

Adriano Sergio Torres Figueiredo Silva

Rugosidade aplicada na análise de sistemas quânticos:
Um Estudo de Osciladores Harmônicos

Ouro Branco
2020

Universidade Federal de São João del-Rei
Departamento de Física e Matemática

Adriano Sergio Torres Figueiredo Silva

Rugosidade aplicada na análise de sistemas quânticos:
Um Estudo de Osciladores Harmônicos

Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira
Co-orientador: Prof. Dr. Mauricio Reis e Silva Junior.

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pelo aluno e orientada pelo Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira e Prof. Dr. Mauricio Reis e Silva Junior.

Ouro Branco
2020



Universidade Federal
de São João del-Rei

Programa de Pós-Graduação em Física



Ouro Branco, 05 de março de 2020

A Dissertação “Rugosidade aplicada na análise de sistemas quânticos: Um Estudo de Osciladores Harmônicos”, elaborada por **Adriano Sérgio Torres Figueiredo Silva** e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira (UFSJ)
Orientador

Prof. Dr. Antônio Francisco Neto (UFOP)

Prof. Dr. Humberto César Fernandes Lemos (UFSJ)

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586r Silva, Adriano Sergio Torres Figueiredo .
Rugosidade aplicada na análise de sistemas
quânticos: : Um Estudo de Osciladores Harmônicos /
Adriano Sergio Torres Figueiredo Silva ; orientador
Adélcio Carlos de Oliveira; coorientador Maurício
Reis e Silva Júnior. -- Ouro Branco, 2020.
90 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei,
2020.

1. Classicalidade de um sistema quântico. 2.
Rugosidade. 3. Análise gráfica. 4. Oscilador
Harmônico. I. Oliveira, Adélcio Carlos de , orient.
II. Reis e Silva Júnior, Maurício , co-orient. III.
Título.

*O grande inimigo do conhecimento não é a ignorância, é a ilusão
de ter conhecimento*
Stephen Hawking.

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira, pela atenção, dedicação, paciência, confiança e sensibilidade para me ajudar a transpor todos os obstáculos encontrados durante este período.

Aos professores do programa de Pós-Graduação em Física da UFSJ, com um agradecimento especial aos quais tive a oportunidade de ter aulas, pelos excelentes cursos que foram de grande importância para minha formação acadêmica e pelas diversas dúvidas esclarecidas.

Aos colegas e amigos que tive contato durante o mestrado dentre eles o Marlon, Wallace, Túlio, Felipe, Igor, aos amigos e conhecidos que reencontrei no mestrado Crislayne, Thiago, pelos estudos e conversas sobre diversos assuntos associados as disciplinas e tópicos gerais de Física. Sou grato a todos.

À minha família, em especial aos meus pais, Norton e Georjete e a meu irmão, Pedro, pelo constante apoio e incentivo desde o início dos meus estudos acadêmicos até os dias atuais. Por fim, agradeço à UFSJ pela oportunidade.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Oscilador Harmônico	3
2.1	Oscilador Clássico	4
2.2	Oscilador Quântico	6
3	Funções de distribuição de densidade de quase-probabilidade	9
3.1	Função de Wigner	9
3.2	Função de Husimi	16
4	Rugosidade	22
5	Estado Quântico x Estado Clássico	28
5.1	Estado Squeezed para OH	28
5.2	Estado de Gato para OH	37
5.3	Estado Térmico para OH	55
6	Conclusões	63
7	Anexos	64
	Bibliografia	72

Lista de Figuras

2.1	Dois osciladores lineares acoplados.	4
3.1	Distribuição da Função de Wigner para o estado coerente, variando o valor $n = 1, 3, 5$ que representa o autovalor do estado coerente desejados, de cima para baixo da esquerda para direita respectivamente.	11
3.2	Distribuição da Função de Wigner para o estados de Fock, variando o valor de $n = 1, 3, 5$ que desempenha o papel do número de estados desejados, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.	13
3.3	Distribuição da Função de Wigner para o estado térmico, variando n que desempenha o papel do valor esperado para o número partículas no estado térmico $n = 0.1, 0.3, 0.5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.	14
3.4	Distribuição da Função de Wigner para o estado coerente squeezed, variando o valor $n = 1, 3, 5$ que representa o valor para a amplitude do deslocamento de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.	15
3.5	Distribuição da Função de Husimi para estado coerente, variando n que representa o autovalor do estado coerente desejados com $n = 1, 3, 5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.	18
3.6	Distribuição da Função de Husimi para estados de Fock, variando n que corresponde ao número de estados desejados, com $n = 1, 3, 5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.	19

3.7	Distribuição da Função de Husimi para estados o estado térmico, variando n que corresponde ao número de estados desejados $n = 0.1, 0.3, 0.5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.	20
3.8	Distribuição da Função de Wigner para o estado coerente squeezed, variando n que corresponde ao valor para a amplitude do deslocamento, com $n = 1, 3, 5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.	21
4.1	Gráfico da W - Q para o estado coerente, variando α que atua como o autovalor do estado coerente, com $\alpha = 1, 3, 5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.	24
4.2	Gráfico da W - Q para os estados de Fock, variando n que atua como o número de estados desejados $n = 1, 3, 5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.	25
4.3	Gráfico da W - Q para o estado térmico, variando n que atua como o valor esperado para o número partículas no estado térmico $n=0.1, 0.3, 0.5$, respectivamente.	26
5.1	Gráfico da Rugosidade para o estado "squeezed", em função do parâmetro squeeze, ζ	29
5.2	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 1$	30
5.3	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 1$	31
5.4	Gráfico referente a W-Q para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 1$	31
5.5	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 1$	32
5.6	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 2$	32
5.7	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 2$	33
5.8	Gráfico referente a W-Q para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 2$	33
5.9	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 2$	34
5.10	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 3$	34

LISTA DE FIGURAS

5.11	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 3$	35
5.12	Gráfico referente a W-Q para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 3$	36
5.13	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 3$	36
5.14	Gráfico da Rugosidade para o estado de gato, em função de q_0 , onde a linha continua é referente ao estado ímpar e a linha tracejada referente ao estado par para o estado de gato	38
5.15	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 0,5$	39
5.16	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 0,5$	39
5.17	Gráfico referente a W-Q para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 0,5$	40
5.18	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 0,5$	40
5.19	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 1,0$	41
5.20	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 1,0$	41
5.21	Gráfico referente a W-Q para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 1,0$	42
5.22	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 1,0$	42
5.23	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 1,5$	43
5.24	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 1,5$	43
5.25	Gráfico referente a W-Q para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 1,5$	44
5.26	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 1,5$	44
5.27	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 2,0$	45
5.28	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 2,0$	46

LISTA DE FIGURAS

5.29	Gráfico referente a W-Q para o estado de gato ímpar, com $q_0=2,0$.	46
5.30	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado de gato ímpar, com $q_0=2,0$.	47
5.31	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato par, com $q_0=0,5$.	47
5.32	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato par, com $q_0=0,5$.	48
5.33	Gráfico referente a W-Q para o estado de gato par, com $q_0=0,5$.	48
5.34	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado de gato par, com $q_0=0,5$.	49
5.35	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato par, com $q_0=1,0$.	49
5.36	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato par, com $q_0=1,0$.	50
5.37	Gráfico referente a W-Q para o estado de gato par, com $q_0=1,0$.	50
5.38	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado de gato par, com $q_0=1,0$.	51
5.39	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato par, com $q_0=1,5$.	51
5.40	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato par, com $q_0=1,5$.	52
5.41	Gráfico referente a W-Q para o estado de gato par, com $q_0=1,5$.	52
5.42	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado de gato par, com $q_0=1,5$.	53
5.43	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato par, com $q_0=2,0$.	53
5.44	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato par, com $q_0=2,0$.	54
5.45	Gráfico referente a W-Q para o estado de gato par, com $q_0=2,0$.	54
5.46	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado de gato par, com $q_0=2,0$.	55
5.47	Gráfico da Rugosidade para o estado térmico, em função do número médio de fótons \bar{n} .	56
5.48	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado térmico com $\bar{n}=0,1$.	57
5.49	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado térmico com $\bar{n}=0,1$.	57

LISTA DE FIGURAS

5.50	Gráfico referente a W-Q para o estado térmico com $\bar{n}= 0,1$	58
5.51	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado térmico com $\bar{n}= 0,1$	58
5.52	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado térmico com $\bar{n}= 0,3$	59
5.53	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado térmico com $\bar{n}= 0,3$	59
5.54	Gráfico referente a W-Q para o estado térmico com $\bar{n}= 0,3$	60
5.55	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado térmico com $\bar{n}= 0,3$	60
5.56	Gráfico referente a Função de Husimi para o estado térmico com $\bar{n}= 0,5$	61
5.57	Gráfico referente a Função de Wigner para o estado térmico com $\bar{n}= 0,5$	61
5.58	Gráfico referente a W-Q para o estado térmico com $\bar{n}= 0,5$	62
5.59	Gráfico referente a $ W-Q $ para o estado térmico com $\bar{n}= 0,5$	62

Resumo

Este trabalho teve como objetivo estudar algumas das formas utilizadas para caracterizar a classicalidade de estados quânticos, com foco na Rugosidade (R), a mesma trata se de uma medida recentemente apresentado para o indicar quão quântico é um estado por meio de forma interessante com relação da Função de Wigner, e Husimi.

O estudo realizado baseou se na análise da Rugosidade graficamente e como reflexos de comportamentos quânticos na função de Wigner e consequentemente de R , assim foram estudados de forma exaustiva o estado de gato, térmico e squeezed. Foram observados graficamente os comportamentos para o estado de gato par quanto ímpar e as manifestações nas distribuições de quase-probabilidade que poderiam estar associados e assim representando a sobreposição dos estados e como se manifestaram a diferença entre os dois. No caso do comportamento do estado térmico foi observado a tendência de uma distribuição uniforme quando o estado tendia a condição de que $R \rightarrow 0$. Já para o estado squeezed foi observado os reflexos nos gráficos das funções W , Q , $W - Q$ e $|W - Q|$ e sua relação com $\Delta q \Delta p$. Através destas observações poderemos visualizar as potencialidades e vantagens do uso da Rugosidade na classificação do quão quântico é um estado.

Abstract

The classicality of a quantum system is an open question, although there are many advances on this subject. The state can be considered as classical and some quantum features still present, such as discreteness of the spectra. In this dissertation, the classicality of quantum states has been investigated graphically. The Roughness of a quantum state (R) has been used as the classicality indicator. It reaches its maximum value ($R=1$) when the state is maximally quantum, what happens for squeezed (with infinite squeeze) state and for the fock state (with infinite energy). The minimum ($R=0$) occurs when the state is maximally classical, it happens for nonpure states as thermal state with infinite temperature. These state and the cat states have been graphically examined to understand why they can be considered as classical or quantum.

Capítulo 1

Introdução

A determinação de que um sistema físico caracterizado o mesmo como um sistema no regime clássico ou quântico é uma das questões físicas mais intrigantes nas últimas décadas. Observando que a linha de fronteira entre teorias, de modo geral, compreende um problema em aberto embora tendo alguns avanços. Um destes problemas se trata da transição da Mecânica Quântica para a Mecânica Clássica, que compreende um tema para debate amplo, como observado em [3] e [4].

Para dizer que um dado sistema é clássico ou quântico, primeiramente devemos observar o sistema, portanto pelo que prevê a Mecânica Quântica, observar implica em medir e assim alguma interação ocorrerá e poderá ser sentida pelo sistema. Para concluirmos que o estado é ou não clássico, essa é uma decisão que depende do observável escolhido e do método de medida [5, 6], da precisão experimental [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] e se há ou não uma considerável interação com o meio aonde o sistema está disposto [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Atualmente é possível medir indiretamente a função de Wigner [21, 22, 23], que é na verdade uma forma de representação do estado quântico no espaço de fase [3, 24]. Assim, é útil definir uma forma de quantificar quão quântico é o estado.

Nesse panorama, existem diversos quantificadores de classicalidade de um estado, alguns se baseiam na distância do estado a ser estudado do estado coerente mais próximo [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]. Muito comum também é usar a distância do estado clássico Liouviano [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]. Outra medida muito conhecida é baseada na transformada de Fourier da função P de Glauber-Sudarshan P - [40, 41]. Dentre essas medidas, a que poderia ser indicada como a mais conhecida ou popular trata-se da Negatividade da Função de Wigner [42]. Embora não seja adequada para sistemas abertos,

a negatividade é usada como indicador de Caos em sistemas abertos [43], com bons resultados. Contudo, a Negatividade apesar dessa popularidade, apresenta dois inconvenientes, um vinculado a mesma não apresentar uma limitação quanto a seus valores e o outro por tratar todos os estados positivos como se fossem clássicos, o que não é uma verdade absoluta, como mostraremos na sequência da dissertação. e na referência [44].

Nessa dissertação investigaremos o que torna um estado mais ou menos quântico. Para tal utilizaremos a medida proposta por Lemos e colaboradores [44] a Rugosidade. Em todos os testes, a Rugosidade se mostrou melhor que as demais medidas estudadas, sendo limitada e fazendo um papel de entropia para estados térmicos. Recentemente ela também foi usada para definir recursos quânticos de uma forma mais abrangente [45] e [55]. A Rugosidade é de certa forma uma medida distância entre a Função de Wigner do estado Ψ e sua Distribuição de Husimi, respectivamente W_Ψ e Q_Ψ . Como veremos, quanto mais clássico é estado, mais próximas estão as funções de Wigner e de Husimi. E observar prováveis reflexos dessa classicalidade ou ausência da mesma nas distribuições quase-probabilísticas e na medida da Rugosidade.

Capítulo 2

Oscilador Harmônico

Como mencionado no livro de Feynman [46], nos mais diversos campos de estudo da física, os quais são geralmente divididos em assuntos como mecânica, eletricidade, ótica, termodinâmica, etc., estes temas são tratados em sequência. Mas por diversas vezes determinadas equações, as quais são apresentadas em diferentes assuntos, contem características parecidas, podendo tais fenômenos possuírem análogos nestas diferentes áreas de estudo.

Dentre estes diversos fenômenos, dos quais o seu estudo permite a extensão do conhecimento em outro campo, um em particular apresenta grande importância visto a ter análogos muito próximos em outros campos da física, sendo este modelo o do oscilador harmônico(OH). Como exemplo de representação para o mesmo, podemos utilizar a ideia de uma massa presa a uma corda, ou uma massa presa em uma mola, ou algum outro aparato mecânico, onde estudaremos uma determinada equação diferencial que.

Sendo que tal modelo por apresentar tamanha semelhança com diversos fenômenos, nos mais variados campos da física, como no modo de campo em uma cavidade óptica, as oscilações de uma carga no movimento em um circuito elétrico, incentivam um estudo mais detalhado do oscilador.

Como apresentado em [47] para um oscilador harmônico simples sua equação de movimento pode ser obtida por meio da substituição da força da lei de Hooke na equação newtoniana $F = ma$ assim obtendo 2.1.

$$F = -kx = \frac{md^2x}{dt^2}. \quad (2.1)$$

Na qual, para o sistema sem dissipação, temos como solução

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (2.2)$$

2.1. OSCILADOR CLÁSSICO

E com a definição de $\omega^2 = k/m$, podemos escrever a partir de 2.1 a 2.3

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 = 0. \quad (2.3)$$

Uma outra forma de representação tange a dinâmica hamiltoniana, a qual se baseia na representação da energia do sistema por meio da Hamiltoniano, H , sendo ele equivalente a somatória das energias cinéticas e potenciais do sistema, usualmente representadas por T e V , respectivamente como apresentado em 2.4,

$$H = T + V. \quad (2.4)$$

Sendo que um oscilador harmônico simples unidimensional pode ser descrito por 2.5, tomando $k = m\omega^2$,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (2.5)$$

Tomando este ponto de partida, a compreensão do comportamento de um conjunto de osciladores acoplados pode apresentar características pertinentes; visto que na natureza, um sistema não se encontra totalmente isolado de interações com suas vizinhanças.

Dessa forma baseando se no artigo de Magalhães [48], onde se apresenta um breve panorama sobre o estudo de osciladores acoplados analisando do ponto de vista clássico e quântico, o qual iremos pontuar a seguir.

2.1 Oscilador Clássico

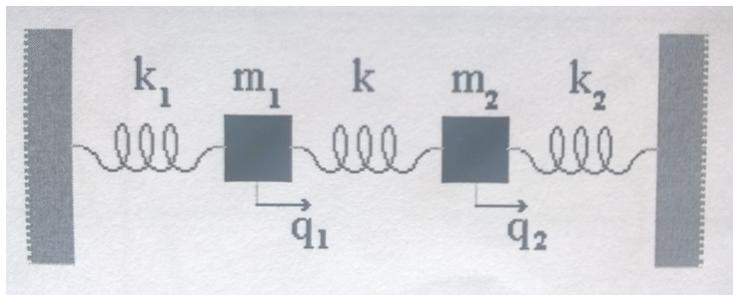


Figura 2.1: Dois osciladores lineares acoplados.

Analisando o primeiro sistema abordado em [48], o qual compreende um sistema composto por dois osciladores acoplados, como apresentado na Figura 2.1. Para este sistema sua hamiltoniana pode ser descrita pela equação 2.6,

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{k_1 q_1^2}{2} + \frac{k_2 q_2^2}{2} + \frac{k}{2}(q_2 - q_1)^2 \quad (2.6)$$

Se adotarmos o sistema apresentado na Figura 2.1, com os dois osciladores com massas m_i com suas respectivas constantes elásticas k_i e acoplados por uma mola com constante elástica k , definindo \mathbf{q}_i como o afastamento da posição atual e a posição de equilíbrio do oscilador, e \mathbf{p}_i o momento conjugado. Em conjunto com algumas substituições, podemos converter a equação 2.6 fique na forma da apresentada em 2.7,

$$H = \frac{1}{2}\omega_1(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(p_2^2 + q_2^2) + gq_1q_2. \quad (2.7)$$

Tais substituições são :

$$\alpha_i \equiv (m_i(k_i + k))^{\frac{1}{4}}, \omega_i \equiv \sqrt{\frac{k_i + k}{m_i}}, g \equiv -\frac{k}{\alpha_1\alpha_2}, q_i \equiv \alpha_i \mathbf{q}_i \text{ e } p_i \equiv \alpha^{-1} \mathbf{p}_i$$

Uma outra forma de apresentar essa hamiltoniana é por meio de um produto de matrizes, sendo esta estratégia interessante futuramente para reajustarmos a representação de \mathbf{q}_i e \mathbf{p}_i na forma de seções no espaço de fase. A hamiltoniana destes dois osciladores acoplados, pode ser reescrita como:

$$H = x^T \cdot H \cdot x, \quad (2.8)$$

no qual

$$\mathbf{H} \equiv \begin{pmatrix} \omega_1 & g & 0 & 0 \\ g & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^T \equiv (q_1 \quad q_2 \quad p_1 \quad p_2).$$

Sendo que as devidas mudanças podemos adequar a observação dos parâmetros \mathbf{q}_i e \mathbf{p}_i por meio dos seções no espaço de fase. E tal processo poderia ser utilizado para um conjunto de N osciladores acoplados. Sendo a hamiltoniana do mesmo para N osciladores acoplados:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_{i,i}(p_i^2 + q_i^2) + \sum_{i=2}^N \omega_{1,i}(p_i^2 + q_i^2). \quad (2.9)$$

2.2 Oscilador Quântico

Tomando como objetivo o estudo dos osciladores harmônicos é observado que em determinados casos os problemas quânticos apresentam diversas semelhanças com a abordagem clássica. Visto a própria maneira que os sistemas são estudados na quântica e o caráter probabilístico presente nestes, o formalismo utilizado se difere pelo uso de vetores de estado, estes carregando as características da dinâmica do sistema e operadores que atuam na observação dos valores esperados das grandezas referentes ao sistema estudado e por meio destes podemos escrever a função de onda ou função de estado para o sistema, a qual tem papel bem parecido com a função posição na mecânica clássica.

Para o caso de oscilador harmônico, baseando se em [49], apresentado na 2.5 sua hamiltoniana é composta pelo somatória de duas variáveis, podemos apresentar sua equação de Schrödinger, a qual desempenha papel semelhante às leis de Newton para mecânica clássica contendo a evolução temporal do sistema, dependente do tempo por meio dos seus autovalores permitidos para energia, E , como apresentado na equação 2.10,

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (2.10)$$

Podemos apresentar sua hamiltoniana por meio dos operadores aniquilação e criação, respectivamente a^\dagger e a , onde

$$a = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \quad , \quad a^\dagger = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{i}{m\omega}p\right) \quad (2.11)$$

onde

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar} (-i[x, p] + i[p, x]) = 1, \quad (2.12)$$

e a partir dessa podemos apresentar definição do operador número, N , o qual é $N = a^\dagger a$ apresentado H pela equação 2.13,

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right) \quad (2.13)$$

como H é uma função afim de N , podemos diagonalizar simultaneamente N e H , assim definindo que as energias para o autoket N são representadas pelos autovalores de n temos,

$$N |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.14)$$

E por meio desta representação apresentada em 2.14 podemos descrever H nessa base, quanto os autovalores para energia E permitidos assim,

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle \quad , \quad E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega. \quad (2.15)$$

Uma propriedade relevante para os operadores a e a^\dagger viabiliza a escrita da energia em função da menor energia assumida para o sistema, onde ao se aplicar o operador aniquilação, a , em um autoket diminuiríamos em uma unidade de energia de $\hbar\omega$, e no caso de aplicar o operador criação, a^\dagger , iríamos aumentar em uma unidade de energia. Assim temos

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad , \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.16)$$

a partir destas relações podemos escrever os autoestados, a partir do estado de menor energia, também conhecido com estado fundamental, representado por $|0\rangle$, onde qualquer estado pode ser escrito por meio da aplicação do operador criação na seguinte relação,

$$|n\rangle = [\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}] |0\rangle. \quad (2.17)$$

Tomando essas observações, podemos representar OH por meio da combinação dos valores de energia para os autoestados permitidos para o sistema. Assim essa combinação viria por meio da sobreposição dos autovalores de energia, no caso de um sistema com dois níveis de energia permitidos poderíamos representar o estado como descrito em 2.18

$$|\alpha\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle \quad (2.18)$$

onde c_0 e c_1 seriam constantes de ajuste para a função.

No caso de um oscilador acoplado a outros N-1 osciladores sua hamiltoniana pode ser descrita por meio da equação 2.19,

$$H = \sum_{i=1}^N g_{i,i} a_i^\dagger a_i + \sum_{i=2}^N g_{1,i} (a_1^\dagger a_i + a_i^\dagger a_1) \quad (2.19)$$

Nessa abordagem o operador hamiltoniano é chamado de aproximação de onda girante, rotating wave approximation (RWA), que é apresentada por Magalhães et.al em [48].

2.2. OSCILADOR QUÂNTICO

Por meio da perspectiva apresentada no postulado da projeção o qual implica que a Mecânica Quântica não é tão determinística quanto a Mecânica Clássica apresentando um caráter probabilístico, e fazendo uso de densidades de probabilidade ou de quase-probabilidade para representar os estados/sistemas e por meio delas poder acessar informações sobre o comportamento dos mesmos.

Para descrever tais distribuições são utilizadas funções de distribuição de probabilidade em conjunto com estados de fase para representar o comportamento do sistema.

No decorrer do trabalho foi utilizada como a base de representação do estado a $\{|n\rangle\}$, dessa forma durante os demais desenvolvimentos realizados e quando for necessário o uso da Hamiltoniana, \hat{H} a mesma fora definida em 2.17. Assim

$$\rho_T = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Z} \quad (2.20)$$

Capítulo 3

Funções de distribuição de densidade de quase-probabilidade

As funções de distribuição de densidade de probabilidade compreendem uma das ferramentas/recursos utilizados em espaço de fase para representar certas propriedades em sistemas quânticos. O uso das densidades de probabilidade em conjunto com os operadores viabiliza o acesso a informações sobre o comportamento das grandezas de um sistema, como a informação do valor esperado para a posição de uma massa em um sistema massa mola.

Estes tipos de objetos matemáticos, as distribuições de quase-probabilísticas (Quasiprobability distribution), são bem similares às distribuições de probabilidade, mas não obedecem determinados postulados sobre as características de uma distribuição de probabilidade, apresentam um propriedade muito interessante e relevante para o estudo MQ: a capacidade de carregar os valores esperados com os devidas correções para as grandezas do sistema estudado. O uso da representação dessas grandezas por meios de diagramas de fase com o uso das funções de Wigner e Husimi para carregar as informações desses sistemas e por com o uso das mesmas podem acessar informações das mais diversas características do objeto de estudo.

3.1 Função de Wigner

A distribuição quase-probabilística de Wigner, também conhecida como Função de Wigner, foi apresentada por Eugene Wigner em 1932, tendo como objetivo fazer uma vinculação da função de onda obtida por meio da equação de Schrödinger com a distribuição de probabilidade no espaço de fase.

3.1. FUNÇÃO DE WIGNER

É a única que satisfaz todas as propriedades de uma densidade de probabilidade, mas que pode ser apresentar valores negativos para alguns valores de (x,p) , sendo que este comportamento não apresenta análogo em modelos clássicos o que em muitas situações são associadas a anomalias que geralmente são nomeadas como interferências quânticas, o que podem ser associado a um sistema com estados não puros.

A distribuição de Wigner $W(x, p)$ para um estado puro, é definida como

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(x + \frac{y}{2}\right) \psi\left(x - \frac{y}{2}\right) e^{\frac{2ipy}{\hbar}} dy, \quad (3.1)$$

onde ψ e ψ^* representam a função de onda e o seu complexo conjugado respectivamente.

Essa mesma pode ser apresentada por meio de matrizes densidade, mesmo para estados misturados,

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle x + \frac{y}{2} \left| \rho \right| x - \frac{y}{2} \right\rangle e^{\frac{2ipy}{\hbar}} dy, \quad (3.2)$$

onde ρ representa a distribuição de probabilidade, a qual pode ser relacionada com $|\psi(x)|^2$ para um estado puro.

Tomando como base a interpretação estatística de Bohr para função de onda, apresentada em [50], temos $|\psi(x, t)|^2$ como a densidade para encontrar a partícula em x no tempo t , para o caso de uma partícula que se movimenta em uma única direção,

$$\int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx, \quad (3.3)$$

para descrever a probabilidade de encontrar esta partícula entre a e b .

Nas figuras a seguir estão apresentados alguns exemplos das distribuições de quase-probabilidade da função de Wigner, sendo estas geradas por meio da utilização programa `spyder` com o pacote `qutip`.

A primeira é referente ao estado coerente com $N = 60$, onde N é o número de estados de Fock presentes no espaço de Hilbert, com valores de n diferentes, onde n representa o autovalor do estado coerente, como disposto nos gráficos da figura 3.1,

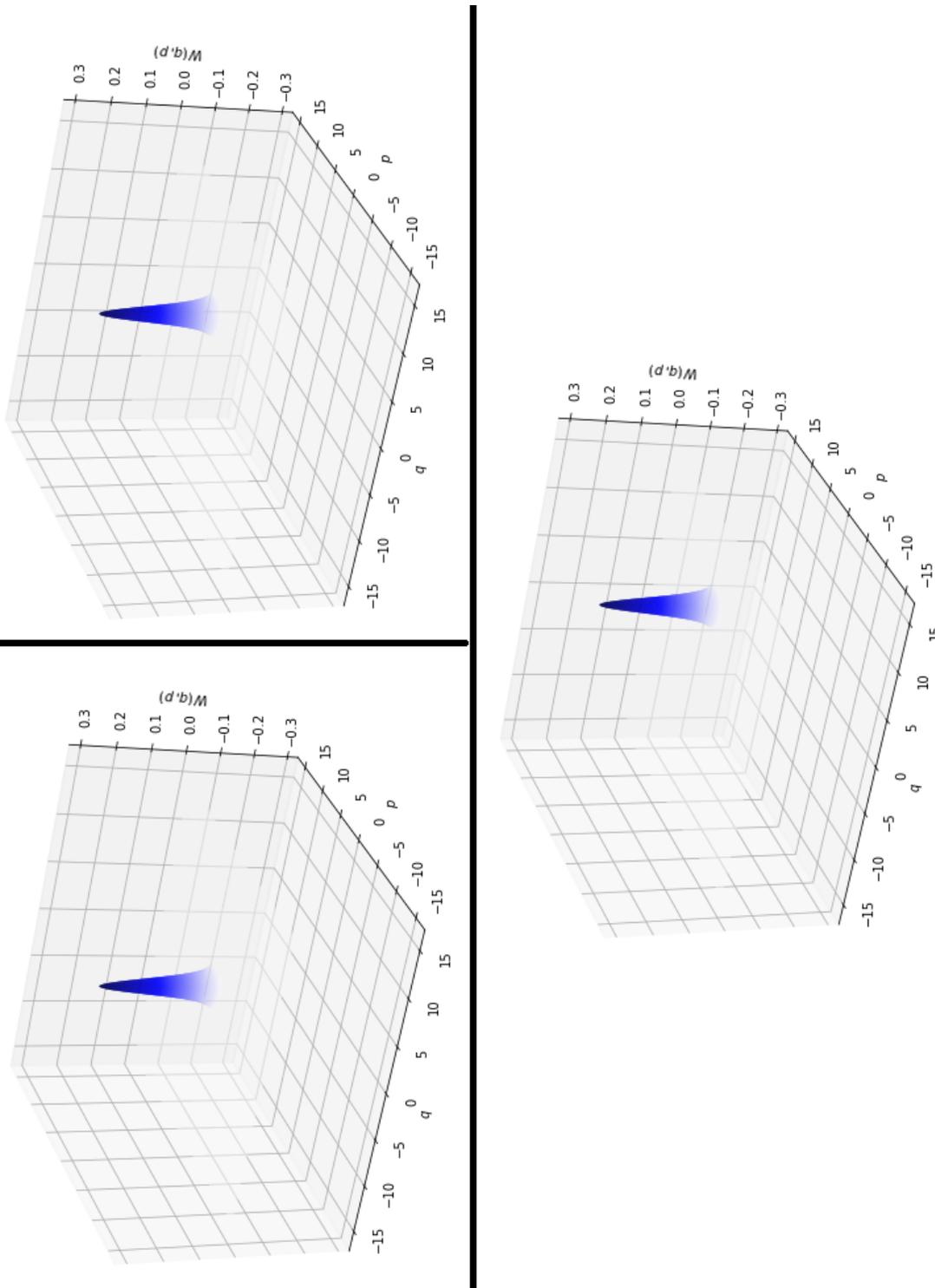


Figura 3.1: Distribuição da Função de Wigner para o estado coerente, variando o valor $n = 1, 3, 5$ que representa o autovalor do estado coerente desejados, de cima para baixo da esquerda para direita respectivamente.

3.1. FUNÇÃO DE WIGNER

No caso dos estados de Fock apresentados no segundo conjunto de gráficos, a distribuição da função de Wigner apresenta regiões negativas como podem ser vistas na figura 3.2.

No terceiro conjunto de gráficos são apresentadas as distribuições referentes ao estado térmico, onde foi utilizado o mesmo número de estados da base do espaço de Hilbert, variando n que representa o número de partícula no estado térmico, sendo apresentados a seguir na figura 3.3.

No quarto conjunto de gráficos são apresentadas as distribuições referentes ao estado estado coerente "squeezed", onde foi utilizado o mesmo número de estados da base do espaço de Hilbert, mantendo o parâmetro de squeeze fixo e variando o valor para a amplitude do deslocamento no com $n=1, 3, 5$, sendo apresentados a seguir na figura 3.4.

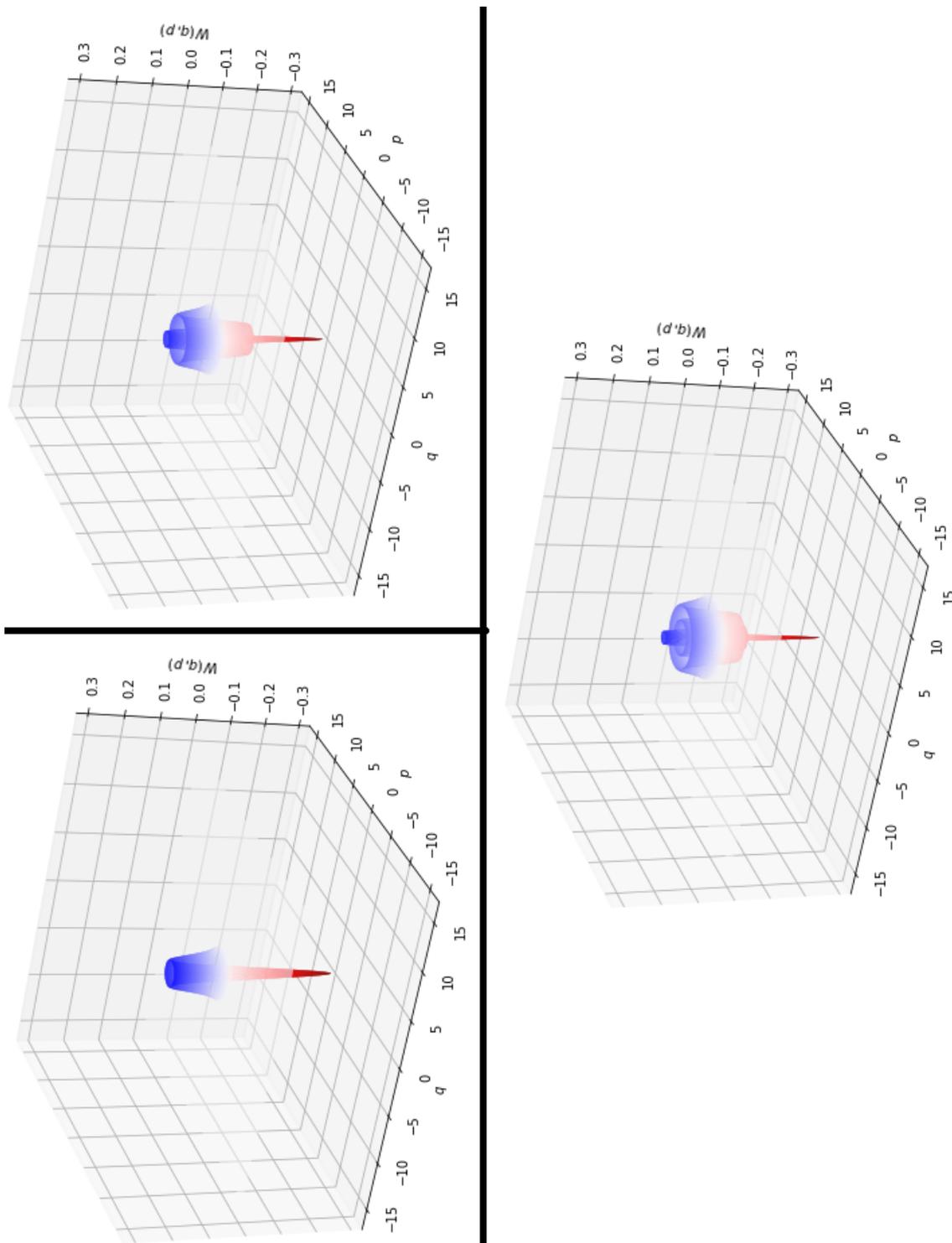


Figura 3.2: Distribuição da Função de Wigner para o estados de Fock, variando o valor de $n = 1, 3, 5$ que desempenha o papel do número de estados desejados, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.

3.1. FUNÇÃO DE WIGNER

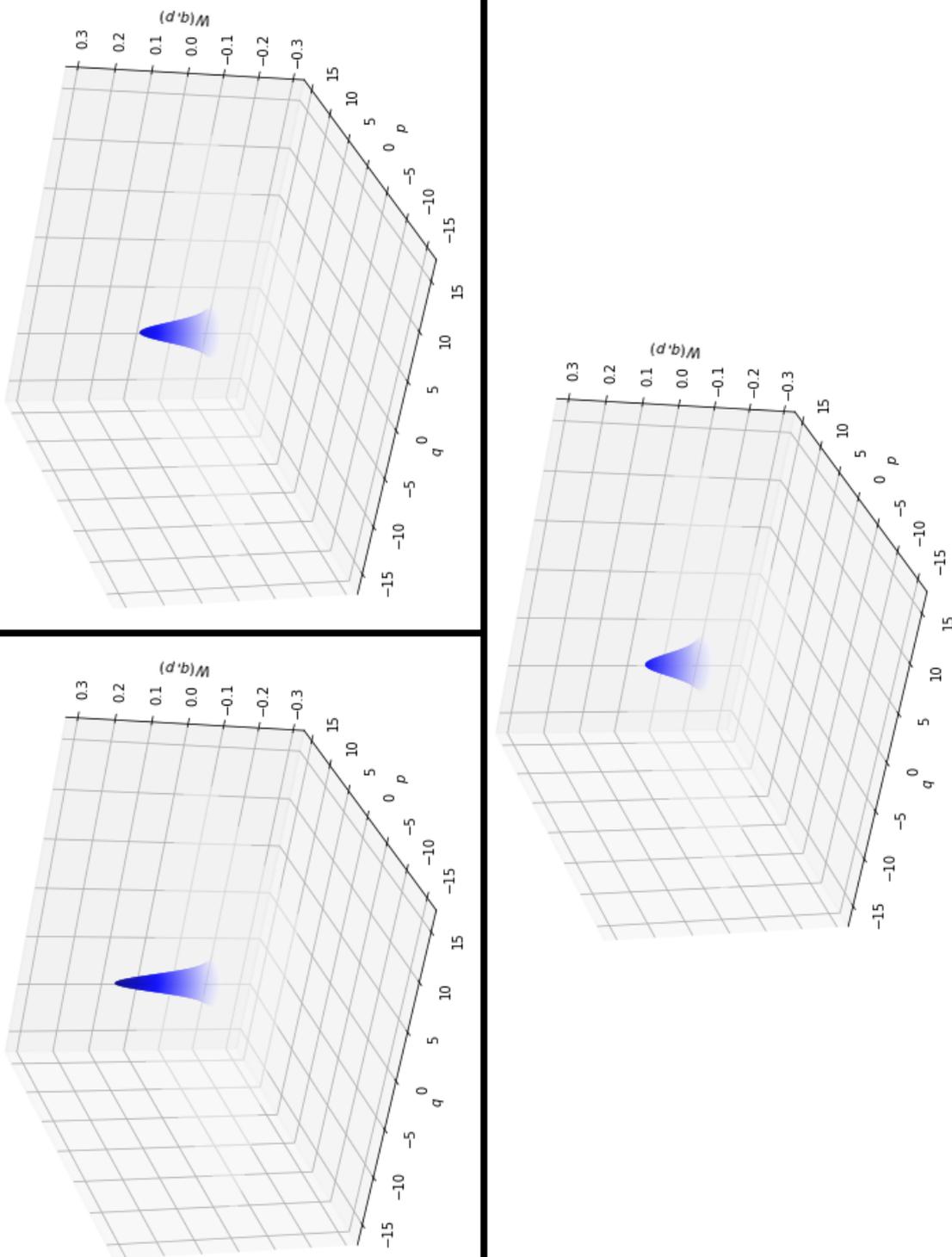


Figura 3.3: Distribuição da Função de Wigner para o estado térmico, variando n que desempenha o papel do valor esperado para o número de partículas no estado térmico $n = 0.1, 0.3, 0.5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.

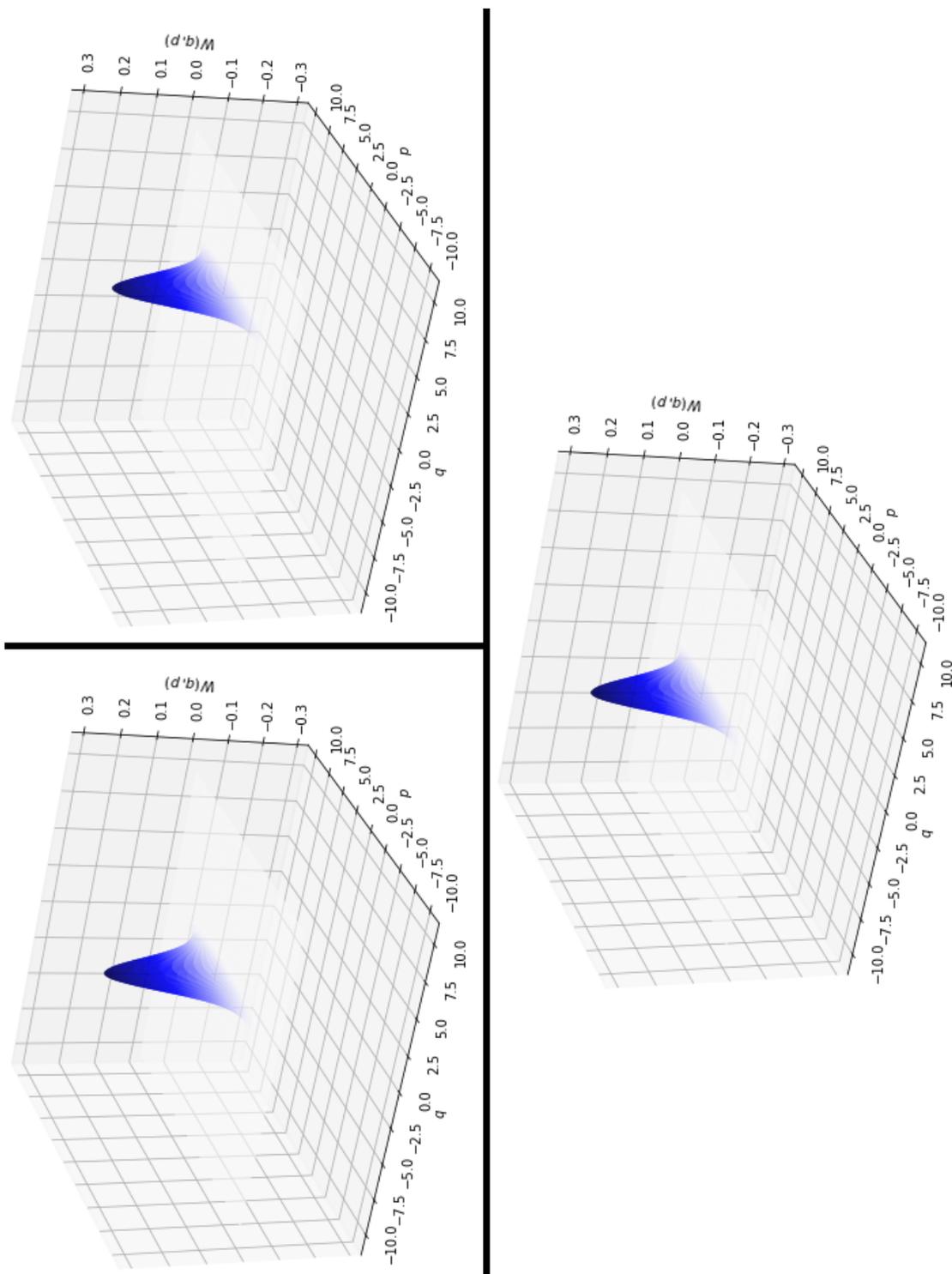


Figura 3.4: Distribuição da Função de Wigner para o estado coerente squeezed, variando o valor $n = 1, 3, 5$ que representa o valor para a amplitude do deslocamento de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.

3.2 Função de Husimi

A função de Husimi, introduzida em 1940 por Kôdi Husimi, compreende um tipo de função quasi-probabilística que tem como uma de suas aplicações representar a distribuição no espaço de fase de um estado estado quântico. A mesma, também nomeada como Q-function para a óptica quântica, descrita em [51] pela equação 3.4,

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle, \quad (3.4)$$

onde seria associado ao traço da matriz densidade, nesse caso para o estado coerente, $|\alpha\rangle$. Esta distribuição difere da função de Wigner pois não assume valores negativos para valores esperados da densidade de probabilidade para o estado coerente, que limita a quantidade de informação contida na função.

A função de Husimi é uma quase densidade de probabilidade clássica que tem como propriedade ser positiva e definida. De fato, podemos definir a função de Husimi para um estado puro como

$$Q(|\Phi\rangle) = |\langle \Phi | \alpha \rangle|^2, \quad (3.5)$$

ou para o caso geral

$$Q(\rho) = \text{Tr } \rho |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (3.6)$$

A função de Husimi é positiva, mas isso não implica que ela é exatamente clássica, embora possa ser recuperada parcialmente via estados "clássicos" [1] e o centro da distribuição coincide com a trajetória clássica de igual energia [2], fenômeno conhecido como Scars. A inclusão de um ambiente, bem como de incertezas experimentais pode fazer com que a distribuição de Wigner torne menos quântica [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. O estado clássico que é obtido via inclusão de um ambiente é um estado clássico Liouvilliano [52, 53, 54, 16], i.e. uma distribuição clássica. Trajetórias clássicas são recuperadas via monitoramento contínuo [9].

Assim, a distribuição de Husimi é a distribuição quântica que possui menos propriedades quânticas, e que por ser positiva, poderia representar uma dinâmica clássica.

CAPÍTULO 3. FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO DE DENSIDADE DE QUASE-PROBABILIDADE

Entre essas diferenças da função de Husimi, a mesma possibilita recuperar uma menor quantidade de informação de um sistema, como visto que ela permite recuperar $\langle p \rangle$ e $\langle q \rangle$ para o OH, mas não recupera $\langle p^2 \rangle$, $\langle q^2 \rangle$ e superiores, diferente da função de Wigner. Sendo que a função de Husimi pode ser 'obtida' a partir da função de Wigner, onde a relação existente entre elas é apresentada pela seguinte relação,

$$Q(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int W(\beta) \exp^{-2|\alpha^2 - \beta^2|} d^2\beta. \quad (3.7)$$

Observando essas características, a função de Husimi atua de certa maneira como uma função média para a distribuição de Wigner, ao suavizar a distribuição de densidade de quase-probabilidade, mas não recupera as densidades marginais ou seja $\int Q dp \neq \|\Psi(p)\|^2$, apresentando apenas valores positivos para a densidade de probabilidade. Sendo interessante ressaltar que a função de Husimi é normalizada para 1, sendo não negativa por definição, sendo assim,

$$\int Q(\alpha) d\alpha^2 = 1, \quad 0 \leq Q(\alpha) \leq \frac{1}{\pi}. \quad (3.8)$$

Nas figuras presentes nesta seção estão apresentadas alguns exemplos das distribuições de quase-probabilidade da função de Husimi.

No primeiro conjunto gráficos para função de Husimi, o primeiro conjunto gráficos a seguir são referentes ao estado coerente com $N=60$, onde N é o número de estados de Fock presentes no espaço de Hilbert, com valores de n diferentes, onde n representa o autovalor do estado coerente, como disposto nos gráficos da figura 3.5.

No segundo conjunto de gráficos para os estados de Fock, a distribuição da função de Husimi apresenta apenas regiões positivas diferindo da distribuição de Wigner, como apresentados nos gráficos da figura 3.6.

No terceiro conjunto de gráficos são apresentadas as distribuições referentes ao estado térmico, onde foi utilizado o mesmo número de estados da base do espaço de Hilbert, variando n que representa o número de partícula no estado térmico, sendo apresentados a seguir na figura 3.7.

No quarto conjunto de gráficos são apresentadas as distribuições referentes ao estado estado coerente "squeezed", onde foi utilizado o mesmo número de estados da base do espaço de Hilbert, mantendo o parâmetro de squeeze fixo e variando o valor para a amplitude do deslocamento no com $n=1, 3, 5$, sendo apresentados a seguir na figura 3.8.

3.2. FUNÇÃO DE HUSIMI

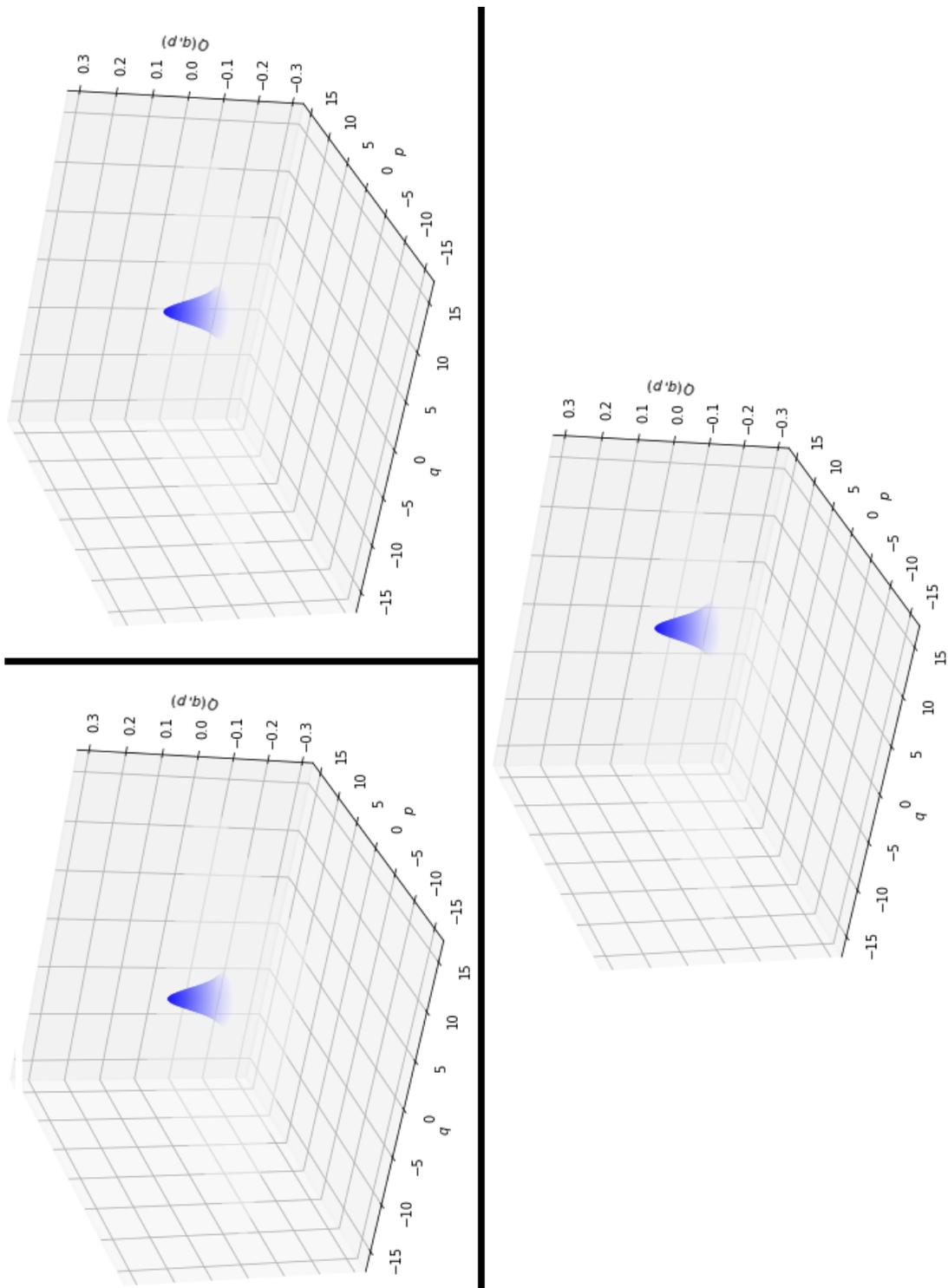


Figura 3.5: Distribuição da Função de Husimi para estado coerente, variando n que representa o autovalor do estado coerente desejados com $n = 1, 3, 5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.

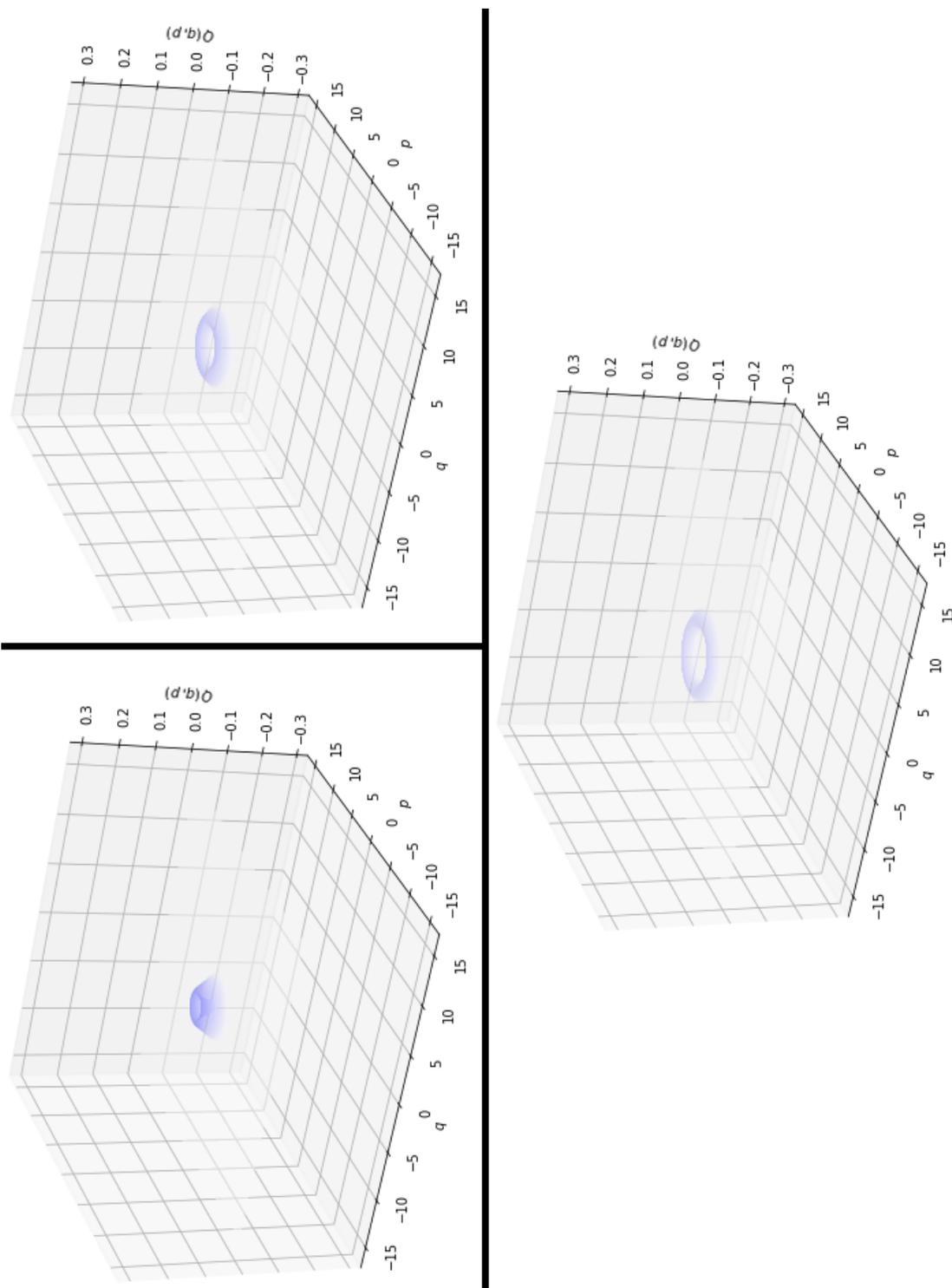


Figura 3.6: Distribuição da Função de Husimi para estados de Fock, variando n que corresponde ao número de estados desejados, com $n = 1, 3, 5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.

3.2. FUNÇÃO DE HUSIMI

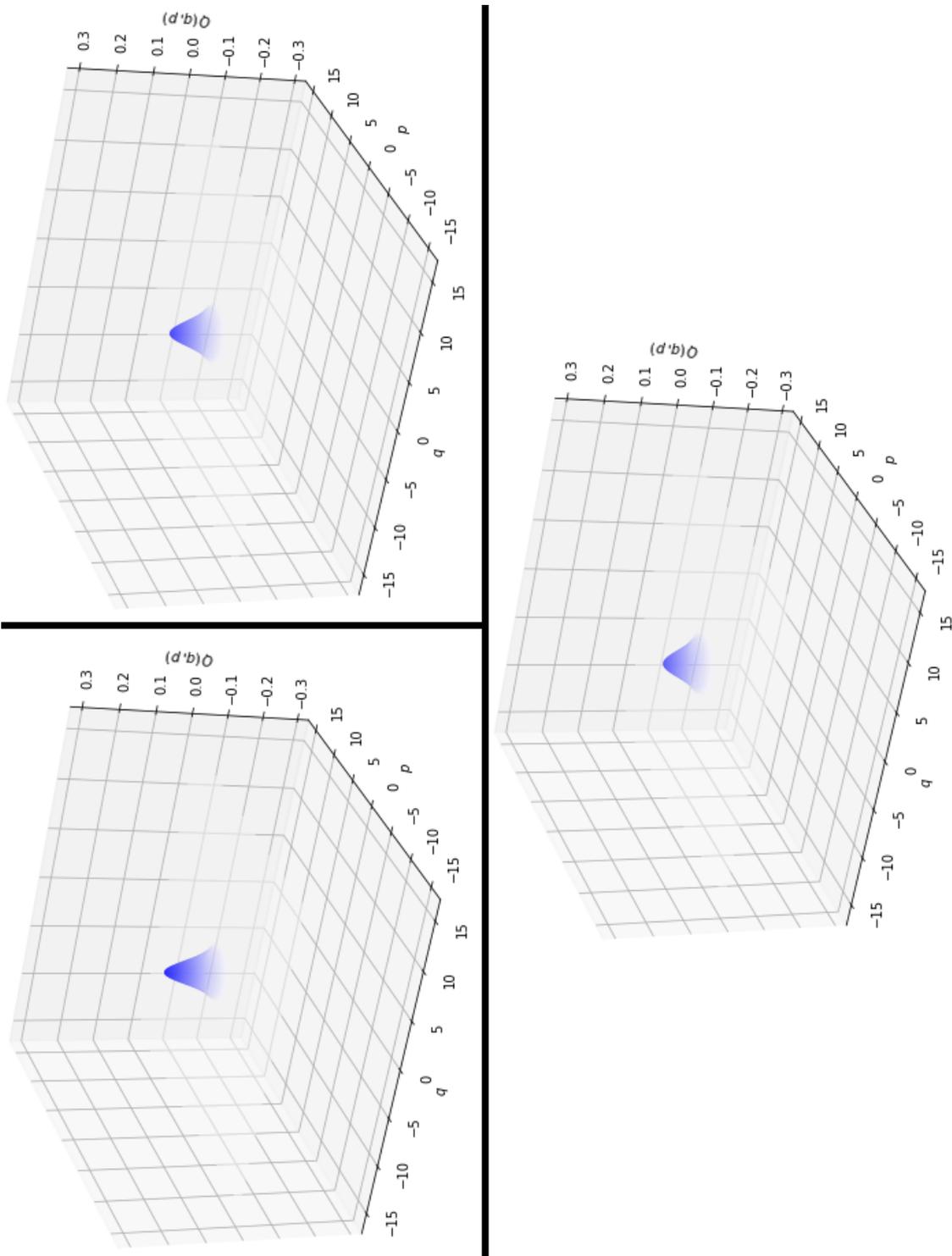


Figura 3.7: Distribuição da Função de Husimi para estados o estado térmico, variando n que corresponde ao número de estados desejados $n = 0.1, 0.3, 0.5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.

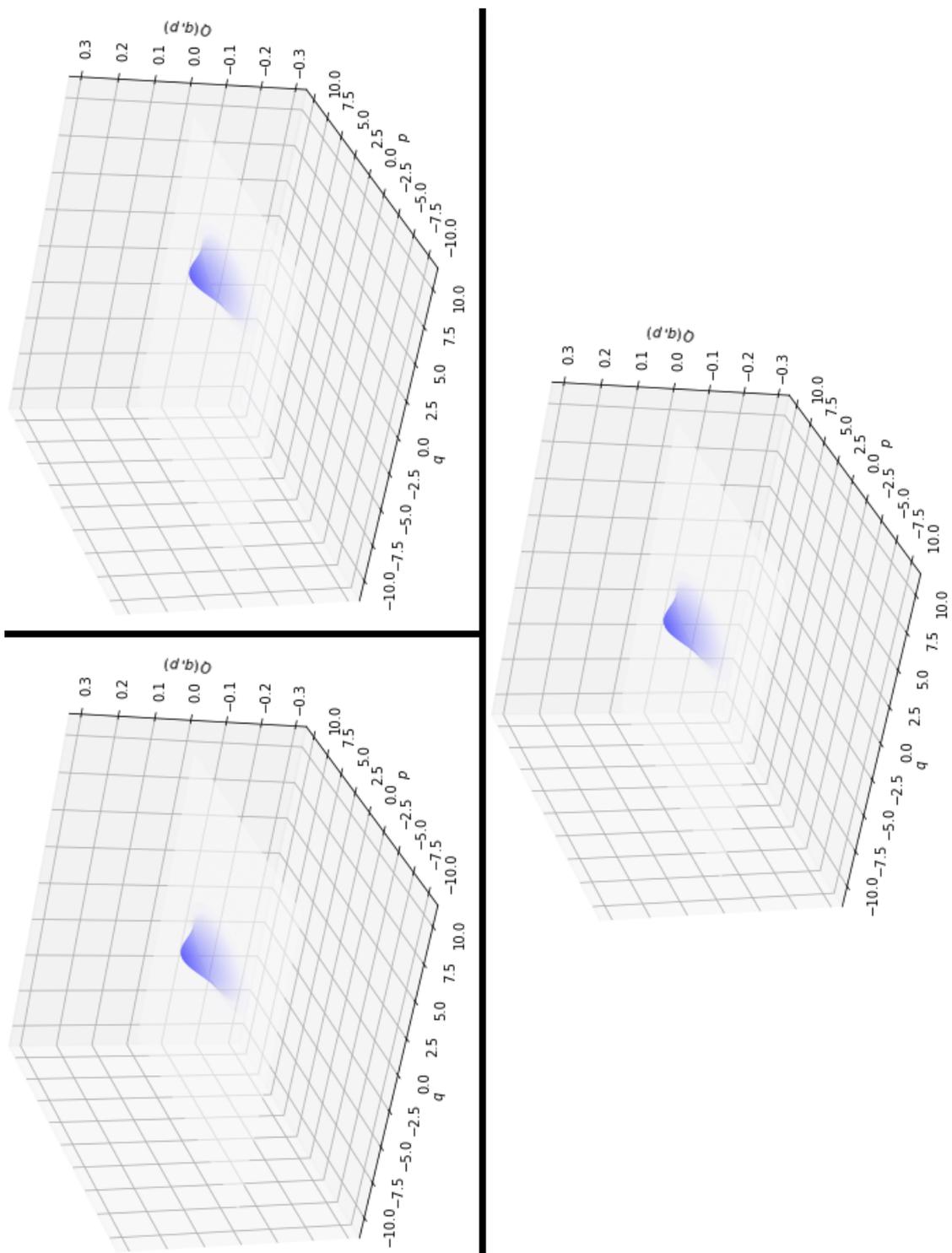


Figura 3.8: Distribuição da Função de Wigner para o estado coerente squeezed, variando n que corresponde ao valor para a amplitude do deslocamento, com $n = 1, 3, 5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.

Capítulo 4

Rugosidade

Observamos certas características ou comportamentos peculiares no mundo quântico, os quais não encontramos análogos na física clássica. Analisando esse comportamento probabilístico, que advém desde a interpretação de Bohr da função de onda, vimos que podemos utilizar as funções quasi-probabilísticas, como a função de Wigner, que pode conter regiões com densidade de probabilidade negativa, diferindo da função de Husimi que apresenta densidades estritamente positivas, sendo que a função de Wigner nos permite acessar um conjunto mais amplo de informações que a função de Husimi relacionados ao sistema nas representações em espaços de fase.

A partir dessas diferenças existentes entre essas duas funções, recentemente foi apresentada uma medida para indicar o quão quântico um sistema é observando nessas funções de Wigner e Husimi, a qual foi nomeada como Rugosidade. A medida nomeada de Rugosidade apresentada em [44], tem certa inspiração, como mencionado, na ideia de rugosidade padrão a qual atua como indicador do quão irregular é o relevo de uma superfície.

Partindo desta ideia, o presente artigo discute qual seria a relação para utilizar tal medida como indicador do quanto o sistema seria não clássico por meio das funções de Wigner e Husimi, onde quanto maior o afastamento existente entre a forma da função de Wigner e a função de Husimi a tendência de que o sistema fosse mais não-clássico nessa região em comparação a uma região de menor afastamento.

A Rugosidade é definida como

$$R(\Psi) = \sqrt{2\pi} \|W_\Psi - Q_\Psi\| = \tag{4.1}$$

$$= \left[2\pi \int_{R^2} dq dp |W_\Psi(q, p) - Q_\Psi(q, p)|^2 \right]^{1/2}. \tag{4.2}$$

Para se observar o comportamento dessa quantidade utilizaremos as distribuições presentes na função de Wigner e Husimi para um sistema e fizemos a diferença entre elas, no caso W-Q e geramos os gráficos referentes a essas distribuições.

Os gráficos presentes na figura 4.1 são referentes ao estado coerente, onde pode ser observado que as distribuições são iguais quanto sua forma, mas diferem quanto ao ponto central desta distribuição de probabilidade que está associado ao autovalor para o estado em questão.

Os gráficos presentes na figura 4.2 são referentes aos estados de Fock, nos quais essa diferença, W-Q, salienta de forma mais explícita as regiões negativa de distribuição de probabilidade, as quais são presentes na função de Wigner.

Quanto aos gráficos referentes a diferença W-Q para o estado térmico, apresentados em 4.3, é possível observar que tais distribuições tendem a ficar menores que as distribuições oriundas das funções de Wigner e Husimi separadamente.

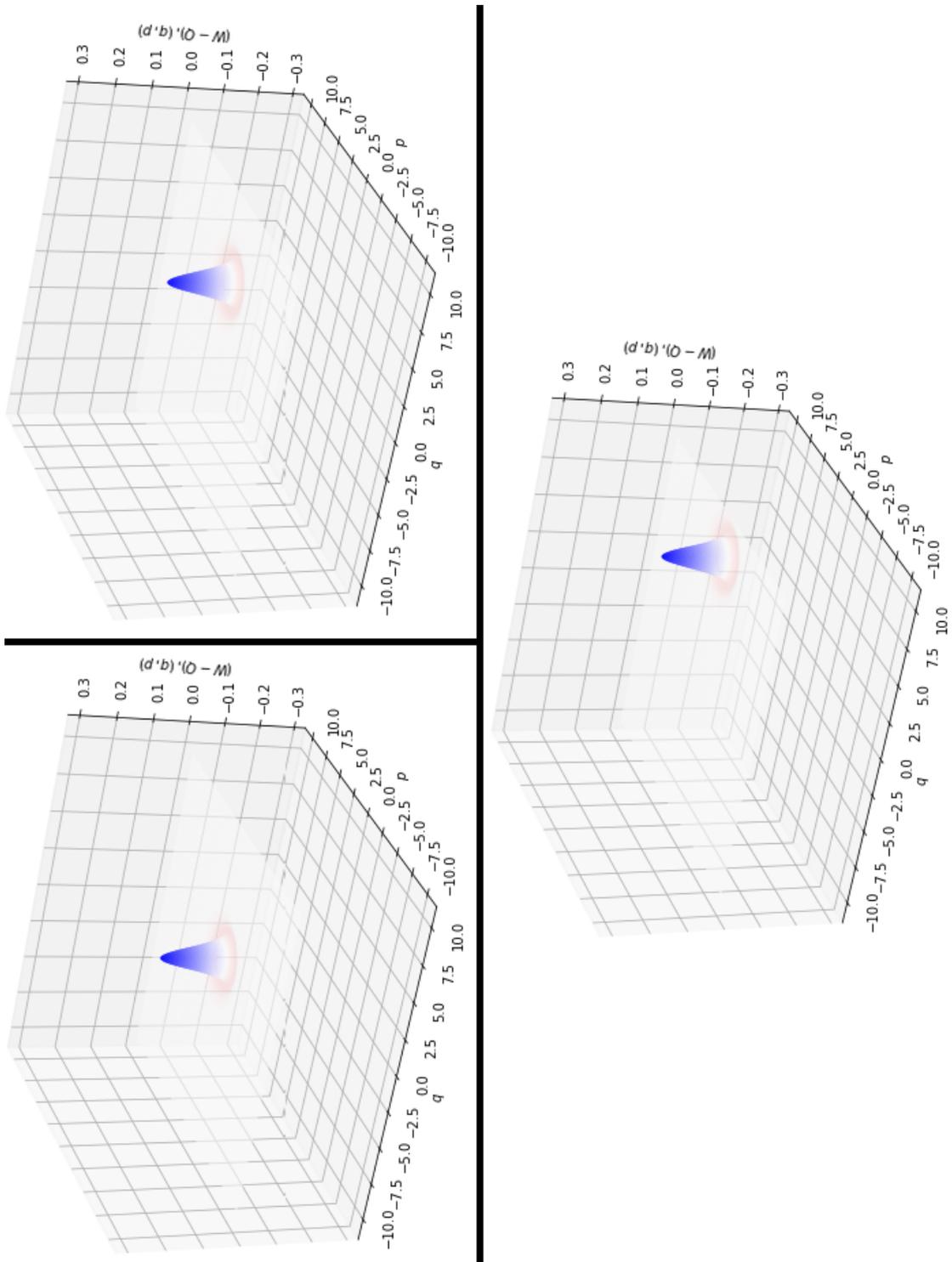


Figura 4.1: Gráfico da $W - Q$ para o estado coerente, variando α que atua como o autovalor do estado coerente, com $\alpha = 1, 3, 5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.

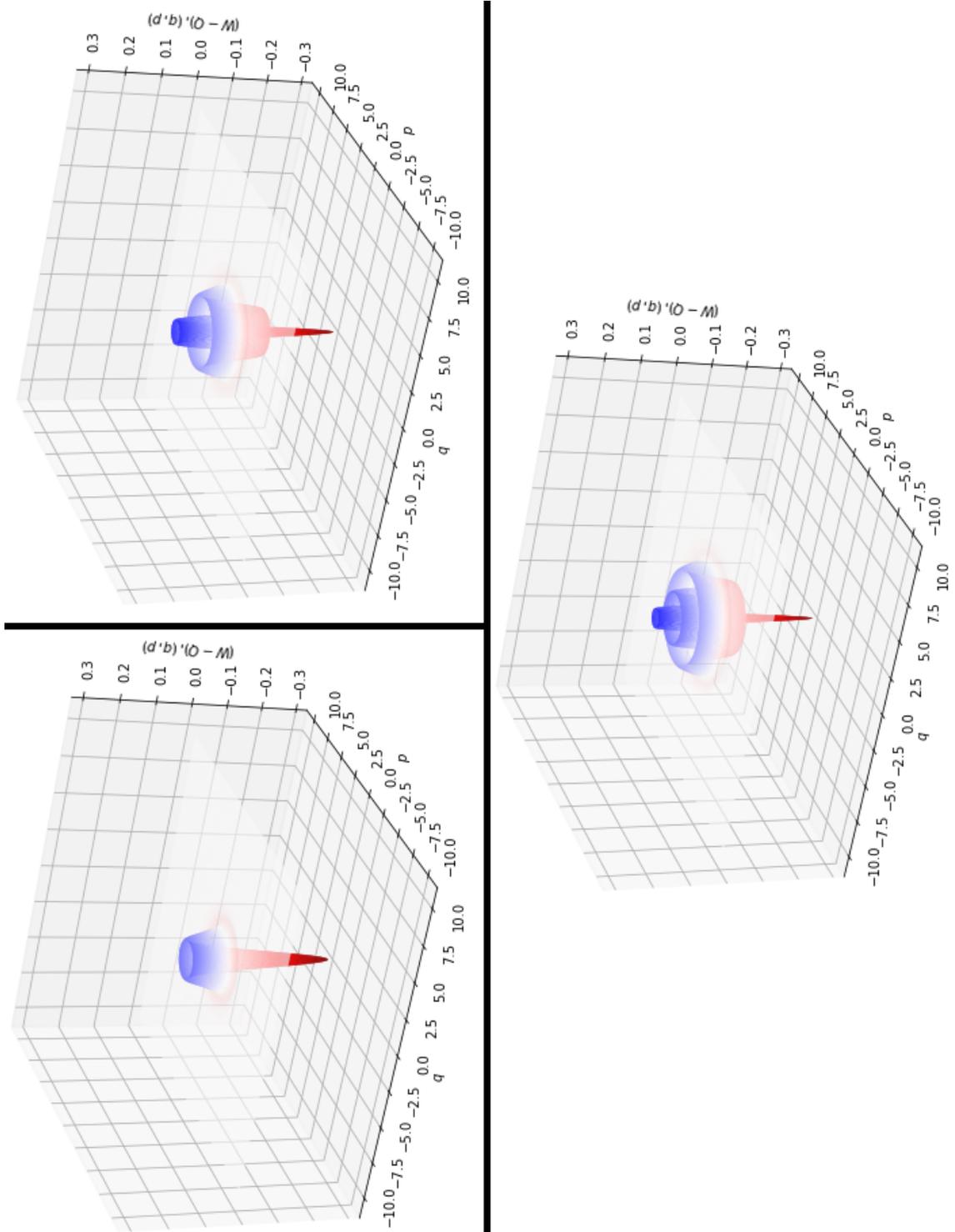


Figura 4.2: Gráfico da $W - Q$ para os estados de Fock, variando n que atua como o número de estados desejados $n = 1, 3, 5$, de cima para baixo, da esquerda para direita respectivamente.

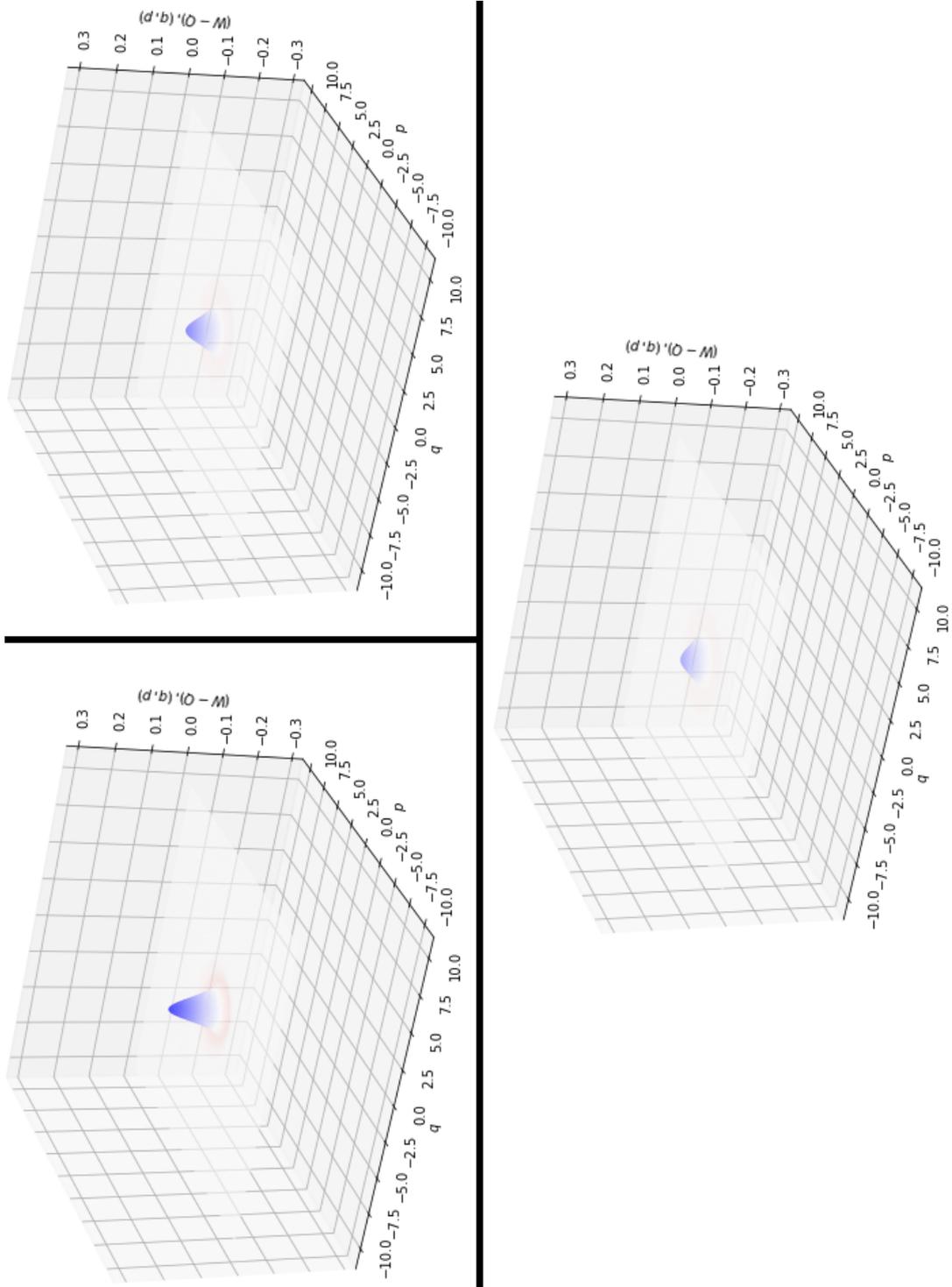


Figura 4.3: Gráfico da $W - Q$ para o estado térmico, variando n que atua como o valor esperado para o número partículas no estado térmico $n=0.1, 0.3, 0.5$, respectivamente.

CAPÍTULO 4. RUGOSIDADE

Como disposto nos trabalhos referentes a Rugosidade, sua ideia é de salientar de certa forma quantificado o quão quântico um sistema é ou que este apresenta comportamentos não-clássicos, tais indícios observados pela simples diferença entre W-Q de certa forma corroboram com o aspecto teórico apresentado.

Capítulo 5

Estado Quântico x Estado Clássico

Com a observação de possibilidades do uso da rugosidade como apresentado em [44], onde ao serem comparados os resultados obtidos por meio da Concorrência como medida do emaranhamento com resultados para aplicação da rugosidade, se mostraram interessantes ao realizar a comparação por essa nova medida apresentaram uma viabilidade interessante quanto a sua utilização como indicador de não classicalidade.

O que se propõe a ser desenvolvido tem como base o estudo dos gráficos referentes as funções de Wigner e Husimi e em conjunto com a rugosidade, com objetivo analisar como alguns efeitos quânticos podem refletir na medida da rugosidade e assim observar seus reflexos na não-classicalidade de um sistema, nesse caso baseando no comportamento do oscilador harmônico.

Dentre os efeitos quânticos a serem observados estão: a não localidade quântica, analisando se a mesma produziria algum reflexo nas distribuições de quase-probabilidade e por consequência no valor observado para a Rugosidade; a negatividade, para a função de Wigner e seu reflexo na medida da rugosidade visto em alguns casos a não existência de uma densidade de probabilidade no espaço de fase; a inexistência de trajetória e seu reflexo na rugosidade quando analisando o estado squeezed.

5.1 Estado Squeezed para OH

Com intuito de observar possíveis reflexos nas distribuições quase-probabilísticas em determinados estados tomou se como primeiro objeto de estudo o estado

squeezed, o mesmo é um estado quântico geralmente utilizado para descrever para analisar dois observáveis que não comutativas. No caso a seguir, fez se uso do estudo deste tipo de estado com o estado coerente, $|\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$, onde o mesmo aplicado ao operador squeeze $S(\zeta)$, onde ζ corresponde ao parâmetro de squeeze, sendo na equação 5.1 referente ao estado squeezed,

$$|\alpha, \zeta\rangle = S(\zeta) |\alpha\rangle. \quad (5.1)$$

Sendo apresentado a função de Wigner para o estado squeezed como

$$W_\zeta(q, p) = \frac{1}{\pi} \exp[-(e^{2\zeta} q^2 + e^{-2\zeta} p^2)]. \quad (5.2)$$

e definida posteriormente, com certos ajustes R a qual configura

$$R(\zeta) = \left[1 + \frac{e^\zeta}{e^{2\zeta} + 1} - \frac{4e^\zeta}{\sqrt{(e^{2\zeta} + 2)(2e^{2\zeta} + 1)}}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.3)$$

Por meio do comportamento desta expressão a qual observa o comportamento dos valores da Rugosidade para estado squeezed com a variação do parâmetro de squeeze, sendo esse gráfico reproduzido em 5.1.

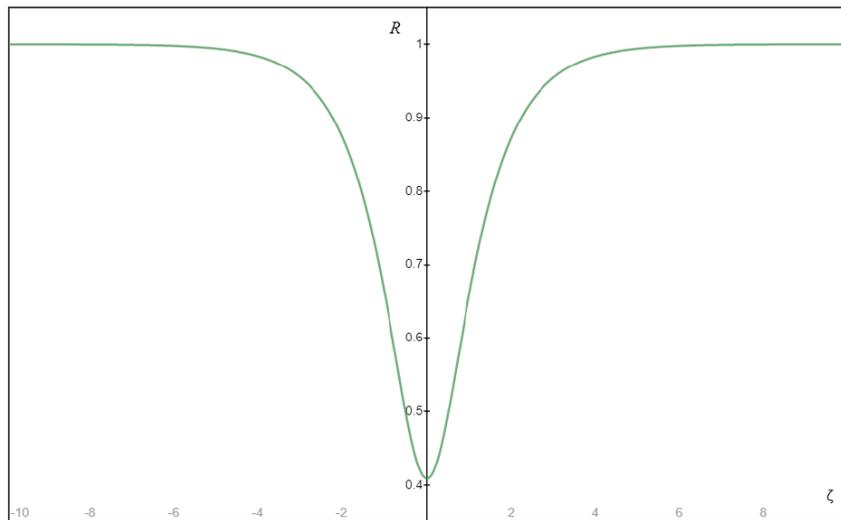


Figura 5.1: Gráfico da Rugosidade para o estado "squeezed", em função do parâmetro squeeze, ζ .

5.1. ESTADO SQUEEZED PARA OH

Com objetivo de verificar as prováveis mudanças nas distribuições que poderiam ser causadas pela aplicação do operador squeeze no estado coerente realizou-se a variação do parâmetro de squeeze ζ , e o reflexo deste nas distribuições referente a função de Husimi, Wigner, a diferença entre as duas funções, W-Q, e a distribuição referente ao módulo da diferença entre as duas distribuições, nos gráficos representado por R?

Sendo assim foram utilizados alguns valores para essa nossa variável ζ os quais foram 1, 2, 3 e foram gerados através de uma rotina os gráficos em 3d dessas distribuições quase-probabilísticas.

As primeiras a serem apresentadas são referentes a estado squeezed com parâmetro de squeeze $\zeta = 1$, sendo a primeira imagem, 5.2, é referente a Função de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q e módulo da diferença de W-Q.

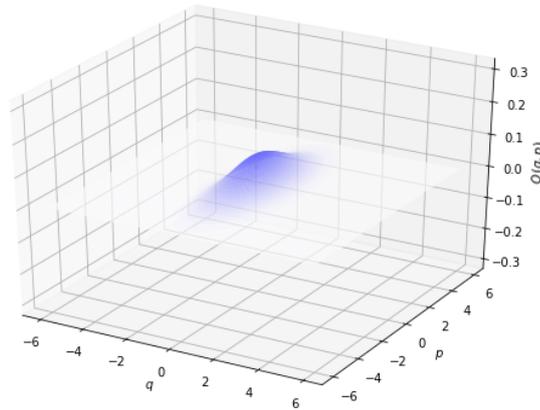


Figura 5.2: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 1$.

Na figura 5.3 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam valores maiores que a função de Husimi.

Em sequência na figura 5.4 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na figura 5.2, com algumas sucintas alterações, apresentando em algumas regiões valores negativos além de não apresentar amplitudes tão grandes.

Já em 5.5 apresenta a distribuição se assemelha com a apresentada a 5.4, com diferença mais visível a inexistência dessas regiões negativas esperados

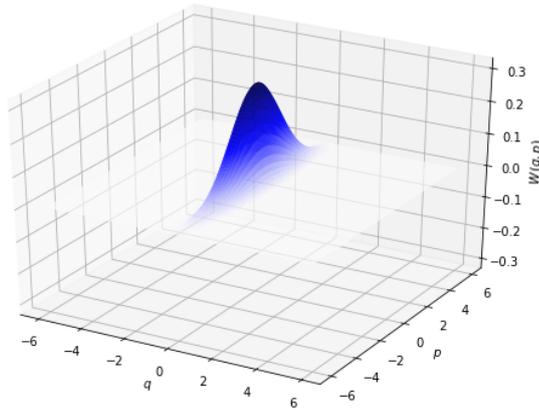


Figura 5.3: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 1$.

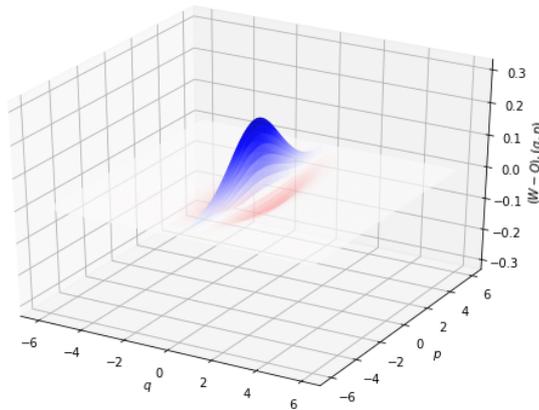


Figura 5.4: Gráfico referente a W-Q para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 1$.

visto a ser este o módulo da mesma.

No segundo conjunto a serem apresentadas são referentes a estado squeezed com parâmetro de squeeze $\zeta = 2$, sendo a primeira destas imagens, 5.6, é referente a Função de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q e módulo da diferença de W-Q.

Nesta figura 5.6, pode se observar que houve uma alteração da forma em comparação a apresentada em 5.2, onde a mesma se concentra de forma mais

5.1. ESTADO SQUEEZED PARA OH

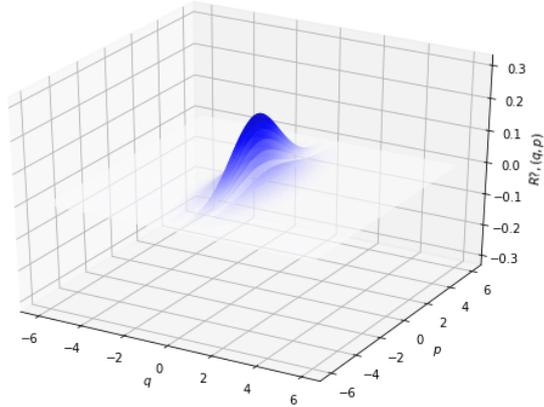


Figura 5.5: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 1$.

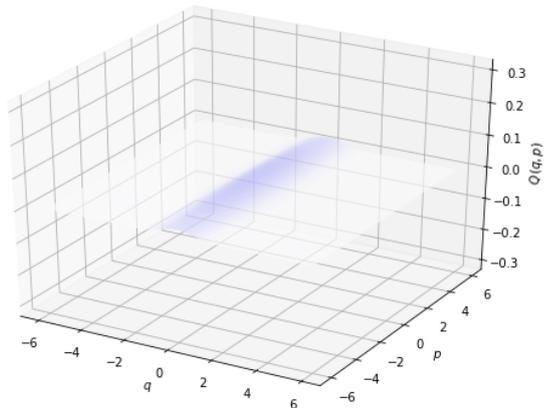


Figura 5.6: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 2$.

significativa ao eixo $q = 0$ e aumentando essa variância de localização da mesma no eixo p .

Na figura 5.7 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam valores maiores que a função de Husimi.

Em comparação a figura 5.8 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na 5.7, diferindo apenas nas amplitudes em

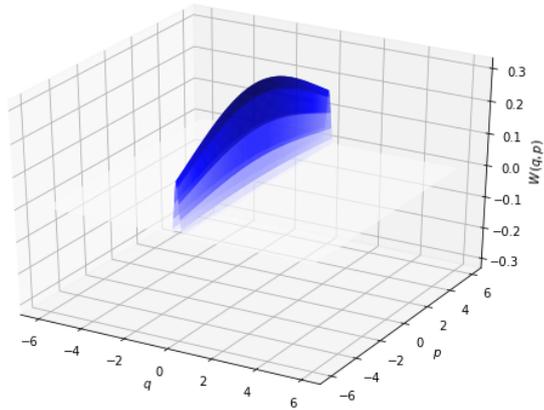


Figura 5.7: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 2$.

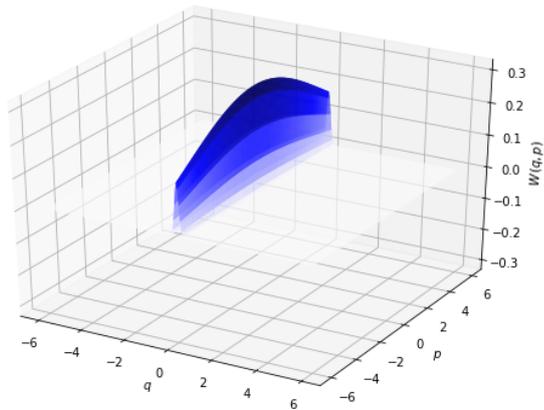


Figura 5.8: Gráfico referente a W-Q para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 2$.

alguns pontos serem menores e já em comparação com a apresentada em 5.4 onde haviam regiões significativas com valores negativos, tais regiões não são tão amplas.

Já em 5.9 apresenta a distribuição se assemelha com a apresentada a 5.8, quase apresentando comportamento igual a sua função anterior este o módulo da mesma.

5.1. ESTADO SQUEEZED PARA OH

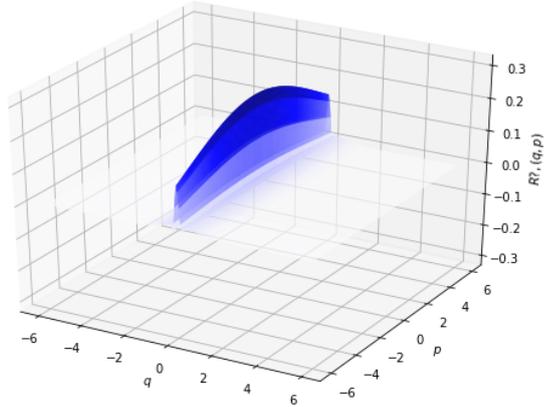


Figura 5.9: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 2$.

Posteriormente foram analisadas as distribuições para o estado squeezed com $\zeta = 3$, como estão apresentadas a seguir.

No terceiro conjunto a ser apresentado são referentes a estado squeezed com parâmetro de squeeze $\zeta = 3$, sendo a primeira destas imagens, 5.10, é referente a Função de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q e módulo da diferença de W-Q.

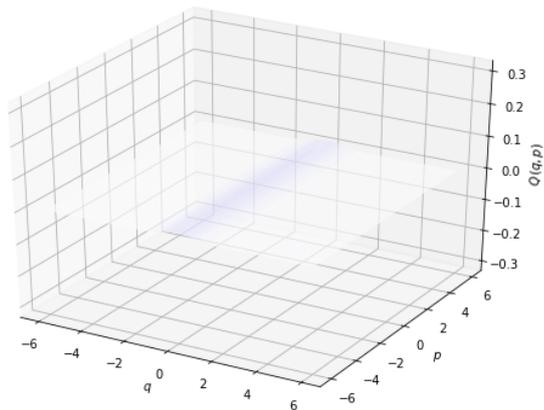


Figura 5.10: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 3$.

Nesta figura 5.10, pode se observar que houve uma alteração da forma em comparação a apresentada em 5.2, onde a mesma se concentra de forma mais significativa ao eixo $q = 0$ e aumentando essa variância de localização da mesma no eixo p .

Na figura 5.11 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam valores maiores que a função de Husimi.

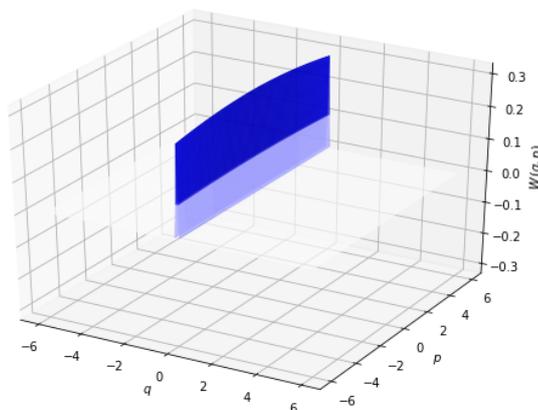


Figura 5.11: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 3$.

Em sequência na figura 5.12 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na 5.11, diferindo apenas nas amplitudes em alguns pontos serem menores e já em comparação com a apresentada em 5.4 onde haviam regiões significativas com valores negativos, tais regiões não são tão amplas.

Já em 5.13 apresenta a distribuição se assemelha com a apresentada a 5.12, quase apresentando comportamento igual a sua função anterior este o módulo da mesma.

Analisando o comportamento observado das distribuição de quase-probabilidade, notasse que com a variação do parâmetro de squeeze, ζ , a distribuição tende a mudar sua forma, quando foi aumentado o valor de ζ essa distribuição tende a se aglomerar no eixo associado a q de delimitando a faixa de valores, de certa forma reduzindo a variância apresentados para p mas em contra partida para compensar tal alteração o eixo q aumento mais sua dispersão para o valor da medida.

5.1. ESTADO SQUEEZED PARA OH

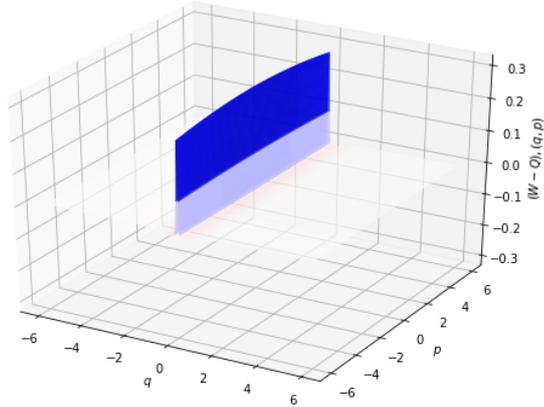


Figura 5.12: Gráfico referente a $W-Q$ para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 3$.

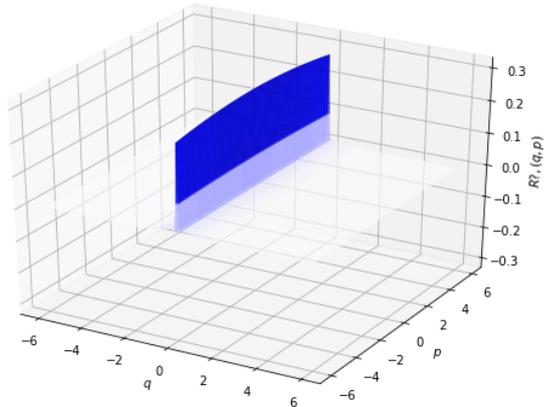


Figura 5.13: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado "squeezed", com parâmetro de squeeze $\zeta = 3$.

Tal comportamento associado a essa variância quanto a q e p é mencionada em [56], para os estados squeezed da luz é apresentada uma expressão que relaciona a incerteza associada a ambos com uma incerteza mínima associada a essas grandezas conjugadas P' e Q' como disposta em 5.4,

$$[(\Delta Q')^2]^{\frac{1}{2}} [(\Delta P')^2]^{\frac{1}{2}} \geq 1. \quad (5.4)$$

Se pensarmos a aplicação desse squeeze tal distribuição apresentaria uma es-

tatística de níveis super-Possioniana, que não condiz com o que se espera para um estado clássico, podendo assim ser considerada uma assinatura quântica do mesmo.

Se pegarmos um caso onde q e p estivessem associados respectivamente a posição e momento para uma partícula, esse limite de precisão, associado a essa incerteza mínima previamente citada, poderia inviabilizar a descrição de uma trajetória clássica devido ao comportamento visto em que ao ser aumentada precisão em relação a uma dessas grandezas do par mencionado, a incerteza associada a outra grandeza tenderia a ser muito elevada o que culminaria em se ter muita informação para uma das medidas e informação quase nenhuma para outra medida.

Como não é possível conhecer a posição e o momento com precisão arbitrária, no caso do squeezed isso torna-se um impeditivo para obtermos trajetórias nem que aproximadas.

5.2 Estado de Gato para OH

Em seguida começou a ser analisado o estado de gato, com a mesma premissa anterior de se atentar a manifestações nas distribuições de quase-probabilidade e buscar relacionar com propriedades quânticas. O estado de gato compreende uma configuração de um estado quântico, onde este é composto por uma combinação de duas condições diferentes que podem medidas para um estado, as quais não se tem a informação sobre qual configuração o estado se encontra até que esta propriedade dualística desapareça com a medição.

Analisando por este panorama, podemos representar o mesmo por essa combinação de dois prováveis estados viáveis que como no caso de um estado como apresentado em [44]

$$|C\rangle(\phi, \alpha) = \frac{|q_0\rangle \pm |-q_0\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.5)$$

Para o estado de gato tal como no caso do squeezed, foram apresentadas em [44] duas expressões para Rugosidade R , para o estado par e ímpar sendo que por meio delas é apresentado o comportamento da rugosidade variando q_0 , sendo este comportamento foi representado em um gráfico, 5.14, que está reproduzido a seguir.

5.2. ESTADO DE GATO PARA OH

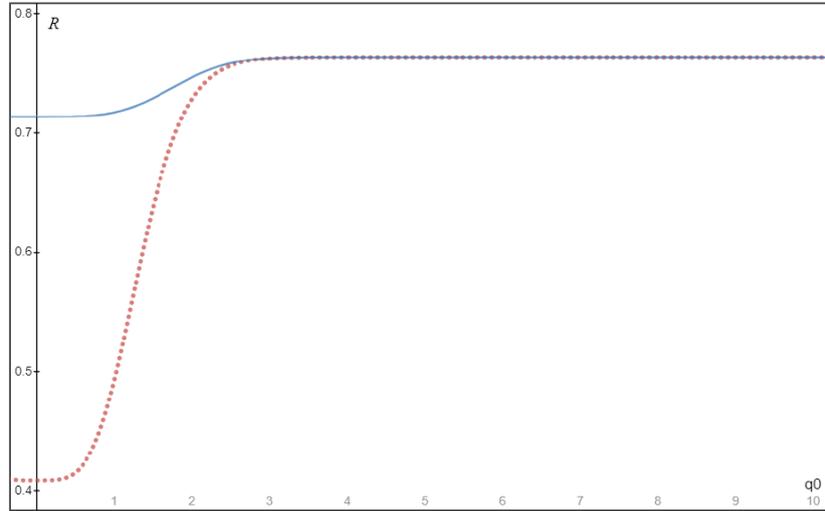


Figura 5.14: Gráfico da Rugosidade para o estado de gato, em função de q_0 , onde a linha contínua é referente ao estado ímpar e a linha tracejada referente ao estado par para o estado de gato .

Com o propósito de observar o comportamento das funções de Husimi(Q), Wigner(W), W-Q e mod(W-Q) para o estado gato, foi realizada a variação do parâmetro q_0 para os valores de 0,5;1,0;1,5;2,0 , estes escolhidos devido ao apresentado em [44], onde se observar algumas propriedades da Rugosidade para alguns estados o intervalo onde se observam maiores variações.

Quanto ao estado de gato, foram analisados os comportamento para as funções de Husimi, Wigner, W-Q e $|W-Q|$, sendo feita a separação para estado de gato par $|C\rangle(\phi, \alpha) = \frac{|q_0\rangle + | -q_0\rangle}{\sqrt{2}}$ e depois para o ímpar $|C\rangle(\phi, \alpha) = \frac{|q_0\rangle - | -q_0\rangle}{\sqrt{2}}$.

As primeiras a serem apresentadas são referentes a estado de gato ímpar para com $q_0 = 0,5$. A primeira imagem, 5.15, é referente a Função de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q e módulo da diferença de W-Q.

Na figura 5.16 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam valores maiores que a função de Husimi, além de apresentar uma região com amplitude negativa.

Em sequência na figura 5.17 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na figura 5.16, com algumas sucintas alterações, apresentando em algumas regiões com amplitudes menores para

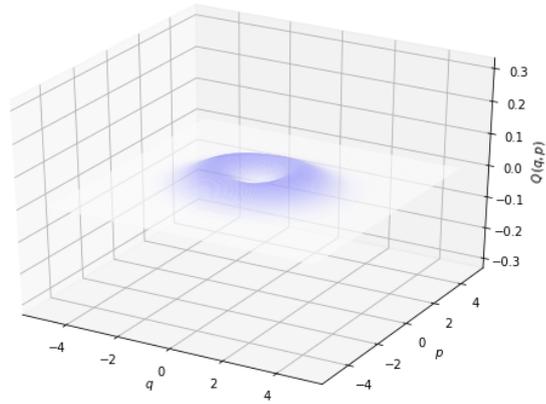


Figura 5.15: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 0,5$.

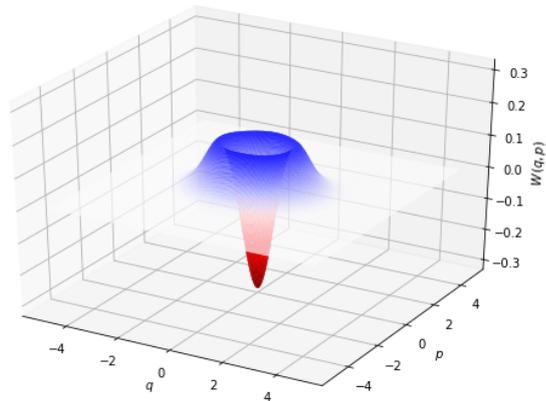


Figura 5.16: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 0,5$.

valores positivos.

Já em 5.18 apresenta a distribuição diferente da vista em comparação com 5.17 visto a ser o módulo a região negativa passa a ser representada pelo pico central positivo.

O segundo conjunto de figuras apresentadas são referentes a estado de gato para com $q_0 = 1,0$. A primeira imagem, 5.19, é referente a Função de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q

5.2. ESTADO DE GATO PARA OH

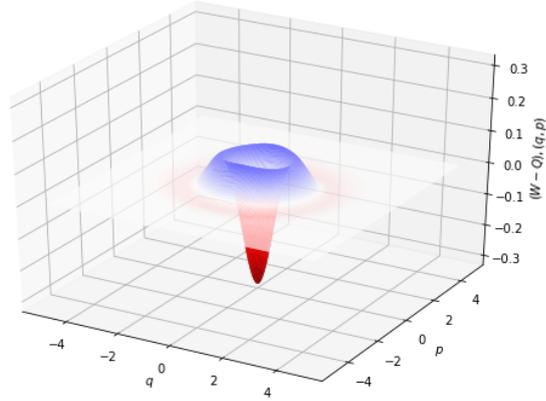


Figura 5.17: Gráfico referente a W-Q para o estado de gato ímpar, com $q_0=0,5$.

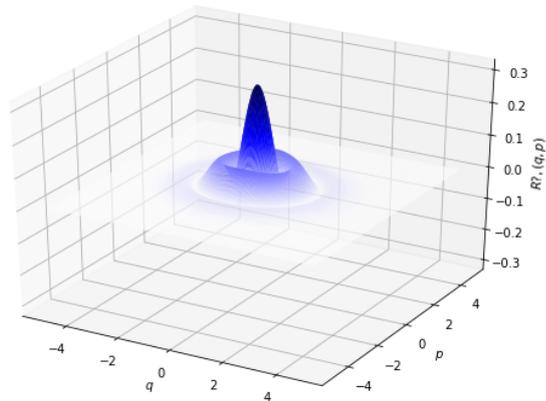


Figura 5.18: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado de gato ímpar, com $q_0=0,5$.

e módulo da diferença de W-Q.

Na figura 5.20 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam valores maiores que a função de Husimi, além de apresentar uma região com amplitude negativa na origem.

Em sequência na figura 5.21 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na figura 5.20, com algumas sucintas

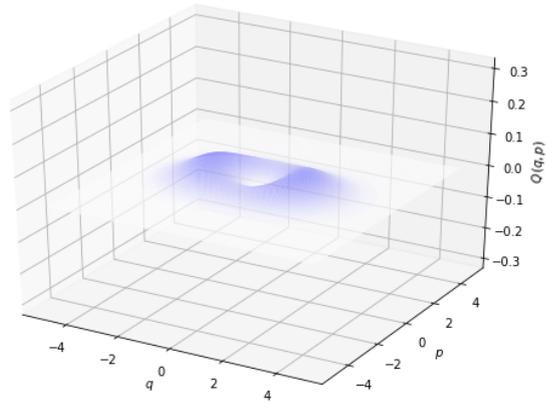


Figura 5.19: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato ímpar, com $q_0= 1,0$.

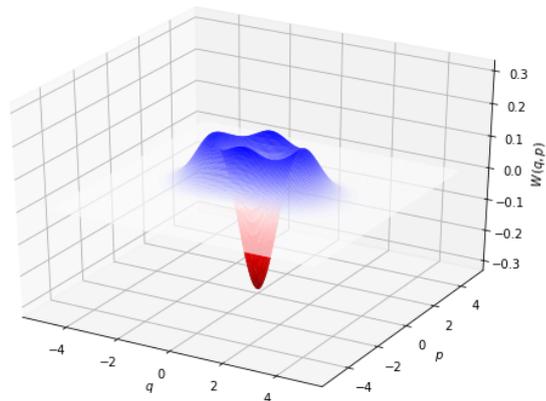


Figura 5.20: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato ímpar, com $q_0= 1,0$.

alterações, apresentando em algumas regiões com amplitudes menores para valores positivos em comparação com a disposta para função de Wigner.

Já em 5.22 apresenta a distribuição diferente da vista em comparação com 5.21 visto a ser o módulo a região negativa passa a ser representada pelo pico central positivo e se pode observar que são vistos picos menos acentuados no eixo da coordenada p das figuras 5.22 e 5.21, quando comparada com as respectivas 5.18 e 5.17.

5.2. ESTADO DE GATO PARA OH

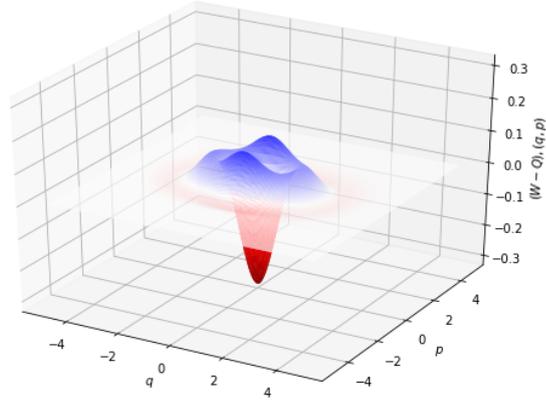


Figura 5.21: Gráfico referente a W-Q para o estado de gato ímpar, com $q_0=1,0$.

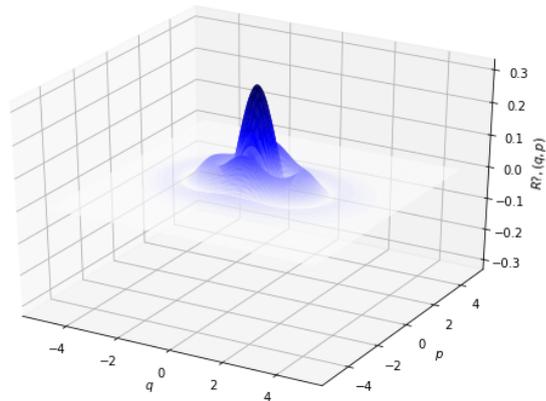


Figura 5.22: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado de gato ímpar, com $q_0=1,0$

O terceiro conjunto de figuras são as referentes ao estado de gato ímpar para com $q_0 = 1,5$. A primeira imagem, 5.23, é referente a Função de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q e módulo da diferença de W-Q.

Em 5.23, podemos observar dois picos de amplitude positivo que estão opostos centrados em $q=1,5$ e $q=-1,5$, diferindo das previamente apresentadas.

Na figura 5.24 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde

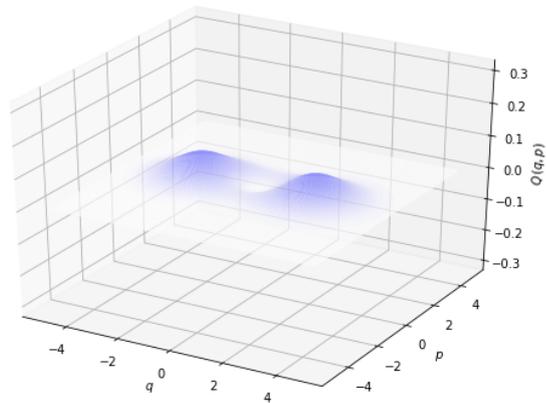


Figura 5.23: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 1,5$.

podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam valores maiores que a função de Husimi, onde podemos ver 4 regiões de amplitude positivas na forma de picos, além de apresentar uma região com amplitude negativa centrada na origem.

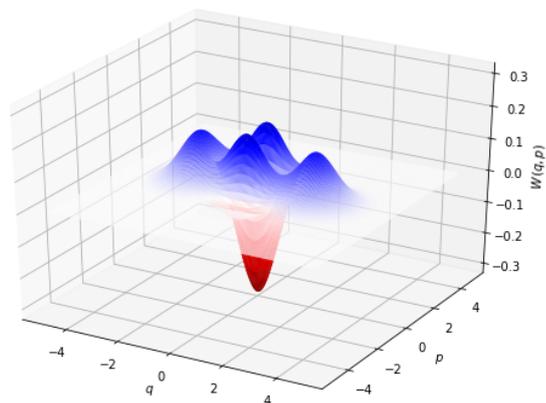


Figura 5.24: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 1,5$.

Em sequência na figura 5.25 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na figura 5.24, com algumas sucintas alte-

5.2. ESTADO DE GATO PARA OH

rações, apresentando regiões com amplitudes menores para valores positivos.

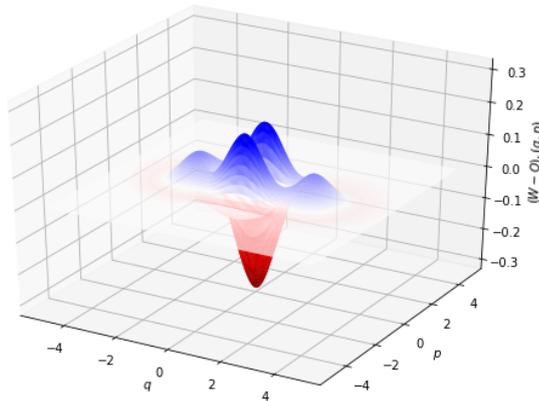


Figura 5.25: Gráfico referente a $W-Q$ para o estado de gato ímpar, com $q_0=1,5$.

Já em 5.26 apresenta a distribuição diferente da vista em comparação com 5.25 visto a ser o módulo a região negativa passa a ser representada pelo pico central positivo.

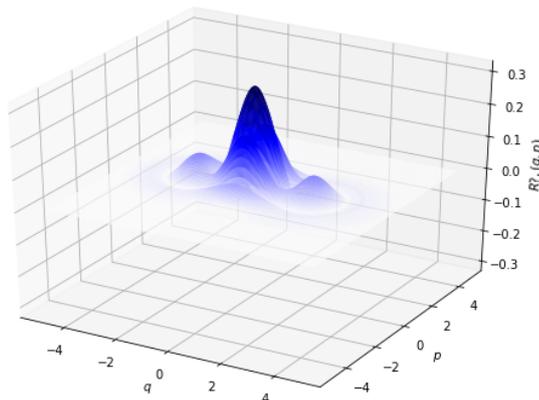


Figura 5.26: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado de gato ímpar, com $q_0=1,5$.

O quarto conjunto de figuras apresentadas são referentes a estado de gato ímpar para com $q_0 = 2,0$. A primeira imagem, 5.27, é referente a Função

de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q e módulo da diferença de W-Q.

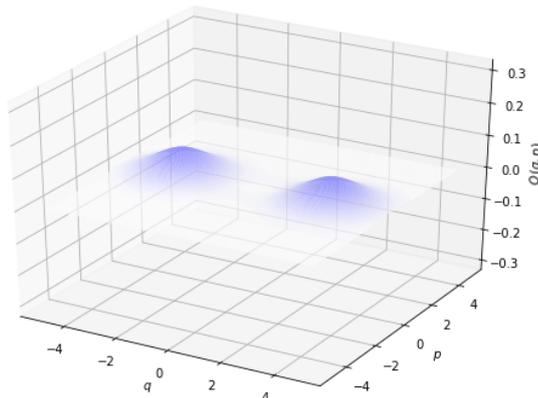


Figura 5.27: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 2,0$.

Em 5.23, podemos observar dois picos de amplitude positivo que estão opostos centrados em $q=2,0$ e $q=-2,0$, diferindo das previamente apresentadas.

Na figura 5.28 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam valores maiores que a função de Husimi apresentando dois picos de amplitude centrados em $q=2,0$ e $q=-2,0$ e dois picos com concentrados no eixo p , além de apresentar uma região com amplitude negativa.

Em sequência na figura 5.29 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na figura 5.28, com algumas sucintas alterações, apresentando em algumas regiões com amplitudes menores para valores positivos em comparação com a disposta para função de Wigner.

Já em 5.30 apresenta a distribuição diferente da vista em comparação com 5.29 visto a ser o módulo a região negativa passa a ser representada pelo pico central positivo.

Agora para o estado do gato par estão dispostas no quinto conjunto de figuras para $q_0 = 0,5$. A primeira imagem, 5.31, é referente a Função de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q e módulo da diferença de W-Q.

Na figura 5.32 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam

5.2. ESTADO DE GATO PARA OH

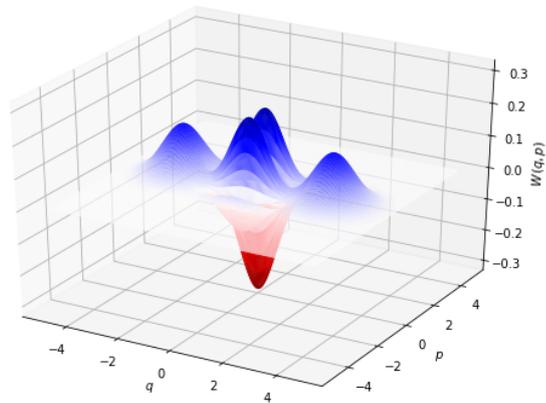


Figura 5.28: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 2,0$.

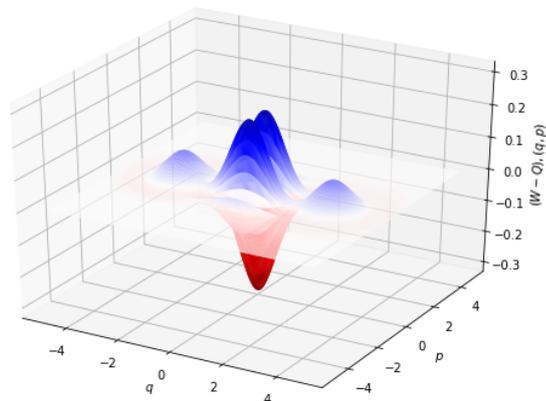


Figura 5.29: Gráfico referente a W-Q para o estado de gato ímpar, com $q_0 = 2,0$.

valores maiores que a função de Husimi, além de apresentar uma região com amplitude negativa.

Em sequência na figura 5.33 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na figura 5.32, com algumas sucintas alterações, apresentando em algumas regiões com amplitudes menores para valores positivos.

Já em 5.34 apresenta a distribuição diferente da vista em comparação com

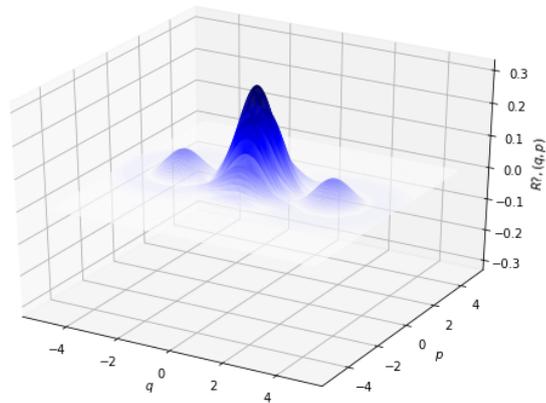


Figura 5.30: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado de gato ímpar, com $q_0=2,0$

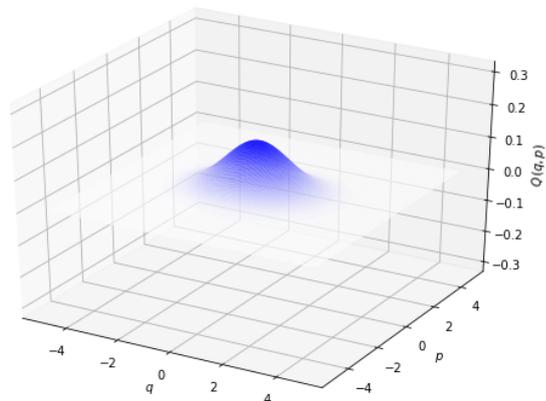


Figura 5.31: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato par, com $q_0=0,5$.

5.33 visto a ser o módulo a região negativa passa a ser representada pelo pico central positivo.

O sexto conjunto de figuras apresentadas são referentes a estado de gato par para com $q_0 = 1,0$. A primeira imagem, 5.35, é referente a Função de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q e módulo da diferença de W-Q.

Na figura 5.36 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde

5.2. ESTADO DE GATO PARA OH

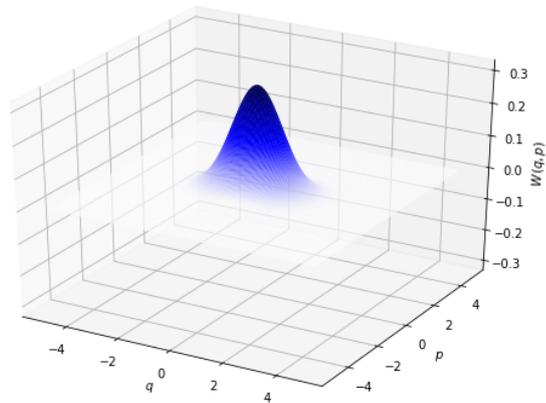


Figura 5.32: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato par, com $q_0 = 0,5$.

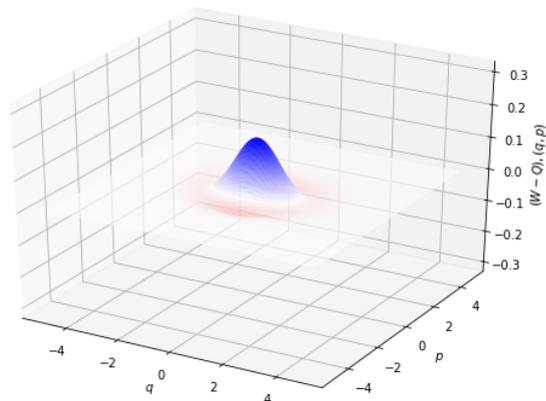


Figura 5.33: Gráfico referente a W-Q para o estado de gato par, com $q_0 = 0,5$.

podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam valores maiores que a função de Husimi, além de apresentar uma região com amplitude negativa na origem.

Em sequência na figura 5.37 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na figura 5.36, com algumas sucintas alterações, apresentando em algumas regiões com amplitudes menores para valores positivos em comparação com a disposta para função de Wigner.

Já em 5.38 apresenta a distribuição diferente da vista em comparação com

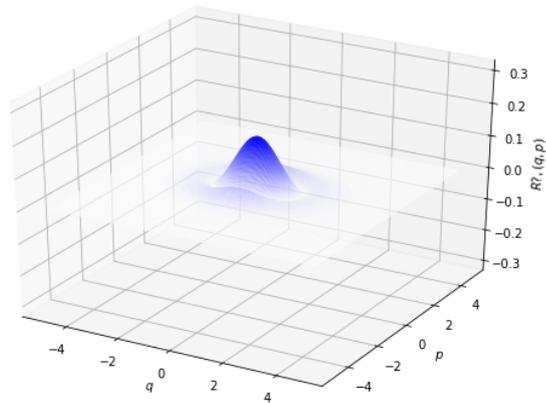


Figura 5.34: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado de gato par, com $q_0=0,5$.

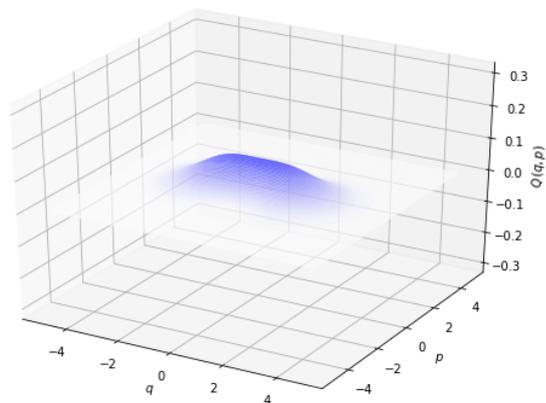


Figura 5.35: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato par, com $q_0=1,0$.

5.37 visto a ser o módulo a região negativa passa a ser representada pelo pico central positivo e se pode observar que são vistos picos menos acentuados no eixo da coordenada p das figuras 5.38 e 5.37, quando comparada com as respectivas 5.34 e 5.33.

O sétimo conjunto de figuras são as referentes ao estado de gato par para com $q_0 = 1,5$. A primeira imagem, 5.39, é referente a Função de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q

5.2. ESTADO DE GATO PARA OH

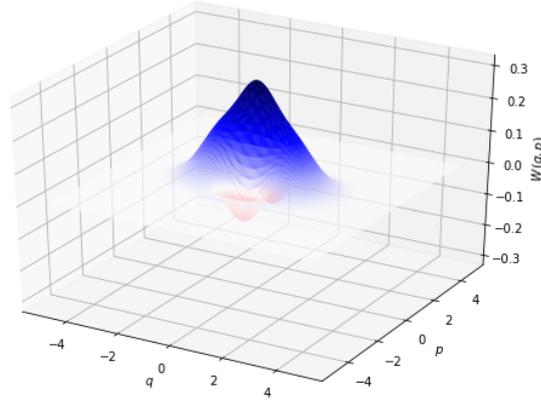


Figura 5.36: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato par, com $q_0 = 1,0$.

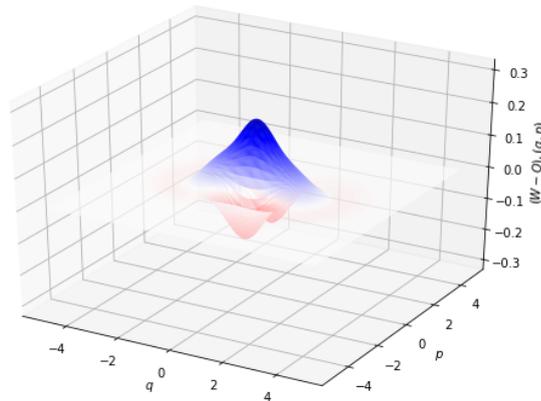


Figura 5.37: Gráfico referente a W-Q para o estado de gato par, com $q_0 = 1,0$.

e módulo da diferença de W-Q.

Em 5.39, podemos observar dois picos de amplitude positivo que estão opostos centrados em $q=1,5$ e $q=-1,5$, diferindo das previamente apresentadas.

Na figura 5.40 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam valores maiores que a função de Husimi, onde podemos ver 4 regiões de amplitude positivas na forma de picos, além de apresentar uma região com amplitude negativa centrada na origem.

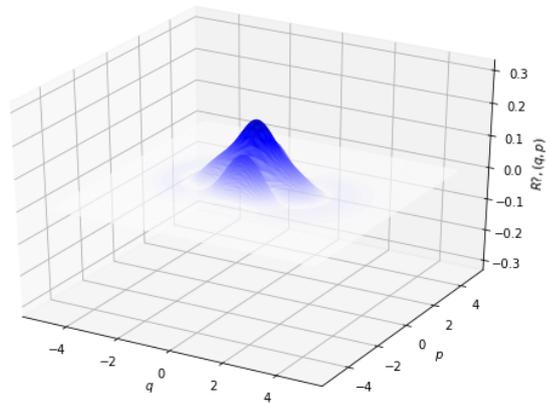


Figura 5.38: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado de gato par, com $q_0 = 1,0$

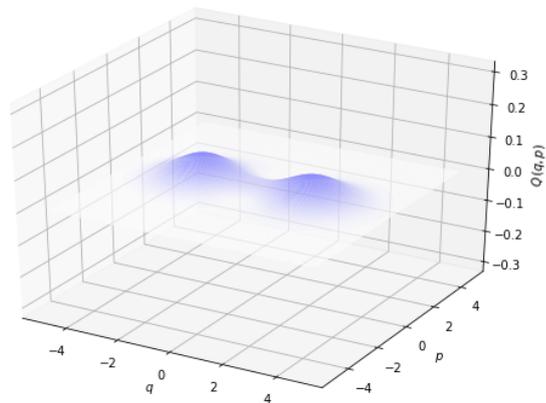


Figura 5.39: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato par, com $q_0 = 1,5$.

Em sequência na figura 5.41 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na figura 5.40, com algumas sucintas alterações, apresentando regiões com amplitudes menores para valores positivos.

Já em 5.42 apresenta a distribuição diferente da vista em comparação com 5.41 visto a ser o módulo a região negativa passa a ser representada pelo pico central positivo.

O oitavo conjunto são referentes a estado de gato par para com $q_0 = 2,0$.

5.2. ESTADO DE GATO PARA OH

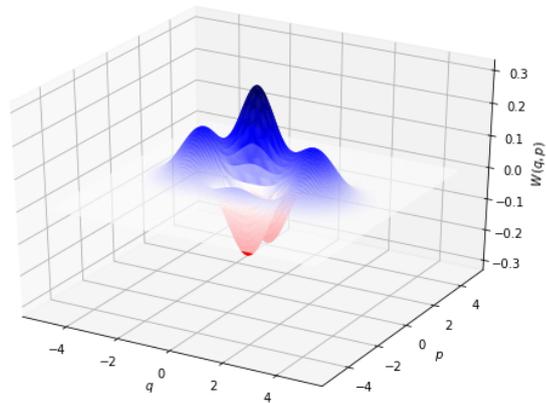


Figura 5.40: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato par, com $q_0 = 1,5$.

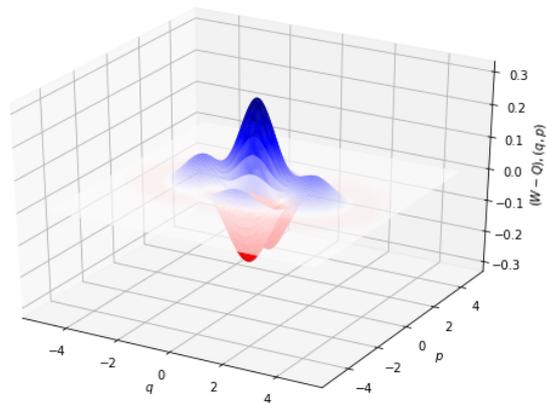


Figura 5.41: Gráfico referente a W-Q para o estado de gato par, com $q_0 = 1,5$.

A primeira imagem, 5.43, é referente a Função de Husimi e em sequência as outras referentes respectivamente a função de Wigner, W-Q e módulo da diferença de W-Q.

Em 5.39, podemos observar dois picos de amplitude positivo que estão opostos centrados em $q=2,0$ e $q=-2,0$, diferindo das previamente apresentadas.

Na figura 5.44 é apresentada o gráfico referente a Função de Wigner onde podemos notar que as amplitudes relacionadas a essa distribuição apresentam valores maiores que a função de Husimi apresentando dois picos de de ampli-

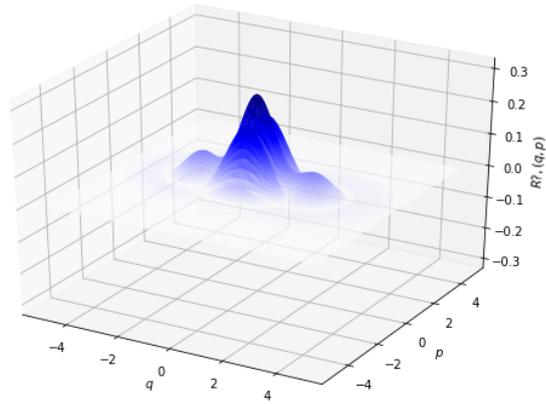


Figura 5.42: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado de gato par, com $q_0=1,5$.

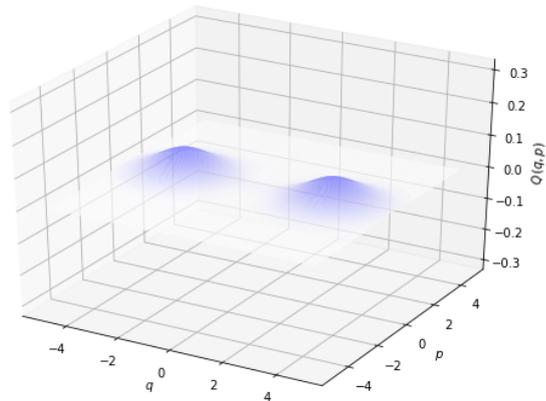


Figura 5.43: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado de gato par, com $q_0=2,0$.

tude centrados em $q=2,0$ e $q=-2,0$ e dois picos com concentrados no eixo p , além de apresentar uma região com amplitude negativa.

Em sequência na figura 5.45 onde pode ser observado que a forma tende a se assemelhar com a apresentada na figura 5.44, com algumas sucintas alterações, apresentando em algumas regiões com amplitudes menores para valores positivos em comparação com a disposta para função de Wigner.

Já em 5.46 apresenta a distribuição diferente da vista em comparação com

5.2. ESTADO DE GATO PARA OH

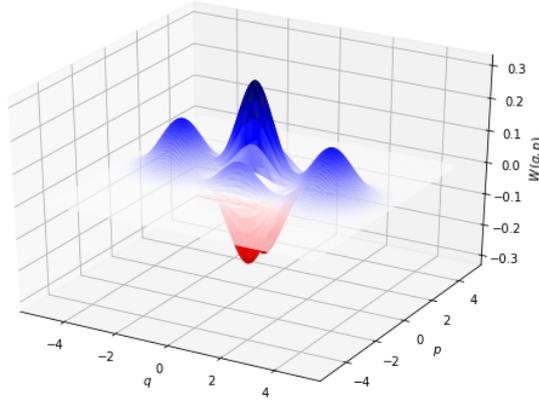


Figura 5.44: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado de gato par, com $q_0 = 2,0$.

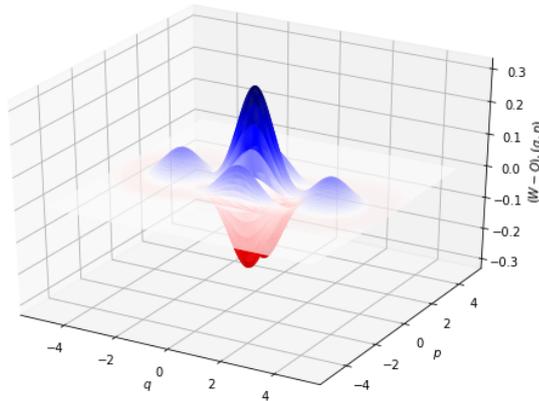


Figura 5.45: Gráfico referente a W-Q para o estado de gato par, com $q_0 = 2,0$.

5.45 visto a ser o módulo a região negativa passa a ser representada pelo pico central positivo.

Analisando o comportamento apresentado para função de Husimi, Q , dos estados de gato tanto par quanto ímpar podemos observar que há uma melhor caracterização quanto aos prováveis estados que constituem o sistema. Contudo, observando os gráficos referentes a função Wigner, W e a diferença entre Wigner e Husimi, $W-Q$, e o módulo dessa diferença, $|W-Q|$, para os estados de gato tanto par quanto ímpar, de mesmas características que os

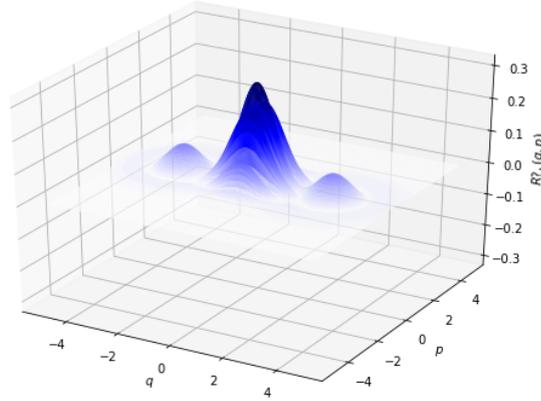


Figura 5.46: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado de gato par, com $q_0=2,0$

estudados para a função Q , essa localização das prováveis 'posições', q_0 , que são mais claras na função de Husimi tendem a se perder de certa maneira, na manifestação das densidades de quase-probabilidade sendo observadas perturbações entre as duas prováveis 'posições' q_0 e $-q_0$, e tais distribuições que apresentam em alguns dos pontos maior amplitude que os estados estão sobrepostos. O comportamento do estado de gato ímpar o mesmo apresenta regiões com maiores extremos para amplitudes negativas, as quais não são se encontra um análogo clássico. Tal comportamento causaria uma menor localização ou caracterização do estado que quanto maior o valor de q_0 menor seria esta localização.

5.3 Estado Térmico para OH

Baseando se em uma estratégia semelhante a aplicada no estudo do estado squeezed e do estado de gato, foi realizada a análise do comportamento do estado térmico na base do estado coerente. No caso do estado térmico o nosso parâmetro de variação está associado ao \bar{n} que representa o número médio de fótons no estado térmico o mesmo obedece a seguinte relação

$$\bar{n} = \left(e^{\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} - 1 \right)^{-1} \quad (5.6)$$

5.3. ESTADO TÉRMICO PARA OH

O estado térmico para o OH com frequência ω pode ser representado por

$$\rho_T = (1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}) \sum_{n=0} e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T} n} |n\rangle \langle n| \quad (5.7)$$

Sendo apresentada uma função para Rugosidade para o estado térmico desse estado como

$$R_T(\bar{n}) = \left[\frac{1}{2(\bar{n} + 1)(2\bar{n} + 1)(4\bar{n} + 3)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.8)$$

Como apresentado para o estado de gato e squeeze, em [44] é representado o comportamento para a Rugosidade com a variação de um parâmetro nesse caso \bar{n} , sendo assim gerado um gráfico, 5.47, com o comportamento da Rugosidade sendo este reproduzido a seguir.

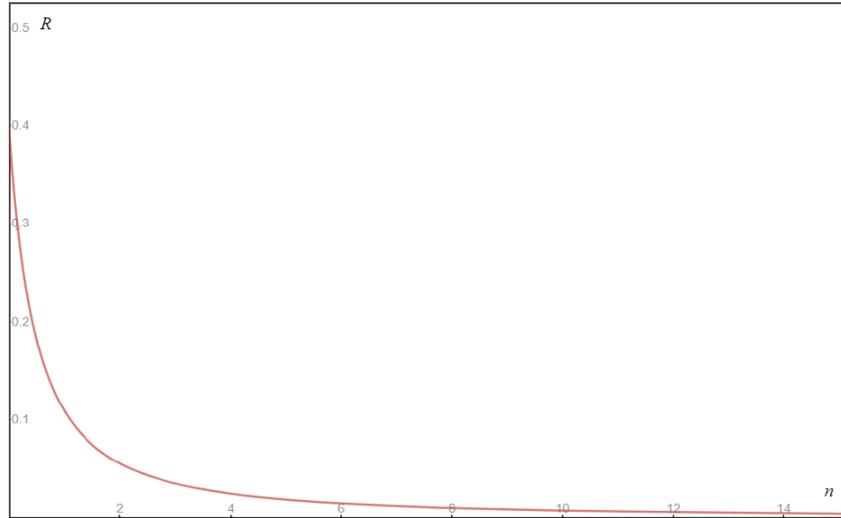


Figura 5.47: Gráfico da Rugosidade para o estado térmico, em função do número médio de fótons \bar{n} .

No caso do estado térmico foram utilizados como parâmetro a variação do n , variando ele pelos seguintes valores 0,1, 0,3 e 0,5.

No primeiro conjunto de gráficos são referentes ao estado térmico com $n = 0,1$. Sendo o primeiro referente a função de Husimi, logo em seguida é apresentado o referente a função de Wigner; W-Q e $|W-Q|$, respectivamente 5.48, 5.49, 5.50 e 5.51.

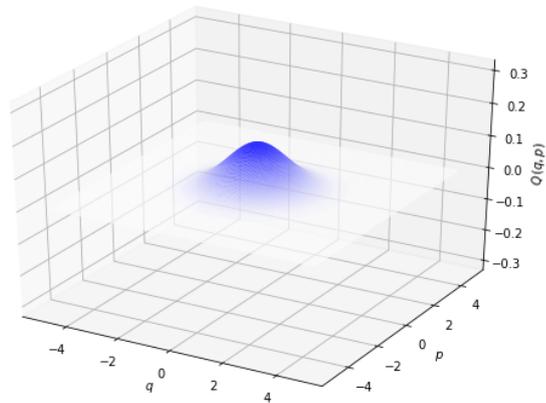


Figura 5.48: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado térmico com $\bar{n}= 0,1$

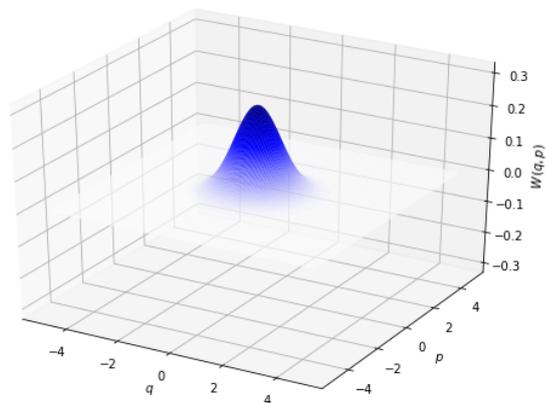


Figura 5.49: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado térmico com $\bar{n}= 0,1$

Comparando 5.48 e 5.49 podemos observar que a função que representa a função de Wigner possui valores mais acentuados que a função Husimi, o que se observado em outros estados.

Ao se comparar os gráfico referente a $W-Q$ e a $|W-Q|$, os dois apresentam grandes semelhanças visto ao estado térmico não apresentar regiões de negativas tão expressivas quanto observados em outros estados. Se compararmos 5.52 e 5.48, é viavel notar que a distribuição quase-probabilística apresenta

5.3. ESTADO TÉRMICO PARA OH

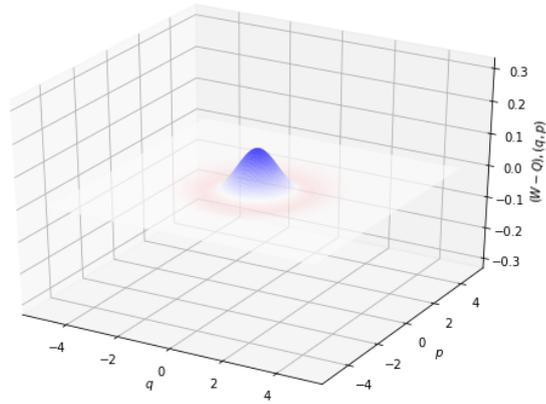


Figura 5.50: Gráfico referente a W-Q para o estado térmico com $\bar{n}= 0,1$

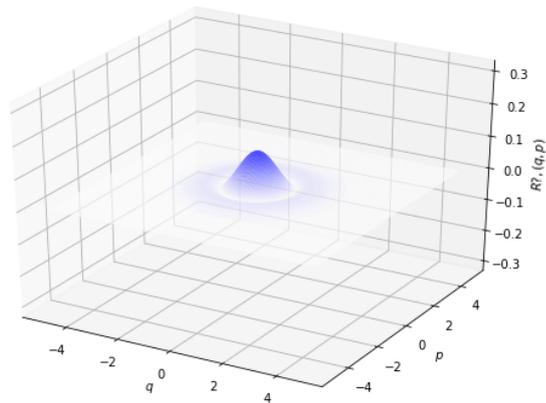


Figura 5.51: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado térmico com $\bar{n}= 0,1$

amplitudes menores e mais dispersa quando aumentamos o valor de n . No caso da função de Wigner, é sensível a diferença da distribuição a qual tende a apresentar picos de menor amplitude e mais dispersos da origem.

Semelhante ao observado para W-Q e $|W-Q|$ para $\bar{n} = 0,1$, os gráficos 5.54 e 5.55 aonde $\bar{n} = 0,3$ são bem semelhantes e apresentam essa distribuição com um pico de amplitude menor em comparação a com o parâmetro \bar{n} menor.

Semelhante ao observado para os gráficos W-Q e $|W-Q|$ para outros valores de n anteriores, os gráficos 5.58 e 5.59 aonde $\bar{n} = 0,5$ são bem semelhantes e apresentam essa distribuição com um pico de amplitude menor em compara-

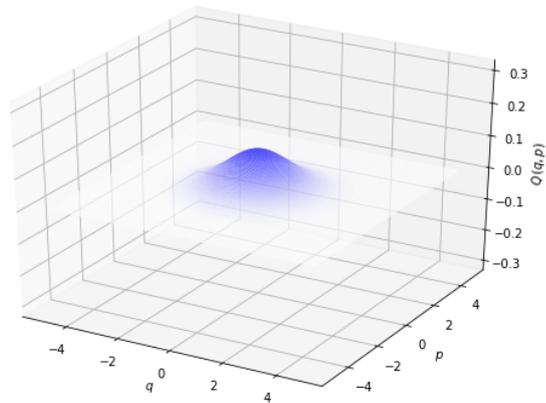


Figura 5.52: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado térmico com $\bar{n} = 0,3$

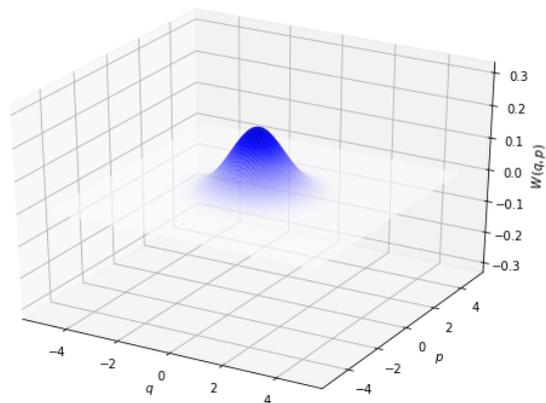


Figura 5.53: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado térmico com $\bar{n} = 0,3$

ção a com o parâmetro n menor.

Através do que foi observado é sensível notar que quanto menor o valor do parâmetro \bar{n} mais próximo o estado térmico estará do estado coerente e com o aumento deste parâmetro \bar{n} mais dispersa será essa distribuição de quase-probabilidade, assim menores seriam as amplitudes dessa distribuição de quase-probabilidade e mais semelhantes seriam as funções de Husimi e Wigner para o estado o que resultaria em menores valores para R que cul-

5.3. ESTADO TÉRMICO PARA OH

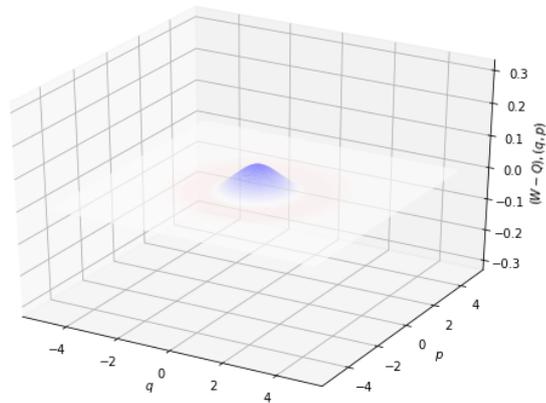


Figura 5.54: Gráfico referente a $W-Q$ para o estado térmico com $\bar{n} = 0,3$

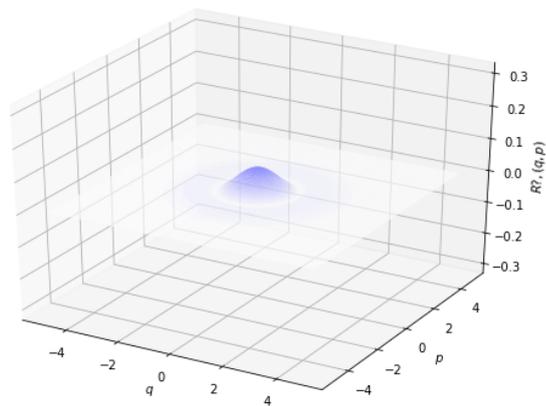


Figura 5.55: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado térmico com $\bar{n} = 0,3$

minariam com que o estado com maior valor de \bar{n} se tornasse cada vez mais clássico no sentido termodinâmico, ao se dirigir à uma distribuição uniforme.

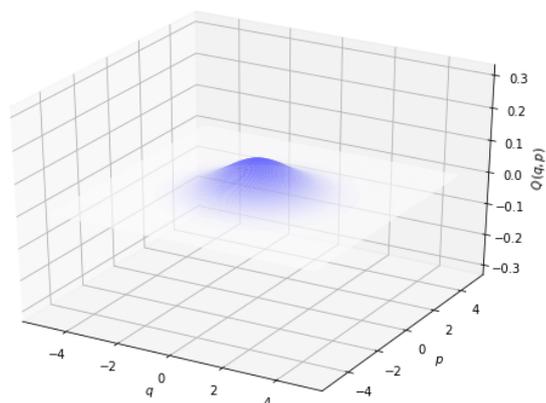


Figura 5.56: Gráfico referente a Função de Husimi para o estado térmico com $\bar{n} = 0,5$

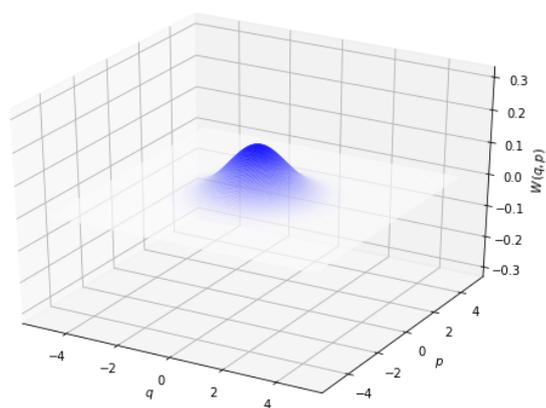


Figura 5.57: Gráfico referente a Função de Wigner para o estado térmico com $\bar{n} = 0,5$

5.3. ESTADO TÉRMICO PARA OH

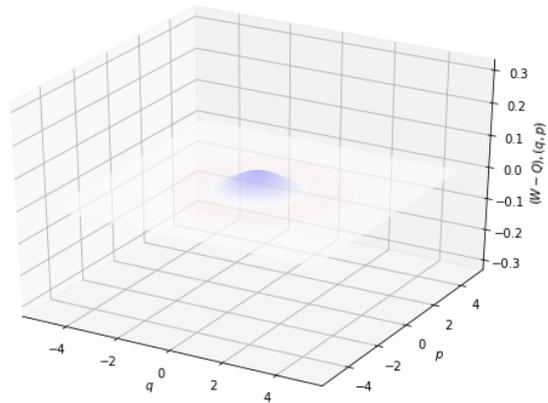


Figura 5.58: Gráfico referente a $W-Q$ para o estado térmico com $\bar{n}=0,5$

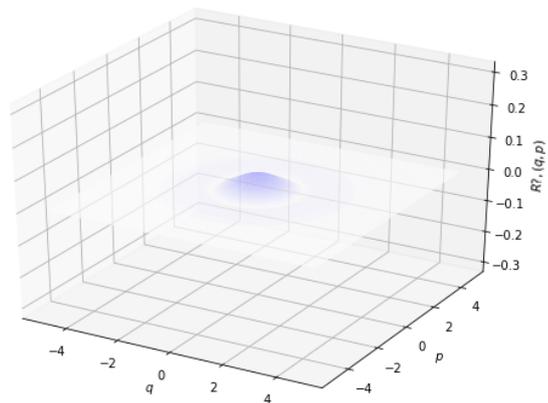


Figura 5.59: Gráfico referente a $|W-Q|$ para o estado térmico com $\bar{n}=0,5$

Capítulo 6

Conclusões

Com base nas informações apresentadas durante o texto, observou-se que a Rugosidade (R) apresenta certas vantagens como sua própria definição por ser limitada, assim podemos mensurar e comparar dois estados diferentes observando qual deles é mais quântico visto a medida da Rugosidade deles ou como variações de características dos estados podem afetar a manifestação de propriedades/comportamentos quânticos.

Durante o estudo realizado analisou-se os gráficos para as funções de Wigner, Husimi, $W-Q$ e $|W-Q|$ observou-se como as variações de determinados parâmetros afetaram essas distribuições para os estados estudados alterando sua forma e certas relações foram propostas com base no efeito observado e determinadas propriedades quânticas ou não-clássicas, como no caso estado squeezed o qual se relaciona com uma inviabilidade de caracterizar uma trajetória bem definida; para o estado de gato notou-se que a variação do parâmetro propiciou alterações na localização ou definição da posição estado. Tais comportamentos corroboram com propriedades previamente estudadas em outros trabalhos, mostrando indícios que a Rugosidade se trata de uma medida eficiente.

Através disso, o uso da Rugosidade como indicador do quão quântico é um estado, no conjunto de estados estudados apresentaram certas vantagens e potencialidades em comparação com outras medidas de mesma finalidade, dentre elas por ser definição limitada podendo ser utilizada comparativamente entre dois estados distintos. Assim a utilização da Rugosidade para outras configurações e estados podem reforçar e revelar outras potencialidades para esta medida.

Capítulo 7

Anexos

Os gráficos apresentados relacionados as funções de Wigner e Husimi e para diferença das duas foram gerados por meio do uso da linguagem Python, mais especificamente fazendo uso do aplicativo spyder com os pacotes de recursos dentre eles o qutip que configura uma ferramenta com diversos recursos para o estudo de sistemas quânticos. Para facilitar a reprodução dos gráficos mencionados acima será apresentado um breve tutorial para instalação dos recursos utilizados para criação do mesmo.

Tutorial

Como foi feito o uso do sistema operacional do Windows 10 primeiro passo é foi instalado o Microsoft Visual Studio;

Após sua instalação do Visual Studio foi instalado a versão mais atual do Anaconda, que compreende a um código aberto das linguagens de programação Python, o mesmo pode ser encontrado no site :

<https://www.anaconda.com/distribution/> , após sua instalação é recomendado reinicializar o computador.

Após a reinicialização do computador, iremos agora criar o ambiente onde vamos estar trabalho e para isso vamos ter que fazer a instalação de alguns recursos.

Nessa etapa o primeiro passo será executar o recursos "Anaconda Prompt" com privilégios de administrador, no caso permitindo alterações nas configurações do computador como a instalação de recursos. Para isso você pode abrir o menu "Iniciar" e localizar a pasta Anaconda ao abrir a mesma você encontrará o aplicativo, para executá-lo como administrador clique no mesmo com botão direito e selecione a opção "Executar como administrador".

Com a janela aberta desse aplicativo, digite o comando sem as aspas "conda update conda", pressione enter e aguarde a atualização dos pacotes.

Depois dessa atualização, digite e execute o comando conda "create -n qutip-env python=3", assim criando o ambiente onde utilizaremos o qutip.

Após isso verifique se houve a mudança para prompt, no caso observando se há escrito (qutip-env) antes do prompt, se não houver ocorrido essa mudança utilize o comando "activate qutip-env".

Em seguida, execute o comando "conda install numpy scipy cython matplotlib nose jupyter notebook spyder" para instalar os aplicativos nesse novo ambiente.

Após a instalação desses aplicativos, tente executar o comando "conda install qutip", se não for possível executar utilize o comando "conda config --append channels conda-forge" e logo em seguida utilize o comando "conda install qutip".

Terminando a instalação do qutip, reinicie o computador.

Após a reinicialização, abra o Anaconda Navigator, selecione o ambiente qutip-env, e para verificar a instalação abra o aplicativo spyder nesse ambiente e execute o seguinte código a seguir:

```
In[1]: import qutip.testing as qt
In[2]: qt.run()
```

Esse teste pode ser demorado. Se não houver a indicação de nenhum erro o mesmo foi instalado com sucesso.

Logo abaixo está o código utilizado para gerar os gráficos, relacionados a função de Wigner, Husimi e da W-Q apresentados no texto.

```
# "Gráficos dissertação
@author: Adriano "
#pacotes utilizados
import numpy as np
import qutip as qt
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import rcParams
#N= número de estados de fock para base de vetores do espaço Hilbert
N = 60
#plot função wigner 3d (autor : Maurício Reis)
```

```

def plot_wigner3d(rho, limits=(-10, 10, -10, 10), step=0.05, file=None, ti-
tle=None):
    xvec = np.arange(limits[0], limits[1], step)
    yvec = np.arange(limits[2], limits[3], step)
    W = qt.wigner(rho, xvec, yvec)
    X, Y = np.meshgrid(xvec, yvec)
    norm = mpl.colors.Normalize(vmin=(-1/np.pi), vmax=(1/np.pi))
    figura, ax2 = plt.subplots(figsize=(7, 5))
    ax2 = Axes3D(figura)
    ax2.plot_surface(X, Y, W, rstride=1, cstride=1,
norm=norm, cmap=cm.seismic_r)
    ax2.set_xlabel(r'q')
    ax2.set_ylabel(r'p')
    ax2.set_zlabel(r'W(q,p)')
    ax2.set_zlim(bottom=-1/np.pi, top = 1/np.pi)
    if type(title) == str:
        ax2.set_title(title)
    if type(file) == str:
        figura.savefig(file)
    plt.show()
    return
#plot função husimi 3d (autor : Maurício Reis)
def plot_husimi3d(rho, limits=(-10, 10, -10, 10), step=0.05, file=None, ti-
tle=None):
    xvec = np.arange(limits[0], limits[1], step)
    yvec = np.arange(limits[2], limits[3], step)
    Q = qt.qfunc(rho, xvec, xvec)
    X, Y = np.meshgrid(xvec, yvec)
    norm = mpl.colors.Normalize(vmin=(-1/np.pi), vmax=(1/np.pi))
    figura, ax2 = plt.subplots(figsize=(7, 5))
    ax2 = Axes3D(figura)
    ax2.plot_surface(X, Y, Q, rstride=1, cstride=1, norm=norm, cmap=cm.seismic_r)
    ax2.set_xlabel(r'q')
    ax2.set_ylabel(r'p')
    ax2.set_zlabel(r'Q(q,p)')
    ax2.set_zlim(bottom=-1/np.pi, top = 1/np.pi)
    if type(title) == str:
        ax2.set_title(title)

```

```

if type(file) == str:
    figura.savefig(file)
    plt.show()
    return
#plot função husimi 2d (autor : Mauricio Reis)
def plot_husimi2d(rho, limits=(-10, 10, -10, 10), step=0.05,
file=None, title=None, labeled=False):
    xvec = np.arange(limits[0], limits[1], step)
    yvec = np.arange(limits[2], limits[3], step)
    Q = qt.qfunc(rho, xvec, yvec)
    X, Y = np.meshgrid(xvec, yvec)
    norm = mpl.colors.Normalize(vmin=(-1/np.pi), vmax=(1/np.pi)) values =
[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4]
    figura, ax1 = plt.subplots(figsize=(7, 7)) im = ax1.imshow(Q, extent=limits,
origin='lower', norm=norm, cmap=cm.seismic_r) cn = ax1.contour(X, Y, Q,
values, colors='k', linewidths=0.7) if labeled:
    ax1.clabel(cn, inline=1, fmt='
    ax1.set_xlabel(r'q')
    ax1.set_ylabel(r'p')
    figura.colorbar(im, orientation='horizontal', shrink=0.6)
if type(title) == str:
    ax1.set_title(title)
if type(file) == str:
    figura.savefig(file)
    figura.show()
    return
#plot função wigner 2d (autor : Mauricio Reis)
def plot_wigner2d(rho, limits=(-10, 10, -10, 10), step=0.05,
file=None, title=None, labeled=False):
    xvec = np.arange(limits[0], limits[1], step)
    yvec = np.arange(limits[2], limits[3], step)
    W = qt.wigner(rho, xvec, yvec)
    X, Y = np.meshgrid(xvec, yvec)
    norm = mpl.colors.Normalize(vmin=(-1/np.pi), vmax=(1/np.pi)) values =
[-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2]
    figura, ax1 = plt.subplots(figsize=(7, 7)) im = ax1.imshow(W, extent=limits,
origin='lower', norm=norm, cmap=cm.seismic_r)
    cn = ax1.contour(X, Y, W, values, colors='k', linewidths=0.7)

```

```

if labeled:
ax1.clabel(cn, inline=1, fmt='
ax1.set_xlabel(r'q')
ax1.set_ylabel(r'p')
figura.colorbar(im, orientation='horizontal', shrink=0.6)
if type(title) == str:
ax1.set_title(title)
if type(file) == str:
figura.savefig(file)
figura.show()
return
#teste de função plot para W-Q baseada em plot_wigner3d
def plot_W_Q3d(rho, limits=(-10, 10, -10, 10), step=0.05, file=None, ti-
tle=None):
xvec = np.arange(limits[0], limits[1], step)
yvec = np.arange(limits[2], limits[3], step)
R = qt.wigner(rho, xvec, yvec) - qt.qfunc(rho, xvec, yvec)
X, Y = np.meshgrid(xvec, yvec)
norm = mpl.colors.Normalize(vmin=(-1/np.pi), vmax=(1/np.pi))
figura, ax2 = plt.subplots(figsize=(7, 5))
ax2 = Axes3D(figura)
ax2.plot_surface(X, Y, R, rstride=1, cstride=1,
norm=norm, cmap=cm.seismic_r)
ax2.set_xlabel(r'q')
ax2.set_ylabel(r'p')
ax2.set_zlabel(r'(W - Q), (q, p)')
ax2.set_zlim(bottom=-1/np.pi, top = 1/np.pi)
if type(title) == str:
ax2.set_title(title)
if type(file) == str:
figura.savefig(file)
plt.show()
return
#N= numero de estados de fock para base de vetores do espaço Hilbert
# estado coerente (N,alfa) alfa= autovalor para o estado coerente
rho_coherent1 = qt.coherent_dm(N, 1)
rho_coherent3 = qt.coherent_dm(N, 3)
rho_coherent5 = qt.coherent_dm(N, 5)

```

CAPÍTULO 7. ANEXOS

```
#estados de fock alfa= numero de estados deseados
rho_fock1=qt.fock_dm(N,1)
rho_fock3=qt.fock_dm(N,3)
rho_fock5=qt.fock_dm(N,5)
#estado térmico alfa= valor esperado para o numero de particulas no estado
térmico
rho_thermal1 = qt.thermal_dm(N, 0.1)
rho_thermal3 = qt.thermal_dm(N, 0.3)
rho_thermal5 = qt.thermal_dm(N, 0.5)
#estado squeezed
psi0 = qt.coherent(N,0)
q = 1
alfa1 = 1
psi1q = qt.squeeze(N,q)*psi0
psi1f = qt.displace(N, alfa1) * psi1q
plot_husimi3d(psi1f)
plot_wigner3d(psi1f)
q=1
alfa3 = 3
psi3q = qt.squeeze(N,q)*psi0
psi3f = qt.displace(N, alfa3) * psi3q
plot_husimi3d(psi3f)
plot_wigner3d(psi3f)
q=1
alfa5 = 5
psi5q = qt.squeeze(N,q)*psi0
psi5f = qt.displace(N, alfa1) * psi5q
plot_husimi3d(psi5f)
plot_wigner3d(psi5f)
#plot cat states
alfac1 = 0.5
alfacn1= -alfac1
psi_cat0_5= (qt.coherent(N, alfac1) + qt.coherent(N, alfacn1)).unit()
plot_husimi3d(psi_cat0_5)
plot_wigner3d(psi_cat0_5)
alfac2= 1
alfacn2= -alfac2
psi_cat1= (qt.coherent(N, alfac2) + qt.coherent(N, alfacn2)).unit()
```

```

plot_husimi3d(psi_cat1)
plot_wigner3d(psi_cat1)
alfac3= 1.5
alfacn3= -alfac3
psi_cat1_5= (qt.coherent(N, alfac3) + qt.coherent(N, alfacn3)).unit()
plot_husimi3d(psi_cat1_5)
plot_wigner3d(psi_cat1_5)
alfac4= 2
alfacn4= -alfac4
psi_cat2= (qt.coherent(N, alfac4) + qt.coherent(N, alfacn4)).unit()
plot_husimi3d(psi_cat2)
plot_wigner3d(psi_cat2)
#comando plot coherent
plot_wigner3d(rho_coherent1)
plot_husimi3d(rho_coherent1)
plot_wigner3d(rho_coherent3)
plot_husimi3d(rho_coherent3)
plot_wigner3d(rho_coherent5)
plot_husimi3d(rho_coherent5)
#comando plot fock
plot_wigner3d(rho_fock1)
plot_husimi3d(rho_fock1)
plot_wigner3d(rho_fock3)
plot_husimi3d(rho_fock3)
plot_wigner3d(rho_fock5)
plot_husimi3d(rho_fock5)
#comando plot thermal wigner e husimi
plot_wigner3d(rho_thermal1)
plot_husimi3d(rho_thermal1)
plot_wigner3d(rho_thermal3)
plot_husimi3d(rho_thermal3)
plot_wigner3d(rho_thermal5)
plot_husimi3d(rho_thermal5)
#diferença Wigner -Husimi estado coerente
plot_W_Q3d(rho_coherent1)
plot_W_Q3d(rho_coherent3)
plot_W_Q3d(rho_coherent5)
#diferença Wigner -Husimi estado térmico

```

```
plot_W_Q3d(rho_thermal1)
plot_W_Q3d(rho_thermal3)
plot_W_Q3d(rho_thermal5)
#diferença Wigner -Husimi estado de fock
plot_W_Q3d(rho_fock1)
plot_W_Q3d(rho_fock3)
plot_W_Q3d(rho_fock5)
```

Bibliografia

- [1] Oliveira, Adélcio C.. Semiclassical Husimi Function of Simple and Chaotic Systems. *Journal of Modern Physics*, v. 03, p. 694-701, 2012.
- [2] Oliveira, Adélcio Carlos de; Nemes, M. C. . Classical Structures in the Husimi Distributions of Stationary States for H₂ and HCl Molecules. *Physica Scripta. Topical Issues*, v. 64, p. 1-7, 2001.
- [3] Oliveira A. C., Aspectos do Limite Clássico da Mecânica Quântica e Expansão Semi-Clássica, Tese de doutorado, UFMG, (2004).
- [4] Peixoto de Faria, J. G., Aspectos do Entrelaçamento em Sistemas Abertos, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais,(2000).
- [5] A. C. Oliveira, M. C. Nemes, K. M. F. Romero, Quantum time scales and the classical limit: Analytic results for some simple systems, *Phys. Rev. E* 68 (3) (2003) 036214.
- [6] Oliveira, Adélcio C.; Junior, Zolacir T. Oliveira; Correia, Nestor S. Complementarity and Classical Limit of Quantum Mechanics: Energy Measurement aspects, arXiv:1307.0528
- [7] Oliveira, A. C. de; Zolacir T. O. jr ; N. S. Correia. Quantum noise and its importance to the quantum classical transition problem: energy measurement aspects. In: XVI Encontro de Modelagem Computacional, IV Encontro de Ciência e Tecnologia dos Materiais e III Encontro Regional de Matemática e Computacional, 2013, Ilhéus. Anais do 16^o EMC / 4^o ECTM / 3^o ERMAC, 2013.
- [8] R. M. Angelo, Low-resolution measurements induced classicality, arXiv:0809.4616.

BIBLIOGRAFIA

- [9] A. C. Oliveira, Classical limit of quantum mechanics induced by continuous measurements, *Physica A* 393 (2014) 655–668.
- [10] S. Ghose and B. C. Sanders, *La Physique au Canada* 63, 173 (2007).
- [11] K. Jacobs, D. A. Steck, A straightforward introduction to continuous quantum measurement, *Contemp. Phys.* 47 (5) (2006) 279–303.
- [12] T. Bhattacharya, S. Habib, K. Jacobs, Continuous quantum measurement and the emergence of classical chaos, *Phys. Rev. Lett.* 85 (23) (2000) 4852.
- [13] T. Bhattacharya, S. Habib, K. Jacobs, Continuous quantum measurement and the quantum to classical transition, *Phys. Rev. A* 67 (4) (2003) 042103.
- [14] W. H. Zurek, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, *Rev. Mod. Phys.* 75 (3) (2003) 715.
- [15] W. H. Zurek, Decoherence and the transition from quantum to classical—revisited, *Los Alamos Sci.* 27 (27) (2002) 86–109.
- [16] A. C. Oliveira and J. G. Peixoto de Faria and M. C. Nemes, *Phys Rev. E* **73**, 046207 (2006).
- [17] F. Toscano, R. L. de Matos Filho, L. Davidovich, Decoherence and the quantum-classical limit in the presence of chaos, *Phys. Rev. A* 71 (2005) 010101.
- [18] A. C. Oliveira, and A. R. Bosco de Magalhães, *Phys. Rev. E* 80 (2009) 026204.
- [19] Monika Bartkowiak, Adam Miranowicz, Xiaoguang Wang, Yu-xi Liu, Wieslaw Leonski, and Franco Nori *Phys. Rev. A* 83, (2011) 053814.
- [20] A. C. Oliveira, A. R. Bosco de Magalhães and J. G. P. De Faria, *Physica A* 391 (2012) 5082–5089.
- [21] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. 32 Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, L. G. Lutterbach, and L. Davidovich *Phys. Rev. A* 62, 054101 (2000).

BIBLIOGRAFIA

- [22] L. G. Lutterbach and L. Davidovich, *Phys. Rev. Lett.*, V. 78, p. 2547, 1997.
- [23] K. Banaszek, C. Radzewicz, K. Wódkiewicz, and J. S. Kasiński *Phys. Rev. A* 60, 674.
- [24] U. Leonhardt, *Essential Quantum Optics: From Quantum Measurements to Black Holes*, Cambridge University Press, 2010.
- [25] Y. Aharonov, D. Falkoff, E. Lerner, H. Pendleton, A quantum characterization of classical radiation, *Ann. Phys.* 39 (1966) 498.
- [26] P. Carruthers, M. M. Nieto, Phase and angle variables in quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.* 40 (1968) 411.
- [27] M. Hillery, Classical pure states are coherent states, *Phys. Lett. A* 111 (1985) 409.
- [28] L. Mandel, Sub-poissonian photon statistics in resonance fluorescence, *Opt. Lett.* 4 (1979) 205.
- [29] C. T. Lee, Higher-order criteria for nonclassical effects in photon statistics, *Phys. Rev. A* 41 (1990) 1721.
- [30] G. S. Agarwal, K. Tara, Nonclassical character of states exhibiting no squeezing or sub-poissonian statistics, *Phys. Rev. A* 46 (1992) 485.
- [31] C. T. Lee, Generalized Q parameters and their evolution under continuous photodetection, *Quant. Opt.* 6 (1994) 27.
- [32] D. N. Klyshko, Observable signs of nonclassical light, *Phys. Lett. A* 213 (1996) 7.
- [33] M. Hillery, Nonclassical distance in quantum optics, *Phys. Rev. A* 35 (1987) 725.
- [34] V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, A. Wünsche, Hilbertschmidt distance and non-classicality of states in quantum optics, *J. Mod. Opt.* 47 (2000) 633.
- [35] A. Wünsche, V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, Nonclassicality of states in quantum optics, *Fortschr. Phys.* 49 (2001) 1117–1122.

BIBLIOGRAFIA

- [36] P. Marian, T. A. Marian, H. Scutaru, Quantifying nonclassicality of one-mode gaussian states of the radiation field, *Phys. Rev. Lett.* 88 (15) (2002) 153601.
- [37] V. V. Dodonov, M. B. Renó, Classicality and anticlassicality measures of pure and mixed quantum states, *Phys. Lett. A* 308 (2003) 249-255.
- [38] P. Marian, T. A. Marian, H. Scutaru, Distinguishability and nonclassicality of one-mode gaussian states, *Phys. Rev. A* 69 (2004) 022104.
- [39] R. Nair, Nonclassical distance in multimode bosonic systems, *Phys. Rev. A* 95 (2017) 063835.
- [40] S. Ryl, J. Sperling, E. Agudelo, M. Mraz, S. Köhnke, B. Hage, W. Vogel, Unified nonclassicality criteria, *Phys. Rev. A* 92 (2015) 011801.
- [41] S. Ryl, J. Sperling, W. Vogel, Quantifying nonclassicality by characteristic functions, *Phys. Rev. A* 95 (2017) 053825.
- [42] A. Kenfack, K. Życzkowski, Negativity of the wigner function as an indicator of non-classicality, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 6 (10) (2004) 396.
- [43] A. Kowalewska-Kudłaszyk, J. K. Kalaga, W. Leoński, Wigner-function nonclassicality as indicator of quantum chaos, *Phys. Rev. E* 78 (6) (2008) 066219.
- [44] H. C. F.Lemos, A. C. L. Almeida, B. Amaral, A. C. Oliveira, *Physics Letters A* , 382 (2018), 823-836.
- [45] M. Reis e Silva Jr and A. C. Oliveira, SBFoton International Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC), (2018) 1-5.
- [46] Feynman, Richard P., *Lições de física de Feynman: edição definitiva*/Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands; tradução Adriana Válio Roque da Silva ...[et al.]. Volume 1, Cap 21-1. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- [47] J.B. Marion, S .T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5th Edition (Brooks/Cole- Thomson Learning, 2004),p.100.

BIBLIOGRAFIA

- [48] Bosco de Magalhães A. R., d'Ávila Fonseca C. H., Nemes M. C., Classical and quantum coupled oscillators: Symplectic structure. *Physica Scripta*, 74, 472–480.(2006).
- [49] Sakurai, J. J., and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. doi:10.1017/9781108499996.
- [50] D.J.Griffiths, Reed College, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2th Edition (Pearson Universidades, 2004),p.2.
- [51] Wolfgang P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, 1th Edition, Wiley-VCH Verlag Berlin GmbH, Berlin,p.322, 2001
- [52] L. E. Ballentine, Lyapunov exponents for the differences between quantum and classical dynamics, *Phys. Rev. A* 63 (2) (2001) 024101.
- [53] L. E. Ballentine, S. M. McRae, Moment equations for probability distributions in classical and quantum mechanics, *Phys. Rev. A* 58 (3) (1998) 1799.
- [54] L.E. Ballentine, Y.Yang, J.P. Zibin, Inadequacy of ehrenfest theorem to characterize the classical regime, *Phys. Rev. A* 50 (4) (1994) 2854.
- [55] Reis M.,Oliveira A. C., Roughness as Entanglement Witness: The two Coupled Cavity Model, 2018 SBFoton International Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC), Campinas, 2018, pp. 1-5. doi: 10.1109/SBFoton-IOPC.2018.8610886
- [56] Mandel L., Wolf E., *Optical coherence and quantum optics*. 1 ed.Cambridge, Cambridge University Press. 1995. p.1034-1040.