos tal deslocamento, aparecem os chamados termos de superfície (TS). Em certo sentido, deslocar a variável de integração das integrais de Feynman e a ocorrência do TS estão relacionados com a invariância no roteamento arbitrário dos momentos e sua invariância nos diagramas a um loop: os TS não nulos nos indicam que tal simetria foi quebrada. É muito comum em cálculos de propriedades mesônicas no contexto do modelo NJL, não levem em conta a presença dos TS. Então, inspirado na obra de Mota e Arriola e empregando a regularização cut-off, nós investigamos o efeito devido aos TS no Modelo de Nambu-Jona Lasinio SU(3), comparando os resultados para os parâmetros do káon, com e sem a presença dos termos de superfície. Em particular, observamos que, quando consideramos os TS, a diferença entre os valores ajustados no modelo NJL e os valores experimentais, tanto do valor estimado para a massa constituinte do quark strange, quanto para o valor da constante de decaimento fraco do káon, sofrem uma redução significativa.

**Palavras-chaves:** modelo de NJL. termos de superfície. káon.

# Abstract

The Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model is an extremely successful model in the description of the phenomenology of light mesons. On the other hand, the quartic interactions in the NJL Lagrangian density turn out the model non-renormalizable, and it is necessary to employ some regularization scheme in order to evaluate the divergent Feynman integrals. However, it is well known that, when such integrals are evaluated by using some regularization procedures - as the cut-off regularization - there are some restrictions when a shift in the integration momenta are performed in the divergent integrals. In particular, if the Feynman integrals are, at least, linearly divergent, such shift is accomplished by the appearance of typical terms, called surface terms (ST). In a certain sense, shifts in the integration variable of the Feynman integrals and the occurrence of the ST's are related with the arbitrary momentum routing and its invariance in the loop diagrams: a non-null ST indicates us that such symmetry was broken. Once that it is very common do not take into account the presence of the ST's in calculations of mesonic properties in the context of the NJL model, we employ the sharp cut-off regularization, in order to investigate the effect of ST's in the Nambu-Jona-Lasinio SU(3) Model, comparing results for some kaon parameters, with and without the presence of the surface terms. In the traditional formulation of NJL model, the results predicted for the weak decay constant of kaon are much lower than the experimental values. We observe that, using values for constituent quark masses compatible with the best estimates and considering the ST's, the difference between the adjusted values in the NJL model and the estimated value for the constituent mass of the quark strange and the experimental value for the weak constant decay suffers a significative reduction, showing the advantages of the our approach in comparison with the traditional one in NJL model.

**Key-words:** NJL model. surface terms. kaon.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>O modelo de Nambu-Jona-Lasinio</b>	<b>22</b>
2.1	A cromodinâmica quântica . . . . .	22
2.2	O modelo de NJL . . . . .	24
2.3	Bosonização do modelo de NJL . . . . .	26
2.3.1	Integração sobre os campos fermiônicos . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Observáveis físicos e a origem dos termos de superfície no modelo de NJL</b>	<b>34</b>
3.1	Obtenção da equação de gap . . . . .	34
3.2	Auto-energia dos mésons . . . . .	38
3.3	Constante de decaimento fraco . . . . .	46
<b>4</b>	<b>A expansão derivativa e roteamentos arbitrários no modelo de NJL</b>	<b>49</b>
4.1	A expansão derivativa . . . . .	49
4.2	Cálculo dos observáveis . . . . .	53
4.2.1	Equação de gap e condensado de quarks . . . . .	54
4.2.2	Auto-energia dos mésons . . . . .	54
4.2.3	Constante de decaimento fraco . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>56</b>
5.1	Termos de superfície . . . . .	56
5.2	Resultados e tabelas . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>65</b>
	<b>Referências</b>	<b>68</b>
	<b>APÊNDICE A Resolvendo os termos de superfície</b>	<b>74</b>
	<b>APÊNDICE B Tabelas</b>	<b>77</b>

# 1 Introdução

O Modelo Padrão da Física de Partículas é um modelo que descreve as partículas fundamentais que compõem toda a matéria bem como três das quatro forças fundamentais conhecidas: a interação eletromagnética, a interação fraca e a interação forte. Entretanto, ele não descreve a quarta interação, a gravitacional. Desenvolvido entre 1970 e 1973, é uma teoria quântica de campos consistente com a mecânica quântica e a relatividade especial, que possui um mecanismo que explica a origem da massa das partículas que compõem a matéria. Tal mecanismo é o Mecanismo de Higgs (MOREIRA, 2009; DAS, 2006; WIT; SMITH, 1986; RAMOND, 2001; RYDER, 1996; PESKIN; SCHROEDER, 1995; GRIFFITHS, 1987).

As interações fundamentais na natureza são descritas como intermediadas por bósons, que possuem o spin inteiro. Os fótons mediam a interação eletromagnética, os bósons  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z$  mediam a interação fraca, oito espécies de glúons mediam a interação forte, sendo que seis destes glúons são rotulados como pares de cores e de anti-cores. Outras duas espécies são uma mistura mais complexa das cores e anti-cores. Os bósons de Higgs induzem a quebra espontânea de simetria dos campos de calibre e são responsáveis pela existência da massa inercial.

De acordo com o Modelo Padrão, léptons e quarks (também chamados de férmions) são considerados partículas elementares, pois em tese não possuem estruturas internas. São partículas com spin semi-inteiro e obedecem o princípio de exclusão de Pauli, que determina que férmions idênticos não podem ser localizados no mesmo estado quântico.

Há doze tipos diferentes de férmions: seis léptons (elétron, múon, tau, neutrino do elétron, neutrino do múon e neutrino do tau) e seis quarks (up, down, strange, charm, bottom e top). Os léptons são partículas que não possuem cor e suas interações são somente eletromagnética e fraca, que diminuem com a distância. Os quarks ainda têm

uma propriedade quântica que foi denominada cor, que pode ser vermelha, verde ou azul. Assim, temos seis léptons e dezoito quarks. A cada uma destas partículas corresponde uma respectiva antipartícula, correspondendo então a 12 léptons e 36 quarks. Nas tabelas abaixo seguem algumas propriedades dos léptons <sup>1</sup>(Tabela 2) e algumas propriedades dos quarks <sup>2</sup> (Tabela 1) (GRIFFITHS, 1987).

Tabela 1 – Propriedades dos quarks (spin 1/2)

Geração	Sabor	Carga*	Massa (MeV)
Primeira	<i>d</i> ( <i>down</i> )	-	7
	<i>u</i> ( <i>up</i> )	+	3
Segunda	<i>s</i> ( <i>strange</i> )	-	120
	<i>c</i> ( <i>charm</i> )	+	1200
Terceira	<i>b</i> ( <i>bottom</i> )	-	4300
	<i>t</i> ( <i>top</i> )	+	17400

\* (unidades de carga positiva)

Tabela 2 – Propriedades dos leptons (spin 1/2)

Geração	Sabor	Carga*	Massa (MeV)	Meia vida (s)
Primeira	e (elétron)	-1	0,510999	$\infty$
	$\nu_e$ (neutrino do e)	0	0	$\infty$
Segunda	$\mu$ (múon)	-1	105,659	$2,19703 \times 10^{-6}$
	$\nu_\mu$ (neutrino do $\mu$ )	0	0	$\infty$
Terceira	$\tau$ (tau)	-1	1776,99	$2,91 \times 10^{-13}$
	$\nu_\tau$ (neutrino do $\tau$ )	0	0	$\infty$

\* (unidades de carga positiva)

Quarks e antiquarks são sempre encontrados em combinações neutras (de cor) chamadas de hádrons, fenômeno conhecido como confinamento. A massa de cada agrupamento de quarks excede a massa de seus componentes devido à energia de ligação. Estes agrupamentos incluem os mésons (hádrons bosônicos), formados por um quark e um anti-quark, e os bárions (hádrons fermiônicos), formados de três quarks. Devido ao confinamento é impossível medir as propriedades dos quarks diretamente e devemos então inferi-las pela medição das propriedades das partículas compostas, em geral por meio dos experimentos de espalhamento elástico profundo (“deep elastic scattering”) ou por colisões envolvendo íons pesados.

<sup>1</sup>A massa do neutrino é muito pequena e foi considerada zero.

<sup>2</sup>A massa dos quarks leves é imprecisa, pois não pode ser medida diretamente

Quando falamos de hádrons, como os que compõem o núcleo atômico, podemos nos perguntar: O que mantém o núcleo unido? Afinal, os prótons se repelem em razão de sua carga positiva, uma vez que estão próximos. Evidentemente, deve haver alguma outra força, mais poderosa que a repulsão elétrica, que liga os prótons e nêutrons no núcleo: esta é a força forte. A força forte tem um alcance muito curto, o que explica porque não lidamos com ela no dia-a-dia.

A primeira teoria significativa para explicar a força forte foi proposta por Yukawa em 1934. Yukawa assumiu que o próton e o nêutron são atraídos por algum tipo de campo, assim como o elétron é atraído para o núcleo por um campo elétrico. Este campo deveria ser devidamente quantizado e deveria, assim, ter uma partícula mediadora. Yukawa se fez a pergunta: Quais devem ser as propriedades da partícula mediadora, cuja troca explicaria as características conhecidas da força forte? O curto alcance da força indicava que a partícula mediadora deveria ser bastante pesada. Yukawa calculou que sua massa deveria ser cerca de 300 vezes maior do que o elétron, ou cerca de um sexto da massa de um próton. Como sua massa estava entre o elétron e o próton, a partícula de Yukawa passou a ser denominada como méson. Essa partícula nunca tinha sido observada em laboratório e, portanto, não havia evidência experimental que suportasse tal teoria. Mas uma série de estudos sistemáticos de raios cósmicos identificaram partículas que correspondiam à descrição de Yukawa.

Entretanto, à medida que estudos mais detalhados das partículas presentes nos raios cósmicos foram realizados, apareceram discrepâncias entre as partículas dos raios cósmicos e a partícula prevista por Yukawa: o tempo de vida era bem diferente e elas pareciam ser significativamente mais leves do que Yukawa havia previsto. Pior ainda, diferentes medições de massa não eram consistentes com outros experimentos. Em 1946 experiências mostraram que as partículas dos raios cósmicos interagem muito fracamente com o núcleo atômico. Se fosse realmente o méson de Yukawa, o transmissor da força forte, a interação deveria ser grande.

Em 1946, uma equipe de pesquisadores de Bristol (Inglaterra), sob a direção de Cecil F. Powell, estava estudando os traços produzidos por reações nucleares em certas

chapas fotográficas especiais, chamadas “emulsões nucleares”. Pela análise dos rastros deixados por prótons e outras partículas carregadas, era possível determinar a sua energia e massa. Beppo Occhialini e o brasileiro César Lattes analisaram algumas emulsões, que haviam sido colocadas no alto de uma montanha (o Pic du Midi). Ao revelar e analisar as emulsões, observaram grande número de traços deixados por partículas que interpretaram inicialmente como sendo os mésons já conhecidos. No entanto, após alguns dias de estudo, foram encontrados dois traços de mésons que iam diminuindo de velocidade e parando. No final desses traços brotava um rastro de um novo méson, como na Figura 1 (GRIFFITHS, 1987).

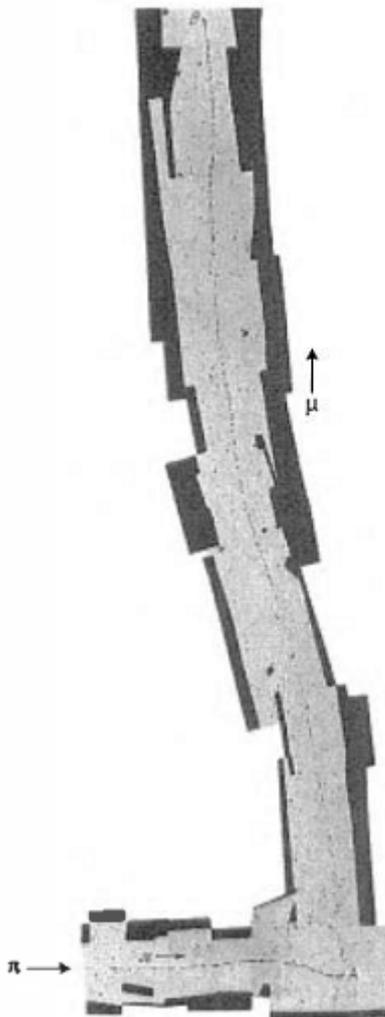


Figura 1 – Píon decaindo em um múon e um neutrino

Havia várias interpretações possíveis para a observação. Talvez o méson tivesse reagido com um núcleo dentro da emulsão e tivesse sido expelido com uma maior veloci-

dade, ou poderia ter havido uma transformação de um méson em outro. Para obter maior número de dados, Lattes viajou para a Bolívia, e colocou no alto do Monte Chacaltaya, a uma altitude de 5.500 metros, várias emulsões nucleares. Nelas, foi possível encontrar cerca de 30 rastros de mésons duplos. Estudando esses traços, foi possível determinar a massa dos mésons e perceber que havia dois tipos de partículas, com massas diferentes.

Existia um tipo de méson que era cerca de 30 a 40% mais pesado do que o outro. Ele se desintegrava e produzia o méson mais leve. A partícula secundária era o méson falsamente então identificado como o méson de Yukawa, que passou a ser chamado de méson  $\mu$  (atualmente, é chamado de múon). O méson primário, mais pesado, era algo novo, desconhecido. Foi denominado méson  $\pi$  (píon), e sua identificação foi anunciada em outubro de 1947. Estudos posteriores mostraram que ele tinha uma forte interação com o núcleo atômico, possuindo as características exigidas pela teoria de Yukawa. Havia sido encontradas as partículas responsáveis pelas forças nucleares.

Essa descoberta não foi, no entanto, a mera confirmação de uma teoria. Ela abriu um novo mundo de investigações. Primeiramente, ficava claro que existiam partículas (os múons) que não haviam sido previstas antes, e que não tinham um papel conhecido na natureza. Em segundo lugar, porque o estudo da radiação cósmica logo levou à descoberta inesperada de muitas outras partículas. Naquele mesmo ano, começaram a ser observados rastros que não correspondiam a nada de conhecido.

O próprio grupo de Powell encontrou alguns sinais de mésons duas vezes mais pesados do que os píons. Foram chamados inicialmente de mésons tau, e atualmente são denominados mésons káon ( $K$ ) 1. Ainda em 1947, Clifford Butler e George Rochester observaram traços em forma de V, que podiam ser explicados supondo a existência de novas partículas neutras (sem carga elétrica), que não deixam traço, e que se desintegram em uma partícula positiva e outra negativa. Era o káon neutro decaindo em um píon positivo e outro negativo. Nos anos seguintes, surgiu uma avalanche de novas partículas, todas elas inesperadas, e com propriedades difíceis de serem compreendidas, na época. Robert Oppenheimer introduziu a expressão “zoológico sub-nuclear” para esse novo mundo de partículas. Entre os animais exóticos desse zoológico, foram encontradas partículas mais

pesadas do que o próton (os “híperons”), de vários tipos diferentes. A nova fauna foi inicialmente explorada pelo estudo de raios cósmicos, mas logo foram construídos aceleradores de partículas cada vez mais poderosos, que permitiram a criação e investigação dessas partículas em laboratório.

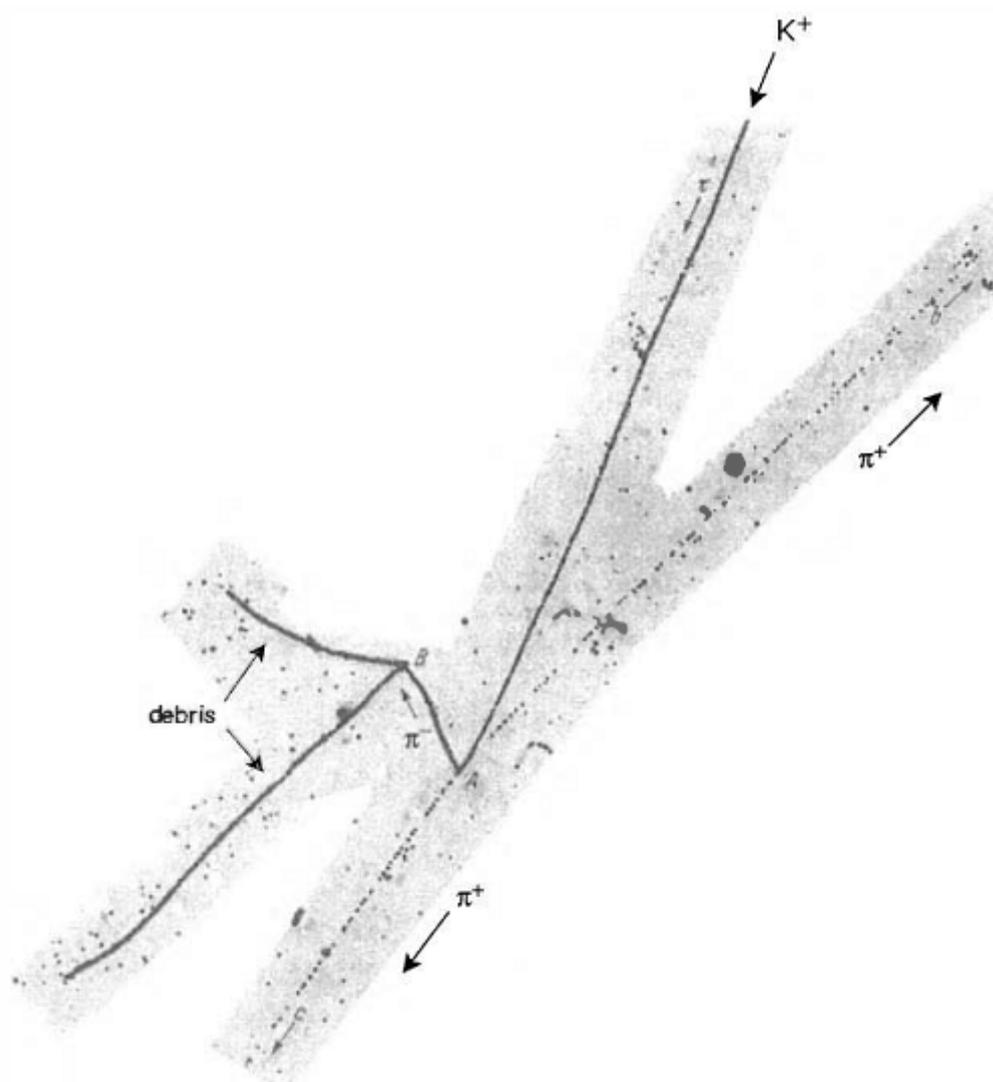


Figura 2 – Káon decaindo em três píons (GRIFFITHS, 1987)

Os glúons são os bósons responsáveis pela interação forte, cuja existência é determinada pela propriedade de cor. Assim, a cromodinâmica quântica (QCD - do inglês “Quantum Chromodynamics”) é a teoria que estuda estas interações entre cores. Esta teoria tem sido aceita há bastante tempo como a teoria das interações fortes. A utilidade desta teoria calibre é particularmente vista no regime de altas energias, onde os processos de dispersão são calculados com muito sucesso. Isto é devido ao fato de que, em curtas

distâncias, a teoria exhibe o fenômeno de liberdade assintótica. Ou seja, a constante de acoplamento quark-glúon torna-se pequena e as técnicas perturbativas desenvolvidas para o estudo da eletrodinâmica quântica podem ser estendidas para descrever processos QCD neste regime de acoplamento fraco.

Por outro lado, para o regime de baixas energias, ou equivalentemente para distâncias maiores, a QCD não é tão bem compreendida e as técnicas de cálculo perturbativo existentes produzem resultados incorretos. Isso é devido ao fato de que a constante de acoplamento forte se torna grande e a abordagem perturbativa não pode ser justificada.

Na QCD temos à disposição uma lagrangiana definida, onde toda a dinâmica do sistema está contida, mas não é fácil extrair as informações desejadas, como as propriedades dos hádrons e suas interações, ou o comportamento da matéria hadrônica em alta densidade. Portanto, somos motivados a procurar um modelo de densidade lagrangiana mais simples que apresente uma ou mais das características essenciais da QCD, mas que seja tratável perturbativamente.

A ideia básica por trás de uma teoria efetiva é de que, se temos um sistema composto por muitos graus de liberdade e só estamos interessados em tratar a dinâmica de alguns deles, tentamos construir uma teoria só para os graus de liberdade que julgamos importantes em nosso tratamento. Para tanto, procuramos construir uma lagrangeana efetiva, com base nas propriedades de simetria da lagrangeana original. Uma teoria efetiva para a QCD em baixas energias deve possuir as seguintes propriedades:

1 - A teoria deve ser escrita em termos de quarks, podendo ou não explicitar os glúons.

2 - A teoria deve preservar a simetria quiral, tal como ocorre com a lagrangeana da QCD, e também deve possuir um mecanismo de quebra dinâmica desta simetria.

3 - O vácuo da teoria efetiva deve ser assimétrico, assim como é o vácuo da QCD.

4 - As correntes axiais devem gerar transições do estado fundamental para o estado de um pión ou um káon.

5 - O espectro deve conter  $N_f^2 - 1$  bósons de Goldstone.

O modelo efetivo que vamos utilizar neste trabalho é o modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL). O modelo de NJL remonta ao início dos anos sessenta, com o aparecimento de dois trabalhos intitulados “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity” (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a; NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b). Ele combina elementos da teoria spinorial não-linear de Heisenberg, com a observação de uma estreita analogia entre as propriedades das partículas de Dirac e as excitações das quasi-partículas que aparecem na teoria BCS da supercondutividade (BARDEEN; COOPER; SCHRIEFFER, 1957).

Em sua forma original, este modelo foi construído como uma teoria pré-QCD de nucleons que interagem através de uma interação de dois corpos. Hoje, ele é reinterpretado como uma teoria com graus de liberdade de quarks. A densidade lagrangeana deste modelo é construída de modo que as simetrias da QCD, que também são observadas na natureza, são parte integrante do mesmo. Uma das mais importantes é a simetria quiral, essencial para a compreensão dos hádrons mais leves.

A QCD distingue-se não só por suas muitas simetrias, mas também pela quebra destas simetrias. O modelo NJL é particularmente útil para a observação das consequências de algumas destas quebras de simetria. Por exemplo, a geração dinâmica de massas fermiônicas provocada pela quebra de simetria quiral é uma das características do modelo NJL. O papel especial dos modos de Goldstone, interpretados para dois sabores de quarks como os píons e para três sabores de quarks como o octeto de mésons pseudo-escalares (Figura 1) também pode ser explicitamente verificado. Além disso, há os resultados conhecidos da álgebra de correntes, tais como as relações Goldberger-Treiman (GOLDBERGER; TREIMAN, 1958) e Gell-Mann-Oakes-Renner (GELL-MANN; OAKES; RENNER, 1968) que valem para QCD. Estes resultados também devem estar presentes no modelo NJL, uma vez que são uma consequência apenas das propriedades de simetria e não de algum modelo efetivo. No modelo NJL, eles podem ser derivados de forma explícita. O mecanismo prático da quebra de simetria quiral ocorre no modelo NJL de maneira muito semelhante à teoria BCS. No modelo NJL, argumenta-se que a interação entre quarks e antiquarks, que surge a partir de alguns processos complicados de troca de glúons, leva

à formação de um condensado de pares quark-antiquark no vácuo. Outros efeitos, como o condensado de glúons, que não desempenham um papel direto na quebra de simetria quiral, não são considerados.

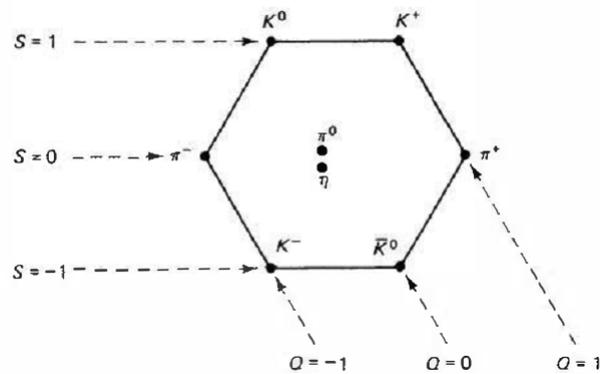


Figura 3 – Octeto de mésons (GRIFFITHS, 1987)

O modelo NJL tem limitações também. Por ser uma teoria de interação entre quatro férmions interagentes, não é uma teoria de campos renormalizável. Utilizando o modelo NJL como um modelo efetivo, um esquema de regularização deve ser especificado para lidar com as integrais impróprias que ocorrem. Um esquema de regularização específica uma escala de comprimento para a teoria, que pode ser expressa como um ponto de corte nos momentos dos quarks, como na regularização via cut-off. Pode-se considerar o corte como uma aproximação da implementação da propriedade da liberdade assintótica da QCD: suprimindo a interação entre quarks para altas energias, simulando o comportamento da constante de acoplamento dinâmica da QCD (HATSUDA; KUNIHIRO, 1985; BERNARD; JAFFE; MEISSNER, 1988).

Outra característica do modelo NJL é que a interação local não confina quarks. Para muitas situações, no entanto, a questão do confinamento pode não ser importante. Por exemplo, a interação dos hádrons abaixo do limiar para a produção de quarks livres não podem depender dos detalhes de como o confinamento é produzido.

Entretanto, modelo é uma ferramenta valiosa no estudo de fenômenos relacionados à simetria e à transição de fase quirais. Como já mencionado anteriormente, é necessário que o modelo possua um mecanismo de quebra desta simetria. No modelo NJL, este

mecanismo é provido pela introdução de uma pequena massa, chamada massa corrente, de quarks à sua lagrangeana.

O modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a; NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b) é assim um modelo fenomenológico, descrito por uma lagrangeana de férmions interagentes, que apresenta invariância com relação a algumas das transformações de simetria também apresentada pela QCD. No entanto, é um modelo cujo tratamento perturbativo é bem mais simples, conforme anteriormente mencionado, sendo por isso utilizado como modelo efetivo para o estudo de processos envolvendo o limite de baixas energias.

A lagrangeana do modelo de NJL é a seguinte<sup>3</sup>:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m}) \psi + \frac{1}{2}G \left[ (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right] \quad (1.1)$$

Esta lagrangeana possui uma parte dinâmica  $\bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m}) \psi$  e outra de interação  $\frac{1}{2}G \left[ (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right]$ .  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  são os campos fermiônicos,  $G$  a constante de interação e  $\hat{m}$  a matriz de massas correntes. Como percebemos, nos termos de interação aparece uma interação quártica, que dificulta a obtenção do funcional gerador das funções de Green para o modelo. Assim, precisamos realizar alguma modificação no tratamento deste termo. Podemos, por exemplo, bosonizar a lagrangeana. Ao fazermos este tratamento, iremos ter campos fermiônicos, dados por  $\psi$  e campos auxiliares representando mésons (com a junção de dois campos de quark). Este procedimento é semelhante ao consagrado método de campo médio e às aproximações de Hartree e de Hartree-Fock (HARTREE, 1928; FOCK, 1930; KLEINERT, 2011; ANTUNES et al., 1999). Este procedimento está detalhado no capítulo 2.

Entretanto, o modelo de NJL precisa de um esquema de regularização. Um esquema de regularização é interpretado como o fator que especifica o intervalo de validade da teoria, que pode ser expresso como um corte (“cut-off”) no momento dos quarks. Porém, diferentes esquemas de regularização podem fornecer resultados diferentes para alguns observáveis físicos e outras quantidades estimadas pelo modelo (KLEVANSKY,

<sup>3</sup>No próximo capítulo iremos detalhar a lagrangeana do modelo de NJL

1992; BLIN; HILLER; SCHADEN, 1988; PEREIRA et al., 2007; PEREIRA et al., 2006). Este é o custo de se utilizar uma teoria efetiva. Além disto, os parâmetros de regularização podem ser diferentes e alguns são melhor ajustados quando o “cut-off” nos momentos tende à infinito (BLIN; HILLER; SCHADEN, 1988; MOTA, 1999).

O modelo NJL também é estudado como um possível modelo para a quebra dinâmica de simetria no modelo padrão (MIRANSKY; TANABASHI; YAMAWAKI, 1989; MIRANSKY; TANABASHI; YAMAWAKI, 1989; MIRANSKY, 1985; MIRANSKY, 1991; MARCIANO, 1989), e, em particular, pela presença de ambiguidades no modelo NJL devido a diferentes escolhas no roteamento dos momentos externos pelas linhas internas de partículas em diagramas de Feynman que apresentem “loops” (WILLEY, 1993), relacionadas ao esquema de regularização empregado (GHERGHETTA, 1994; MOTA, 1999).

Estes comportamentos se relacionam à não renormalizabilidade do modelo e à necessidade da existência de um “cut-off” para o tratamento do modelo como um modelo efetivo. Quando realizamos uma translação (shift) no momento interno dos “loops” em integrais divergentes, há o aparecimento de termos de superfície, que são a razão do surgimento das ambiguidades. Esses termos de superfícies e sua influência na determinação dos observáveis no modelo de NJL são o tema básico deste trabalho. A influência de termos de superfície em teorias e modelos efetivos da QCD é tema recorrente no estudo da física de partículas e campos. Já foi mostrada, por exemplo, a importância da presença de termos de superfície no estudo de (ELIAS; MCKEON; MANN, 1983) e da anomalia quiral (JACKIW, 1999; SCARPELLI et al., 2001).

A física dos quarks leves e pesados e suas teorias efetivas correspondentes não poderiam ser mais díspares, mesmo esperando-se uma transição suave entre ambos limites. A construção de um cenário onde podemos descrever a transição leve-pesado de forma independente de modelo é, portanto, tema de interesse atual e algumas tentativas de progresso neste sentido são muito recentes (MOTA; ARRIOLA, 2007; GUO; CHEN; DENG, 2013). No tratamento desenvolvido na Ref. (MOTA; ARRIOLA, 2007), aqui denominado expansão derivativa em torno dos momentos dos quarks pesados, toda a fenomenologia dos mésons pesados é obtida de forma uniforme com os mésons mais leves (píons).

Na técnica de expansão derivativa em torno dos momentos dos quarks pesados (MOTA; ARRIOLA, 2007), a interação entre os quarks e os mésons é descrita através da técnica de expansão derivativa, similar à utilizada por Chan (CHAN, 1986), construída a partir de uma transformação unitária. No tratamento de Chan, a transformação é realizada usando um momento externo  $\not{p}$  e no tratamento de Mota e Arriola a transformação será através de uma matriz diagonal no espaço dos sabores,  $\not{P}_a$  (CHAN, 1986). Este procedimento equivale a considerar que quarks leves e pesados interagem entre si apenas através da troca do chamado momento residual do quark pesado (a diferença entre o momento relativístico do quark e seu momento relativístico em repouso), no mesmo espírito da Teoria Efetiva de Quarks Pesados (HQET) (GEORGI, 1990; NEUBERT, 1994). No entanto, a HQET trata os quarks pesados através de propagadores não relativísticos, enquanto que na expansão derivativa em torno dos momentos dos quarks pesados, tanto os quarks leves quanto pesados são tratados através de propagadores relativísticos.

Um fator relevante no tratamento da física dos mésons pesados através da expansão derivativa é a manutenção dos termos de superfície associados à matriz de translação  $\not{P}_a$ : na ausência destes termos, todas as amplitudes se tornam independentes desta translação, como discutiremos ao longo deste trabalho. Nele tentaremos determinar qual a influência destes termos de superfície para a física dos mésons leves, especificamente a do méson káon. A massa do káon ( $m_k = 494 MeV$ ) não é, entretanto, tão baixa quanto a denominação de méson leve poderia fazer entender: esta massa é aproximadamente 50% da escala da QCD, da ordem de 1 GeV. Além disso, o quark strange possui massa corrente estimada em  $150 MeV$ , muito acima da massa dos quarks up e down, da ordem de  $5 MeV$ . Desta forma, a física do méson káon parece estar concentrada em uma região intermediária entre os mésons mais leves (píons) e os mésons pesados.

Um problema sistemático na descrição da física do káon é a descrição de seu decaimento fraco. Os modelos efetivos que descrevem o káon, sistematicamente, fornecem valores para a constante de decaimento fraco desta partícula menores que o observado experimentalmente (HILLER et al., 2006; PEREIRA et al., 2006; PEREIRA et al., 2007), quando a massa do quark up constituinte é ajustada para valores condizentes com as

melhores estimativas indiretas desta massa ([Borka Jovanović et al., 2010](#)).

Assim, vamos focalizar a física do méson káon, um méson considerado leve, constituído por um quark up e um quark strange, realizando dessa forma uma comparação entre duas maneiras distintas de se tratar a ação efetiva a 1-loop do modelo de Nambu-Jona-Lasínio. A primeira seria a abordagem usual do modelo, exigindo-se a invariância por translações finitas no momento interno do loop de cada amplitude determinada (invariância de roteamento), o que equivale, como será demonstrado, a abandonar todos os termos de superfície que surgem da resolução das integrais de Feynman. Alguns esquemas de regularização, como a Regularização Dimensional ou Pauli-Villars invariante de Gauge, já trazem essa anulação dos termos de superfície naturalmente incorporada.

A segunda abordagem corresponde a permitir, segundo o espírito do exposto acima, que a invariância a translações finitas possa ser violada quando consideramos alguma ordem específica na expansão do campo auxiliar, uma vez que esta invariância está garantida apenas para a ação efetiva como um todo, como será visto posteriormente. Isso corresponde a mantermos os termos de superfície, e, para isso, a regularização “sharp cut-off” é bastante adequada. Como consequência, iremos verificar que ao considerarmos as correções advindas dos termos de superfície, conseguimos reproduzir, de forma mais acurada, observáveis mesônicos relacionados ao káon. Avaliaremos também os resultados advindos da introdução da translação no momento interno do loop permitida pela expansão derivativa no espírito do tratamento de mésons pesados ([MOTA; ARRIOLA, 2007](#)).

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 fazemos a descrição do modelo de Nambu-Jona-Lasínio (NJL) a um loop e obtemos a ação efetiva do modelo. No Capítulo 3 obtivemos expressões para alguns observáveis físicos relacionados com o pión e com o káon, como a auto-energia dos mésons, massas dos quarks, condensado de quarks e constantes de decaimento fraco. Também mostramos o cálculo dos termos de superfície para cada um dos observáveis. No Capítulo 4, utilizamos a expansão derivativa desenvolvida em ([MOTA; ARRIOLA, 2007](#)) para calcular os observáveis e respectivos termos de superfície. No Capítulo 5 comparamos os resultados calculados sem a utilização dos termos de superfície e quando os consideramos, comparando também com os resul-

---

tados experimentais ([OLIVE et al., 2014](#)) Mostramos também detalhes para realização dos cálculos. No Capítulo 6, apresentamos nossas conclusões e indicamos possibilidades de trabalhos futuros.

## 2 O modelo de Nambu-Jona-Lasínio

Neste capítulo, iremos apresentar alguns ingredientes do modelo de Nambu-Jona-Lasínio, sem pretendermos apresentar uma revisão completa da formulação do modelo Nambu-Jona-Lasínio (NJL) ou de suas aplicações, revisão esta que pode ser encontrada na literatura (KLEVANSKY, 1992; HATSUDA; KUNIHIRO, 1994; BIJNENS, 1996; BUBALLA, 2005; BARDUCCI et al., 2005), mas sim uma apresentação sucinta da versão bosonizada do modelo NJL, onde introduzimos graus de liberdade que carregam os mesmos números quânticos dos mésons, e assim criamos um modelo efetivo mesônico, permitindo assim o cálculo da ação efetiva a um loop da lagrangeana mesônica.

### 2.1 A cromodinâmica quântica

A lagrangeana da QCD é dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \psi \not{D}\psi \quad (2.1)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é o tensor do campo de glúons dado por  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ , a derivada covariante  $\not{D}$  é  $\not{D} = \not{\partial} - i\frac{g}{2}\lambda^a \not{A}^a$  e carrega consigo o campo de calibre de cor em  $SU(3)$ ,  $g$  é a constante de acoplamento forte e  $f_{abc}$  é a constante de estrutura  $SU(3)$  no espaço de cores.

O espinor  $\psi$  representa um vetor no espaço de isospin, sendo dado por  $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$  na lagrangeana da versão  $SU(2)$  no espaço de sabores da QCD e  $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$  na versão  $SU(3)$ , sendo  $u$  o campo fermiônico associado ao quark *up*,  $d$  o campo fermiônico associado ao quark *down* e  $s$  o campo fermiônico associado ao quark *strange*. As matrizes  $\lambda^a$  são matrizes definidas no espaço de cores, assim na versão  $SU(2)$  temos  $a = 1 \cdots 3$  e  $\lambda^a$  são

portanto as matrizes de Pauli, e na versão  $SU(3)$  teremos  $a = 1 \cdots 8$  e  $\lambda^a$  são conhecidas como as matrizes de Gell-Mann.

Esta lagrangeana apresenta invariância com relação a transformações de simetria  $U_V(1)$  relativa a conservação do número bariônico, a transformação  $SU_V(2)$ , relativa a conservação de isospin e a transformação  $SU_A(2)$ , conhecida como transformação de simetria quiral, ou seja, a lagrangeana da QCD é invariante à substituição

$$\psi \rightarrow e^{\frac{-i\lambda^a \theta^a \gamma^5}{2}} \psi \quad (2.2)$$

onde  $\theta^a$  representa o conjunto de parâmetros globais da transformação.

Além disso, a lagrangeana 2.1 apresenta quebra espontânea da simetria quiral global e, de acordo com o teorema de Goldstone, isto implica na existência de partículas de massa zero e spin zero associadas. Fenomenologicamente, estas partículas são interpretadas como sendo os píons (no caso da simetria  $SU_A(2)$ ) ou o octeto de mésons pseudo-escalares (no caso da simetria  $SU_A(3)$ ). Apesar destes mésons possuírem massa, esta massa é relativamente pequena quando comparada com a massa dos núcleons.

Desta forma, para representar a fenomenologia das partículas observáveis, é necessário que a lagrangeana 2.1, que possui invariância com relação à transformação de simetria quiral, seja aumentada de um termo de massa não invariante à esta transformação, dado por

$$\mathcal{L}_{massa} = -m_u \bar{u}u - m_d \bar{d}d - m_s \bar{s}s, \quad (2.3)$$

onde  $m_u$ ,  $m_d$ ,  $m_s$  são as massas dos quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$  respectivamente. A lagrangeana resultante não é mais invariante à transformação quiral, no entanto dizemos que a simetria é observada no limite quiral ( $m \rightarrow 0$ ). Não existe nenhuma razão dinâmica para que estas simetrias tenham que ser observadas neste limite, no entanto, o baixo valor das massas dos mésons pseudo-escalares na escala da massa do núcleon é o principal argumento que sustenta tal suposição.

## 2.2 O modelo de NJL

O modelo de Nambu-Jona-Lasínio (NJL) (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a; NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b) com geração dinâmica de massa dos férmions satisfaz às exigências que uma teoria deve possuir para ser uma boa teoria efetiva para a QCD. As interações escalares, pseudo-escalares, vetoriais e pseudo-vetoriais do modelo de NJL é descrito pela lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \hat{m})\psi + \frac{1}{2}G \left[ (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_a i\gamma^5\psi)^2 \right] + \frac{1}{2}G_v \left[ (\bar{\psi}\lambda_a\gamma^\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda_a\gamma^\mu\gamma^5\psi)^2 \right] \quad (2.4)$$

onde  $\hat{m}$  é matriz de massa para o modelo. No estudo da simetria  $SU(2)$ , usualmente a matriz de massa  $\hat{m}$  é substituída por um valor escalar constante  $m_0$ , uma vez que valores obtidos através da álgebra de correntes para as massas dos quarks *up* e *down* são aproximadamente os mesmos. No limite quiral, ou seja, para  $\hat{m} \rightarrow 0$ , vemos que a lagrangeana do modelo NJL apresenta invariância em relação às mesmas transformações de simetria da QCD, em especial à transformação quiral, cujos modos de Goldstone são interpretados como sendo os mésons pseudo-escalares.

A lagrangeana do modelo NJL em  $SU(3)$  em sua forma fermiônica, com o setor escalar e pseudo-escalar e o termo de massa corrente dos quarks, é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m}) \psi + \frac{1}{2}G \left[ (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right] \quad (2.5)$$

onde  $G$  é a constante de acoplamento entre os campos dos quarks,  $\hat{m}$  é a matriz das massas dos quarks

$$\hat{m} = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$\psi$  é um vetor que descreve o campo dos quarks

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_u \\ \psi_d \\ \psi_s \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

e  $\lambda_a$ , com  $a = 0, 1, 2, \dots, 8$  são as matrizes de Gell-man, definidas no espaço de cores:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (2.8) \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \lambda_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

No formalismo de integrais de trajetória, uma teoria quântica de campos pode ser definida a partir do chamado funcional gerador das funções de Green. Esta abordagem usa o conceito de integrais de trajetória, originalmente introduzido por Feynman, que mostrou que o formalismo de integrais de trajetórias podia ser visto como uma alternativa aos formalismos tradicionais de Heisenberg e Schroedinger da Mecânica Quântica. O funcional gerador das funções de Green é a solução da equação de Dyson-Schwinger e pode ser escrito como uma expansão funcional das funções de Green de n-pontos. Através de uma transformação funcional de Legendre encontramos o funcional gerador das funções irreduzíveis de uma partícula  $(1 - PI)^1$ , que é, então, expandido em potências de  $\hbar$ . Tal funcional é chamado de ação efetiva, pois ele contém, além da ação clássica, as correções quânticas (TOMS, 2007; POSSA; PEREIRA; NOGUEIRA, 2005b; POSSA; PEREIRA; NOGUEIRA, 2005a).

O funcional gerador para os campos fermiônicos é dado por:

$$Z[\bar{\eta}, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int D\psi \int D\bar{\psi} \exp \left[ i \int d^4x \left( \mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi \right) \right], \quad (2.9)$$

onde  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  são os campos fermiônicos,  $\bar{\eta}$  e  $\eta$  são as fontes fermiônica dos campos.  $N$  é um fator de normalização que fornece  $Z[0] = 1$ . Substituindo a lagrangeana (2.5) na

<sup>1</sup>Diagramas de Feynman que não podem ser divididos em dois cortando-se apenas linhas internas.

expressão do funcional gerador:

$$Z = \frac{1}{N} \int D\psi \int D\bar{\psi} \exp \left[ i \int d^4x \left\{ \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m}) \psi + \frac{G}{2} \left[ (\bar{\psi} \lambda_a \psi)^2 + (\bar{\psi} i \lambda_a \gamma^5 \psi)^2 \right] + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right\} \right]. \quad (2.10)$$

O funcional gerador de uma teoria de campos é um funcional que nos permite obter as funções de Green de  $n$  pontos da teoria, através de sucessivas derivadas do funcional com relação às fontes dos campos. Detalhes sobre a relação existente entre o funcional e as funções de Green que dele podem ser obtidas são discutidos em (POSSA; PEREIRA; NOGUEIRA, 2005b; POSSA; PEREIRA; NOGUEIRA, 2005a; DAS, 2006).

A lagrangeana fermiônica do modelo de NJL é descrita em termos de interações quárticas entre os férmions, o que torna mais trabalhosa a obtenção da ação efetiva. Podemos, entretanto, linearizar a lagrangeana, o que facilita a determinação do funcional ação efetiva. Tal linearização pode ser feita por meio de um procedimento denominado bosonização, (HA, 1984; EBERT; REINHARDT, 1986; KLEVANSKY, 1992; HATSUDA; KUNIHIRO, 1994; DELFT; SCHOELLER; Von Delft, 1998; KLEINERT, 2011) que consiste em linearizar a interação de quatro férmions por meio de campos auxiliares, que possuem os mesmos números quânticos dos campos mesônicos. Este será o tema da próxima seção.

## 2.3 Bosonização do modelo de NJL

O termo bosonização de uma teoria fermiônica refere-se à transformação de uma lagrangeana que descreve interações entre férmions numa lagrangeana equivalente, que dependa apenas de campos bosônicos. A bosonização pode ser realizada através de um processo de inclusão de campos bosônicos auxiliares de tal forma que a dinâmica do modelo não é alterada.

Neste caso, os campos bosônicos serão associados aos mésons. Esta técnica será introduzida via formalismo de integrais de caminho de Feynman, discutida em maiores detalhes na referência (KLEVANSKY, 1992; EBERT; REINHARDT, 1986; VOLKOV;

RADZHABOV, 2006; DAS, 2006). O processo de bosonização será desenvolvido para a versão  $SU(3)$  do modelo.

Inicialmente, reescrevemos a lagrangeana do modelo NJL  $SU(3)$  (2.5) em termos da massa corrente dos quarks. Logo em seguida acrescentamos os campos bosônicos referentes aos mésons escalares e aos mésons pseudo-escalares. Devido à forma quadrática do expoente, a integral funcional abaixo é apenas uma constante, ou seja, não depende dos campos  $\psi$ .

$$\int D\mathbf{S}_a \exp \left[ \frac{-i}{2G} (\mathbf{S}_a - G\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 \right] = \text{constante} \quad (2.11)$$

Desta forma, a inserção de termos deste tipo no funcional gerador do modelo irá alterar somente a constante de normalização do mesmo, não alterando sua dinâmica. O processo de bosonização consiste na introdução de campos auxiliares  $\mathbf{S}_a$  e  $\mathbf{P}_a$  sem dinâmica, aumentando a lagrangeana original da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{1}{2G} [\mathbf{S}_a - G\bar{\psi}\lambda_a\psi]^2 - \frac{1}{2G} [\mathbf{P}_a - G\bar{\psi}\lambda_a i\gamma^5\psi]^2 \quad (2.12)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange para os campos auxiliares, obtemos somente as equações de vínculos válidas apenas no mínimo da ação, ou seja:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathbf{S}_a} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\mathbf{S}_a)} = 0 \Rightarrow \mathbf{S}_a = G\bar{\psi}\lambda_a\psi \quad (2.13)$$

e, de forma semelhante,

$$\mathbf{P}_a = G\bar{\psi}\lambda_a i\gamma^5\psi \quad (2.14)$$

A lagrangeana bosonizada do modelo NJL  $SU(3)$  é, então, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\not{\partial} - \hat{m}) \psi + \frac{G}{2} \left[ (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right] - \\ & - \frac{1}{2G} [\mathbf{S}_a - G\bar{\psi}\lambda_a\psi]^2 - \frac{1}{2G} [\mathbf{P}_a - G\bar{\psi}\lambda_a i\gamma^5\psi]^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Expandindo os termos quadráticos, temos então

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\not{\partial} - \hat{m}) \psi + \frac{G}{2} \left[ (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right] - \\ & - \frac{1}{2G} \left[ \mathbf{S}_a^2 - 2G\mathbf{S}_a\bar{\psi}\lambda_a\psi + G^2 (\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 \right] - \\ & - \frac{1}{2G} \left[ \mathbf{P}_a^2 - 2\mathbf{P}_a G\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi + G^2 (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

e assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m}) \psi - \frac{1}{2G} [\mathbf{S}_a^2 - 2G\mathbf{S}_a\bar{\psi}\lambda_a\psi] - \frac{1}{2G} [\mathbf{P}_a^2 - 2G\mathbf{P}_a\bar{\psi}i\lambda_a\gamma^5\psi] \\ &= \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m} + \mathbf{S}_a\lambda_a + i\mathbf{P}_a\lambda_a\gamma^5) \psi - \frac{1}{2G}\mathbf{S}_a^2 - \frac{1}{2G}\mathbf{P}_a^2\end{aligned}\quad (2.17)$$

Podemos constatar que a introdução dos campos auxiliares faz com que a interação quártica entre férmions da lagrangeana original seja substituída por interações triplas entre férmions e bósons, além de termos quadráticos nestes campos. Os termos que descrevem interações apenas entre férmions desaparecem. A lagrangeana bosonizada é, então, dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m} + \mathbf{S}_a\lambda_a + i\mathbf{P}_a\lambda_a\gamma^5) \psi - \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) \quad (2.18)$$

Como os valores esperados no vácuo de  $\mathbf{S}_a$  não são nulos,  $\langle 0|\mathbf{S}_a|0\rangle = c_a$ , consequência da quebra espontânea de simetria do modelo, podemos definir um novo campo  $\mathbf{S}'$  de valor esperado no vácuo nulo com  $\mathbf{S}_a = \mathbf{S}'_a + c_a$ . Assim, em termos de  $\mathbf{S}'$ , a lagrangeana bosonizada do modelo NJL pode ser escrita como (KLEVANSKY, 1992)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m} + (\mathbf{S}'_a + c_a)\lambda_a + i\mathbf{P}_a\lambda_a\gamma^5) \psi - \frac{1}{2G} ((\mathbf{S}'_a + c_a)^2 + \mathbf{P}_a^2) \\ &= \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{m} + \mathbf{S}'_a\lambda_a + c_a\lambda_a + i\mathbf{P}_a\lambda_a\gamma^5) \psi - \frac{1}{2G} (\mathbf{S}'_a{}^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G}\mathbf{S}'_a c_a \\ &= \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}'_a\lambda_a + i\mathbf{P}_a\lambda_a\gamma^5) \psi - \frac{1}{2G} (\mathbf{S}'_a{}^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G}\mathbf{S}'_a c_a\end{aligned}\quad (2.19)$$

Na equação 2.19, podemos redefinir o termo de massa do campo fermiônico como

$$\hat{M} = \hat{m} - c_a\lambda_a \quad (2.20)$$

e esta expressão, ao calcularmos o valor esperado no vácuo para os antigos campos  $\mathbf{S}_a$ , nos fornecerá as equações de GAP para os quarks *up*(*down*) e *strange*. Esta nova massa é a chamada massa constituinte dos quarks e é consequência da quebra espontânea da simetria quiral.

Como agora a lagrangeana possui apenas termo em  $\mathbf{S}'$ , iremos abandonar o apóstrofo visando simplificar a notação ( $\mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{S}$ ).

### 2.3.1 Integração sobre os campos fermiônicos

O funcional gerador (2.10) pode agora ser reescrito para a lagrangeana bosonizada,

$$Z = \frac{1}{N} \int D\mathbf{P}_a \int D\mathbf{S}_a \int D\psi \int D\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\psi} (i\not{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5) \psi - \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + s_a \mathbf{S}_a + p_a \mathbf{P}_a + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} \quad (2.21)$$

Os processos físicos relacionados aos mésons escalares e pseudo-escalares são identificados com as amplitudes de probabilidade de transição de estados correspondentes aos campos auxiliares  $\mathbf{S}_a$  e  $\mathbf{P}_a$ , uma vez que os números quânticos desses campos são equivalentes aos dos mésons físicos. Para a obtenção destas amplitudes de transição a partir do funcional gerador 2.21 necessitamos, então, introduzir fontes associadas a estes campos. Aqui introduzimos as fontes  $s_a$  e  $p_a$ .

Este funcional gerador das funções de Green da teoria pode agora ser usado para obtermos a ação efetiva (RYDER, 1996; RAMOND, 2001; GUSYNIN; MIRANSKII, 1992), que será a ação escrita em termos de graus de liberdade bosônicos, integrando-se os termos fermiônicos quadráticos da ação. Podemos decompor o funcional gerador em duas partes, que são os setores bosônico e fermiônico.

$$Z = \frac{1}{N} \int D\mathbf{P}_a \int D\mathbf{S}_a \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + s_a \mathbf{S}_a + p_a \mathbf{P}_a \right] \right\} Z_F(\eta, \bar{\eta}) \quad (2.22)$$

onde  $Z_F(\eta, \bar{\eta})$  é a parte fermiônica.

$$Z_F(\eta, \bar{\eta}) = \int D\psi \int D\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\psi} (i\not{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5) \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} \quad (2.23)$$

O propagador fermiônico é dado pela função de Green de dois pontos, encontrado através da derivada funcional em relação às fontes do funcional gerador, fazendo as fontes iguais a zero, no final. Mais detalhes estão presentes em (GUSYNIN; MIRANSKII, 1992; RYDER, 1996) .

Podemos resolver a integral no funcional gerador 2.21 nos campos fermiônicos (para resolver a expressão, é necessário utilizar a álgebra das variáveis de Grassmann),

utilizando a seguinte propriedade (DAS, 2006) :

$$\int \Pi_{i,j} d\theta_i^* d\theta_j \exp[-(\theta_i^* M_{ij} \theta_j + \theta_i^* C_i + \theta_i C_i^*)] = N \det M_{ij} \exp(C_i^* M_{ij}^{-1} C_j). \quad (2.24)$$

Temos assim, fazendo  $M_{ij} = \mathcal{D} \equiv (i\cancel{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5)$ :

$$\begin{aligned} Z = & \frac{1}{N} \int D\mathbf{P}_a \int D\mathbf{S}_a \exp \left[ i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + s_a \mathbf{S}_a + p_a \mathbf{P}_a \right\} \right] \\ & \det(\mathcal{D}) \exp \left[ -i \int \int \{ \bar{\eta} \mathcal{D}(x, y) \eta \} d^4x d^4y \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando a propriedade (OLIVEIRA, 2011), válida na aproximação a um loop, (JACKIW, 1999; RYDER, 1996):

$$\ln \det A = \text{Tr} \ln A \quad (2.26)$$

e tomando a exponencial dos dois lados, obtemos:

$$\det A = \exp \text{Tr} \ln A. \quad (2.27)$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} Z = & \frac{1}{N} \int D\mathbf{P}_a \int D\mathbf{S}_a \exp \left[ \text{Tr}(\ln(\mathcal{D})) + i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + s_a \mathbf{S}_a + p_a \mathbf{P}_a \right\} \right] \exp \left[ -i \int \int \{ \bar{\eta} \mathcal{D}(x, y) \eta \} d^4x d^4y \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

A ação efetiva a um loop pode ser escrita como

$$S'_{ef} = - \int d^4x \left[ \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right] - i \text{Tr}(\ln \mathcal{D}) \quad (2.29)$$

e o funcional gerador bosonizado obtida em termos da ação pode ser reescrito como:

$$Z = \frac{1}{N} \int D\mathbf{P}_a \int D\mathbf{S}_a \exp(i S'_{ef}) \exp \left[ -i \int \int \{ \bar{\eta} \mathcal{D}(x, y) \eta \} d^4x d^4y \right] \quad (2.30)$$

O termo livre pode se juntar à constante de normalização do funcional gerador:

$$\begin{aligned} S'_{ef} = & - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right\} - \\ & - i \text{Tr} \left[ \ln (i\cancel{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5) \right] \\ = & - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right\} + \text{Tr} [i\cancel{\partial} - \hat{M}] - \\ & - i \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i\cancel{\partial} - \hat{M}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

A ação efetiva então fica:

$$S_{ef} = - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right\} - i \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right) \right] \quad (2.32)$$

Pode-se mostrar que a ação efetiva atua como funcional gerador das funções de Green irredutíveis de uma partícula (1PI) (ROBERTS; CAHILL; PRASCHIFKA, 1988; PESKIN; SCHROEDER, 1995).

Neste ponto, expandimos formalmente o funcional ação efetiva, (GUSYNIN; MIRANSKII, 1992) usando:

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots,$$

onde definimos

$$y = \frac{(\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5)}{i \not{\partial} - \hat{M}}$$

Assim, a ação efetiva é escrita por meio de uma série infinita:

$$S_{ef} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \dots \quad (2.33)$$

Os diversos termos da ação efetiva serão tomados como amplitudes de probabilidades de transição e serão os coeficientes das potências dos campos numa nova lagrangeana, a lagrangeana efetiva do modelo.

- Termo Linear:

$$S_1 = - \int d^4x \left\{ \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a \right\} - i \text{Tr} \left[ \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right] \quad (2.34)$$

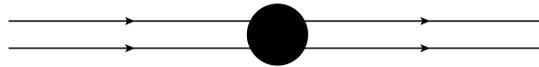


Figura 4 – Representação diagramática da função de um ponto

- Termo Quadrático:

$$S_2 = - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) \right\} + \frac{i}{2} \text{Tr} \left[ \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right]^2 \quad (2.35)$$

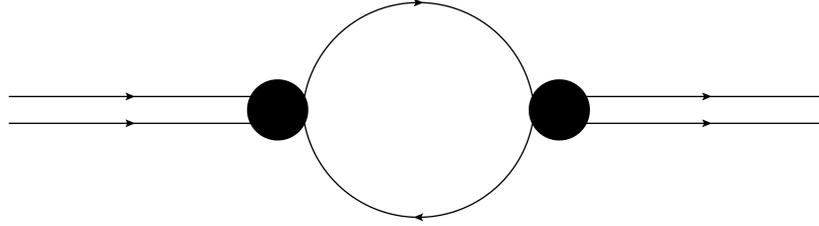


Figura 5 – Representação diagramática da função de dois pontos

- Termo Cúbico:

$$S_3 = -\frac{i}{3} \text{Tr} \left[ \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right]^3 \quad (2.36)$$

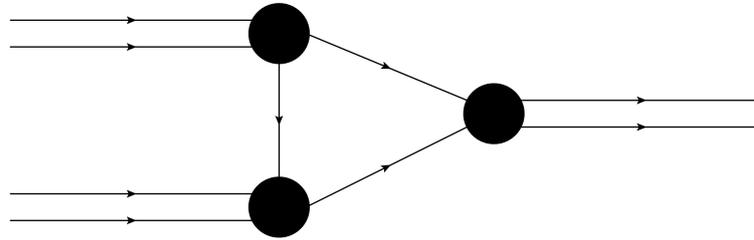


Figura 6 – Representação diagramática da função de três pontos

- Termo Quártico:

$$S_4 = \frac{i}{4} \text{Tr} \left[ \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right]^4 \quad (2.37)$$

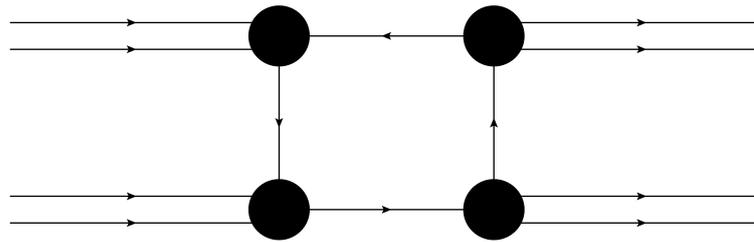


Figura 7 – Representação diagramática da função de quatro pontos

Os termos de ordem superior são análogos a este último. Mostramos explicitamente estes quatro termos porque somente eles possuem algum conteúdo divergente.

A ação efetiva obtida neste momento será utilizada para a obtenção de amplitudes de probabilidade que se relacionam com processos de interação envolvendo mésons descritos por este modelo. Por meio de tais amplitudes, seremos capazes de determinar

expressões para observáveis físicos importantes dos mésons pseudoescalares no modelo NJL-SU(3). Este será o tema do próximo capítulo.

### 3 Observáveis físicos e a origem dos termos de superfície no modelo de NJL

Utilizamos o modelo de NJL para calcular diversos observáveis, como a equação de gap, o condensado de quarks, a auto-energia dos mésons e a constante de decaimento fraco do méson pseudoescalar, no decaimento méson-lépton-neutrino do lépton. Neste capítulo, calculamos estes observáveis e os termos de superfície relacionados a eles especificamente para os mésons pión e káon.

#### 3.1 Obtenção da equação de gap

A equação de “gap” ou equação de “tad-pole” nos fornece a massa constituinte dos quarks, a massa devida às interações dos quarks entre si. Para encontrá-la, devemos extremizar a ação efetiva em relação ao campo escalar  $\mathbf{S}_a$ , e fazer nulos os outros campos na expressão da ação efetiva. Voltamos então na expressão da ação efetiva 2.32 e a extremizamos com relação a cada um dos campos:

$$S_{ef} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - i \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right) \right] \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \frac{\partial S_{ef}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (3.2)$$

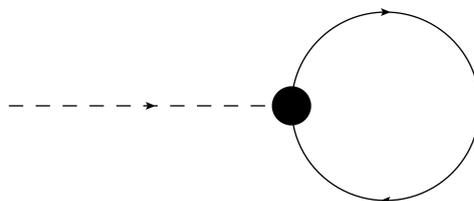


Figura 8 – Diagrama tad-pole da equação de gap.

No caso do campo escalar  $\mathbf{S}_a$ , o resultado da derivada é, devido à quebra espontânea de simetria:

$$c_a = -iG \text{Tr} \left( \frac{1}{i\hat{\not{\partial}} - \hat{M}} \right) \quad (3.3)$$

Como em 2.20, temos

$$\hat{M} - \hat{m} = -c_a, \quad (3.4)$$

donde

$$\hat{M} - \hat{m} = iG \text{Tr} \left( \frac{1}{i\hat{\not{\partial}} - \hat{M}} \right) \quad (3.5)$$

Ou seja,  $c_a$  é a massa gerada dinamicamente, dada pela diferença entre a massa constituinte  $\hat{M}$  e a massa corrente  $\hat{m}$  do quark.

Podemos definir, neste ponto, a quantidade

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -i\text{Tr} \left( \frac{1}{i\hat{\not{\partial}} - \hat{M}} \right) \quad (3.6)$$

como sendo o condensado de quarks a uma unidade de sabor. O valor médio do campo escalar não se anula, causando da quebra da simetria quiral e assim dá origem à massa dos quarks e ao conseqüente aparecimento dos bósons de Goldstone (DIAS, 2004; KLEVANSKY, 1992; DAS, 2006).

$$\hat{M} - \hat{m} = -G\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \quad (3.7)$$

Para calcularmos o condensado de quarks, é necessário primeiramente definir o traço de um funcional em uma representação ou base. Sendo um operador, o traço da matriz que o representa, na base dos autoestados  $|x\rangle$ , é dado por:

$$\text{Tr}\hat{A} = \text{Tr}_D \int d^4x \langle x|\hat{A}|x\rangle \quad (3.8)$$

Para o condensado de quarks, teremos:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -i\text{Tr} \left( \frac{1}{i\hat{\not{\partial}} - \hat{M}} \right) = -i\text{Tr}_D \int d^4x \langle x|\frac{1}{i\hat{\not{\partial}} - \hat{M}}|x\rangle \quad (3.9)$$

onde  $\text{Tr}_D$  representa o traço no espaço de Dirac. Podemos obter uma expressão para o condensado de quarks inserindo grupos completos de autoestados do operador  $\hat{\not{\partial}}$ :

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |k\rangle\langle k| = I \quad (3.10)$$

Sendo ainda

$$\langle x|k\rangle = e^{ikx}, \quad (3.11)$$

vamos ter:

$$\begin{aligned} -i\text{Tr} \frac{1}{i\hat{\not{D}} - \hat{M}} &= -i\text{Tr}_D \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \langle x|k\rangle \langle k|\frac{1}{i\hat{\not{D}} - \hat{M}}|k'\rangle \langle k'|x\rangle \\ &= -i\text{Tr}_D \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{-ix(k'-k)} \langle k|\frac{1}{\not{k}' - \hat{M}}|k'\rangle \\ &= -i\text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k-k') \langle k|\frac{1}{\not{k}' - \hat{M}}|k'\rangle \\ &= -i\text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle k|\frac{1}{\not{k} - \hat{M}}|k\rangle = -i\text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - \hat{M}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalmente, temos

$$\langle \bar{\Psi}\Psi\rangle = -i\text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle k|\frac{1}{\not{k} - \hat{M}}|k\rangle = -i\text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - \hat{M}} \quad (3.13)$$

O análogo do condensado de quarks da teoria BCS corresponde ao “condensado de elétrons” (ou pares de Cooper) (BARDEEN; COOPER; SCHRIEFFER, 1957). O condensado de quarks é interpretado como um parâmetro de ordem da transição de fase associada com a quebra da simetria quiral, porque o mesmo é nulo na chamada “fase quiral”, mas não é mais nulo quando a simetria quiral é quebrada.

Para resolver esta integral, começamos resolvendo o traço. Este traço funcional deve ser tomado nos espaços de cor, de sabor e de Dirac. O traço no espaço de cores resulta em  $N_c = 3$ , uma vez que usamos uma matriz identidade  $3 \times 3$  no espaço de cor. No espaço de sabores, o traço irá fornecer  $N_s = 2$  para o caso do pión e para o caso do káon (KLEVANSKY, 1992). Para calcular o traço no espaço de Dirac, precisamos tomar o traço das matrizes gama (GRIFFITHS, 1987).

$$\langle \bar{\Psi}\Psi\rangle = -iN_cN_s\text{tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - \hat{M}} \equiv -iN_cN_sI_1 \quad (3.14)$$

onde definimos  $I_1$ .

$$I_1 = \text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - \hat{M}} \quad (3.15)$$

Inicialmente, vamos colocar todas as matrizes  $\gamma$  no numerador, racionalizando o denominador:

$$I_1 = \text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + M}{(\not{k} - M)(\not{k} + M)} = \text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2} \quad (3.16)$$

Tomando o traço do numerador, temos que  $\text{Tr}\{\not{k}\} = 0$ , uma vez que o traço de um número ímpar de matrizes  $\gamma$  é zero. Assim, sobra apenas o termo de massa. O traço do termo de massa, que está multiplicado por uma matriz identidade no espaço de Dirac, tem como resultado 4. Assim:

$$I_1 = 4M \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2} \quad (3.17)$$

A integral no espaço dos momentos, neste caso, é divergente. Um método que serve para indicar se uma amplitude é divergente é a contagem superficial de potências da variável de integração onde contamos quantas potências de  $k$  temos no numerador (incluindo a potência do elemento de integração) e quantas temos no denominador. A diferença nos fornece o *grau superficial de divergência* da integral. A um loop, esta diferença nos fornece, em geral, qual o grau real de divergência da integral.

A integral 3.16, pela contagem de potências, apresenta grau de divergência quadrático, implicando na necessidade de utilização de algum método de regularização. Existem várias maneiras de se regularizar a divergência. Podemos citar a regularização do tipo Pauli-Villars (PAULI; VILLARS, 1949; LEON; MARTIN; RUIZ, 1995) e a regularização dimensional (RYDER, 1996). Ambas têm a vantagem de preservar a simetria de calibre do modelo. No entanto, eventualmente, pode-se utilizar a regularização do tipo *sharp cut-off*, que é a que utilizaremos neste trabalho.

Tomando novamente  $I_1$ , vamos agora levar nossa integral do espaço de Minkowsky para o espaço euclidiano, através de uma rotação no plano complexo, a rotação de Wick (rotação no eixo temporal para o plano complexo, migrando do espaço de Minkowsky para o espaço Euclideano. O procedimento faz com que mudemos o contorno de integração no plano complexo, contornando os pólos que apareçam ao longo do eixo real (WIT; SMITH, 1986)):

$$k_0 = ik_4 \rightarrow k_0^2 = -k_4^2 \quad (3.18)$$

e

$$\begin{aligned} k^2 &= k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \\ &= -k_4^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = -k_E^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

O elemento diferencial de volume no espaço quadridimensional é reescrito como

$$d^4k = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3 = idk_4 dk_1 dk_2 dk_3 = id^4k_E \quad (3.20)$$

e mudando para coordenadas hiper-esféricas, teremos:

$$d^4k_E = k^3 dk \sin \theta_1 d\theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_2 d\phi \quad (3.21)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  variam de 0 a  $\pi$  e  $\phi$  varia de 0 a  $2\pi$ .

Assim

$$I_1 = -4iM \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{k^3 \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 dk d\theta_1 d\theta_2 d\phi}{(k^2 + M^2)} \quad (3.22)$$

onde usamos  $k_E^2 = k^2$ . Resolvendo a integração nas coordenadas angulares, obtemos:

$$I_1 = -4iM \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^3}{k^2 + M^2} dk \quad (3.23)$$

que, no limite  $k \rightarrow \infty$ , é quadraticamente divergente. Assim, integramos não até infinito, mas até um limite  $\Lambda$ , sendo este o limite de validade do modelo de NJL.

$$I_1 = -i \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^3}{k^2 + M^2} dk \quad (3.24)$$

O condensado de quarks fica então:

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -iN_c N_s I_1 = -iN_c N_s \left( -i \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^3}{k^2 + M^2} dk \right) \quad (3.25)$$

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -N_c N_s \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^3}{k^2 + M^2} dk \quad (3.26)$$

## 3.2 Auto-energia dos mésons

Uma vez que a ação efetiva é dada por 2.32

$$S_{eff} = \int L_{eff} d^4x \quad (3.27)$$

onde  $L_{eff}$  é a lagrangeana efetiva, temos

$$L_{eff} = \left\{ -\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - i \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} - \hat{M}} \right) \right] \right\} \quad (3.28)$$

que pode ser expandida, 2.33 e reorganizada como

$$L_{eff} = \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + \frac{1}{2G} (1 - G\Sigma_{Sc}(p^2)) \mathbf{S}_a^2 + \frac{1}{2G} (1 - G\Pi_{PS}(p^2)) \mathbf{P}_a^2 + \dots \quad (3.29)$$

onde  $\Sigma_{Sc}(k^2) = i\text{Tr} \left[ \frac{1}{i\not{\partial} - \hat{M}} \right]^2$  e  $\Pi_{PS}(k^2) = i\text{Tr} \left[ \frac{(i\gamma^5)}{i\not{\partial} - \hat{M}} \right]^2$ . Definindo  $f(p^2) \equiv \frac{1}{2G} (1 - G\Pi_{PS}(p^2))$  e expandindo este termo em torno de  $p^2 = m_{PS}^2$ , temos:

$$L_{eff} = \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + \frac{1}{2G} (1 - G\Sigma_{Sc}(p^2)) \mathbf{S}_a^2 + (f(m_{PS}^2) + (p^2 - m_{PS}^2) f'(m_{PS}^2) + \dots) \mathbf{P}_a^2 + \dots \quad (3.30)$$

No sentido de identifica os campos físicos presentes na lagrangeana efetiva, procuramos uma lagrangeana efetiva livre da forma

$$L_{eff} = (p^2 - m_{PS}^2) \tilde{\mathbf{P}}_a^2 + \dots \quad (3.31)$$

para um dado campo escalar  $\tilde{\mathbf{P}}_a$ . Para isso, temos que colocar  $f'(m_{PS}^2)$  em evidência:

$$\begin{aligned} L_{eff} &= \left( p^2 - m_{PS}^2 + \frac{f(m_{PS}^2)}{f'(m_{PS}^2)} + \dots \right) f'(m_{PS}^2) \mathbf{P}_a^2 + \\ &\quad + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + \frac{1}{2G} (1 - G\Sigma_{Sc}(p^2)) \mathbf{S}_a^2 + \dots \\ &= \left( p^2 - m_{PS}^2 + \frac{f(m_{PS}^2)}{f'(m_{PS}^2)} + \dots \right) \tilde{\mathbf{P}}_a^2 + \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a + \\ &\quad + \frac{1}{2G} (1 - G\Sigma_{Sc}(p^2)) \mathbf{S}_a^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

Onde redefinimos o campo pseudo-escalar,  $\tilde{\mathbf{P}}_a = \mathbf{P}_a \sqrt{f'(m_{PS}^2)} = \mathbf{P}_a g_{PS}^{-1}{}_{qq}$ , e estamos definindo

$$g_{PS}^{-1}{}_{qq} \equiv \sqrt{f'(m_{PS}^2)}. \quad (3.33)$$

Pela definição do termo de massa, o coeficiente de  $\tilde{\mathbf{P}}_a$  deve se anular para partículas reais, ou seja, aquelas que satisfazem relação energia-momento relativístico,  $p^2 = m_{PS}^2$ . Assim:

$$\left( p^2 - m_{PS}^2 + \frac{f(m_{PS}^2)}{f'(m_{PS}^2)} + \dots \right) \tilde{\mathbf{P}}_a^2 \Rightarrow f(m_{PS}^2) = 0 \Rightarrow (1 - G\Pi_{PS}(m_{PS}^2)) = 0 \quad (3.34)$$

Assim a relação

$$f(m_{PS}^2) = (1 - G\Pi_{PS}(m_{PS}^2)) = 0 \quad (3.35)$$

nos permite encontrar a massa do méson  $m_{PS}^2$ . Onde  $\Pi_{PS}(p^2)$  é dado por

$$\Pi_{PS}(p^2) = i\text{Tr} \left[ \frac{(i\gamma^5)}{i\not{\partial} - \hat{M}} \right]^2 \quad (3.36)$$

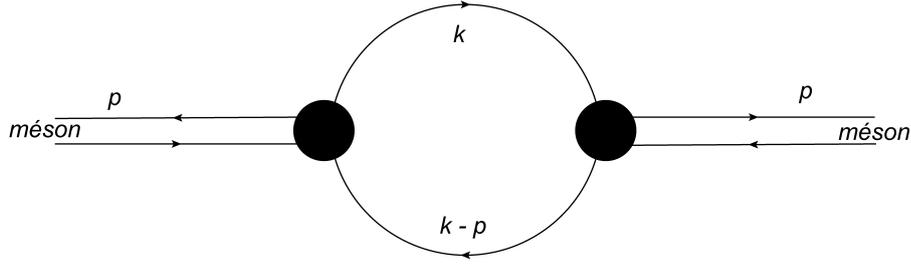


Figura 9 – Diagrama de autoenergia do méson pseudoescalar

Tomando a equação 3.35, verificamos que ela é válida para todos os mésons pseudo-escalares, como o káon e o pión. Como a constante de acoplamento  $G$  é a mesma para todas as amplitudes, chegamos à seguinte relação:

$$\frac{1}{G} = \Pi_{\pi}(m_{\pi}^2) = \Pi_k(m_k^2) \Rightarrow \Pi_{\pi}(m_{\pi}^2) - \Pi_k(m_k^2) = 0 \quad (3.37)$$

Desta forma a constante de acoplamento  $G$  deixa de ser um parâmetro do modelo, exceto para a determinação das massas correntes dos quarks. Este é um resultado interessante, pois elimina um dos parâmetros livre do modelo. Basicamente, o modelo de NJL tratado desta maneira e com um valor de massa constituinte do quark up fica dependente apenas de dois parâmetros: A massa constituinte do quark strange e o parâmetro de corte do modelo empregado,  $\Lambda$ .

Podemos aqui mostrar como calcular o valor de da amplitude  $\Pi_{PS}$ . Inicialmente devemos levar a expressão para o espaço dos momentos, de maneira semelhante ao que realizamos em 3.8. Como podemos perceber em 3.2, o diagrama a 1-loop esquemático mostra o que seria a correção de massa do méson pseudo-escalar.

Neste momento, tomemos a expressão 3.36. Ali temos

$$\Pi_{PS}(x^2) = i\text{Tr} \left[ \frac{(i\gamma^5)}{i\hat{\not{\partial}} - \hat{M}} \right]^2, \quad (3.38)$$

que pode ser reescrito como

$$\Pi_{PS}(x^2) = i\text{Tr} \left[ \left( \frac{i\gamma^5}{i\hat{\not{\partial}} - \hat{M}_a} \right) \left( \frac{i\gamma^5}{i\hat{\not{\partial}} - \hat{M}_b} \right) \right]. \quad (3.39)$$

Sendo um operador, o traço da matriz que o representa, na base dos autoestados  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$ , é dado por:

$$\text{Tr} \hat{A} \hat{B} = \text{Tr}_D \int d^4x \int d^4y \langle x | \hat{A} | y \rangle \langle y | \hat{B} | x \rangle. \quad (3.40)$$

Para a expressão de  $\Pi_{PS}(x^2)$  teremos:

$$\Pi_{PS}(x^2) = i\text{Tr}_D \int d^4x \int d^4y \langle x | \left( \frac{i\gamma^5}{i\cancel{\partial} - M_a} \right) | y \rangle \langle y | \left( \frac{i\gamma^5}{i\cancel{\partial} - M_b} \right) | x \rangle \quad (3.41)$$

onde  $\text{Tr}_D$  representa o traço no espaço de Dirac. Inserindo um grupo completo de auto-estados do operador  $i\cancel{\partial}$  para cada um dos operadores teremos: propagadores:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |k\rangle \langle k| = I \quad \text{e} \quad \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} |k'\rangle \langle k'| = I \quad (3.42)$$

Sendo ainda

$$\langle x | k \rangle = e^{ikx}, \quad (3.43)$$

vamos ter, para um elemento específico do operador no espaço dos sabores

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(x^2) &= i\text{Tr}_D \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \langle x | \left( \frac{i\gamma^5}{i\cancel{\partial} - M_a} \right) | k \rangle \\ &\quad \langle k | y \rangle \langle y | \left( \frac{i\gamma^5}{i\cancel{\partial} - M_b} \right) | k' \rangle \langle k' | x \rangle \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(x^2) &= i\text{Tr}_D \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \langle x | \left( \frac{i\gamma^5}{\cancel{k} - M_a} \right) | k \rangle \\ &\quad \langle k | y \rangle \langle y | \left( \frac{i\gamma^5}{\cancel{k}' - M_b} \right) | k' \rangle \langle k' | x \rangle \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\Pi_{PS}(x^2) = i\text{Tr}_D \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left( \frac{i\gamma^5 e^{ik(x-y)}}{\cancel{k} - M_a} \right) \left( \frac{i\gamma^5 e^{-ik'(x-y)}}{\cancel{k}' - M_b} \right) \quad (3.46)$$

Façamos inicialmente uma mudança de variáveis

$$z = y - x \quad (3.47)$$

e tomemos a transformada de Fourier desta função, migrando do espaço de coordenadas para o espaço dos momentos:

$$\Gamma(p) = \int d^4z e^{ipz} \Gamma(z) \quad (3.48)$$

onde  $p$  representa o momento das linhas externas do diagrama de Feynman associado ao processo,  $k$  e  $k'$  são os momentos das partículas virtuais, os quarks, no loop do diagrama

Assim,

$$\Pi_{PS}(p^2) = i\text{Tr}_D \int d^4z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{ipz} \left( \frac{i\gamma^5 e^{-ikz}}{\not{k} - M_a} \right) \left( \frac{i\gamma^5 e^{ik'z}}{\not{k}' - M_b} \right) \quad (3.49)$$

Por sua vez, a função delta de Dirac possui a seguinte representação integral:

$$\int d^4z e^{iz(p-k+k')} = \delta(p-k+k') (2\pi)^4 \quad (3.50)$$

e integrando em  $z$ , temos

$$\Pi_{PS}(p^2) = i\text{Tr}_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left( \frac{i\gamma^5}{\not{k} - M_a} \right) \left( \frac{i\gamma^5}{\not{k}' - M_b} \right) \delta(k' - (k-p)) (2\pi)^4 \quad (3.51)$$

integrando em  $k'$

$$\Pi_{PS}(p^2) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left[ \frac{i\gamma^5}{\not{k} - M_a} \frac{i\gamma^5}{\not{k} - \not{p} - M_b} \right] \quad (3.52)$$

Agora temos de calcular o traço. O traço das identidade no espaço de cores fornece  $N_c = 3$  e no espaço de sabores  $N_s = 2$ . Assim, sobra apenas o traço de Dirac para ser calculado (GRIFFITHS, 1987):

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) &= iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \left[ \frac{i\gamma^5 (\not{k} + M_a)}{k^2 - M_a^2} \frac{i\gamma^5 [(\not{k} - \not{p}) + M_b]}{(k-p)^2 - M_b^2} \right] \\ &= -iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \left[ \frac{\gamma^5 (\not{k} + M_a)}{k^2 - M_a^2} \frac{\gamma^5 [(\not{k} - \not{p}) + \hat{M}_b]}{(k-p)^2 - \hat{M}_b^2} \right] \\ &= -i4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-k(k-p) + M_a M_b}{(k^2 - M_a^2) [(k-p)^2 - M_b^2]} \end{aligned} \quad (3.53)$$

A integral, conforme discutimos anteriormente, tem parcelas quadraticamente divergentes, linearmente divergentes e logaritmicamente divergentes. Prosseguindo no cálculo de  $\Pi_{PS}$ , vamos inicialmente introduzir a parametrização de Feynman.

Tomemos o denominador da expressão acima:

$$I_2 = \frac{1}{(k^2 - M_a^2) [(k-p)^2 - M_b^2]} \quad (3.54)$$

Podemos reescrevê-lo utilizando a parametrização de Feynman. Usando a identidade

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(a-b)x + b]^2}. \quad (3.55)$$

Desta forma, pode-se escrever

$$I_2 = \frac{1}{[(k-p)^2 - M_b^2](k^2 - M_a^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{\left\{ [(k-p)^2 - M_b^2 - k^2 + M_a^2]x + k^2 - M_a^2 \right\}^2} \quad (3.56)$$

onde definimos  $a = (k-p)^2 - M_b^2$  e  $b = k^2 - M_a^2$ , de onde se tira

$$I_2 = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2kpx + p^2x + (M_a^2 - M_b^2)x - M_a^2]^2} \quad (3.57)$$

Podemos reescrever o denominador se adicionarmos e subtrairmos a quantidade  $p^2x^2$ .

Desta forma

$$k^2 - 2pkx = k^2 - 2pkx + p^2x^2 - p^2x^2 = (k - px)^2 - p^2x^2 \quad (3.58)$$

Portanto

$$I_2 = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k - px)^2 - p^2x^2 + p^2x + (M_a^2 - M_b^2)x - M_a^2]^2} \quad (3.59)$$

Voltando com o resultado na expressão do  $\Pi_{PS}(p^2)$  e escrevendo  $\Pi^2 = p^2x^2 - p^2x - (M_a^2 - M_b^2)x + M_a^2$  temos

$$\Pi_{PS}(p^2) = -i4N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-k(k-p) + M_aM_b}{[(k-px)^2 - \Pi^2]^2} \quad (3.60)$$

Neste ponto, podemos fazer a substituição  $k - px \rightarrow k$ . Esta transformação é na verdade uma operação de translação do tipo  $e^{l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}}$  (MOTA, 1999), escrita na forma:

$$\begin{aligned} S(k+l) &= e^{l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}} S(k) \\ &= S(k) + l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} S(k) + \frac{l_\mu l_\nu}{2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} S(k) + \dots \end{aligned} \quad (3.61)$$

Onde os termos com derivadas em  $k_\mu$  são os chamados termos de superfície (José Roberto Pereira Junior, 2011; HILLER et al., 2006; MOTA et al., 1999; ELIAS; MCKEON; MANN, 1983; JACKIW, 1999; SCARPELLI et al., 2001; MOTA, 1999; PORTO, 2012). Eles surgem em função da operação de translação e são dependentes do esquema de regularização empregado, como podemos ver em (CHENG; LI, 1988; BERGLMANN, 1996).

Voltando à expressão 3.60, temos agora

$$\begin{aligned}
\Pi_{PS}(p^2) &= -i4N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-k(k-p) + M_aM_b}{[(k+l)^2 - \Pi^2]^2} \\
&= -i4N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}} \frac{-(k-l)(k-l-p) + M_aM_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} \\
&= -i4N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{-(k-l)(k-l-p) + M_aM_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-(k-l)(k-l-p) + M_aM_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-(k-l)(k-l-p) + M_aM_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \dots \right\} \quad (3.62)
\end{aligned}$$

onde fizemos  $l = -px$ . Vamos tratar as equações de modo separado, chamando  $\Pi_{PS}(p^2)$  apenas o primeiro termo da expressão 3.62 e chamando  $TS_{\Pi_{PS}}$  os demais termos. Assim,

$$\Pi_{PS}(p^2) = -i4N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-(k+px)[(k+px)-p] + M_aM_b}{[k^2 - p^2x^2 + p^2x + (M_a^2 - M_b^2)x - M_a^2]^2} \quad (3.63)$$

e

$$\begin{aligned}
TS_{\Pi_{PS}} &= -i4N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-(k-l)(k-l-p) + M_aM_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-(k-l)(k-l-p) + M_aM_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \dots \right\} \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Continuando o termo de  $\Pi_{PS}(p^2)$ , temos:

$$\Pi_{PS}(p^2) = -i4N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-(k+px)[k+px-p] + M_aM_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} \quad (3.65)$$

$$\Pi_{PS}(p^2) = -i4N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-k^2 - k(2px-p) - p^2x^2 + p^2x + M_aM_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} \quad (3.66)$$

O termo linear em  $k$ , integrado em relação a  $k$ , é uma função ímpar integrada em um domínio de integração simétrico e por isso o resultado é zero.

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k(2px-p)}{(k^2 - \Pi^2)^2} = 0 \quad (3.67)$$

Para integrarmos o restante dos termos, utilizamos o mesmo procedimento utilizado em 3.1, levando a expressão para o espaço e Minkowsky e então integrando até o corte  $\Lambda$ .

$$\Pi_{PS}(p^2) = -i4N_cN_s \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dk \int_0^1 dx \frac{k^3(k^2 - p^2x^2 + p^2x + M_aM_b)}{(k^2 + \Pi^2)^2} \quad (3.68)$$

E calculando os termos de superfície

$$\begin{aligned}
 TS_{\Pi_{PS}} &= -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ -p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-(k+px)(k+px-p) + M_a M_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-(k+px)(k+px-p) + M_a M_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \dots \right\} \\
 &= -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ -p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-k^2 - kpx - p^2(x-1) + M_a M_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-k^2 - kpx - p^2(x-1) + M_a M_b}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \dots \right\} \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

Conforme (PORTO, 2012; BRIZOLA et al., 1998; BATTISTEL; DALLABONA, 2012; FERREIRA et al., 2012; FARGNOLI et al., 2010), os termos logaritmicamente divergentes dos termos de superfície se anulam. Assim, precisamos calcular apenas:

$$\begin{aligned}
 TS_{\Pi_{PS}} &= -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ -p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-k^2}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-k^2}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \dots \right\} \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

que podemos reescrever como

$$\begin{aligned}
 TS_{\Pi_{PS}} &= -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{(k^2 - \Pi^2)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{(k^2 - \Pi^2)} + \dots \right\} \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

Resolvendo, conforme Anexo A, temos:

$$TS_{\Pi_{PS}} = -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ -p_\nu p_\mu x^2 \frac{g^{\mu\nu} \Pi^2}{(k^2 - \Pi^2)^3} \right] \quad (3.72)$$

Levando para o espaço de Minkowsky e depois mudando para coordenadas hiper-esféricas, integrando até  $\Lambda$ , temos

$$TS_{\Pi_{PS}} = -i4N_c N_s \frac{i}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk k^3 \frac{p^2 x^2 \Pi^2}{(k^2 + \Pi^2)^3} \quad (3.73)$$

O resultado final para a amplitude  $\Pi_{PS}$  é portanto:

$$\Pi_{PS}(p^2) = -i4N_c N_s \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dk \int_0^1 dx \left[ \frac{k^3 (k^2 - p^2 x^2 + p^2 x + M_a M_b)}{(k^2 + \Pi^2)^2} + k^3 \frac{p^2 x^2 \Pi^2}{(k^2 + \Pi^2)^3} \right] \quad (3.74)$$

que deverá ser usada para a determinação da auto-energia dos mésons através da equação 3.35.

### 3.3 Constante de decaimento fraco

Um dos principais ingredientes do modelo NJL é a determinação da constante de decaimento fraco do pión, relacionada ao processo  $\pi \rightarrow l + \nu_l$ , cujo valor experimental é usado no ajuste de parâmetros do modelo.

A meia vida do méson  $\pi$ ,  $\tau = 2,6 \times 10^{-8} s$  é maior que a meia vida,  $\tau$ , de partículas que decaem por interação forte,  $\tau \approx 10^{-23} s$  (HALZEN; MARTIN, 1984; SALCEDO, 2004). Por outro lado, as partículas que decaem via interações eletromagnéticas tem meia vida da ordem de  $\tau \approx 10^{-16} s$ . Estes fatos experimentais evidenciaram a necessidade de que a interação responsável pelo decaimento do pión deveria ser mais fraca que a eletromagnética ou a forte. É o chamado decaimento eletrofraco.

A constante de decaimento fraco é calculada a partir do elemento axial da matriz de transição vácuo-para-um-méson pseudo-escalar, indicado abaixo :

$$\langle 0 | j_{5\mu}^a | \mathbf{P}_a \rangle = i p_\mu f_{PS} \quad (3.75)$$

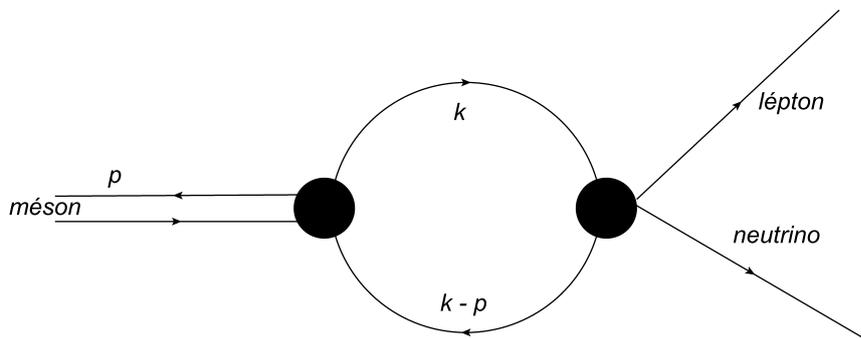


Figura 10 – Diagrama do decaimento fraco de um méson pseudo-escalar.

A formulação original do modelo de NJL não permite o cálculo de um decaimento leptônico. Entretanto a utilização da álgebra de correntes possibilita que o calculemos. Para isso, é necessário a introdução de um termo de corrente eletrofraca na formulação da

lagrangeana do modelo de NJL, com um acoplamento simples. Desta forma a lagrangeana fermiônica 2.5 fica da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left( i\cancel{\partial} - \hat{m} + \gamma_\mu \gamma^5 \lambda_a j_{5\mu}^a \right) \psi + \frac{1}{2} G \left[ \left( \bar{\psi} \lambda_a \psi \right)^2 + \left( \bar{\psi} i \lambda_a \gamma^5 \psi \right)^2 \right] \quad (3.76)$$

e a ação efetiva

$$S_{ef} = -\frac{1}{2G} \left( \mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2 \right) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - i \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5 + \gamma_\mu \gamma^5 \lambda_a j_{5\mu}^a}{i\cancel{\partial} - \hat{M}} \right) \right] \quad (3.77)$$

Para construir a amplitude relacionada ao diagrama da matriz de transição 3.3 (como nas regras de Feynman), verificamos o termo cruzado da ação efetiva 3.77, em seu termo de segunda ordem:

$$S_2 = -\frac{1}{2G} \left( \mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2 \right) + \frac{i}{2} \text{Tr} \left[ \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5 + \gamma_\mu \gamma^5 \lambda_a j_{5\mu}^a}{i\cancel{\partial} - \hat{M}} \right]^2 \quad (3.78)$$

E assim, temos então

$$ip_\mu f_{PS} = \frac{i}{2} g_{PS\bar{q}q} \text{Tr} \left[ \frac{i\gamma^5}{(i\cancel{\partial} - \hat{M}_b)} \frac{\gamma_\mu \gamma^5}{(i\cancel{\partial} - \hat{M}_a)} \right], \quad (3.79)$$

onde  $g_{PS\bar{q}q}$  é a constante de acoplamento 3.33.

Levando a expressão 3.79 para o espaço dos momentos ficamos com

$$ip_\mu f_{PS} = \frac{i}{2} g_{PS\bar{q}q} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left[ \frac{i\gamma^5}{\not{k} - M_a} \frac{\gamma_\mu \gamma^5}{\not{k} - \not{p} - M_b} \right] \quad (3.80)$$

Resolvendo o traço no espaço de cores, de sabores e de Dirac, ficamos com

$$ip_\mu f_{PS} = 4g_{PS\bar{q}q} N_c N_s \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M_a (k_\mu - p_\mu) - M_b k_\mu}{(k^2 - M_a^2) [(k - p)^2 - M_b^2]} \quad (3.81)$$

Utilizando o mesmo tratamento utilizado no cálculo de  $\Pi_{PS}$  seção 3.2, aplicamos a parametrização de Feynman, ficando com:

$$ip_\mu f_{PS} = 4g_{PS\bar{q}q} N_c N_s \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M_a (k_\mu - p_\mu) - M_b k_\mu}{[(k - px)^2 - \Pi^2]^2} \quad (3.82)$$

onde escrevemos  $\Pi^2 = p^2 x^2 - p^2 x - (M_a^2 - M_b^2) x + M_a^2$ .

Assim como fizemos em 3.2, podemos fazer a substituição  $k - p_x \rightarrow k$ , que ocasiona o aparecimento dos termos de superfície. A expressão fica, então:

$$ip_\mu f_{PS} = 4g_{PS\bar{q}q}N_cN_s \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}} \frac{M_a(k_\mu + p_\mu x - p_\mu) - M_b(k_\mu + p_\mu x)}{[k^2 - \Pi^2]^2} \quad (3.83)$$

onde  $l_\mu = -p_\mu x$ .

Levando a expressão para o espaço euclidiano e mudando para coordenadas hiperesféricas, temos

$$ip_\mu f_{PS} = g_{PS\bar{q}q}N_cN_s \frac{i}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int dk \left\{ \frac{k^3 [(M_a - M_b)(k_\mu + p_\mu x) - M_a p_\mu]}{(k^2 + \Pi^2)^2} + \frac{k^3 [(M_a - M_b)p_\mu x \Pi^2]}{(k^2 + \Pi^2)^3} \right\} \quad (3.84)$$

onde os termos de superfície são:

$$TS_{f_{PS}} = g_{PS\bar{q}q}N_cN_s \frac{i}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int dk \frac{k^3 [(M_a - M_b)p_\mu x \Pi^2]}{(k^2 + \Pi^2)^3} \quad (3.85)$$

Como veremos no Capítulo 5, ao consideramos os termos de superfície no tratamento dos observáveis calculados neste capítulo, obteremos melhores resultados para a constante de decaimento fraco do káon do que desprezarmos estes termos. Ao mesmo tempo, a introdução dos termos de superfície implica na perda da invariância por roteamento, ou seja, ordem a ordem na expansão perturbativa roteamentos diferentes podem levar a diferentes resultados.

No próximo capítulo, faremos uma discussão a respeito desta invariância de roteamento e faremos opção por um roteamento específico, buscando melhorar a acurácia do modelo na obtenção da constante de decaimento fraco do káon.

## 4 A expansão derivativa e roteamentos arbitrários no modelo de NJL

No capítulo anterior, apresentamos o cálculo das amplitudes relacionadas aos observáveis, incluindo também o cálculo dos termos de superfície. Estes termos de superfície violam a invariância de roteamento, mas, conforme veremos no Capítulo 5, fornecem resultados melhores para a constante de decaimento do káon. Este fato abre a possibilidade de buscarmos um roteamento que permita ao modelo reproduzir exatamente a constante de decaimento do káon.

Mota e Arriola (MOTA; ARRIOLA, 2007) propuseram um tratamento, denominado expansão derivativa em torno dos momentos dos quarks pesados, onde toda a fenomenologia dos mésons pesados é obtida no mesmo tratamento dos mésons leves. Esta expansão é semelhante à utilizada por Chan (CHAN, 1986), através de uma transformação unitária. No tratamento de Chan, a transformação é realizada usando um momento externo  $\not{p}$  e no tratamento de Mota e Arriola a transformação é feita através de uma matriz diagonal no espaço dos sabores,  $\mathcal{P}_a$ , transformação que corresponde a uma translação no espaço de momentos (shift).

Este shift é, na verdade, a escolha de um roteamento específico. No decorrer do capítulo discutiremos a expansão derivativa em torno do momento dos quarks pesados e do tratamento implementado nesta dissertação.

### 4.1 A expansão derivativa

Uma das propriedades matemáticas da ação efetiva a 1-loop (equação 2.32) corresponde à invariância desta quantidade a uma transformação unitária do tipo (CHAN,

1986)

$$I = UU^{-1} = e^{-iPx} e^{iPx} \quad (4.1)$$

Devemos estar atentos, no entanto, para a natureza divergente da ação efetiva (e de suas derivadas funcionais) que implica na necessidade de uso de algum esquema de regularização no sentido de fornecer um resultado finito. As complicações associadas à introdução de um esquema de regularização são amplamente conhecidas (MOTA, 1999; SCARPELLI et al., 2001; SCARPELLI; SAMPAIO; NEMES, 2001; GHERGHETTA, 1994; FERREIRA et al., 2012), e, no caso de modelos não renormalizáveis, a adoção de determinado esquema de regularização passa a fazer parte da definição do próprio modelo em si.

A introdução de um esquema de regularização para a avaliação da ação ?? sofre, desta maneira, dos problemas acima citados. Entretanto, em 1986, Lai-Him Chan (CHAN, 1986) desenvolveu um procedimento para realizar a expansão derivativa para ações efetivas à 1-loop de modo a preservar as simetrias internas da ação. O procedimento é independente da forma explícita da regularização utilizada, sendo essencial, neste ponto, o reconhecimento da invariância da ação efetiva a 1-loop à transformação unitária correspondente a uma translação finita no momento da ação:

$$\begin{aligned} S'_{ef} &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - \text{Tr} \left[ \ln \left( \frac{1}{i\cancel{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5} \right) \right] \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr} \left[ e^{-iPx} \ln \left( \frac{1}{i\cancel{\partial} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5} \right) e^{iPx} \right] \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr} \left[ e^{-iPx} \ln \left( \frac{1}{i\cancel{\partial} + \cancel{P} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5} \right) e^{iPx} \right] \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr} \left[ \ln \left( \frac{1}{i\cancel{\partial} + \cancel{P} - \hat{M} + \mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vale lembrar que a invariância à translação é considerada aqui antes da expansão da ação efetiva (CHAN, 1986). Obviamente, no nível de álgebra de operadores, conforme

mostrado na eq. 4.2, esta é uma simetria exata da teoria/modelo, pelo menos em ordem 1-loop. A introdução da translação e o uso de um esquema de regularização antes ou depois da expansão da ação efetiva produzem, no entanto, resultados distintos, o que já seria esperado no sentido de que a ressonância de séries infinitas não convergentes pode produzir resultados diferentes. Em outras palavras, as operações de translação no espaço de momentos e expansão em potências do campo auxiliar não comutam.

Neste capítulo, abordaremos o tratamento da ação efetiva a 1-loop do modelo Nambu-Jona-Lasinio, uma ação que corresponde às ações tratadas pelo procedimento de Chan. Dessa forma, a preservação das simetrias internas do modelo está garantida pela introdução da invariância à translação finita no momento na ação original, antes de sua expansão em potências do campo auxiliar. Isso equivale dizer que estamos autorizados a esperar a invariância quanto à translação no momento para a ação efetiva a 1-loop como todo, mas não há expectativa para que cada termo da expansão no campo auxiliar ou cada diagrama de Feynman correspondente aos coeficientes da ação efetiva sejam invariantes a esta translação. Em outras palavras, a invariância à translação do momento é garantida em uma expansão ordem a ordem em loops (pelo menos o é a 1-loop), mas não está garantida ordem a ordem em uma expansão no campo auxiliar. Não há porque exigirmos invariância a esta translação de uma amplitude (diagrama de Feynman) específico, mas sim do conjunto de diagramas que constituem a primeira ordem em uma expansão em loops.

Apesar de não haver dúvidas de que o modelo de NJL fornece uma descrição quantitativa razoavelmente precisa de processos hadrônicos, há uma falha sistemática em sua construção: sendo um modelo efetivo, supostamente, é uma aproximação para a QCD em baixas energias, sendo necessária a supressão dos graus de liberdade de altas energias. Isto define certa escala, ou corte. De maneira simples, podemos entender como o valor de energia abaixo do qual supõe-se válido o modelo. A escala adquire um significado físico, e deve ser mantida em todo o tratamento do modelo.

Um outro problema correspondente à regularização do modelo de NJL, equivalente à introdução de uma escala de energia corresponde ao tratamento dos chamados

mésons pesados (DAVID, 2007; CHOI, 2007; ABLIKIM et al., 2007; ADIL; VITEV, 2007; MATSUKI; MORII; SUDOH, 2007; GUO; SHEN; CHIANG, 2007; FRIESS, 2007) . Os mésons compostos pelos chamados quarks leves (denominados up, down e strange) têm o estado ligado resultante chamado também de méson leve, com energias típicas ainda menores que a escala de energia que delimita a validade dos modelos efetivos quirais. Já quando os mésons são compostos por um quark leve e um pesado (os quarks pesados são denominados charm, bottom, e top), o méson correspondente é um méson pesado, e as energias típicas envolvidas já são maiores que o corte mencionado. Entretanto, estes mésons pesados ainda se encontram no limite de energia suficientemente baixo para que sua descrição perturbativa através da QCD não seja possível.

A solução para a representação de mésons pesados no contexto de um modelo quiral como o como Modelo de Nambu- Jona-Lasinio (NJL) foi apresentada a alguns anos (EBERT et al., 1995), baseada na separação dos graus de liberdade de baixas energias do quark pesado (em uma abordagem conhecida como HQET (HAGIWARA; MARTIN; WADE, 1989a; HAGIWARA; MARTIN; WADE, 1989b)). Esta, porém, é uma descrição não relativística e que viola diversas simetrias da QCD. Mota e Arriola (MOTA; ARRIOLA, 2007), apresentaram uma abordagem relativística e preservadora de simetrias para a representação de mésons pesados no contexto do mesmo modelo.

Na técnica de expansão derivativa em torno dos momentos dos quarks pesados (MOTA; ARRIOLA, 2007) , a interação entre os quarks e os mésons é descrita através da técnica de expansão derivativa introduzida por Chan (CHAN, 1986) , mas, através de uma transformação unitária, a expansão é realizada em torno do momento relativístico do quark pesado em contraste com a expansão em torno do momento zero utilizado em (CHAN, 1986) . Este procedimento equivale a considerar que quarks leves e pesados interagem entre si apenas através da troca do chamado momento residual do quark pesado (a diferença entre o momento relativístico do quark e seu momento relativístico em repouso), no mesmo espírito da Teoria Efetiva de Quarks Pesados (HQET) (GEORGI, 1990; NEUBERT, 1994) . No entanto, a HQET trata os quarks pesados através de propagadores não relativísticos, enquanto que na expansão derivativa em torno dos momentos dos quarks

pesados, tanto os quarks leves quanto pesados são tratados através de propagadores relativísticos.

No tratamento desenvolvido por Mota e Arriola (MOTA; ARRIOLA, 2007), a ação efetiva, depois de submetida à transformação unitária de Chan, fica modificada da seguinte forma:

$$S_{ef} = \int d^4x - \frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) - \frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} + \not{P} - \hat{M}} \right) \right] \quad (4.3)$$

O shift introduzido no tratamento da expansão derivativa em torno do momento dos quarks pesados,  $\not{P}$  é uma matriz diagonal com componentes no espaço de sabores, na forma

$$\not{P} = \begin{bmatrix} \not{P}_{up} & 0 & 0 \\ 0 & \not{P}_{down} & 0 \\ 0 & 0 & \not{P}_{strange} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

Na expansão de Mota e Arriola, o valor do shift é inspirado na HQET, é tratado como uma expansão em torno do momento do quark pesado,  $\not{P}_a = m_a \not{\psi}$ . Toda a fenomenologia dos mésons pesados é obtida de forma uniforme com os mésons mais leves, como os píons.

## 4.2 Cálculo dos observáveis

Expandindo a ação efetiva modificada pela expansão derivativa, temos os seguintes termos:

- Termo Linear:

$$S_1 = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{G} \mathbf{S}_a c_a - \text{Tr} \left[ \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} + \not{P} - \hat{M}} \right] \right\} \quad (4.5)$$

- Termo Quadrático:

$$S_2 = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2G} (\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{P}_a^2) + \frac{i}{2} \text{Tr} \left[ \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i \mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i \not{\partial} + \not{P} - \hat{M}} \right]^2 \right\} \quad (4.6)$$

- Termo Cúbico:

$$S_3 = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{3} \left[ \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i\not{\partial} + \not{P} - \hat{M}} \right]^3 \right\} \quad (4.7)$$

- Termo Quártico:

$$S_4 = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \left[ \frac{\mathbf{S}_a \lambda_a + i\mathbf{P}_a \lambda_a \gamma^5}{i\not{\partial} + \not{P} - \hat{M}} \right]^4 \right\} \quad (4.8)$$

Com os termos modificados, faremos a seguir o cálculo dos observáveis seguindo os mesmos passos do Capítulo 3. Os termos de superfície também ficam um pouco modificados e são mostrados na sequência.

#### 4.2.1 Equação de gap e condensado de quarks

O cálculo condensado de quarks fica pouco modificado, apenas sendo introduzido o shift no denominador:

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -iN_c N_s \frac{\hat{M}}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^3}{(k+P)^2 + \hat{M}^2} dk \quad (4.9)$$

e a equação de gap

$$\hat{M} - \hat{m} = -G \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \quad (4.10)$$

#### 4.2.2 Auto-energia dos mésons

Nos cálculos envolvendo a autoenergia dos mésons, utilizamos a expressão da bolha pseudo-escalar,  $\Pi_{PS}(p^2)$ . Seguindo os mesmos passos da seção 3.2. Assim, temos:

$$\Pi_{PS}(p^2) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left[ \frac{i\gamma^5}{\not{k} + \not{P}_a - M_a} \frac{i\gamma^5}{\not{k} + \not{P}_b - \not{p} - M_b} \right] \quad (4.11)$$

Agora temos de resolvê-la. Calculando o traço, ficamos com

$$\Pi_{PS}(p^2) = iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left[ \frac{i\gamma^5 (\not{k} + \not{P}_a - M_a)}{(k+P_a)^2 - M_a^2} \frac{i\gamma^5 (\not{k} + \not{P}_b - \not{p} - M_b)}{(k+P_b-p)^2 - M_b^2} \right] \quad (4.12)$$

$$\Pi_{PS}(p^2) = -iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left[ \frac{\gamma^5 (\not{k} + \not{P}_a - M_a)}{(k+P_a)^2 - M_a^2} \frac{\gamma^5 (\not{k} + \not{P}_b - \not{p} - M_b)}{(k+P_b-p)^2 - M_b^2} \right] \quad (4.13)$$

$$\Pi_{PS}(p^2) = -i4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{-(k+P_a)(k+P_b-p) + M_a M_b}{[(k+P_a)^2 - M_a^2][(k+P_b-p)^2 - M_b^2]} \right] \quad (4.14)$$

Parametrizando, temos

$$\Pi_{PS}(p^2) = -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{-(k + P_a)(k + P_b - p) + M_a M_b}{[(k + l)^2 - \Pi^2]^2} \right] \quad (4.15)$$

onde fizemos  $\Pi^2 = [(p + P_a - P_b)^2 x - M_b^2](x - 1) + M_a^2 x$  e  $l = P_a x - P_b(x - 1) + px - p$ .

Aqui também a mudança  $k \rightarrow k + l$  ocasiona o aparecimento dos termos de superfície. Assim,  $\Pi_{PS}$  fica, após levarmos para o espaço de Minkowsky, em coordenadas hiperesféricas e integrando até o corte:

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) = & -i4N_c N_s \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dk \int_0^1 dx \left\{ \frac{-k^2 - (P_a - l)(P_b - l - p) + M_a M_b}{(k^2 + \Pi^2)^2} + \right. \\ & \left. + k^3 \frac{l^2 \Pi^2}{(k^2 + \Pi^2)^3} \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

### 4.2.3 Constante de decaimento fraco

A expressão da constante de decaimento fraco 3.79, acrescida do shift fica da seguinte forma:

$$ip_\mu f_{PS} = 4g_{PS\bar{q}q} N_c N_s \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M_a(k_\mu - p_\mu + P_{b\mu}) - M_b(k_\mu + P_{a\mu})}{[(k + P_a)^2 - M_a^2][(k + P_b - p)^2 - M_b^2]} \quad (4.17)$$

Utilizando os mesmos procedimentos da seção anterior, calculando também os termos de superfície, como a parametrização, mudança para o espaço de Minkowsky e levar para coordenadas hiperesféricas, temos

$$\begin{aligned} ip_\mu f_{PS} = & g_{PS\bar{q}q} N_c N_s \frac{i}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int dk \left[ \frac{k^3 [M_a(k_\mu - l_\mu - p_\mu + P_{b\mu}) - M_b(k_\mu - l_\mu + P_{a\mu})]}{(k^2 + \Pi^2)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{k^3 [l_\mu (M_a - M_b) \Pi^2]}{(k^2 + \Pi^2)^3} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde fizemos  $\Pi^2 = [(p + P_a - P_b)^2 x - M_b^2](x - 1) + M_a^2 x$  e  $l = P_a x - P_b(x - 1) + px - p$ .

No próximo capítulo iremos discutir os resultados do tratamento sem os termos de superfície, com os termos de superfície desenvolvido no Capítulo 3 e com a expansão derivativa desenvolvida neste Capítulo.

## 5 Resultados Numéricos

No decorrer dos Capítulos 3 e 4, desenvolvemos expressões para os observáveis dos mésons pión e káon. Neste capítulo vamos mostrar a solução numérica destas expressões e discutir suas consequências, fazendo também o ajuste da massa do quark strange ao modelo. Vamos indicar a sequência de desenvolvimento das equações, comparando depois as diferentes abordagens e os resultados experimentais.

### 5.1 Termos de superfície

Nos Capítulos 3 e 4 obtivemos as expressões para os observáveis mesônicos, incluindo as correções advindas de translações finitas nos momentos dos loops. Estas correções são, como vimos, dependentes dos chamados termos de superfície. Conforme (HILLER et al., 2006; MOTA et al., 1999; SCARPELLI et al., 2001; FERREIRA et al., 2012; FARGNOLI et al., 2010; BRIZOLA et al., 1998; SCARPELLI; SAMPAIO; NEMES, 2001; José Roberto Pereira Junior, 2011; PORTO, 2012; ELIAS; MCKEON; MANN, 1983) , vemos que em em diversos casos, os termos de superfície são considerados nulos, tendo em vista a preservação das simetrias do modelo, como por exemplo, a invariância de roteamento. A invariância de roteamento é, em outras palavras, uma invariância de translação finita no momento interno do loop.

Nestes trabalhos citados acima, foi exigido que a invariância de roteamento acontecesse não apenas a cada ordem da expansão em loops, mas também a cada amplitude, a cada termo da expansão da ação efetiva. Isto só é conseguido quando abandonamos os termos de superfície considerando-os nulos. Esta é a abordagem usual no tratamento do modelo NJL. Ao considerá-la, entretanto, estamos abrindo mão de uma propriedade matemática básica - ao deslocarmos a variável de integração por uma translação finita (shift) devemos considerar simultaneamente a correção dos limites de integração (termos

de superfície).

Entramos assim num dilema: Devemos preservar a simetria da ação (a invariância de roteamento) ou devemos preservar a estrutura matemática da transformação? Alguns esquemas de regularização, como a Regularização Dimensional ou Pauli-Villars invariante de Gauge, já trazem a opção pela preservação das simetrias naturalmente incorporada.

Neste trabalho, observando que a expansão derivativa desenvolvida por Chan, que garante a preservação das simetrias internas da ação efetiva a 1-loop, exige a invariância de roteamento de toda a ação efetiva, e não de cada termo específico em uma expansão no campo auxiliar, estamos analisando os efeitos da segunda alternativa (a preservação da estrutura matemática das amplitudes) sobre os observáveis mesônicos do modelo relacionados ao pión e ao káon. Apresentaremos, na sequência, os resultados numéricos relativos a cada uma destas alternativas.

## 5.2 Resultados e tabelas

As equações das expressões a serem resolvidas são as que seguem

- Equação de gap, eq.3.7

$$M - m = -G\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle \quad (5.1)$$

- Equação do condensado de quarks, eq.3.26

$$\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle = -N_c N_s \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^3}{k^2 + M^2} dk \quad (5.2)$$

- Equação da auto-energia dos mésons, eq.3.74

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) = & -i4N_c N_s \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dk \int_0^1 dx \left[ \frac{k^3 (k^2 - p^2 x^2 + p^2 x + M_a M_b)}{(k^2 + \Pi^2)^2} + \right. \\ & \left. + k^3 \frac{p^2 x^2 \Pi^2}{(k^2 + \Pi^2)^3} \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

- Definição do parâmetro  $g_{PSqq}$ , eq.3.33

$$g_{PSqq}^{-1} \equiv \sqrt{\frac{\partial \Pi_{PS}(p^2)}{\partial p^2}} \quad (5.4)$$

- Equação da constante de decaimento fraco de um méson pseudo-escalar, eq.3.84

$$\begin{aligned}
ip_\mu f_{PS} = & g_{PS\bar{q}q} N_c N_s \frac{i}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int dk \left\{ \frac{k^3 [(M_a - M_b)(k_\mu + p_\mu x) - M_a p_\mu]}{(k^2 + \Pi^2)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{k^3 [(M_a - M_b) p_\mu x \Pi^2]}{(k^2 + \Pi^2)^3} \right\} \quad (5.5)
\end{aligned}$$

Para resolvermos estas expressões, precisamos determinar inicialmente os parâmetros a serem usados. Para a expressão da equação de gap, precisamos determinar a constante de acoplamento  $G$ , a massa constituinte dos quarks  $M$  e o corte  $\Lambda$ , de modo a encontrar a massa corrente dos quarks,  $m$ .

Na expressão da auto-energia para o pión, eq. 3.74, precisamos determinar a constante de acoplamento  $G$ , a massa constituinte dos quarks up  $m_{up}$ , a massa do pión ( $p^2 = m_\pi^2$ ) e o corte  $\Lambda$ . Para o káon, precisamos determinar a constante de acoplamento  $G$ , a massa constituinte dos quarks up  $m_{up}$  e strange  $m_{strange}$ , a massa do káon ( $p^2 = m_K^2$ ) e o corte  $\Lambda$ . Como já discutimos na seção 3.2 em 3.37, quando exigimos esta expressão, a constante de acoplamento  $G$  deixa de ser uma variável a ser determinada.

Para a expressão da constante de decaimento fraco do pión, é necessário conhecer a constante de decaimento fraco do pión  $f_\pi$ , o parâmetro  $g_{\pi qq}$ , a massa constituinte dos quarks up  $m_{up}$ , a massa do pión ( $m_\pi$ ) e o corte  $\Lambda$ . Para o káon, precisamos determinar a constante de decaimento fraco do káon  $f_K$ , o parâmetro  $g_{K qq}$ , a massa constituinte dos quarks up  $m_{up}$  e strange  $m_{strange}$ , a massa do káon ( $m_K$ ) e o corte  $\Lambda$ .

Uma parte destes parâmetros pode ser fixada por valores experimentais, como a constante de decaimento fraco do pión e a massa dos mésons pión e káon. Estes valores experimentais foram obtidos em (OLIVE et al., 2014). (O valor do PDG para a constante de decaimento fraco parece diferente da utilizada aqui, mas trata-se apenas de uma diferença na tomada da relação de Goldberger-Treiman, onde o valor experimental da constante de decaimento fraco do pión  $130,41 MeV$  e do káon  $156,2 MeV$  devem ser divididos por  $\sqrt{2}$ .)

Tabela 3 – Valores experimentais utilizados (OLIVE et al., 2014)

$m_\pi$ (MeV)	$m_k$ (MeV)	$f_\pi$ (MeV)	$f_k$ (MeV)	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ (MeV) <sup>1/3</sup>	$\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}$ (MeV) <sup>1/3</sup>
139,57	493,68	92,21	110,45	-243,0	-225,6

Os valores de massa do quark up foram retirados de (Borka Jovanović et al., 2010), que utilizaram dois diferentes modelos fenomenológicos de interação hiperfina, Fermi-Breit e Glozman-Riska, para determinar a massa constituinte dos quarks. Eles utilizaram o hamiltoniano de interação spin-cor e spin-sabor com quebra de simetria SU(3) para obter as equações das massas dos mésons e dos bárions. Então ajustaram as soluções destas equações, para cada um dos modelos, de modo a reproduzir a massa experimental dos hádrons. Os valores estimados para as massas constituintes dos quarks up/down e strange por eles determinados estão mostrados nas duas primeiras colunas das tabelas 3, 4, 5 e 6. Estes valores serão utilizados na obtenção dos observáveis mesônicos a seguir.

Inicialmente, vamos tratar o caso onde os termos de superfície são considerados nulos, ou seja, preservando a invariância de roteamento.

Substituímos os valores experimentais, (exceto a constante de decaimento fraco do káon) na expressão 3.84 para o caso do pión. Nesta expressão ficam indeterminados, inicialmente, apenas o corte  $\Lambda$  e o parâmetro  $g_{\pi qq}$ . O parâmetro  $g_{\pi qq}$  é definido pela equação 3.33. Substituindo os valores na expressão, podemos resolvê-la para o corte  $\Lambda$ . Substituindo agora o corte  $\Lambda$  e os outros valores na expressão 3.74, verificamos que ela não possui solução para quaisquer valores de massa para o quark strange, uma vez que a expressão será resolvida nesta variável. Assim, os valores da massa corrente do strange, ou de outra forma, o par de massas up-strange não pode ser definido aleatoriamente, mas são dependentes entre si dentro do modelo que estamos trabalhando.

De posse dos valores da massa corrente dos quarks, da massa do káon e do corte, substituímos na expressão da eq.3.84 e do parâmetro  $g_{PSqq}$  na equação 3.33. Assim, obtemos o valor da constante de decaimento fraco do káon, calculada para este modelo. Utilizando estes parâmetros, também podemos obter o valor da massa corrente dos quarks. E utilizando a equação 3.35, podemos encontrar a constante de acoplamento. Os valores

obtidos são os que seguem na tabela 4.

Tabela 4 – Conjunto de parâmetros e observáveis físicos no modelo NJL sem termos de superfície

$m_{up}^*$ (MeV)	$m_s^*$ (MeV)	$m_s$ (MeV)	$\Lambda$ (MeV)	$f_k$ (MeV)	$m_{0\ up}$ (MeV)	$m_{0\ s}$ (MeV)	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ (MeV)	$\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}$ (MeV)
292,35	552,80	532,10	827,40	99,75	7,43	180,67	222,63	238,76
300,88	526,65	537,91	812,60	98,82	7,61	184,02	220,49	234,74
304,55	534,33	540,42	806,83	98,45	7,83	185,52	219,65	233,16
308,05	484,91	542,82	801,65	98,11	7,87	186,68	218,90	231,73
314,75	466,80	547,41	792,49	97,50	8,06	188,90	217,57	229,19
318,12	477,29	549,72	788,24	97,21	8,11	189,87	216,95	228,00

\* valores retirados da ref. (Borka Jovanović et al., 2010)

Comparando o valor experimental da constante de decaimento do káon e os obtidos pelo modelo, sem considerar os termos de superfície, percebemos que eles são menores em torno de 10%. Percebe-se, da tabela 4, que a massa corrente dos quarks é encontrada dentro de uma faixa aceitável.

Embora para o condensado de píons, o valor esteja aceitável, para o condensado de káon o valor está inconsistente com os valores “experimentais”. Nos valores calculados, o valor do condensado de káons tem valor superior ao condensado de píons, ao contrário do valor experimental.

Se utilizarmos os termos de superfície, ou seja, se optarmos pela preservação da estrutura matemática, não há modificação no passo-a-passo da solução das equações. Os resultados são apresentados na tabela 5

Estes resultados são consideravelmente melhores, com a constante de decaimento fraco do káon diferindo agora em menos de 5% dos valores experimentais.

Os valores para condensado continuam apresentando valores diferentes do esperado, especialmente no caso do káon.

Uma análise comparativa entre os valores de massas do quark strange estimados em (Borka Jovanović et al., 2010) e ajustados no presente trabalho, na tabelas 4 e 5,

Tabela 5 – Conjunto de parâmetros e observáveis físicos no modelo NJL com termos de superfície, mas sem shift

$m_{up}$ (MeV)	$m_s$ (MeV)	$m_s$ (MeV)	$\Lambda$ (MeV)	$f_k$ (MeV)	$m_{0\ up}$ (MeV)	$m_{0\ s}$ (MeV)	$\langle\bar{u}u\rangle^{1/3}$ (MeV)	$\langle\bar{s}s\rangle^{1/3}$ (MeV)
292,35	552,80	544,44	952,92	106,88	7,48	170,36	249,41	273,13
300,88	526,65	550,66	935,62	105,97	7,65	174,21	247,25	268,72
304,55	534,33	553,34	928,88	105,60	7,71	175,75	246,41	266,99
308,05	484,91	555,90	922,81	105,27	7,98	177,43	245,66	265,42
314,75	466,80	560,79	912,09	104,66	8,09	179,96	244,35	262,64
318,12	477,29	563,25	907,11	104,37	8,23	181,27	243,74	261,34

mostram que estes valores se encontram mais próximos para os menores valores de massa do quark up. Também para estes valores obtemos os melhores resultados para a constante de decaimento fraco do káon. Estes menores valores para a massa do up correspondem às estimativas baseadas no termo de interação hiperfina de Glozman-Riska, que em contraste com o termo de interação hiperfina de Fermi-Breit, apresenta dependência explícita com os sabores dos quarks e não apresenta dependência de cor. Estas características parecem se ajustar melhor ao modelo de NJL, como observamos na figura 5.2. Em particular, o valor mais baixo para  $M_{up}$ , e que reproduz melhor a massa estimada para o quark strange e a constante de decaimento fraco do káon,  $M_{up} = 292,35\text{MeV}$ , corresponde à estimativa calculada tomando-se em conta apenas os mésons mais leves, o que também corresponde ao modelo aqui estudado.

Neste caso, assim como nos demais, os resultados são melhores quando consideramos os termos de superfície, permitindo a violação da invariância por roteamento. Neste limite a diferença entre os valores ajustados para o modelo NJL e os valores estimados para a massa constituinte do quark strange e o experimental para a constante de decaimento fraco do káon ficam, respectivamente, em 1,5% e 3,2%. Isto sugere, junto aos resultados de (Borka Jovanović et al., 2010), que talvez este seja o melhor conjunto de parâmetros para o uso do modelo NJL. Cabe ressaltar também que estas mesmas diferenças, quando os termos de superfície não são considerados, sobem para 3,7% e 9,7% respectivamente.

Conforme já discutimos anteriormente, uma vez que abrimos mão da preservação da invariância de roteamento a cada amplitude, podemos então tentar utilizar um roteamento específico. As equações, agora, ganham mais um parâmetro, a translação no espaço

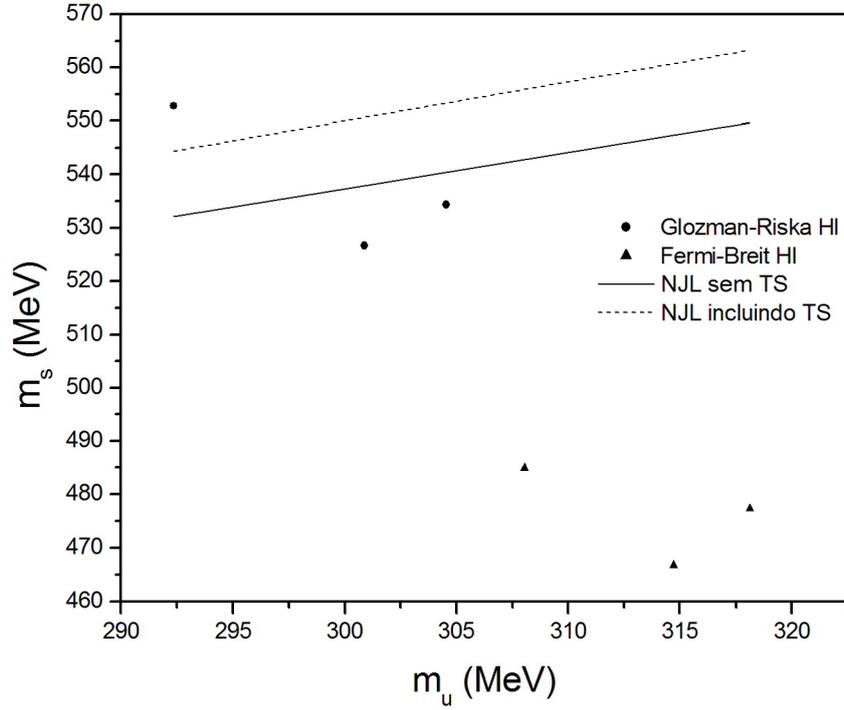


Figura 11 – Massa do quark strange em função da massa do quark up estimada (Borka Jovanović et al., 2010) e ajustada pelo modelo NJL. A linha contínua corresponde ao ajuste desprezando-se os termos de superfície, e a linha tracejada ao ajuste incluindo estes termos. Os resultados do modelo se aproximam mais das estimativas realizadas utilizando termos de interação hiperfina de Glzman-Riska.

dos momentos.

- Equação de gap, eq. 3.7

$$M - m = -G\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle \quad (5.6)$$

- Equação do condensado de quarks, eq. 4.9

$$\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle = -iN_cN_s\frac{M}{2\pi^2}\int_0^\Lambda\frac{k^3}{(k+P)^2+M^2}dk \quad (5.7)$$

- Equação da auto-energia dos mésons, eq. 4.16

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) = & -i4N_cN_s\frac{i}{8\pi^2}\int_0^\Lambda dk\int_0^1 dx \left\{ \frac{-k^2 - (P_a - l)(P_b - l - p) + M_aM_b}{(k^2 + \Pi^2)^2} + \right. \\ & \left. + k^3\frac{l^2\Pi^2}{(k^2 + \Pi^2)^3} \right\} \quad (5.8) \end{aligned}$$

- Equação da constante de decaimento fraco de um méson pseudo-escalar , eq. 4.18

$$ip_\mu f_{PS} = g_{PS\bar{q}q} N_c N_s \frac{i}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int dk \left[ \frac{k^3 [l_\mu (M_a - M_b) \Pi^2]}{(k^2 + \Pi^2)^3} + \frac{k^3 [M_a (k_\mu - l_\mu - p_\mu + P_{b\mu}) - M_b (k_\mu - l_\mu + P_{a\mu})]}{(k^2 + \Pi^2)^2} \right] \quad (5.9)$$

Os termos de *shift*,  $P_a$  e  $P_b$ , se tomados iguais a zero, retornam as expressões 3.7,3.26,3.74,3.33 e 3.84, desenvolvidas no Capítulo 3. Todas as expressões onde aparecem os termos  $P_a$  e  $P_b$  se referem a bolhas pseudo-escalares. Nestas bolhas, acontece o processo que entendemos como a bolha pseudo-escalar, uma correção quântica para a auto-energia dos mésons a um loop. Cada uma das linhas internas da bolha são entendidas como representantes de uma quark e/ou antiquark, que podem ser o up/down ou o strange.

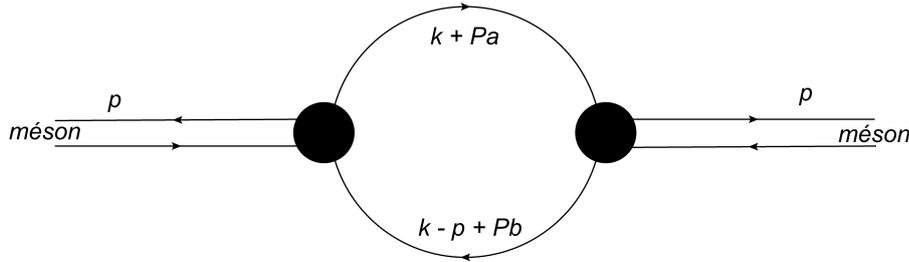


Figura 12 – Diagrama da bolha pseudo-escalar com shift

Finalmente, podemos nos perguntar se seria possível ajustar exatamente a constante de decaimento fraco do káon através de uma escolha específica do shift  $P_a$ , no espírito da abordagem desenvolvida em (MOTA; ARRIOLA, 2007). Nela, os autores propuseram a expansão derivativa em torno do momento dos quarks pesados, como discutimos no Capítulo 4. Na proposta original, a expansão do momento deveria ser feita em torno do momento do quark pesado, no nosso caso o strange. O valor deste shift seria, em consonância com a HQET,  $P_a = m_{strange}v$ , com  $v$  sendo a velocidade do quark, escolhida em um referencial de modo que  $v^2 = 1$ . Então, o shift seria a própria massa do quark pesado. Utilizando este valor no quark strange e  $P_b = 0$  para o quark up/down, verificamos que os resultados sem termos de superfície não são alterados (devido justamente à invariância de roteamento). Já quando utilizamos os termos de superfície, os valores ficam ainda mais distantes que aqueles sem a utilização da expansão derivativa.

Tabela 6 – Conjunto de parâmetros e observáveis físicos no modelo NJL com termos de superfície e shift igual à massa do strange

$m_{up}$ (MeV)	$m_s$ (MeV)	$m_s$ (MeV)	shift (MeV)	$\Lambda$ (MeV)	$f_k$ (MeV)	$m_{0\ up}$ (MeV)	$m_{0\ s}$ (MeV)	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ (MeV)	$\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}$ (MeV)
292,35	552,80	560,02	$m_s$	952,92	26,12	7,49	183,73	249,41	273,66
300,88	526,65	565,15	$m_s$	935,62	25,94	7,65	186,89	247,25	269,15
304,55	534,33	573,15	$m_s$	928,88	25,81	7,71	193,27	246,41	267,53
308,05	484,91	577,00	$m_s$	922,81	25,60	7,98	196,24	245,66	265,96
314,75	466,80	584,50	$m_s$	912,09	25,33	8,09	201,41	244,35	263,16
318,12	477,29	588,33	$m_s$	907,11	25,13	8,23	204,12	243,74	261,85

Uma explicação para este resultado talvez resida no fato de que a massa do strange ainda é relativamente menor que a dos demais quarks pesados (charm, bottom e top). Neste caso, os efeitos da translação não são suficientemente pequenos quando comparados com as outras escalas, como o cut-off, por exemplo. No entanto, é possível encontrarmos valores de shift que ajustem melhor a constante de decaimento fraco do káon, como mostramos na Tabela 7.

Tabela 7 – Conjunto de parâmetros e observáveis físicos no modelo NJL com termos de superfície e shift ajustado para reproduzir a constante de decaimento fraco do káon

$m_{up}$ (MeV)	$m_s$ (MeV)	$m_s$ (MeV)	shift (MeV)	$\Lambda$ (MeV)	$f_k$ (MeV)	$m_{0\ up}$ (MeV)	$m_{0\ s}$ (MeV)	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ (MeV)	$\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}$ (MeV)
292,35	552,80	554,38	-44,00	952,92	110,45	7,49	178,86	249,41	273,48
300,88	526,65	564,40	-57,80	935,62	110,45	7,65	186,23	247,25	269,13
304,55	534,33	568,77	-63,60	928,88	110,45	7,71	189,36	246,41	267,42
308,05	484,91	573,05	-69,30	922,81	110,45	7,98	192,68	245,66	265,87
314,75	466,80	581,31	-80,00	912,09	110,45	8,09	198,49	244,35	263,10
318,12	477,29	585,58	-85,50	907,11	110,45	8,23	201,58	243,74	261,80

## 6 Conclusão

Neste trabalho, revisamos o modelo de Nambu-Jona-Lasinio  $SU(3)$  tratado em uma aproximação em campo médio a 1-loop, com a introdução de campos bosônicos auxiliares. Nos concentramos na obtenção de observáveis mesônicos dos mésons pseudo-escalares leves, pión e káon. O procedimento empregado para o ajuste de parâmetros do modelo permitiu reduzir o número de parâmetros livres para apenas dois: a massa constituinte do quark strange, que foi fixada para reproduzir o valor experimental da massa do káon, e o parâmetro de corte da regularização empregada, que foi fixado para reproduzir o valor experimental da constante de decaimento fraco do pión. Outros parâmetros observáveis, como os valores dos condensados de quarks up e strange, as massas correntes destes quarks e a constante de decaimento fraco do káon emergem como resultados do modelo.

Observando que a expansão derivativa da ação efetiva a 1-loop do modelo assegura a invariância a translações finitas nos momentos internos dos loops apenas para esta ação como um todo, e não ordem a ordem em uma expansão no campo auxiliar, argumentamos de que esta observação abre a possibilidade de violação da invariância por roteamento em amplitudes ou diagramas específicos, não implicando assim na anulação dos termos de superfície que surgem naturalmente no cálculo destes. Assim, comparamos os resultados obtidos no tratamento do modelo NJL em dois cenários distintos: abandonando-se os termos de superfície, ao exigir invariância por roteamento das amplitudes individualmente, ou permitindo a violação desta invariância, preservando a estrutura matemática do modelo, ou seja, preservando os termos de superfície.

Como pode ser observado, a inclusão dos termos de superfície nos permite obter melhores resultados dentro do modelo NJL. Embora a utilização dos termos de superfície em esquemas de regularização que utilizam cut-off seja necessária e há muito tempo se fale sobre esta necessidade, muitos trabalhos não o utilizam. Utilizar os termos de superfície,

no modelo de NJL, além de não dificultar a solução, a torna mais adequada, o que valida sua utilização.

A expansão derivativa em torno dos momentos dos quarks pesados não se mostrou tão adequada no contexto do káon. Em sua utilização original, os quarks pesados eram o charm e o bottom, muito mais pesados que o quark up/down. Já o quark strange, embora seja bem mais pesado que estes, ainda é muito mais leve que os quarks charm e bottom. Talvez esta diferença seja a responsável pela não concordância dos resultados com os valores experimentais.

Dentro do modelo que discutimos, uma vez que a constante de acoplamento  $G$  é a mesma, tanto para o pión quanto para o káon, ela deixa de ser um parâmetro necessário para o ajuste dos observáveis. Também, conforme vimos, não podemos definir pares de massa constituinte para os quarks up/down e strange com quaisquer valores.

A respeito dos termos de superfície, quando estes são desprezados, mesmo em trabalhos que utilizam o cut-off como método de regularização, a justificativa é que estes quebram algumas simetrias do modelo. Embora seja verdade que os termos de superfície quebrem simetrias, estas podem estar sendo quebradas localmente, apenas nesta ordem de aproximação na expansão do campo auxiliar. Não podemos afirmar se esta simetria poderia ser restaurada em outras ordens, nem que seria necessária esta conservação ordem a ordem. Além disso, já que estamos utilizando a regularização sharp cut-off, matematicamente devemos utilizar os termos de superfície, uma vez que são termos que surgem em função de uma operação de translação.

Outro detalhe que podemos verificar é que, no modelo que trabalhamos, os valores da massa constituinte do quark strange vão crescendo conforme a massa do quark up também crescem. Já com a massa constituinte proposta por Jovanovic ([Borka Jovanović et al., 2010](#)), a massa do quark strange decresce conforme a massa do quark up cresce.

Como trabalhos futuros, propomos uma melhor compreensão da influência dos termos de superfície, identificando e verificando as simetrias do modelo com os termos de superfície em vários esquemas de regularização e em outros modelos. Sugerimos também

verificar a influência dos termos de superfície em modelos onde, supostamente, tais termos são descartados desde o início.

Finalmente, parece ainda ser necessário um estudo rigoroso da transição entre o regime em que a expansão derivativa em torno dos momentos dos quarks pesados se aproxima da HQET e a região na qual se encontram os mésons de massas intermediárias.

## Referências

- ABLIKIM, M. et al. Direct measurements of the non-DD cross section  $\sigma\psi(3770)\rightarrow\text{non-DD}$  at  $E_{\text{cm}}=3.773$  GeV and the branching fraction for  $\psi(3770)\rightarrow\text{non-DD}$ . *Physical Review D*, 2007. v. 76, n. 12, p. 122002, dez. 2007. Citado na página [52](#).
- ADIL, A.; VITEV, I. Collisional dissociation of heavy mesons in dense QCD matter. *Physics Letters B*, 2007. v. 649, p. 139–146, 2007. Citado na página [52](#).
- ANTUNES, A. et al. Método de Hartree-Fock: Dois Exemplos Analiticamente Solúveis. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 1999. v. 21, n. 2, p. 221, 1999. Citado na página [17](#).
- BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. *Physical Review*, 1957. v. 108, p. 1175–1204, 1957. Citado 2 vezes nas páginas [15](#) e [36](#).
- BARDUCCI, A. et al. Pion and kaon condensation in a 3-flavor Nambu–Jona-Lasinio model. *Physical Review D*, 2005. v. 71, n. 1, p. 016011, jan. 2005. ISSN 1550-7998. Citado na página [22](#).
- BATTISTEL, O. a.; DALLABONA, G. A Systematization for One-Loop 4D Feynman Integrals-Different Species of Massive Fields. *Journal of Modern Physics*, 2012. v. 03, n. October, p. 1408–1449, 2012. Citado na página [45](#).
- BERNARD, V.; JAFFE, R.; MEISSNER, U.-G. Strangeness mixing and quenching in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Nuclear Physics B*, 1988. v. 308, p. 753–790, 1988. Citado na página [16](#).
- BERTLMANN, R. A. *Anomalies in quantum field theory*. [S.l.]: Oxford University Press, 1996. 578 p. Citado na página [43](#).
- BIJNENS, J. Chiral Lagrangians and Nambu-Jona-Lasinio like models. *Physics Reports*, 1996. v. 265, n. 6, p. 369–446, 1996. Citado na página [22](#).
- BLIN, A. H.; HILLER, B.; SCHADEN, M. Electromagnetic form factors in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei*, 1988. v. 331, p. 75–82, 1988. ISSN 09301151. Citado na página [18](#).
- Borka Jovanović, V. et al. Constituent quark masses obtained from hadron masses with contributions of Fermi-Breit and Glazman-Riska hyperfine interactions. *Physical Review D*, 2010. v. 82, n. 11, p. 117501, dez. 2010. ISSN 1550-7998. Citado 7 vezes nas páginas [20](#), [59](#), [60](#), [61](#), [62](#), [66](#) e [78](#).
- BRIZOLA, A. et al. Implicit Regularisation Technique: Calculation of the Two-loop  $\phi^4$ -theory  $\beta$ -function. *Modern Physics Letters A*, 1998. v. 14, n. 22, p. 1509–1518, 1998. ISSN 0217-7323. Citado 2 vezes nas páginas [45](#) e [56](#).
- BUBALLA, M. NJL-model analysis of dense quark matter. *Physics Reports*, 2005. v. 407, p. 205–376, 2005. ISSN 03701573. Citado na página [22](#).

- CHAN, L. Derivative expansion for the one-loop effective actions with internal symmetry. *Physical review letters*, 1986. v. 57, n. 10, p. 1199–1202, 1986. Citado 4 vezes nas páginas 19, 49, 50 e 52.
- CHENG, T.-P.; LI, L.-F. *Gauge theory of elementary particle physics*. [S.l.]: Oxford University Press, 1988. 548 p. Citado na página 43.
- CHOI, H.-m. Decay constants and radiative decays of heavy mesons in light-front quark model. *Physical Review D*, 2007. v. 073016, n. April, p. 1–9, 2007. Citado na página 52.
- DAS, A. *Field Theory - A Path Integral Approach*. 2nd editio. ed. [S.l.]: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006. 361 p. (World Scientific Lecture Notes in Physics, v. 75). Citado 5 vezes nas páginas 8, 26, 27, 30 e 35.
- DAVID, A. Is the fragmentation of charm quarks into D mesons described by heavy quark effective theory? *Physics Letters B*, 2007. v. 644, n. 4, p. 224–227, jan. 2007. ISSN 03702693. Citado na página 52.
- DELFT, J. V.; SCHOELLER, H.; Von Delft, J. Bosonization for beginners-refermionization for experts. *Annalen der Physik*, 1998. v. 7, n. 3, p. 225–305, 1998. ISSN 1521-3889. Citado na página 26.
- DIAS, E. W. *Independência de ambiguidades na versão renormalizável do modelo de Nambu-Jona-Lasinio  $SU(2)$* . 144 p. Tese (Disertação de Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2004. Citado na página 35.
- EBERT, D. et al. Effective meson Lagrangian with chiral and heavy quark symmetries from quark flavor dynamics. *Nuclear Physics B*, 1995. v. 434, p. 619–646, 1995. Citado na página 52.
- EBERT, D.; REINHARDT, H. Effective Chiral Hadron Lagrangian with anomalies and skyrme terms from quark flavour dynamics. *Nuclear Physics B*, 1986. v. 271, n. 3-4, p. 188–226, 1986. ISSN 05503213. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- ELIAS, V.; MCKEON, G.; MANN, R. B. Shifts of integration variable within four- and N-dimensional Feynman integrals. *Physical Review D*, 1983. v. 28, n. 8, p. 1978–1992, 1983. ISSN 05562821. Citado 3 vezes nas páginas 18, 43 e 56.
- FARGNOLI, H. G. et al. Ultraviolet and Infrared Divergences in Implicit Regularization: a Consistent Approach. *Modern Physics Letters A*, 2010. v. 26, n. 04, p. 9, 2010. ISSN 0217-7323. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 56.
- FERREIRA, L. C. et al. Momentum routing invariance in Feynman diagrams and quantum symmetry breakings. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 2012. v. 86, 2012. ISSN 15507998. Citado 3 vezes nas páginas 45, 50 e 56.
- FOCK, V. Naherungsmethode zur Losung des quantenmechanischen Mehrkorperproblems. *Zeitschrift for Physik*, 1930. v. 61, p. 126–148, 1930. ISSN 14346001. Citado na página 17.
- FRIESS, J. Stability of strings binding heavy-quark mesons. *Journal of High Energy ...*, 2007. v. 04, 2007. Citado na página 52.

- GELL-MANN, M.; OAKES, R. J.; RENNER, B. Behavior of current divergences under  $SU(3) \times SU(3)$ . *Physical Review*, 1968. v. 175, p. 2195–2199, 1968. ISSN 0031899X. Citado na página 15.
- GEORGI, H. An effective field theory for heavy quarks at low energies. *Physics Letters B*, 1990. v. 240, n. 3, p. 447–450, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 52.
- GHERGHETTA, T. Regularization in the gauged Nambu-Jona-Lasinio model. *Physical Review D*, 1994. v. 50, p. 5985–5992, 1994. ISSN 05562821. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 50.
- GOLDBERGER, M. L.; TREIMAN, S. B. Decay of the Pi meson. *Physical Review*, 1958. v. 110, p. 1178, 1958. ISSN 0031899X. Citado na página 15.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Elementary Particles*. 1st. ed. [S.l.]: John Wiley Sons, 1987. 405 p. Citado 7 vezes nas páginas 8, 9, 11, 13, 16, 36 e 42.
- GUO, F.; SHEN, P.; CHIANG, H. Dynamically generated  $1+$  heavy mesons. *Physics Letters B*, 2007. v. 647, n. 1, p. 133–139, 2007. Citado na página 52.
- GUO, X.-Y.; CHEN, X.-L.; DENG, W.-Z. Heavy mesons in the Nambu—Jona-Lasinio model. *Chinese Physics C*, 2013. v. 37, p. 033102, 2013. ISSN 1674-1137. Citado na página 18.
- GUSYNIN, V. P.; MIRANSKII, A. Effective action in the Nambu-Jona-Lasinio gauge model. *JETP*, 1992. v. 74, n. 2, p. 216–273, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 31.
- HA, Y. K. Boson formulation of fermion field theories. *Physical Review D*, 1984. v. 29, p. 1744–1756, 1984. ISSN 05562821. Citado na página 26.
- HAGIWARA, K.; MARTIN, A.; WADE, M. Exclusive semileptonic B-meson decays. *Nuclear Physics B*, 1989. v. 327, 1989. Citado na página 52.
- HAGIWARA, K.; MARTIN, A.; WADE, M. Helicity amplitude analysis of  $B \rightarrow D^* l \nu$  decays. *Physics Letters B*, 1989. v. 228, n. 1, p. 144–148, 1989. Citado na página 52.
- HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle*. [S.l.]: JOHN WILEY & SONS, 1984. 412 p. Citado na página 46.
- HARTREE, D. R. The Wave Mechanics of an Atom with a non-Coulomb Central Field. Part III. Term Values and Intensities in Series in Optical Spectra. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1928. v. 24, p. 426, 1928. Citado na página 17.
- HATSUDA, T.; KUNIHIRO, T. Fluctuation effects in hot quark matter: Precursors of chiral transition at finite temperature. *Physical Review Letters*, 1985. v. 55, p. 158–161, 1985. ISSN 00319007. Citado na página 16.
- HATSUDA, T.; KUNIHIRO, T. QCD Phenomenology based on a Chiral Effective Lagrangian. *Physics Reports*, 1994. v. 247, p. 221–367, 1994. ISSN 03701573. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.
- HILLER, B. et al. The role of hidden ambiguities in the linear sigma model with fermions. *Nuclear Physics A*, 2006. v. 769, p. 53–70, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 19, 43 e 56.

JACKIW, R. When radiative corrections are finite but undetermined. *International Journal of Modern Physics B*, 1999. v. 14, n. 19-20, p. 2011–2025, 1999. ISSN 0217-9792. Citado 3 vezes nas páginas 18, 30 e 43.

José Roberto Pereira Junior. *Invariância de rótulo , termos de superfície e simetria de calibre em diagramas de Feynman a um laço em eletrodinâmica quântica*. 56 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 56.

KLEINERT, H. Hubbard-Stratonovich Transformation : Successes , Failure , and Cure. *Electronic Journal of Theoretical Physics*, 2011. v. 25, n. 25, p. 57–64, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 26.

KLEVANSKY, S. The Nambu—Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Reviews of Modern Physics*, 1992. v. 64, n. 3, p. 649–708, jul. 1992. ISSN 0034-6861. Citado 7 vezes nas páginas 18, 22, 26, 27, 28, 35 e 36.

LEON, J. H.; MARTIN, C. P.; RUIZ, F. R. Unitarity violation in non-abelian Pauli-Villars regularization. *Physics Letters B*, 1995. v. 355, n. 3-4, p. 531–538, 1995. ISSN 03702693. Citado na página 37.

MARCIANO, W. J. Heavy top-quark mass predictions. *Physical Review Letters*, 1989. v. 62, p. 2793–2796, 1989. ISSN 00319007. Citado na página 18.

MATSUKI, T.; MORII, T.; SUDOH, K. Radial excitations of heavy-light mesons. *The European Physical Journal A*, 2007. v. 31, n. 4, p. 701–704, mar. 2007. Citado na página 52.

MIRANSKY, V.; TANABASHI, M.; YAMAWAKI, K. Dynamical electroweak symmetry breaking with large anomalous dimension and t quark condensate. *Physics Letters B*, 1989. v. 221, p. 177–183, 1989. ISSN 03702693. Citado na página 18.

MIRANSKY, V.; TANABASHI, M.; YAMAWAKI, K. IS THE  $t$  QUARK RESPONSIBLE FOR THE MASS OF W AND Z BOSONS? *Modern Physics Letters A*, 1989. v. 04, p. 1043–1053, 1989. ISSN 0217-7323. Citado na página 18.

MIRANSKY, V. A. Dynamics of spontaneous chiral symmetry breaking and the continuum limit in quantum electrodynamics. *Il Nuovo Cimento A Series 11*, 1985. v. 90, p. 149–170, 1985. ISSN 03693546. Citado na página 18.

MIRANSKY, V. A. ELECTROWEAK SYMMETRY BREAKING AND DYNAMICS OF TIGHT BOUND STATES. *International Journal of Modern Physics A*, 1991. v. 06, p. 1641–1657, 1991. ISSN 0217-751X. Citado na página 18.

MOREIRA, M. A. O Modelo Padrão da Física de Partículas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2009. v. 31, p. 1306.1–1306.11, 2009. ISSN 1806-1117. Citado na página 8.

MOTA, A. L. O Modelo de Nambu-Jona-Lasinio como uma Teoria Quântica de Campos. *Doutorado em Ciências; Universidade Federal de Minas Gerais*, 1999. p. 130, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 18, 43 e 50.

- MOTA, A. L.; ARRIOLA, E. R. Relativistic NJL model with light and heavy quarks. *The European Physical Journal A*, 2007. v. 31, n. 4, p. 711–713, mar. 2007. ISSN 1434-6001. Citado 7 vezes nas páginas [18](#), [19](#), [20](#), [49](#), [52](#), [53](#) e [63](#).
- MOTA, A. L. et al. Meson Properties in a renormalizable version of the NJL model. *Nuclear Physics A*, 1999. v. 652, p. 73–87, 1999. ISSN 03759474. Citado 2 vezes nas páginas [43](#) e [56](#).
- NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. *Physical Review*, 1961. v. 122, n. 1, p. 345–358, abr. 1961. ISSN 0031-899X. Citado 3 vezes nas páginas [15](#), [17](#) e [24](#).
- NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II. *Physical Review*, 1961. v. 124, n. 1, p. 246–254, out. 1961. ISSN 0031-899X. Citado 3 vezes nas páginas [15](#), [17](#) e [24](#).
- NEUBERT, M. Heavy-quark symmetry. *Physics Reports*, 1994. v. 245, p. 259–395, 1994. Citado 2 vezes nas páginas [19](#) e [52](#).
- OLIVE, K. A.; OTHERS. Review of Particle Physics. *Chin.Phys. C*, 2014. v. 38, n. 9, p. 1–1676, 2014. Citado 3 vezes nas páginas [21](#), [58](#) e [59](#).
- OLIVEIRA, D. M. D. Uma proposta para o ensino de teoria quântica de campos na graduação: a eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons como motivação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2011. v. 33, n. 3, p. 1–9, set. 2011. ISSN 1806-1117. Citado na página [30](#).
- PAULI, W.; VILLARS, F. On the invariant regularization in relativistic quantum theory. *Reviews of Modern Physics*, 1949. v. 21, p. 434–444, 1949. ISSN 00346861. Citado na página [37](#).
- PEREIRA, F. P. et al. Electromagnetic structure and weak decay of pseudoscalar mesons in a light-front QCD-inspired model. *European Journal Physics A*, 2006. v. 27, p. 213–223, 2006. Citado 2 vezes nas páginas [18](#) e [19](#).
- PEREIRA, F. P. et al. Electromagnetic structure and weak decay of meson K in a light-front QCD-inspired model. *Nuclear Physics A*, 2007. v. 790, p. 610–613, 2007. ISSN 03759474. Citado 2 vezes nas páginas [18](#) e [19](#).
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction To Quantum Field Theory*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1995. Citado 2 vezes nas páginas [8](#) e [31](#).
- PORTO, J. S. *Anomalia de escala e invariância de calibre em eletrodinâmica quântica: um estudo diagramático*. 83 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2012. Citado 3 vezes nas páginas [43](#), [45](#) e [56](#).
- POSSA, D.; PEREIRA, F.; NOGUEIRA, J. A. O potencial efetivo e sua expansão em "loop", interpretação e convexidade. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2005. v. 27, p. 415–421, 2005. ISSN 1806-1117. Citado 2 vezes nas páginas [25](#) e [26](#).
- POSSA, D.; PEREIRA, F.; NOGUEIRA, J. A. O potencial efetivo para uma teoria com quebra espontânea de simetria. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2005. v. 27, p. 407–413, 2005. ISSN 1806-1117. Citado 2 vezes nas páginas [25](#) e [26](#).

- RAMOND, P. *Field theory: a modern primer*. second edi. [S.l.: s.n.], 2001. 350 p. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 29.
- ROBERTS, C.; CAHILL, R.; PRASCHIFKA, J. The effective action for the Goldstone modes in a global colour symmetry model of QCD. *Annals of Physics*, 1988. v. 188, n. 1, p. 20–60, nov. 1988. ISSN 00034916. Citado na página 31.
- RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. 2nd editio. ed. [S.l.: s.n.], 1996. 487 p. Citado 4 vezes nas páginas 8, 29, 30 e 37.
- SALCEDO, L. A. D. M. *Estrutura Eletromagnética e Decaimento Fraco de Mésons Pseudoescalares em uma Teoria Inspirada na QCD*. 95 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutico, 2004. Citado na página 46.
- SCARPELLI, a. P. B.; SAMPAIO, M.; NEMES, M. C. Consistency relations for an implicit n-dimensional regularization scheme. *Physical Review D*, 2001. v. 63, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 56.
- SCARPELLI, A. P. B. et al. Chiral anomaly and CPT invariance in an implicit momentum space regularization framework. *Physical Review D*, 2001. v. 64, 2001. ISSN 05562821. Citado 4 vezes nas páginas 18, 43, 50 e 56.
- TOMS, D. *The Schwinger action principle and effective action*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. 507 p. Citado na página 25.
- VOLKOV, M. K.; RADZHABOV, A. E. The Nambu–Jona-Lasinio model and its development. *Physics-Uspekhi*, 2006. v. 49, p. 551, 2006. ISSN 1063-7869. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- WILLEY, R. S. Ambiguity of calculations in the nambu-jona-lasinio model and its singular relation to the linear  $\sigma$  model. *Physical Review D*, 1993. v. 48, p. 2877–2880, 1993. ISSN 05562821. Citado na página 18.
- WIT, B. de; SMITH, J. *Field Theory in Particle Physics*. 1st editio. ed. [S.l.]: North-Holland Personal Library, 1986. 502 p. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 37.

# APÊNDICE A – Resolvendo os termos de superfície

Como exemplo de solução dos termos de superfície, vamos resolver os termos de superfície referentes a auto-energia dos mésons, da seção 3.2.

Os termos de superfície a serem calculados são

$$TS_{\Pi_{PS}} = -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{(k^2 - \Pi^2)} - \frac{1}{2} l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{(k^2 - \Pi^2)} + \dots \right\} \quad (\text{A.1})$$

Vamos começar tomando os termos entre chaves,

$$I_{TS} = l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{(k^2 - \Pi^2)} - \frac{1}{2} l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{(k^2 - \Pi^2)} \quad (\text{A.2})$$

realizando a primeira derivada, temos

$$I_{TS} = l_\mu \frac{-2k_\mu}{(k^2 - \Pi^2)^2} - \frac{1}{2} l_\nu l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{-2k_\mu}{(k^2 - \Pi^2)^2} \quad (\text{A.3})$$

e fazendo a segunda derivada

$$\begin{aligned} I_{TS} &= l_\mu \frac{-2k_\mu}{(k^2 - \Pi^2)^2} - \frac{1}{2} l_\nu l_\mu \frac{-2g^{\mu\nu}}{(k^2 - \Pi^2)^2} - 2k_\mu \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{1}{(k^2 - \Pi^2)^2} \\ &= l_\mu \frac{-2k_\mu}{(k^2 - \Pi^2)^2} - \frac{1}{2} l_\nu l_\mu \left( \frac{-2g^{\mu\nu}}{(k^2 - \Pi^2)^2} - 2k_\mu \frac{(-2)2k_\nu}{(k^2 - \Pi^2)^3} \right) \\ &= l_\mu \frac{-2k_\mu}{(k^2 - \Pi^2)^2} - l_\nu l_\mu \left( \frac{-g^{\mu\nu}}{(k^2 - \Pi^2)^2} + 4 \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Pi^2)^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Assim, voltando à integral

$$TS_{\Pi_{PS}} = -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ l_\mu \frac{-2k_\mu}{(k^2 - \Pi^2)^2} - l_\nu l_\mu \left( \frac{-g^{\mu\nu}}{(k^2 - \Pi^2)^2} + 4 \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Pi^2)^3} \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

Como podemos integrar o último termo da expressão acima?

Vamos ver inicialmente:

$$I^{\mu\nu} = \int d^4k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Pi^2)^3} \quad (\text{A.6})$$

o resultado da integral deve ser proporcional a  $g^{\mu\nu}$ , a métrica do sistema. Assim

$$I^{\mu\nu} = \int d^4k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Pi^2)^3} = \alpha g^{\mu\nu} \quad (\text{A.7})$$

Multiplicando todos os termos pela métrica

$$g_{\mu\nu} I^{\mu\nu} = \int d^4k \frac{k^2}{(k^2 - \Pi^2)^3} = \alpha g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4\alpha \quad (\text{A.8})$$

Assim,  $\alpha$  será dada por

$$\alpha = \frac{1}{4} \int d^4k \frac{k^2}{(k^2 - \Pi^2)^3} \quad (\text{A.9})$$

Então, voltando à expressão A.7

$$I^{\mu\nu} = \int d^4k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Pi^2)^3} = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int d^4k \frac{k^2}{(k^2 - \Pi^2)^3} \quad (\text{A.10})$$

e podemos simplificar

$$I^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int d^4k \left[ \frac{1}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \frac{\Pi^2}{(k^2 - \Pi^2)^3} \right] \quad (\text{A.11})$$

Voltando à expressão A.5,

$$\begin{aligned} TS_{\Pi PS} = & -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ l_\mu \frac{-2k_\mu}{(k^2 - \Pi^2)^2} - \right. \\ & \left. -l_\nu l_\mu \left[ \frac{-g^{\mu\nu}}{(k^2 - \Pi^2)^2} + 4 \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int d^4k \left( \frac{1}{(k^2 - \Pi^2)^2} + \frac{\Pi^2}{(k^2 - \Pi^2)^3} \right) \right] \right\} \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

que podemos simplificar

$$TS_{\Pi PS} = -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ l_\mu \frac{-2k_\mu}{(k^2 - \Pi^2)^2} - l_\nu l_\mu g^{\mu\nu} \int d^4k \frac{\Pi^2}{(k^2 - \Pi^2)^3} \right\} \quad (\text{A.13})$$

O primeiro termo dentro da integral é ímpar e a integração em  $k$  é nula. Assim, o único termo restante é:

$$TS_{\Pi PS} = -i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ -l_\nu l_\mu \frac{g^{\mu\nu} \Pi^2}{(k^2 - \Pi^2)^3} \right] \quad (\text{A.14})$$

conforme vimos no Capítulo 3.

Levando para o espaço de Minkowsky e depois mudando para coordenadas hiperesféricas, integrando até  $\Lambda$ , temos

$$TS_{\Pi PS} = -i4N_c N_s \frac{i}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk k^3 \frac{l^2 \Pi^2}{(k^2 + \Pi^2)^3} \quad (\text{A.15})$$

## APÊNDICE B – Tabelas

Tabela 8 – Conjunto de parâmetros e observáveis físicos no modelo NJL sem termos de superfície

$m_{up}^*$ (MeV)	$m_s^*$ (MeV)	$m_s$ (MeV)	$\Lambda$ (MeV)	$f_k$ (MeV)	$m_{0\ up}$ (MeV)	$m_{0\ s}$ (MeV)	$g_{\pi qq}$ $10^{-6}$	$g_{kqq}$	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ (MeV)	$\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}$ (MeV)
292,35	552,80	532,10	827,40	99,75	7,43	180,67	12,91	3,097	3,334	222,63
300,88	526,65	537,91	812,60	98,82	7,61	184,02	13,68	3,189	3,434	220,49
304,55	534,33	540,42	806,83	98,45	7,83	185,52	14,00	3,229	3,477	219,65
308,05	484,91	542,82	801,65	98,11	7,87	186,68	14,31	3,267	3,518	218,90
314,75	466,80	547,41	792,49	97,50	8,06	188,90	14,89	3,339	3,596	217,57
318,12	477,29	549,72	788,24	97,21	8,11	189,87	15,18	3,375	3,635	216,95

\* valores retirados da ref. (Borka Jovanović et al., 2010)

Tabela 9 – Conjunto de parâmetros e observáveis físicos no modelo NJL com termos de superfície, mas sem shift

$m_{up}$ (MeV)	$m_s$ (MeV)	$m_s$ (MeV)	$\Lambda$ (MeV)	$f_k$ (MeV)	$m_{0\ up}$ (MeV)	$m_{0\ s}$ (MeV)	$G$ $\times 10^{-6}$	$g_{\pi qq}$	$g_{kqq}$	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ (MeV)	$\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}$ (MeV)
292,35	552,80	544,44	952,92	106,88	7,48	170,36	9,18	2,641	2,970	249,41	273,13
300,88	526,65	550,66	935,62	105,97	7,65	174,21	9,70	2,738	3,046	247,25	268,72
304,55	534,33	553,34	928,88	105,60	7,71	175,75	9,92	2,731	3,079	246,41	266,99
308,05	484,91	555,90	922,81	105,27	7,98	177,43	10,12	2,757	3,110	245,66	265,42
314,75	466,80	560,79	912,09	104,66	8,09	179,96	10,51	2,807	3,169	244,35	262,64
318,12	477,29	563,25	907,11	104,37	8,23	181,27	10,70	2,831	3,198	243,74	261,34