

Caracterização de Osciladores Mecânicos no Espaço dos Parâmetros de Controle

Gilson Vieira Soares

Orientador: Prof. Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza
Co-orientador: Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei, em associação ampla com as Universidades Federais de Alfenas e Lavras, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria (CEFET-MG)
Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira (DEFIM/UFSJ)
Prof. Dr. Ricardo de Carvalho Falcão (DEFIM/UFSJ)
Prof. Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza (DEFIM/UFSJ)
Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira (DEFIM/UFSJ)

Minha filha...

o sorriso mais lindo!

*Não importa onde você parou...
em que momento da vida você cansou...
o que importa é que sempre é possível e necessário "Recomeçar".
Recomeçar é dar uma nova chance a si mesmo...
é renovar as esperanças na vida e o mais importante...
acreditar em você de novo...
Sofreu muito nesse período? Foi aprendizado.
Chorou muito? Foi limpeza da alma.
Ficou com raiva das pessoas? Foi para perdoá-las um dia.
Tem tanta gente esperando apenas um sorriso seu para "chegar" perto de você.
Recomeçar...
hoje é um bom dia para começar novos desafios.
Onde você quer chegar?
Ir alto... Sonhe alto...
queira o melhor do melhor...
pensando assim trazemos para nós aquilo que desejamos...
Se pensarmos pequeno coisas pequenas teremos...
Já se desejarmos fortemente o melhor e principalmente lutarmos pelo melhor,
o melhor vai se instalar em nossa vida.
Porque sou do tamanho daquilo que vejo, e não do tamanho da minha altura.*

Carlos Drummond de Andrade, "Recomeçar"

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe pela vida. Uma mulher batalhadora que entregou seu amor, paciência e suor para que eu pudesse chegar até aqui. Eu te amo!

Agradeço a minha esposa Luiza pelo amor, companheirismo, dedicação e, principalmente, por ter acreditado em mim quando nem eu acreditava mais. Eu te amo Dona Maria!

Agradeço a todos os meus familiares e amigos que sempre me apoiaram.

Agradeço ao Silvio, meu orientador, por ter me dado a oportunidade de aprender e chegar até aqui. Sua orientação, conhecimento e rigor acadêmico foram muito importantes para esse trabalho.

Agradeço ao Denis pela coorientação e presença maciça no desenvolvimento desse trabalho. Sempre solícito e paciente comigo, sem sua colaboração, esse trabalho não seria possível.

Não posso deixar de mencionar todos os professores, funcionários e alunos do CAP que sempre me apoiaram. Três professores merecem uma menção explícita: Falcão, Celestino e Humberto. Muito obrigado.

Em especial, agradeço ao Adélcio por contribuir diretamente na realização desse trabalho. Mais do que isso, agradeço pela amizade, apoio e paciência. Obrigado.

Agradeço ao grande amigo e companheiro Eloy pelas horas de conversa sobre variados assuntos sempre acompanhadas de um palheiro. Valeu!

Não poderia esquecer da minha amiga Josiane. Sempre me apoiou e ajudou quando precisei. Obrigado prefeita.

Agradeço a CAPES pelo fundamental apoio financeiro.

Por fim, porém mais importante, agradeço a minha filha Yasmin. Você é a melhor coisa que me aconteceu na vida. Se existe um sentido para a vida, eu descobri o meu. O sentido da minha vida é viver para ser seu pai. Eu te amo meu Bebezão!

RESUMO

Nesse trabalho, investigamos a dinâmica caótica de dois sistemas: um oscilador de Duffing não-ideal e uma viga de Bernoulli-Euler com fundação elástica não-linear. Usando os expoentes de Lyapunov, caracterizamos os sistemas no espaço de parâmetros bidimensional identificando as janelas periódicas denominadas línguas de Arnold e camarões. Além disso observamos a coexistência de atratores e bacias de atração com fronteiras fractais.

Palavras chave: oscilador de Duffing não-ideal, viga de Bernoulli-Euler, caos, camarões, expoentes de Lyapunov, bifurcações, fractais.

ABSTRACT

In this work we investigate the chaotic dynamic of two systems: a Duffing non-ideal oscillator and a Bernoulli-Euler cantilever with non-linear elastic foundation. Using Lyapunov exponents we characterize the systems in a bidimensional parameter space identifying periodic windows, such as Arnold tongues and shrimp-shaped structures. In addition, we identify coexistence of attractors and basins of attraction with fractal boundaries.

Keywords: Duffing non-ideal oscillator, Bernoulli-Euler cantilever, chaos, shrimp-shaped structure, Lyapunov exponent, bifurcation, fractal.

Sumário

1	Introdução	1
2	Sistemas Dinâmicos	5
2.1	Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem	5
2.2	Sistema de Rössler e Oscilador de Duffing	8
2.3	Conceitos de Sistemas Dinâmicos	10
2.3.1	Soluções Numéricas: Periódicas e Caóticas	10
2.4	Diagrama de Bifurcação	14
2.5	Expoentes de Lyapunov	17
2.5.1	O algoritmo de Wolf	21
2.5.2	Expoentes de Lyapunov: Sistema de Rössler	23
2.5.3	Expoentes de Lyapunov: Oscilador de Duffing	24
2.5.4	Diagrama do Espaço de Parâmetros	26
2.6	Conclusões	29
3	Oscilador de Duffing Não-Ideal	31
3.1	Modelo Matemático	31
3.2	Algoritmos Numéricos	33
3.3	Resultados Numéricos e Discussão	36
3.4	Conclusões	50

4	Vibração de uma Viga com Fundação Elástica Não-Linear	51
4.1	Modelo Matemático	51
4.2	Algoritmos Numéricos	55
4.3	Resultados Numéricos e Discussão	56
4.4	Conclusões	65
5	Conclusões	67
	Referências Bibliográficas	69

1 Introdução

Entre muitos trabalhos pioneiros em teoria do caos, vale ressaltar o célebre estudo realizado por Lorenz [1]. Em seu trabalho, Lorenz desenvolveu um modelo para estudar o fenômeno da convecção de massas gasosas na alta atmosfera. Tal modelo é descrito por três equações diferenciais de primeira ordem. A solução do sistema de equações mostrou uma dinâmica bastante complexa e irregular e, especialmente, sensibilidade às condições iniciais. Anos depois, o comportamento irregular e dependente das condições iniciais foi denominado *Caos* pelo professor J.A. Yorke [2].

Diversos trabalhos teóricos e experimentais de sistemas caóticos em Física foram realizados [3–7]. Não obstante, o estudo da Teoria do Caos não se limitou aos sistemas físicos. Durante as últimas décadas, a teoria mostrou um caráter multidisciplinar, com trabalhos realizados em diversas áreas. Verificou-se caos em Biologia [8], Química [9], Economia [10], Engenharias [11, 12] e outras áreas do conhecimento.

No presente trabalho, o nosso interesse é voltado para o caos aplicado a sistemas mecânicos, que tem sido objeto de estudo de físicos e engenheiros. Sistemas mecânicos simples, como por exemplo, um pêndulo forçado, podem exibir caos.

Um importante sistema de estudo para sistemas caóticos é o oscilador de Duffing [13]. Tal equação descreve um oscilador sujeito a uma força restauradora não-linear e a um amortecimento. O sistema é alimentado por uma força externa periódica. Tal sistema já foi amplamente investigado e usado para modelar vários sistemas e, claro, para modelar sistemas mecânicos [14–17].

O oscilador de Duffing exibe caos para uma série de intervalos de valores de parâmetros, por exemplo, a constante de amortecimento, a amplitude da força externa e a frequência desta. Variados fenômenos não-lineares foram observados para esse sistema, para citar alguns temos: atratores caóticos, intermitência, crise, coexistência de atratores e bifurcações de período.

Em nosso trabalho vamos investigar o comportamento de dois sistemas mecânicos. O primeiro é um oscilador de Duffing não-ideal. O caráter não-ideal do oscilador se deve ao fato de que ele é alimentado por um motor desbalanceado que interage com o sistema oscilando junto. O segundo sistema é uma viga de Bernoulli-Euler engastada que vibra pela ação de uma força externa periódica.

Diversas técnicas de análise para sistemas caóticos serão utilizadas em nosso trabalho. Atenção especial tem sido dada nos últimos anos para a compreensão de sistemas caóticos no espaço de parâmetros bidimensional. Tal técnica tem sido utilizada amplamente para variados sistemas [18–22].

O espaço de parâmetros, tanto para sistemas de tempo discreto (mapas) quanto para sistemas de tempo contínuo (equações diferenciais), tem mostrado a existência de estruturas periódicas denominadas camarões (*shrimps*) imersas em regiões de caos. Essas estruturas são dotadas de auto-similaridade, ou seja, possuem o mesmo aspecto em diferentes escalas. Em nosso trabalho, devido a riqueza de fenômenos não-lineares, o espaço de parâmetros bidimensional constitui a principal técnica de análise.

No capítulo 2 apresentamos os principais conceitos da Teoria de Sistemas Dinâmicos, teoria essa que contém o ferramental matemático da Teoria do caos. Os conceitos serão apresentados de forma bastante sucinta e objetiva, com ênfase especial, aos expoentes de Lyapunov, que serão utilizados para a construção do diagrama do espaço de parâmetros para o sistema de Rössler e o oscilador de Duffing.

No capítulo 3 apresentamos o oscilador de Duffing Não-ideal [37]. O modelo ma-

temático será apresentado e as equações de movimento obtidas pelo formalismo Lagrangeano [23]. Os resultados numéricos são séries temporais, retrato de fase, expoentes de Lyapunov, diagramas de bifurcação, bacias de atração e o diagrama do espaço de parâmetros.

No capítulo 4 consideramos a dinâmica temporal de uma viga de Bernoulli-Euler [24] apoiada sobre uma fundação elástica não-linear. Uma aproximação para a solução temporal será proposta. Serão utilizadas as mesmas técnicas do capítulo 3.

Por fim no capítulo 5 apresentamos as conclusões dos resultados obtidos para os dois modelos estudados.

Nesse trabalho as soluções numéricas das equações de movimento são obtidas pelo algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo fixo. O ambiente de trabalho é o *Linux*. Os algoritmos numéricos foram desenvolvidos na linguagem C++. Os gráficos e diagramas foram gerados no GNUPLOT.

2 Sistemas Dinâmicos

Nesse capítulo vamos apresentar as principais técnicas de análise numérica e os conceitos mais importantes associados à teoria de sistemas dinâmicos e que serão utilizados em nosso trabalho. Todo o conteúdo desse capítulo é de amplo conhecimento e está amparado por farta literatura. Alguns dos livros sobre sistemas dinâmicos que utilizamos para embasar o capítulo são [25–30].

Em seguida, vamos aplicar de forma sucinta, os procedimentos enunciados ao sistema de Rössler e ao oscilador de Duffing. Tal oscilador foi utilizado para modelar vários sistemas e também se encontra na literatura uma vasta quantidade de referências de sua utilização.

Ademais, a importância desse capítulo é introduzir conceitos e nomenclaturas típicos da teoria de sistemas dinâmicos da forma mais simples possível. Assim, mostrar que, se um sistema físico qualquer tem sua evolução temporal descrita por equações diferenciais ordinárias não-lineares, ele pode ser abordado de maneira bastante geral como descrito aqui.

2.1 Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Seja um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem descrito pelas variáveis $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. Define-se o *espaço de fase* como sendo um espaço n -dimensional em que cada um de seus eixos corresponde a cada uma das variáveis x_i com ($i =$

$1, 2, \dots, n$). Assim, um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) , \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) , \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) ,\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde \dot{x}_i denota a derivada de x_i em relação a uma variável independente que, para o nosso interesse, será o tempo t .

O sistema (2.1) é dito *autônomo*, pois as variáveis \dot{x}_i não dependem explicitamente do tempo. Caso as variáveis x_i dependam explicitamente do tempo, como a seguir, o sistema é dito *não-autônomo*:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) , \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) , \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) .\end{aligned}\tag{2.2}$$

Um sistema não-autônomo pode ser transformado em autônomo com a adição de uma nova dimensão ao espaço de fase. Fazendo $x_{n+1} = t$, o sistema (2.2) adquire a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) , \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) , \\
&\vdots \quad \vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) , \\
\dot{x}_{n+1} &= 1 .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

A solução de um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem, em especial, equações não-lineares, muitas vezes não possui solução analítica. Dessa forma usamos métodos numéricos. Um método bastante comum e robusto é o algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem. Para a implementação do algoritmo, necessitamos das condições iniciais, o intervalo da solução e o passo Δt de aplicação do algoritmo. Em nosso trabalho o método de Runge-Kutta de 4ª ordem será utilizado amplamente.

Uma equação diferencial de ordem n pode ser transformada em um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem (sistema autônomo) ou $n + 1$ (sistema não-autônomo). Por exemplo, seja a seguinte equação diferencial de 2ª ordem:

$$\ddot{x} + c_1(t)\dot{x} + c_2(t)x - F(t) = 0 . \tag{2.4}$$

Com a introdução das variáveis $x_1(t) \equiv x(t)$, $x_2(t) \equiv \dot{x}$ e $x_3 \equiv t$, o sistema (2.4) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 , \\
\dot{x}_2 &= F(x_3) - c_1(x_3)x_2 - c_2(x_3)x_1 , \\
\dot{x}_3 &= 1 ,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

com condições iniciais $x_1(0) = x(0)$, $x_2(0) = \dot{x}(0)$ e $x_3(0) = t_0$.

Tal técnica será utilizada em nosso trabalho, pois, como veremos, as equações em estudo serão de segunda ordem.

2.2 Sistema de Rössler e Oscilador de Duffing

Como exemplo de sistema autônomo, ou seja, da forma descrita em (2.1), temos o conhecido sistema de Rössler [31]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) , \\ \dot{y} &= x + ay , \\ \dot{z} &= b + z(x - c) ,\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde a , b e c são parâmetros de controle positivos.

Os parâmetros de controle são quantidades que influenciam na dinâmica do sistema. Seja um experimento que visa determinar o período de um pêndulo simples, por exemplo. Alterações no comprimento do pêndulo modificam o período deste. Assim, o comprimento do pêndulo é um parâmetro de controle. Um sistema pode ter vários parâmetros de controle.

Esse sistema é considerado um protótipo do modelo de Lorenz e foi objeto de um amplo estudo numérico por Castro e colaboradores [32]. Vamos reproduzir, de forma simplificada, os resultados de nosso interesse.

Como outro exemplo de sistema, temos o oscilador de Duffing, que é uma equação diferencial de segunda ordem não-linear da forma

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = B \cos t ,\tag{2.7}$$

onde k , B , α , β são parâmetros de controle. Em nosso estudo, consideramos $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

Tal sistema descreve um oscilador com dissipação proporcional à velocidade e sujeito a uma força restauradora não-linear da forma cúbica. Ele é alimentado por uma força externa periódica com amplitude B . Em princípio, o oscilador é um sistema não-autônomo. Entretanto, ele pode ser considerado autônomo se não houver força externa, ou seja, se estudarmos as oscilações livres. Para isto basta fazer $B = 0$.

Vamos aqui, tratar do sistema dependente do tempo, tal qual foi feito por Bonnato e colaboradores [33]. No referido trabalho, os autores realizaram uma extensa verificação do comportamento do oscilador no chamado *diagrama do espaço de parâmetros* (essa técnica será desenvolvida nas próximas seções).

Vamos transformar a equação (2.7) em três equações de primeira ordem, bem como, realizar as substituições $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ e $x_3 = t$. Dessa forma, o sistema agora é autônomo dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= B \cos x_3 - kx_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_3 &= 1,\end{aligned}\tag{2.8}$$

e as condições iniciais são $x_1(0) = x(0)$, $x_2(0) = \dot{x}(0)$ e $x_3(0) = t_0$.

Para o nosso trabalho, o estudo do oscilador de Duffing dependente implícita e explicitamente do tempo tem fundamental importância. O sistema de Rössler possui papel auxiliar para o entendimento de sistemas autônomos (um primeiro problema será apresentado no capítulo 3). Nas seções seguintes faremos a apresentação de vários conceitos e técnicas de análise. Tomaremos os sistemas (2.6) e (2.7) como base para um estudo numérico e, posteriormente, à aplicação para o objeto de estudo dessa

dissertação.

2.3 Conceitos de Sistemas Dinâmicos

Um ponto no espaço de fase (x_1, x_2, \dots, x_n) determina o estado atual do sistema em estudo. À medida que o sistema evolui no tempo, tal ponto realiza curvas no espaço (fechadas ou não).

Seja V_0 um volume de condições iniciais no espaço de fase que contém as várias possibilidades pelas quais o sistema pode se iniciar. Após um tempo Δt , esse volume pode estar em outra região do espaço de fase. Se, após um intervalo de tempo suficientemente longo, denominado *transiente*, o volume V_0 for preservado, o sistema é dito *conservativo*. Caso o volume diminua, é dito *dissipativo*.

Em nosso trabalho estudaremos sistemas dissipativos. Uma característica de tais sistemas é que trajetórias no espaço de fase que se iniciem por diferentes condições iniciais, após um transiente determinado, são conduzidas para uma ou mais regiões específicas do espaço. Tais regiões (pontos, curvas ou superfícies) são chamadas de *atratores*. Os atratores determinam o comportamento das trajetórias após um transiente. O termo “atrator” é bastante intuitivo no sentido de que, devido a contração do volume V_0 , as trajetórias são atraídas pelo atrator. Uma vez capturadas pelo atrator as trajetórias ali permanecem.

Um sistema dinâmico pode apresentar, como possíveis comportamentos, atratores periódicos, quase-periódicos e caóticos. Os chamados *parâmetros de controle* juntamente com as condições iniciais determinam para qual atrator o sistema é conduzido.

2.3.1 Soluções Numéricas: Periódicas e Caóticas

Vamos agora apresentar alguns resultados numéricos iniciais do comportamento do sistema de Rössler e do oscilador de Duffing. Em nossas simulações, utilizamos o

algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo fixo $\Delta t = 0,05$.

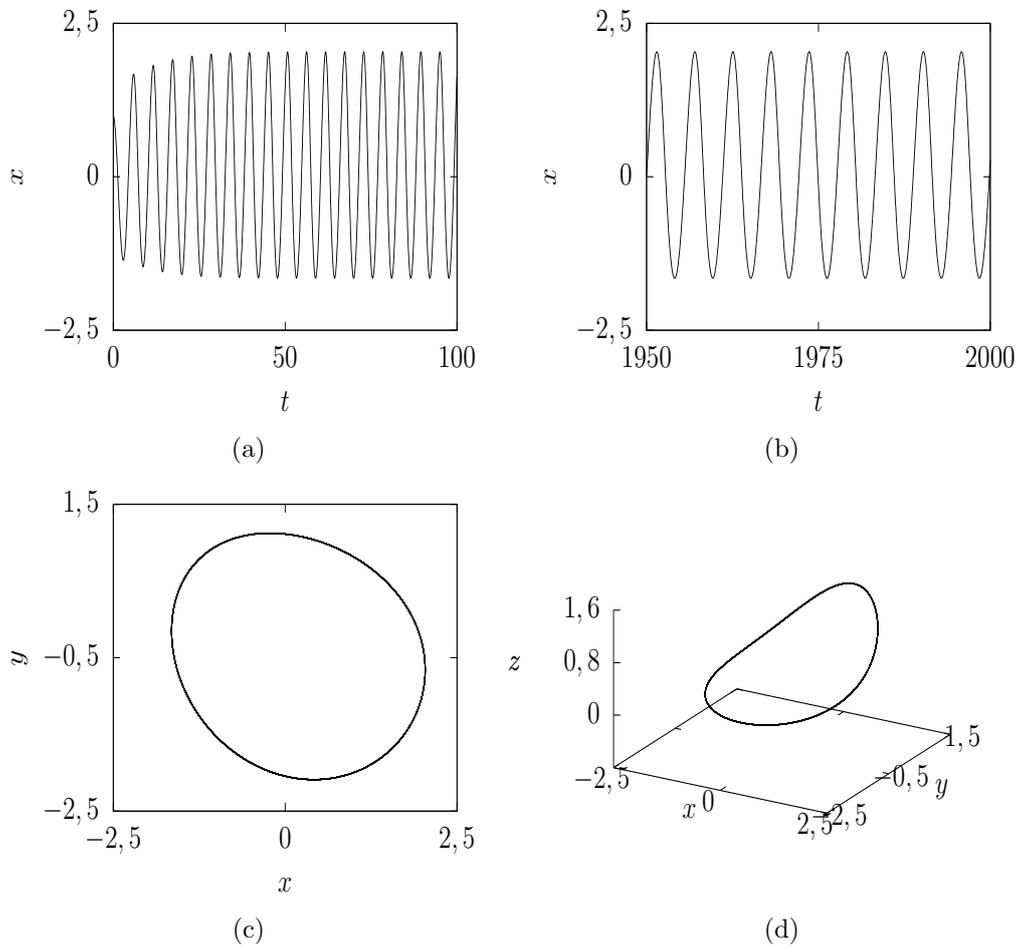


Figura 2.1: Sistema de Rössler com parâmetros $a = b = 0.2$, $c = 1$ e condição inicial $(x, y, z) = (1, 0, 0)$:(a) evolução temporal $x(t)$ com os transientes; (b) $x(t)$ após transientes; (c) projeção do espaço de fase no plano (x, y) ; espaço de fase (x, y, z) .

Na figura 2.1(a) bem como na 2.2(a) vemos, respectivamente, a solução $x(t)$ para o sistema de Rössler e para o oscilador de Duffing com os transientes. Notamos que o sistema leva um certo tempo até as oscilações se estabilizarem, ou seja, atingirem

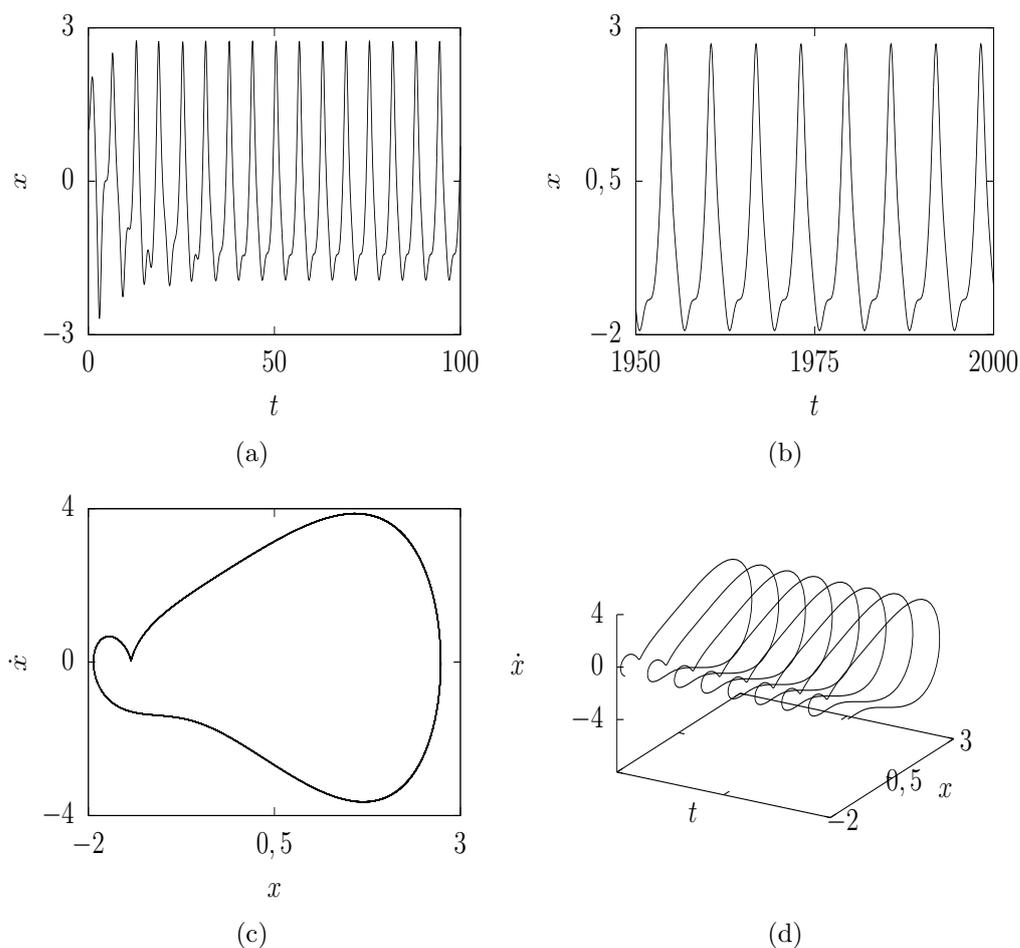


Figura 2.2: Oscilador de Duffing com parâmetros $B = 5$, $k = 0,2$ e condição inicial $(x, \dot{x}, t) = (1, 0, 0)$: (a) evolução temporal $x(t)$ com os transientes; (b) $x(t)$ após transientes; (c) projeção do espaço de fase no plano (x, \dot{x}) ; espaço de fase (x, \dot{x}, t) .

o atrator. O tempo de duração de um transiente varia de sistema para sistema. Nas figuras 2.1(b) e 2.2(b) vemos a solução $x(t)$ após um tempo suficientemente longo, de modo que podemos garantir que o sistema foi conduzido para um atrator. A partir de agora, todas as soluções mostradas serão aquelas após um transiente suficientemente longo. As condições iniciais usadas serão mantidas em todas as simulações e, caso mudem, serão informadas.

Nas figuras 2.1(c) e 2.2(c) observamos trajetórias fechadas em um espaço reduzido chamado de *plano de fase* ou apenas espaço de fase. Essas trajetórias são chamadas

de *ciclos limite*.

Nas figuras 2.1(d) e 2.2(d) temos o espaço de fase completo. No primeiro caso, o espaço é limitado pois se trata de um sistema autônomo. No segundo caso, como existe uma dependência explícita no tempo, não existe essa restrição. Dessa forma, vamos mostrar soluções apenas no espaço de fase reduzido.

Nota-se claramente nas figuras 2.1 e 2.2 que o sistema possui comportamento regular ou periódico. Temos, nas figuras seguintes, soluções periódicas e caóticas. As figuras 2.3 e 2.4 ilustram, respectivamente, soluções periódica e caótica para o sistema de Rössler. Adicionalmente, as figuras 2.5 e 2.6 ilustram atratores periódico e caótico, respectivamente, para o oscilador de Duffing.

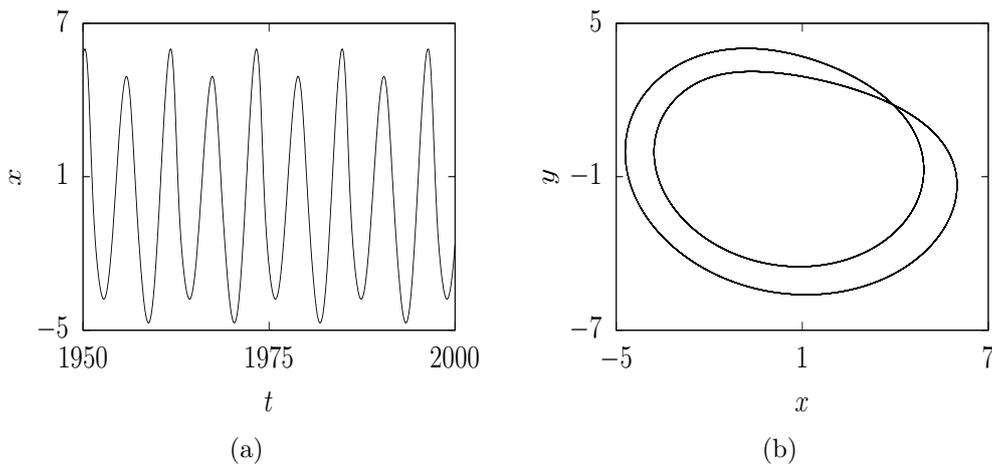


Figura 2.3: Atrator Periódico - Sistema de Rössler com parâmetros $a = b = 0,2$ e $c = 3$: (a) solução $x(t)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (x, y) .

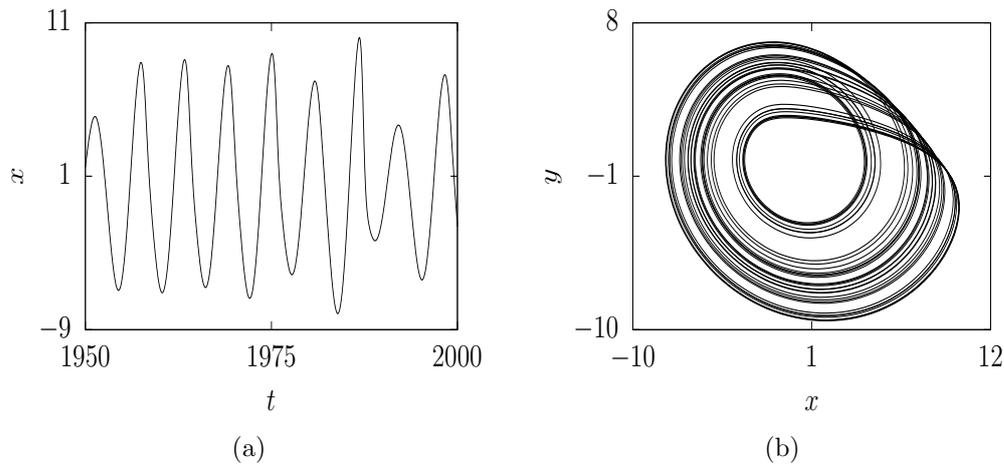


Figura 2.4: Atrator Caótico - Sistema de Rössler com parâmetros $a = b = 0,2$ e $c = 5$:
 (a) solução $x(t)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (x, y) .

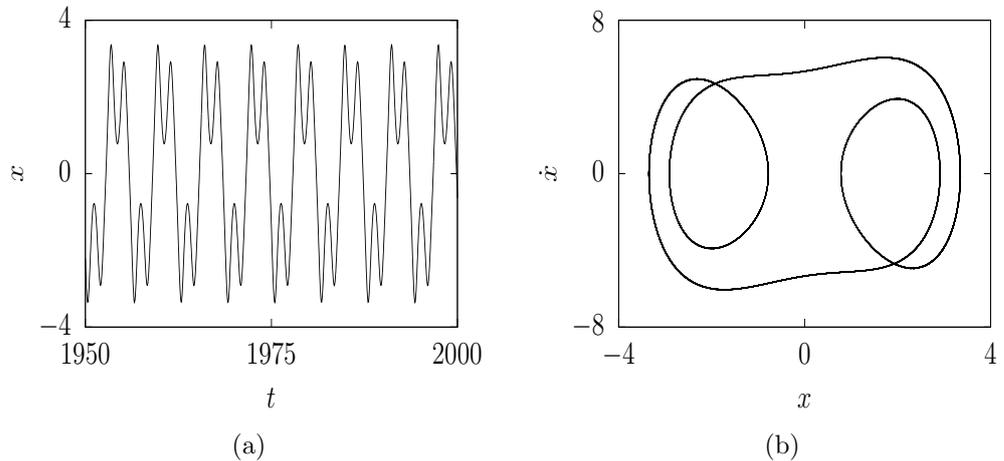


Figura 2.5: Atrator Periódico - Oscilador de Duffing com parâmetros $B = 6$ e $k = 0,4$:
 (a) solução $x(t)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (x, \dot{x}) .

2.4 Diagrama de Bifurcação

Como observado na seção 2.3.1, as soluções dependem dos parâmetros de controle. Um sistema dinâmico pode ter vários parâmetros. Em um experimento, por exemplo, alguns parâmetros podem ser fixados e outros variados de acordo com a necessidade ou relevância. Denomina-se *bifurcação* a mudança qualitativa ou quantitativa do comportamento do sistema quando um ou mais parâmetros são alterados. À medida que

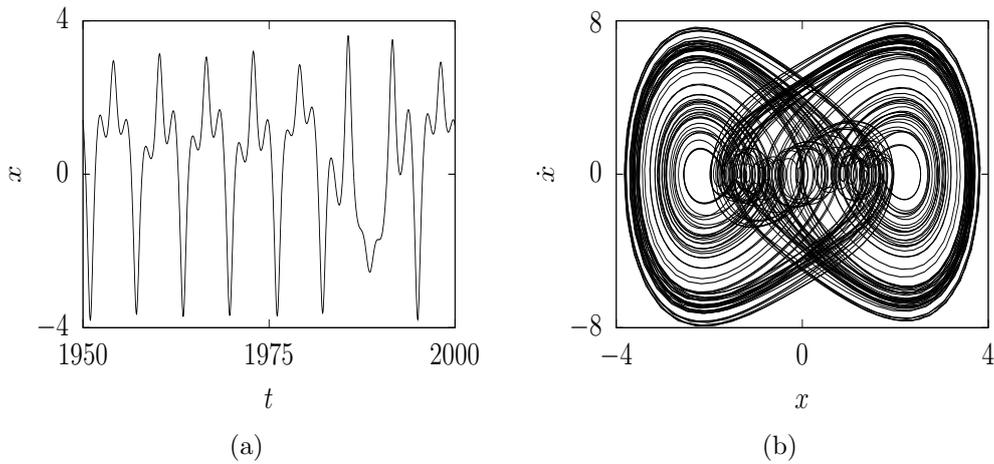


Figura 2.6: Atrator Caótico - Oscilador de Duffing com parâmetros $B = 11$ e $k = 0, 2$:
 (a) solução $x(t)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (x, \dot{x}) .

os parâmetros são alterados, o sistema pode sofrer mudanças suaves ou abruptas em seu comportamento.

Uma importante técnica de análise de sistemas dinâmicos é o chamado *diagrama de bifurcação*. Um diagrama de bifurcação é construído variando-se um ou mais parâmetros do sistema e, para cada conjunto de parâmetros, é verificado o comportamento assintótico de determinada propriedade ou variável dinâmica do sistema. O número de parâmetros que serão variados para se construir o diagrama é chamado de *codimensão da bifurcação*. Por exemplo, se queremos um diagrama de codimensão-2 temos que variar dois parâmetros do sistema. Em nosso trabalho vamos nos concentrar nas bifurcações de codimensão-1.

Para o sistema de Rössler vamos construir um diagrama de bifurcação em que será avaliado o valor máximo da variável x como função do parâmetro c . Analisando a série temporal $x(t)$, quando a derivada \dot{x} muda o seu sinal de positivo para negativo temos o valor máximo de x , ou seja, $\dot{x} = 0$. Assim, o valor máximo é

$$\frac{x_+ + x_-}{2} \tag{2.9}$$

onde x_+ é o valor de x associado a derivada com sinal positivo e x_- o valor referente a derivada negativa.

Para cada novo parâmetro a condição inicial é a mesma e os outros dois parâmetros são mantidos constantes $a = b = 0,2$. A figura 2.7 ilustra o resultado para c no intervalo $[1, 8]$.

Notamos no diagrama regiões claras e escuras. Inicialmente temos um único valor de x máximo que vai crescendo. Próximo de $c = 2,85$ ocorre uma bifurcação onde temos dois novos valores de x . Outras duplicações de x ocorrem até surgir a primeira região escura. Essas sequências de duplicação dos valores de x é denominada *bifurcação de duplicação de período*. As regiões claras são conhecidas como *janelas periódicas*.

Observamos também que, entre regiões de caos, existem regiões claras associadas a órbitas periódicas. Próximo de $c = 5,18$ ocorre um súbito desaparecimento do atrator caótico obtido pela sequência de duplicações de período. Tal evento de bifurcação é denominado *crise*.

Muitas vezes é útil reduzir o intervalo de parâmetros, pois, imersas nas regiões de caos podem existir regiões de movimento regular. Mudando o intervalo de valores de c , podemos, por exemplo, ampliar a primeira região escura.

É fácil notar que a primeira região escura é composta de duas outras regiões claras, e, assim como na figura 2.7, temos o desaparecimento e posterior aparecimento de atratores caóticos.

Assim como no sistema de Rössler, a figura 2.9 ilustra o diagrama de bifurcação para o oscilador de Duffing onde foi utilizado o valor máximo do deslocamento x como função do parâmetro B (amplitude de forçamento externo).

Adicionalmente, temos outro diagrama de bifurcação que amplia a segunda região escura e, observamos que nela temos uma janela periódica.

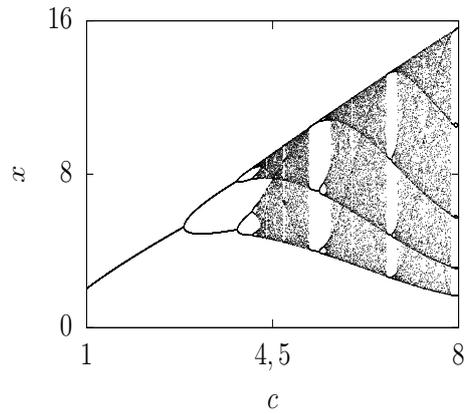


Figura 2.7: Diagrama de Bifurcação - Valor máximo de x em função de c .

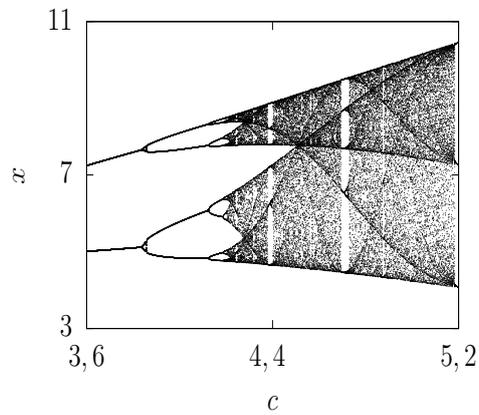


Figura 2.8: Ampliação do gráfico 2.7

2.5 Expoentes de Lyapunov

Se duas trajetórias (com o mesmo conjunto de parâmetros), que se iniciam em posições do espaço de fase muito próximas, se afastam localmente de forma exponencial, o sistema é dito caótico. Essa condição não é a única necessária para se definir

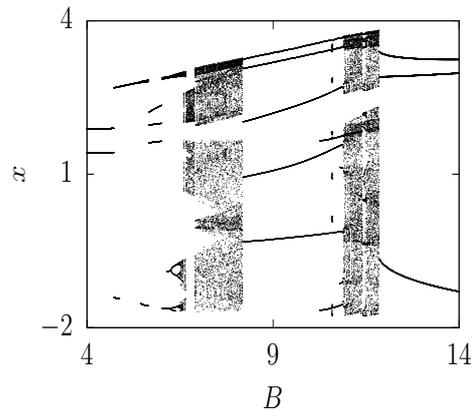


Figura 2.9: Diagrama de Bifurcação - Valor máximo de x em função de B .

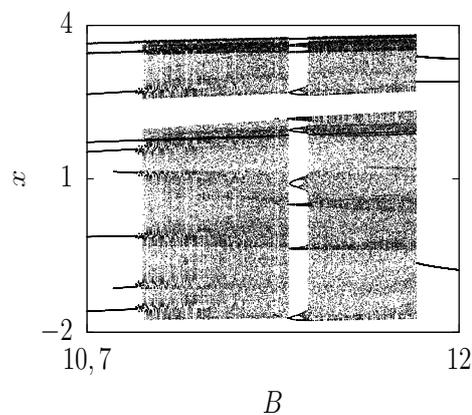


Figura 2.10: Ampliação do gráfico 2.9

caos. Entretanto, vamos nos limitar a ela pois tal condição se verifica em nosso trabalho. Assim sendo, podemos dizer que essa divergência exponencial de órbitas próximas é um “ingrediente” para o caos. O estado final do sistema, no qual as trajetórias vagueiam de forma irregular, é delimitado a uma região igualmente irregular do espaço de fase. Tal estado final do sistema é chamado de atrator caótico. Com a finalidade de definir se um sistema é caótico ou regular vamos lançar mão do conceito de expoentes de Lyapunov.

Seja ε o raio de uma esfera centrada nas condições iniciais de uma trajetória de referência. O centro da esfera no espaço de fase é a condição inicial $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$.

Seja uma outra condição inicial dentro da esfera e muito próxima do centro. Vamos interpretar ε como sendo a incerteza associada a determinação de uma condição no espaço de fase.

Devido a um processo de contração em determinadas direções e expansão em outras direções, a esfera, em curto intervalo de tempo, tende a se tornar um elipsoide. Seja r_1 , r_2 e r_3 os comprimentos dos eixos do elipsoide após um tempo t pequeno. Supondo que as contrações e expansões sejam exponenciais temos

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \varepsilon e^{\lambda_1 t} , \\ r_2(t) &= \varepsilon e^{\lambda_2 t} , \\ r_3(t) &= \varepsilon e^{\lambda_3 t} , \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde $\varepsilon \ll 1$.

Os λ_i definem a expansão ou contração nas direções x_i . Eles são os conhecidos *expoentes de Lyapunov*. Tais expoentes caracterizam o comportamento do sistema em um pequeno intervalo de tempo. Se um sistema tem dimensão n , temos uma hipersfera em um espaço de mesma dimensão, e por conseguinte, n expoentes de Lyapunov, um para cada direção do espaço.

No exemplo em questão, $n = 3$, como estamos interessados no comportamento do sistema a longo prazo, para calcular os λ_i devemos avaliar os raios do elipsoide em um tempo suficientemente grande, ou seja, $t \rightarrow \infty$. Entretanto, com o espaço de fase é limitado, o que se calcula na prática é o expoente de Lyapunov médio. Tomando os logaritmos em ambos os lados de (2.10) e os limites apropriados temos

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left(\frac{r_i(t)}{\varepsilon} \right) \quad i = 1, 2, 3 , \tag{2.11}$$

onde expoentes positivos indicam expansão em determinadas direções e, os negativos, correspondem a contração nas direções correspondentes.

O volume da esfera em $t = 0$ é

$$V(0) = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3, \quad (2.12)$$

e o volume do elipsóide gerado pela expansão-contração da esfera em um tempo t é escrito como

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{4}{3}\pi r_1 r_2 r_3, \\ &= \frac{4}{3}\pi(\varepsilon e^{\lambda_1 t})(\varepsilon e^{\lambda_2 t})(\varepsilon e^{\lambda_3 t}), \\ &= V(0)e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Se o sistema é conservativo, como sabemos, o volume $V(0)$ é preservado, portanto, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Se é dissipativo, o volume diminui, logo, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$.

Em princípio, podemos orientar os semi-eixos da esfera de forma arbitrária desde que sejam ortogonais entre si. Entretanto, é útil que um dos semi-eixos seja orientado ao longo da trajetória seguida pelas condições iniciais (centro da esfera). Dessa forma o expoente de Lyapunov associado à aquela direção é zero.

É importante observar que usamos uma esfera de condições iniciais. Se tivéssemos tomado uma circunferência, ou seja $n = 2$, centrada nas condições iniciais, não poderíamos ter um expoente positivo. Se fosse possível, teríamos um λ positivo e um nulo. A soma dos expoentes seria positiva quando deveria ser negativa ou zero. Nesse contexto, só existe a possibilidade de dois expoentes negativos ou um nulo e o outro negativo.

Assim, notamos que sistemas bidimensionais descritos por equações diferenciais não podem exibir caos. Um sistema que exibe caos possui no mínimo três variáveis (o

tempo pode ser uma) que o descrevem.

Suponha que os expoentes de Lyapunov possam assim ser ordenados $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. O maior expoente de Lyapunov λ_1 é chamado de *expoente dominante* e determina a dinâmica global do sistema. Se o expoente dominante for positivo temos caos.

As possíveis respostas de um sistema tridimensional dissipativo levando em conta os sinais de λ_1 , λ_2 e λ_3 são :

- * Atrator Periódico (0, -, -)
- * Atrator Toro ou Quase-periódico (0, 0, -)
- * Atrator Caótico (+, 0, -)

O atrator toro está associado ao fenômeno de quase-periodicidade e será abordado posteriormente. Em sistemas de quatro ou mais dimensões podemos ter expansão em duas direções. Convencionou-se chamar tal situação de *hipercaos*.

2.5.1 O algoritmo de Wolf

Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov, foi proposto por Wolf e colaboradores [34], um algoritmo que fornece o conjunto dos expoentes de Lyapunov. A ideia central do algoritmo de *Wolf* é estudar, simultaneamente, a dinâmica temporal do sistema no espaço fase (equações de movimento) e no espaço tangente (equações linearizadas via matriz Jacobiana).

A trajetória *fiducial* ou de *referência* é o caminho realizado pelas equações de movimento, aplicada a uma condição inicial, no espaço de fase. De outra forma, essa trajetória define o movimento do centro de uma hiper-esfera, centro esse que é uma condição inicial dentro de um atrator (após transientes). O movimento dos pontos na superfície da esfera é estudado com o auxílio das equações linearizadas. Definindo-se uma base ortonormal $\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n$ com n sendo a dimensão do sistema, os vetores da

base terão seu módulo, direção e sentido governados pelas equações linearizadas. Devido a divergência exponencial, os vetores $\vec{\varphi}$ aumentam em módulo muito rapidamente e tendem a se alinhar na direção com maior taxa de expansão dificultando o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Tal dificuldade é superada pelo algoritmo de Wolf que é bastante utilizado para encontrar os expoentes de Lyapunov de sistemas de tempo contínuo e, portanto, utilizaremos ele em nosso trabalho. A descrição detalhada do algoritmo encontra-se na referência [34] juntamente com um código escrito em FORTRAN com resultados numéricos para alguns sistemas.

A implementação numérica do algoritmo segue basicamente os seguintes passos:

1. Resolve-se numericamente as n equações de movimento, para uma condição inicial arbitrária, até que as trajetórias no espaço de fase sejam capturadas pelo atrator. Temos então uma nova condição inicial (centro da hiper-esfera) dentro do atrator. Define-se n vetores que vão formar uma base ortonormal. Por exemplo, seja $n = 2$, temos $\vec{\varphi}_1 = (1, 0)$ e $\vec{\varphi}_2 = (0, 1)$.
2. Agora, resolve-se as n equações de movimento simultaneamente com as n^2 equações linearizadas. Após um intervalo de tempo h , temos n novos vetores $\vec{\varphi}$ que não formam mais uma base ortonormal.
3. Determinamos o módulo desses novos vetores e armazenamos a quantidade $\ln |\vec{\varphi}_i|$ com $i = 1, 2, \dots, n$.
4. Procede-se a construção de uma nova base ortonormal pelo método de *Gram-Schmidt*.
5. Repete-se as etapas 2, 3 e 4 até que se tenha a precisão desejada.

6. Após N aplicações do algoritmo com intervalo de tempo h , os expoentes de Lyapunov são:

$$\lambda_i = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N \ln |\vec{\varphi}_i|$$

2.5.2 Expoentes de Lyapunov: Sistema de Rössler

O sistema de Rössler é tridimensional. As equações de evolução temporal são:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) = -(x_2 + x_3) , \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + ax_2 , \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) = b + x_3(x_1 - c) . \end{aligned} \quad (2.14)$$

A matriz Jacobiana é

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix} ,$$

onde $J_{m,n} = \frac{\partial \dot{x}_m}{\partial x_n}$ com m e n de 1 até 3. Os eixos da esfera são os vetores $\psi_1 = (x_4, x_5, x_6)$, $\psi_2 = (x_7, x_8, x_9)$ e $\psi_3 = (x_{10}, x_{11}, x_{12})$. As referidas componentes dos vetores ψ_i evoluem temporalmente pelas equações linearizadas dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{3+i} &= J_{11}x_{3+i} + J_{12}x_{6+i} + J_{13}x_{9+i} = -x_{6+i} - x_{9+i} , \\ \dot{x}_{6+i} &= J_{21}x_{3+i} + J_{22}x_{6+i} + J_{23}x_{9+i} = x_{3+i} + ax_{6+i} , \\ \dot{x}_{9+i} &= J_{31}x_{3+i} + J_{32}x_{6+i} + J_{33}x_{9+i} = x_3x_{3+i} + x_1x_{9+i} , \end{aligned} \quad (2.15)$$

com $i = 1, 2, 3$.

A implementação do algoritmo de Wolf exige a solução numérica do sistema (2.14)

juntamente com o sistema (2.15) e leva ao cálculo dos três expoentes de Lyapunov λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Temos então os expoentes de Lyapunov para os atratores periódico e caótico da subseção (2.3.1) com transiente $t = 1000$.

As ampliações foram geradas para enfatizar a existência de um expoente nulo. Por exceção dos expoentes nulos, notamos que, para o atrator periódico, temos dois expoentes negativos. Para o atrator caótico temos um expoente positivo, o que de fato caracteriza o caos.

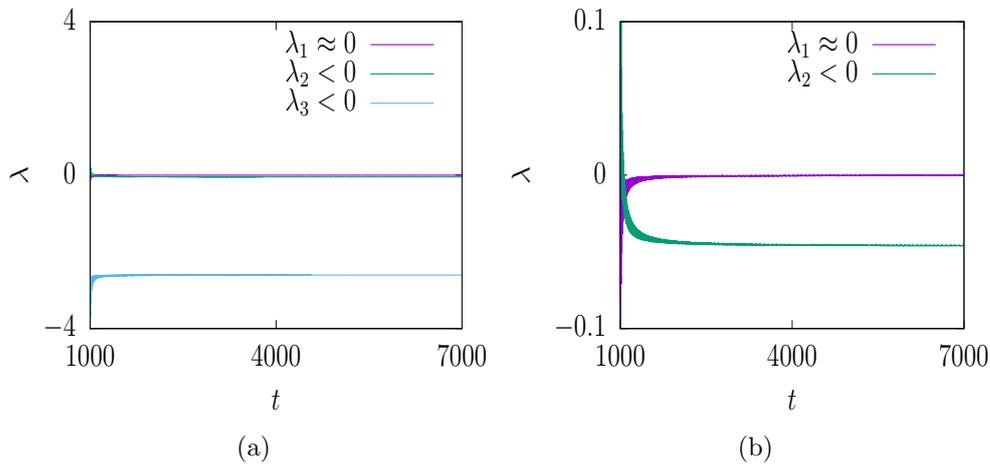


Figura 2.11: Expoentes de Lyapunov do atrator periódico da figura 2.3: (a) $\lambda(t)$; (b) ampliação.

2.5.3 Expoentes de Lyapunov: Oscilador de Duffing

Seguindo os mesmos procedimentos usados para o sistema de Rössler, temos a matriz Jacobiana para o oscilador de Duffing (2.8)

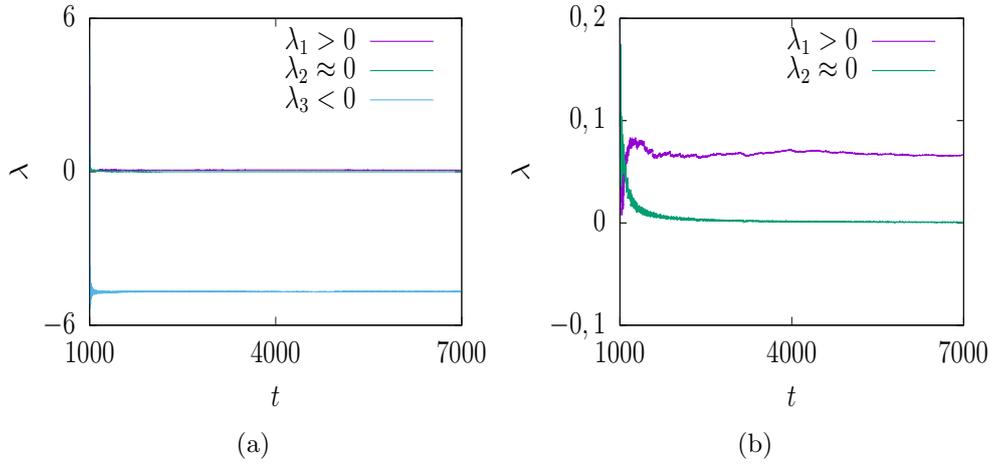


Figura 2.12: Expoentes de Lyapunov do atrator caótico da figura 2.4: (a) $\lambda(t)$; (b) ampliação.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3x_1^2 & -k & -B \sin x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

As 9 equações linearizadas são

$$\begin{aligned} \dot{x}_{3+i} &= x_{6+i} , \\ \dot{x}_{6+i} &= -3x_1^2 x_{3+i} - kx_{6+i} - B \sin x_3 x_{9+i} , \\ \dot{x}_{9+i} &= 0 . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Apresentamos as figuras 2.13(a)(b) que são expoentes de Lyapunov para dois atratores, respectivamente periódico e caótico. A ampliação não foi necessária pois a distinção entre os valores e sinais dos expoentes está evidente. Importante acrescentar que um dos expoentes é identicamente nulo, ou seja, aquela que se refere ao tempo.

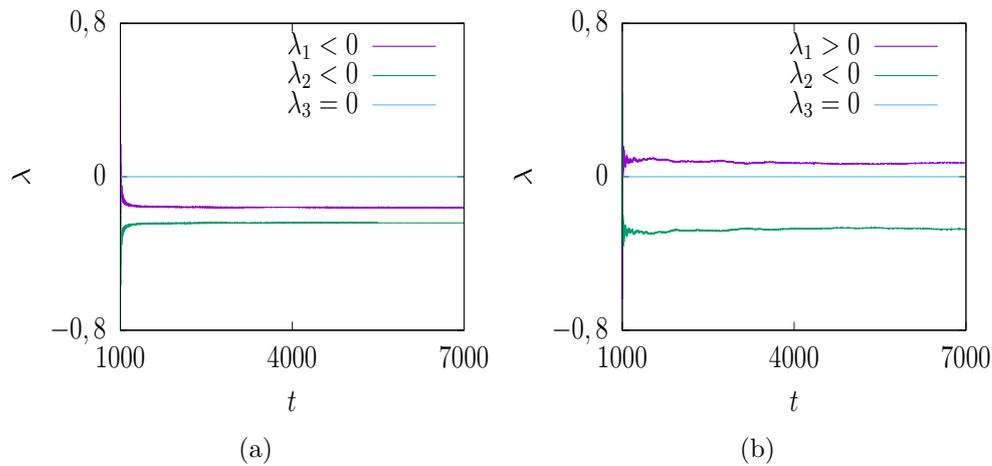


Figura 2.13: Expoentes de Lyapunov para o oscilador de Duffing: (a) $\lambda(t)$ para o atrator periódico da figura 2.5; (b) $\lambda(t)$ para o atrator caótico da figura 2.6.

2.5.4 Diagrama do Espaço de Parâmetros

Uma importante técnica de análise de sistemas que exibem comportamento caótico é o chamado *diagrama do espaço de parâmetros bidimensional*. Tal espaço é composto de um conjunto de par de parâmetros previamente escolhidos. Cada par é plotado com uma cor. O gráfico é então preenchido por uma série de pontos coloridos em que cada cor representa o valor assintótico de alguma propriedade do sistema, ou seja, uma propriedade do atrator do sistema, após o transiente. A propriedade que usaremos aqui é o maior expoente de Lyapunov (exceto aquele que for nulo). Se o maior expoente for positivo temos caos. Se for negativo é periódico.

Em certo sentido, o diagrama do espaço de parâmetros bidimensional pode ser entendido como um diagrama de bifurcação de codimensão-2. À medida que variamos os valores de um par de parâmetros, avaliamos o valor do maior expoente de Lyapunov ao qual atribuímos uma cor. As figuras a seguir foram construídas utilizando usando 600 valores de a e 600 valores de c . Ao final do procedimento temos uma tabela na qual consta o valor do expoente de Lyapunov para cada par de valores de parâmetros. Para

cada par de parâmetros, associamos o valor do expoente de Lyapunov a uma cor usando o Gnuplot. Assim, podemos visualizar o valor do expoente de Lyapunov comparando a cor do ponto no diagrama do espaço de parâmetros com a cor correspondente na paleta de cores ao lado de cada figura.

A figura 2.14(a) ilustra os expoentes de Lyapunov para o sistema de Rössler associados ao espaço de parâmetros a e c . A figura 2.14(b) é a ampliação de uma porção do diagrama do espaço de parâmetros apresentada em (a).

A figura 2.15(a), analogamente às figuras 2.14(a)(b), ilustra os valores dos expoentes de Lyapunov para o oscilador de Duffing no diagrama do espaço de parâmetros k e B .

Para ambos os sistemas, Rössler e Duffing, foi escolhido o seguinte esquema de cores: as regiões em azul se referem a parâmetros que conduzem o sistema a atratores periódicos; as regiões com tons de vermelho, laranja e amarelo são atratores caóticos.

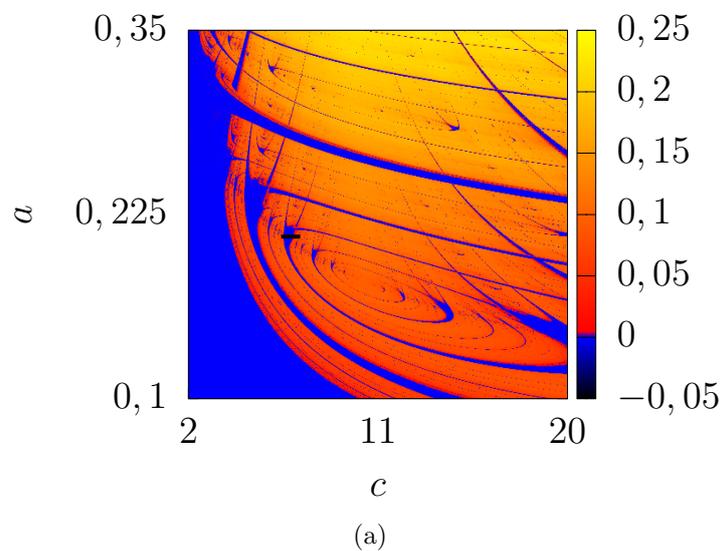


Figura 2.14: Diagrama do espaço de parâmetros para o sistema de Rössler com $b = 0,2$.

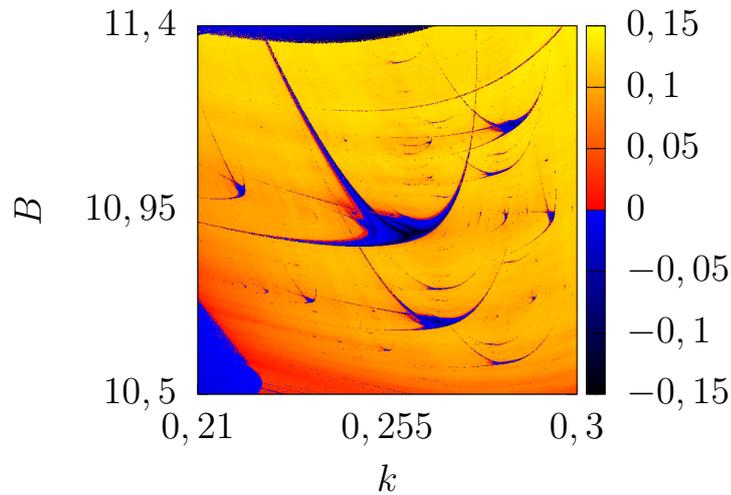


Figura 2.15: Diagrama do espaço de parâmetros para o oscilador de Duffing.

As estruturas periódicas conectadas por espirais, mostradas nas figuras 2.14(a)(b), bem como a várias estruturas mostradas na figura 2.15 são conhecidas como *shrimps* (camarões). Tais estruturas foram obtidas em vários estudos de funções iteradas (mapas) [35, 36]. Ainda assim, como mostrado, para sistemas de tempo contínuo, tais estruturas imersas em regiões caóticas do diagrama do espaço de parâmetros podem aparecer e, portanto, sua compreensão é importante para nós.

Os *shrimps* possuem um corpo central *skeleton* (esqueleto), e quatro extremidades alongadas em 4 direções diferentes. A estrutura periódica, *shrimp*, se separa da região caótica, por eventos de bifurcação, quais sejam, crise (resultante de uma bifurcação sela-nó) e duplicação de período, que são possíveis rotas para o caos. Dessa forma, com a variação dos parâmetros, para “entrar” na estrutura ou “sair” dela é necessário que ocorram as bifurcações mencionadas.

O diagrama de bifurcação, figura 2.16(a), mostra duas regiões caóticas e uma janela periódica. A janela periódica, em questão, corresponde a uma das estruturas periódicas da figura 2.14 indicada por um pequeno segmento de reta horizontal. Fixando o parâmetro a e variando c , observamos que “entramos” na estrutura periódica por um

evento de crise e “saímos” da mesma por sucessivas duplicações de período que levam ao caos, como mostrado na figura 2.16(b), que é uma ampliação da figura anterior.

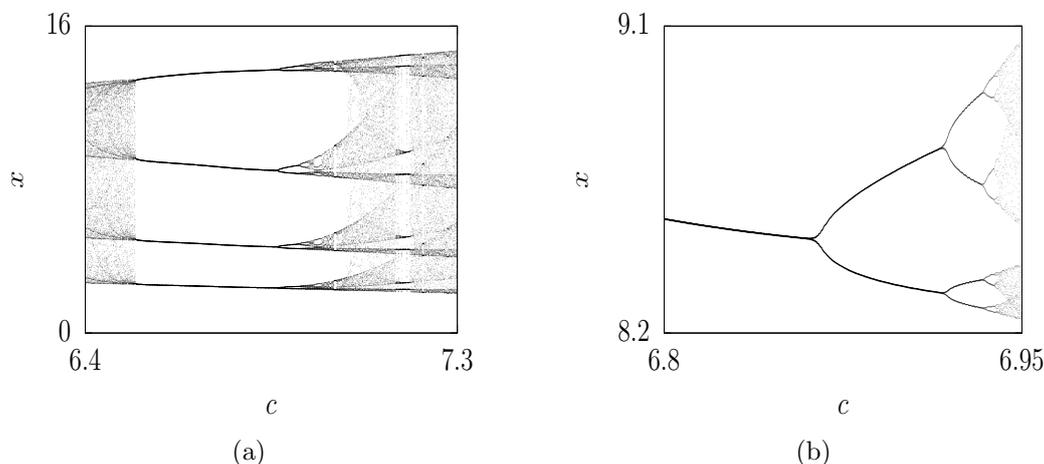


Figura 2.16: (a) Diagrama de bifurcação para um dos *shrimps* da figura 2.14 como função do parâmetro c com $a = 0.21$; (b) ampliação do diagrama mostrando as duplicações de período ocorridas.

2.6 Conclusões

No presente capítulo foram apresentados, de forma simplificada, os principais conceitos da teoria de sistemas dinâmicos. Foi definido, principalmente, os conceitos de: espaço de fase, sistemas autônomos, não-autônomos, diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov.

Adicionalmente, foram apresentados de forma sucinta, os passos necessários para se computar o espectro dos expoentes de Lyapunov, ou seja, o algoritmo de Wolf. De posse de tal algoritmo, foi construído os diagramas do espaço de parâmetros de controle.

Foram realizadas simulações numéricas para o sistema de Rössler e para o oscilador de Duffing. Os resultados numéricos foram séries temporais, projeções do espaço de

fase, diagramas de bifurcação, evolução temporal dos expoentes de Lyapunov e os diagramas do espaço de parâmetros.

Por fim, verificamos no espaço de parâmetros, para ambos os sistemas, estruturas periódicas *shrims*. Tais estruturas tem sido alvo de estudos nos últimos anos e, como veremos nos próximos capítulos, se mostram presentes neste trabalho.

3 Oscilador de Duffing Não-Ideal

Neste capítulo vamos estudar um sistema mecânico acoplado, que é o oscilador de Duffing Não-Ideal. O sistema consiste de um *cart* e, acoplado a ele, temos um pêndulo. O sistema composto é alimentado por um motor de corrente contínua com potência limitada.

O caráter não-ideal desse sistema se encontra no fato de que a fonte de energia interage com o *cart*. Como ela possui potência limitada, não é capaz de manter a velocidade angular do pêndulo constante.

Alguns resultados numéricos desse capítulo foram reproduzidos de de Souza e colaboradores [37] e servirão de base para o presente trabalho.

3.1 Modelo Matemático

Vamos nessa seção modelar, de forma simplificada, o sistema de nosso estudo. A figura 3.1 ilustra o sistema. Temos um *cart* de massa M acoplado a um pêndulo de massa m e comprimento r . A posição do *cart* é dada pela variável X e a posição angular do pêndulo por φ . O *cart* é submetido a uma força de atrito viscoso proporcional a velocidade e a uma força restauradora não-linear.

Para encontrar as equações de movimento para o *cart* e o pêndulo usamos o formalismo Lagrangeano. O ponto de fixação do pêndulo é o centro de massa do *cart*.

A energia cinética do sistema é dada por:

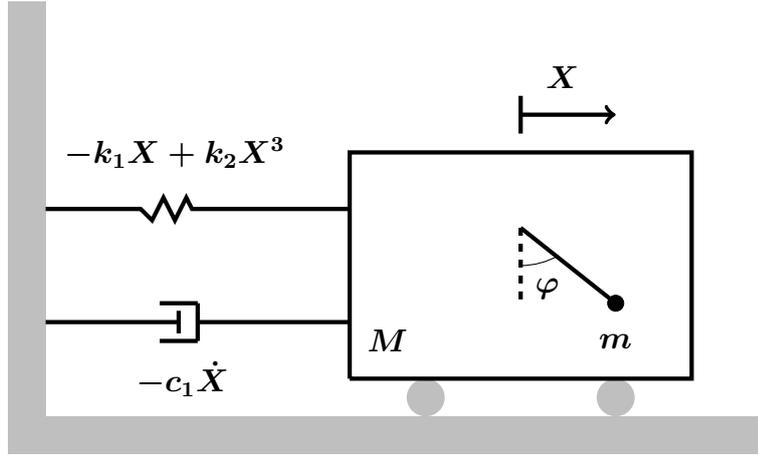


Figura 3.1: Modelo simplificado do oscilador de Duffing Não-Ideal

$$T = \frac{1}{2}(M + m) \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mr \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi . \quad (3.1)$$

A energia potencial do sistema é:

$$V = -\frac{k_1 X^2}{2} + \frac{k_2 X^4}{4} + mgr(1 - \cos \varphi) , \quad (3.2)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

A partir de (3.1) e (3.2) temos a Lagrangeana do sistema dada por:

$$L = \frac{1}{2}(M+m) \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mr \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi + \frac{k_1 X^2}{2} - \frac{k_2 X^4}{4} - mgr(1 - \cos \varphi) . \quad (3.3)$$

As equações de Lagrange são:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right] - \frac{\partial L}{\partial X} = -c_1 \dot{X} , \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = H(\varphi) . \quad (3.5)$$

O termo à direita de (3.4) é uma força de retardo proporcional a velocidade do *cart* e c_1 é a constante de amortecimento. Já o termo à direita de (3.5) é a curva característica do motor que pode ser uma função exponencial ou uma reta. Em nosso

trabalho optamos por uma reta e, portanto, a curva característica do motor tem a forma

$$H(\dot{\varphi}) = E - c_2\dot{\varphi} , \quad (3.6)$$

onde E é o torque ativo gerado pelo motor e está associado a força eletromotriz deste, e $c_2\dot{\varphi}$ o torque resistente.

De posse de (3.6) e (3.3) substituímos nas equações (3.4) e (3.5) para obtermos as equações de movimento, respectivamente, para o *cart* e para o pêndulo:

$$(M + m)\frac{d^2X}{dt^2} + c_1\frac{dX}{dt} - k_1X + k_2X^3 = mr \left[\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin \varphi - \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos \varphi \right] , \quad (3.7)$$

$$mr^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c_2\frac{d\varphi}{dt} + mgr \sin \varphi = E - mr\frac{d^2X}{dt^2} \cos \varphi . \quad (3.8)$$

Introduzindo as variáveis adimensionais $x \equiv X/r$, $\tau \equiv \omega_1 t$ e $\omega_1 \equiv \sqrt{\frac{k_1}{M + m}}$ as equações (3.7) e (3.8) podem ser reescritas adquirindo a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \beta_1\dot{x} - x + \gamma x^3 &= \varepsilon(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) , \\ \ddot{\varphi} + \beta_2\dot{\varphi} + \Omega^2 \sin \varphi &= \alpha - \ddot{x} \cos \varphi , \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $\beta_1 \equiv \frac{c_1}{mr^2\omega_1}$, $\gamma \equiv \frac{k_2}{k_1}r^2$, $\varepsilon \equiv \frac{m}{M + m}$, $\beta_2 \equiv \frac{c_2}{mr^2\omega_1}$, $\Omega \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ($\omega_2 \equiv \sqrt{\frac{g}{r}}$) e $\alpha \equiv \frac{E}{mr^2\omega_1}$ (fonte de energia). O símbolo $(.)$ indica que as derivadas são feitas em relação a variável τ .

Temos, então, um sistema de duas equações diferenciais acopladas. A solução desse sistema fornece as soluções $x(\tau)$ (posição do *cart*) e $\varphi(\tau)$ (posição angular do pêndulo).

3.2 Algoritmos Numéricos

Nessa seção vamos apresentar uma série de resultados numéricos que serão discutidos posteriormente. Em nossas simulações fixamos os parâmetros $\beta_1 = 0,05$, $\beta_2 = 1,5$,

$\gamma = 0, 1$ e $\Omega = 1, 0$. Dessa forma, os parâmetros α (voltagem de saída) e ε (razão entre as massas) podem ser variados e serão os nossos parâmetros de controle.

Com a finalidade de integrar o sistema de equações (3.9), façamos a seguinte mudança de variáveis:

$$x_1 = x \quad x_2 = \dot{x} \quad x_3 = \varphi \quad x_4 = \dot{\varphi} .$$

Com essas variáveis temos o seguinte sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon(x_4^2 \sin x_3 + \dot{x}_4 \cos x_3) - \beta_1 x_2 + x_1 - \gamma x_1^3 , \\ \dot{x}_3 &= x_4 , \\ \dot{x}_4 &= \alpha - \dot{x}_2 \cos x_3 - \beta_2 x_4 - \Omega^2 \sin x_3 . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Substituindo a quarta expressão de (3.10) na segunda e reorganizando, temos

$$\dot{x}_2 = \frac{\varepsilon[(x_4^2 \sin x_3) + (\beta_2 x_4 + \Omega^2 \sin x_3 - \alpha) \cos x_3] - \beta_1 x_2 - \gamma x_1^3 + x_1}{1 - \varepsilon \cos^2 x_3} . \tag{3.11}$$

Por economia de notação, vamos nomear o numerador da equação (3.2) com a variável w e o denominador com z . Assim, o sistema (3.10), adquire o seguinte formato

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 , \\
\dot{x}_2 &= \frac{w}{z} , \\
\dot{x}_3 &= x_4 , \\
\dot{x}_4 &= \alpha - \frac{w}{z} \cos x_3 - \beta_2 x_4 - \Omega^2 \sin x_3 .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov e a implementação do algoritmo de Wolf necessitamos do sistema de equações linearizadas.

A matriz Jacobiana para o sistema (3.12) é

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \dot{x}_1 / \partial x_1 & \partial \dot{x}_1 / \partial x_2 & \partial \dot{x}_1 / \partial x_3 & \partial \dot{x}_1 / \partial x_4 \\ \partial \dot{x}_2 / \partial x_1 & \partial \dot{x}_2 / \partial x_2 & \partial \dot{x}_2 / \partial x_3 & \partial \dot{x}_2 / \partial x_4 \\ \partial \dot{x}_3 / \partial x_1 & \partial \dot{x}_3 / \partial x_2 & \partial \dot{x}_3 / \partial x_3 & \partial \dot{x}_3 / \partial x_4 \\ \partial \dot{x}_4 / \partial x_1 & \partial \dot{x}_4 / \partial x_2 & \partial \dot{x}_4 / \partial x_3 & \partial \dot{x}_4 / \partial x_4 \end{bmatrix} . \tag{3.13}$$

Os elementos da matriz Jacobiana são

$$\begin{aligned}
J_{11} = J_{13} = J_{14} = J_{31} = J_{32} = J_{33} = 0 \quad J_{12} = J_{34} = 1 \quad J_{21} = \frac{1 - 3\gamma x_1^2}{z} \quad J_{22} = -\frac{\beta_1}{z} \\
J_{23} = \frac{\varepsilon[\cos x_3(x_4^2 + \Omega^2 \cos x_3) + \sin x_3(\alpha - \beta_2 x_4 - \Omega^2 \sin x_3)]}{z} - \frac{2w\varepsilon \cos x_3 \sin x_3}{z^2} \\
J_{24} = \frac{\varepsilon(2x_4 \sin x_3 + \beta_2 \cos x_3)}{z} \quad J_{41} = -\cos x_3 J_{21} \quad J_{42} = -\cos x_3 J_{22} \\
J_{43} = -\Omega^2 \cos x_3 - \cos x_3 J_{23} + \frac{w}{z} \sin x_3 \quad J_{44} = -\cos x_3 J_{24} - \beta_2 .
\end{aligned}$$

Assim, o sistema de equações linearizadas, na forma matricial, é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{4+i} \\ \dot{x}_{8+i} \\ \dot{x}_{12+i} \\ \dot{x}_{16+i} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x_{4+i} \\ x_{8+i} \\ x_{12+i} \\ x_{16+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{8+i} \\ J_{21}x_{4+i} + J_{22}x_{8+i} + J_{23}x_{12+i} + J_{24}x_{16+i} \\ x_{16+i} \\ J_{41}x_{4+i} + J_{42}x_{8+i} + J_{43}x_{12+i} + J_{44}x_{16+i} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

com $i = 1, 2, 3, 4$.

As condições iniciais são : $x_1(0) = x(0)$, $x_2 = \dot{x}(0)$, $x_3(0) = \varphi(0)$ e $x_4(0) = \dot{\varphi}(0)$.

3.3 Resultados Numéricos e Discussão

Diversos sistemas mecânicos foram e têm sido alvo de estudos. Vários trabalhos mostram comportamento complexo, especialmente, caótico. O sistema mecânico em estudo mostra o processo de transferência de energia entre osciladores. O pêndulo oscila alimentado pela fonte de energia. Ocorre então captação de energia pelo *cart* e o mesmo oscila também. No presente trabalho, estamos interessados nesse processo de captação de energia pelo *cart* e estudar a dinâmica do movimento deste. Vamos aqui discutir, cada um dos resultados numéricos obtidos, detalhadamente. Os primeiros resultados mostram as possíveis soluções para o movimento do *cart*.

De posse dos sistemas de equações (3.12) e (3.14), inicialmente, a fim de investigar o sistema, foi feita uma busca por órbitas periódicas, quase-periódicas e caóticas. Foi gerada as soluções $x(\tau)$, espaço de fase das variáveis x e \dot{x} e a evolução dos quatro expoentes de Lyapunov.

As figuras 3.2, 3.3 e 3.4 mostram soluções quase-periódica, periódica e caóticas. É mostrado os 4 expoentes de Lyapunov. Para enfatizar o tipo de solução obtida temos os gráficos (d) com os dois maiores expoentes.

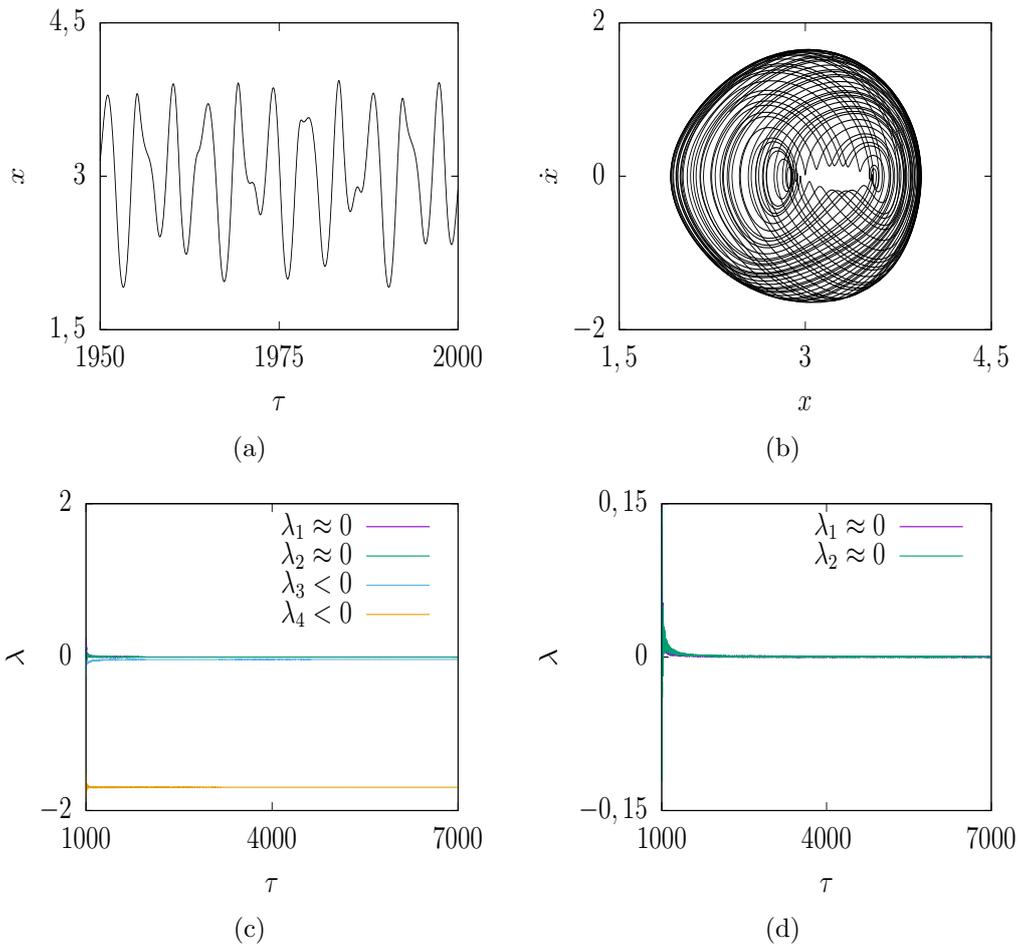


Figura 3.2: Atrator Quase-periódico com $\alpha = 3,5$ e $\varepsilon = 0,2$: (a) soluções $x(\tau)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (x, \dot{x}) ; (c) expoentes de Lyapunov $\lambda(\tau)$; (d) $\lambda(\tau)$ para os dois maiores expoentes.

As figuras 3.2(a)(b) mostram um atrator quase-periódico. Tal fenômeno se verifica no fato de que, os dois maiores expoentes de Lyapunov são numericamente nulos, como mostrado na figura 3.2(d).

A quase-periodicidade está relacionada com a frequência de oscilação de cada um dos osciladores (*cart* e pêndulo). Com a alteração dos parâmetros, a frequência dos osciladores pode mudar. Se a razão entre as frequências é racional, o sistema possui comportamento periódico. Dizemos que o sistema se encontra no estado *travado*,

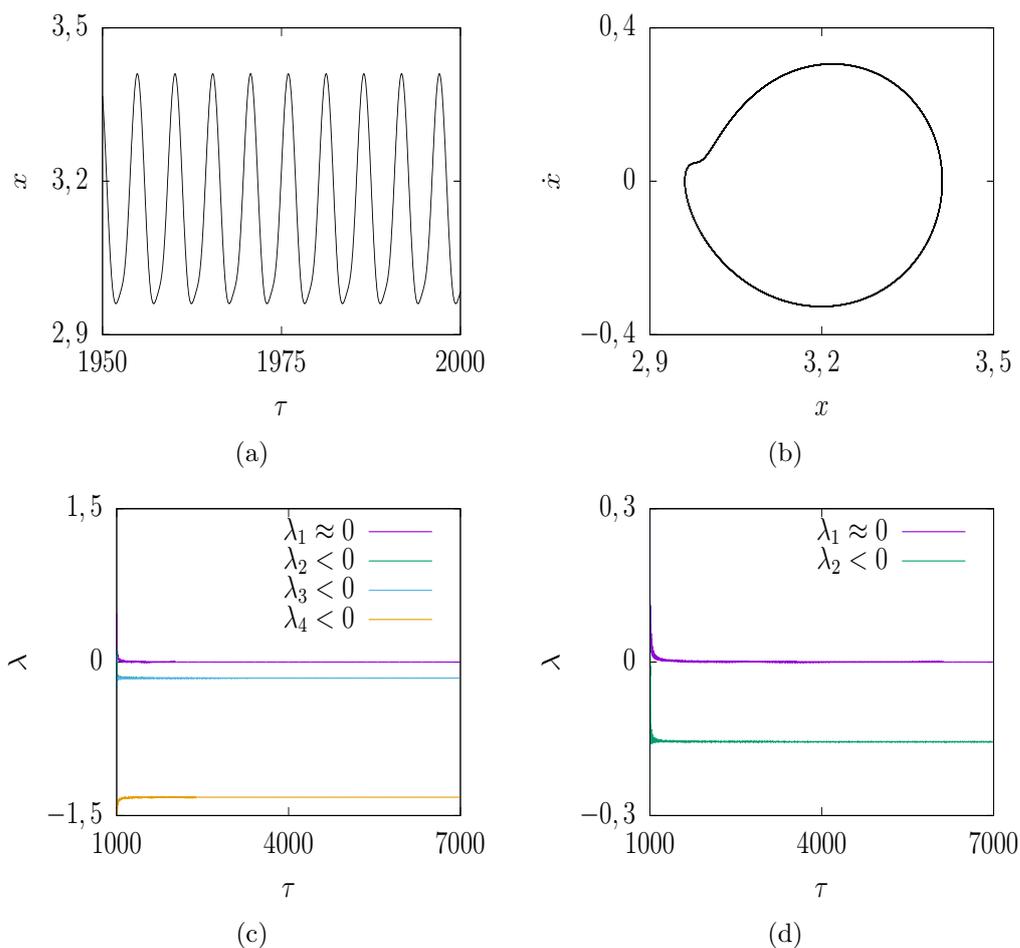


Figura 3.3: Atrator Periódico com $\alpha = 2$ e $\varepsilon = 0, 1$: (a) soluções $x(\tau)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (x, \dot{x}) ; (c) expoentes de Lyapunov $\lambda(\tau)$; (d) $\lambda(\tau)$ para os dois maiores expoentes.

bloqueado ou *sincronizado*. Por outro lado, se a razão for irracional, temos o comportamento quase-periódico [26, 27, 38]. Alterando-se os parâmetros, o estado de quase-periodicidade pode levar ao caos. Dessa forma, a quase-periodicidade é considerada uma possível rota para o caos.

Movimento regular ou periódico foi observado para o oscilador. Temos nas figuras 3.3(a) e 3.3(b) soluções periódicas. Notamos que o sistema oscila de maneira bem simples, tal como, um oscilador harmônico. Entretanto, oscilações periódicas mais complexas, com período maior, também foram verificadas. O maior expoente de Ly-

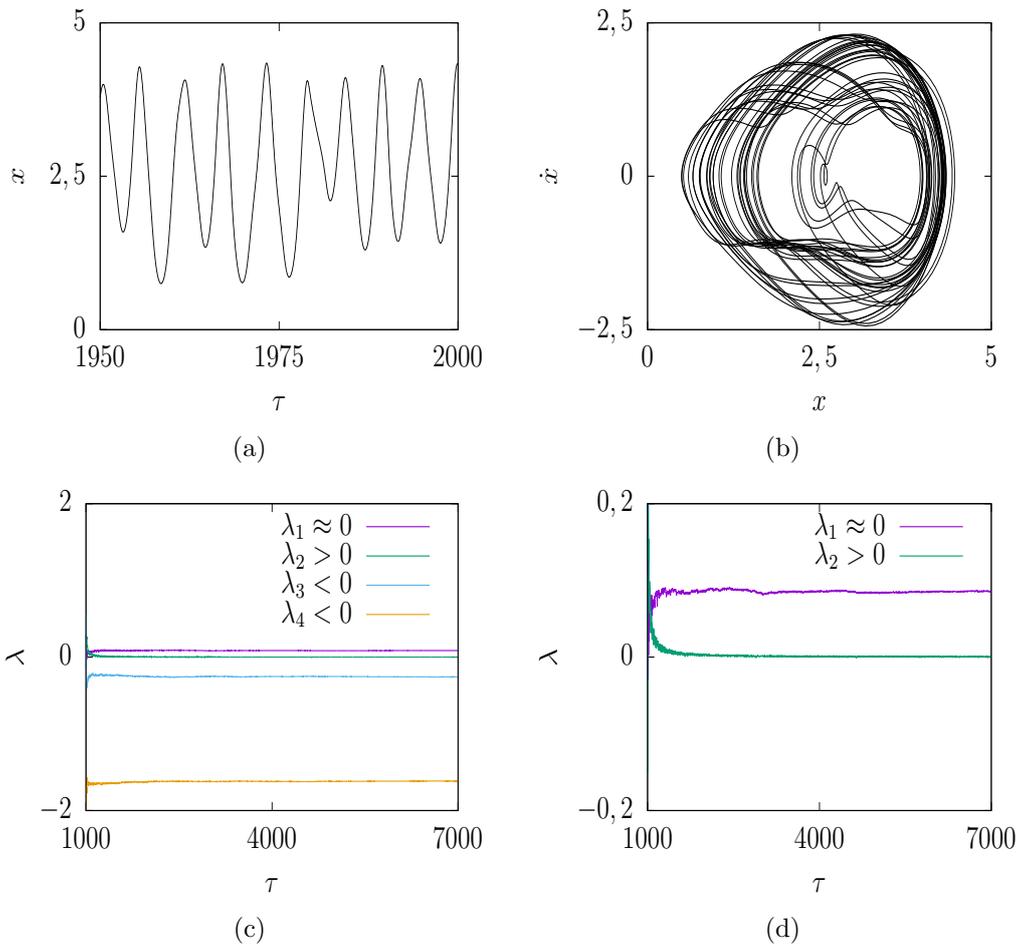


Figura 3.4: Atrator Caótico com $\alpha = 3$ e $\varepsilon = 0,25$: (a) soluções $x(\tau)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (x, \dot{x}) ; (c) expoentes de Lyapunov $\lambda(\tau)$; (d) $\lambda(\tau)$ para os dois maiores expoentes.

punov (exceto um que é numericamente nulo) é negativo e está mostrado na figura 3.3(d).

Soluções caóticas ou irregulares, são mostradas nas figuras 3.4(a) e 3.4(b). O comportamento caótico se verifica pela existência de um expoente de Lyapunov positivo, como mostrado na figura 3.4(d).

Para verificar a coexistência de atratores e mudanças (bifurcações) no comportamento do sistema, foi gerado dois diagramas de bifurcação de codimensão-1 com os parâmetros de controle α e ε . Os diagramas são obtidos variando um dos parâmetros

de controle e, após um transiente determinado, é plotado o valor máximo da variável dinâmica x . Cada gráfico contém dois diagramas de bifurcação referente a duas condições iniciais diferentes. Foi feita também uma ampliação de um dos diagramas para termos maiores detalhes das janelas periódicas, caóticas e das bifurcações ocorridas. Os resultados encontram-se nas figuras 3.5(a)(b) para o parâmetro α e nas figuras 3.6(a)(b) para o parâmetro ε .

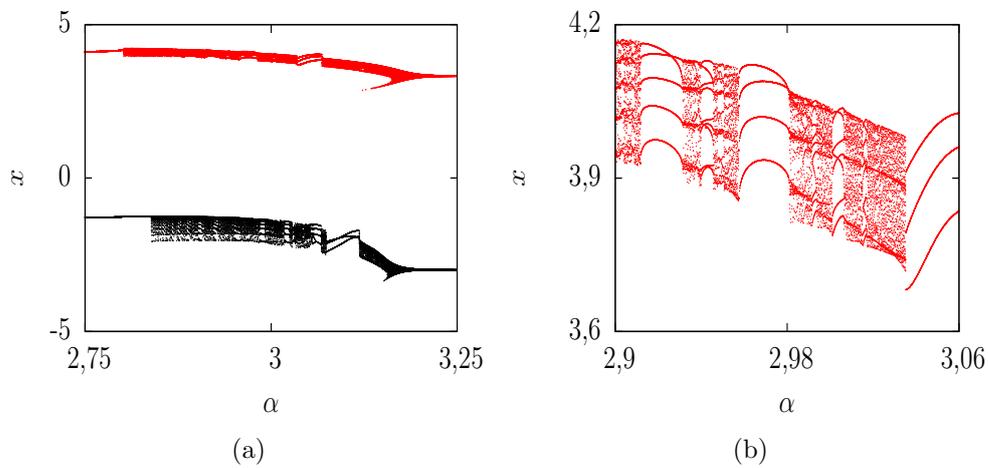


Figura 3.5: Diagrama de bifurcação para duas condições iniciais diferentes: (a) Diagrama de bifurcação x em função de α com $\varepsilon = 0,09$. (b) Ampliação do diagrama de bifurcação para os atratores plotados em vermelho.

Em nosso trabalho, estamos interessados em estudar o comportamento do sistema quando o parâmetro α , que se relaciona com a força eletromotriz do motor que fornece energia ao pêndulo, e a relação entre as massas do pêndulo e do *cart* são alteradas. Os diagramas, como já mencionado, fornecem o valor máximo da variável dinâmica x do *cart*, a saber, seu deslocamento.

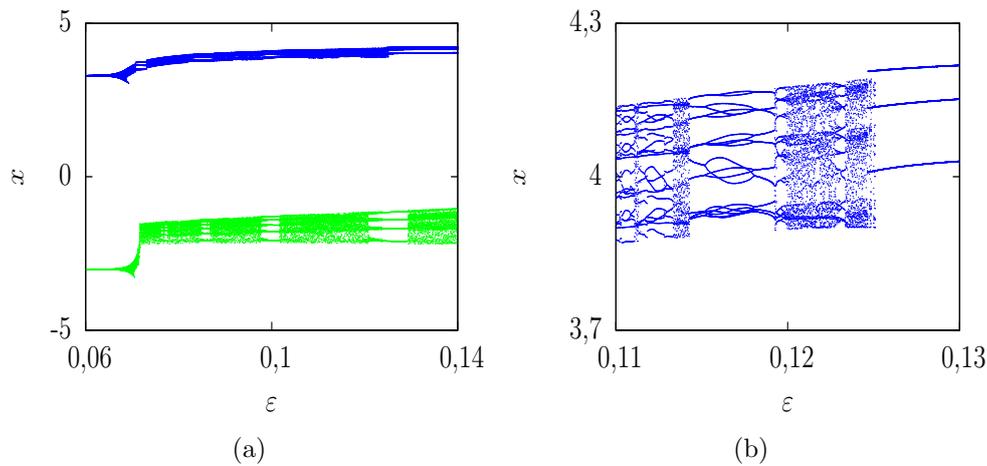


Figura 3.6: Diagrama de bifurcação para duas condições iniciais diferentes: (a) Diagrama de bifurcação x em função de ε com $\alpha = 3$. (b) Ampliação do diagrama de bifurcação para os atratores plotados em azul.

O gráfico 3.5(a) mostra dois diagramas de bifurcação para duas condições iniciais diferentes $(\pm 3, 0, 0, 0)$ com o parâmetro α sendo incrementado. Tal diagrama mostra a coexistência de atratores que será discutida nessa subseção. Afim de obter informações mais detalhadas sobre o sistema, foi feita a ampliação do diagrama plotado em vermelho, como mostrado na figura 3.5(b). Observamos uma sequência de janelas caóticas e periódicas intercaladas de forma altamente organizada. Notamos o súbito aparecimento e desaparecimento de atratores caóticos, ou seja, eventos de crise. Os atratores periódicos sofrem decréscimo unitário de período à medida que o parâmetro α é incrementado.

Adicionalmente, foram gerados outros dois diagramas de bifurcação, figura 3.6(a), com as mesmas condições iniciais, porém, foi variado o parâmetro ε . Novamente, a coexistência de atratores e eventos de crise é verificada. A ampliação do diagrama plotado com a cor azul 3.6(b), mostra janelas periódicas com atratores periódicos de período elevado, possivelmente, atratores quase-periódicos.

Fixado um conjunto de parâmetros, os diagramas de bifurcação mencionados mos-

tram que o sistema, após um período transiente, se estabiliza e passa a oscilar com um determinado período ou oscila de forma aperiódica. Pode, inclusive, ocorrer a coexistência de atratores periódicos, quase-periódicos e caóticos.

Em sistemas mecânicos, é interessante conhecer para qual atrator o sistema é conduzido para cada condição inicial ou um conjunto de condições iniciais. Tal tarefa é feita pela *bacia de atração*. O conhecimento da bacia de atração de um atrator permite escolher, de acordo com a forma como sistema se inicia (condição inicial), a maneira como o sistema vai se comportar em regime permanente.

Por exemplo, para um sistema mecânico, oscilações caóticas podem ser indesejáveis e, portanto, para um conjunto de parâmetros fixo, saber se variadas condições iniciais não levam a um atrator caótico é algo muito relevante. Dessa forma, temos controle sobre o tipo de comportamento que o sistema vai adquirir com o conhecimento de variadas bacias pois, cada atrator, possui sua própria bacia.

Ademais, a bacia de atração, para sistemas mecânicos, é importante porque, a determinação das condições iniciais vem acompanhada de uma respectiva imprecisão. Assim, a bacia de um atrator que seja suficientemente grande pode incorporar essa imprecisão e, dessa forma, a escolha de uma condição inicial, mesmo com a imprecisão, levará o sistema ao atrator desejado. Em nossas simulações geramos três bacias de atração.

A coexistência de atratores foi verificada, por exemplo, no estudo de um oscilador de *Duffing* ideal, acoplado a um pêndulo, que oscila verticalmente [39]; em um pêndulo cuja haste é uma mola linear [40]; no sistema denominado rotor duplo [41,42]; em um pêndulo forçado sujeito a um torque externo periódico [43].

Em um trabalho semelhante a este, de Souza e colaboradores [44] verificaram a coexistência de atratores. Em um primeiro momento, o sistema é um oscilador de *Duffing* não-ideal tal qual este em estudo, porém, em uma segunda abordagem, é adicionada

uma parede fixa que gera impactos com o oscilador. Com a adição da parede, as bacias observadas tinham uma estrutura diferente. Novos atratores surgiram e outros desapareceram.

Em outro trabalho [45], os mesmos autores estudaram o oscilador não-ideal, porém colocaram sobre o *cart* um tubo em forma de U contendo um líquido. A coexistência de atratores novamente foi verificada. A adição da coluna mostrou, entre outras coisas, supressão de caos e redução da amplitude de oscilação.

Com a finalidade de construir a bacia de atração para alguns atratores, os valores das condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$ foram variados mantidos os parâmetros fixos. O algoritmo numérico verifica qual o valor máximo da solução (assim como nos diagramas de bifurcação) nas séries temporais. Dessa forma, temos um diagrama de bifurcação x versus condições iniciais, que nos diz quais e quantos são os atratores coexistentes. De posse dessas informações, um novo algoritmo verifica, para cada par de condições iniciais, para qual atrator o sistema é conduzido e, então, aquele ponto recebe uma cor que representa o atrator. De outra forma, temos um mapa que nos fornece para qual atrator o sistema é conduzido para cada condição inicial dada. Os diagramas foram construídos tomando 1000 valores de $x(0)$ e 1000 valores $\dot{x}(0)$ igualmente espaçados.

Temos 3 bacias de atração. Uma com a coexistência de 2 atratores periódicos, figura (3.7); uma com a coexistência de 3 atratores periódicos, figura (3.8); e outra com a coexistência de 4 atratores, sendo dois periódicos e dois quase-periódicos, figura (3.9).

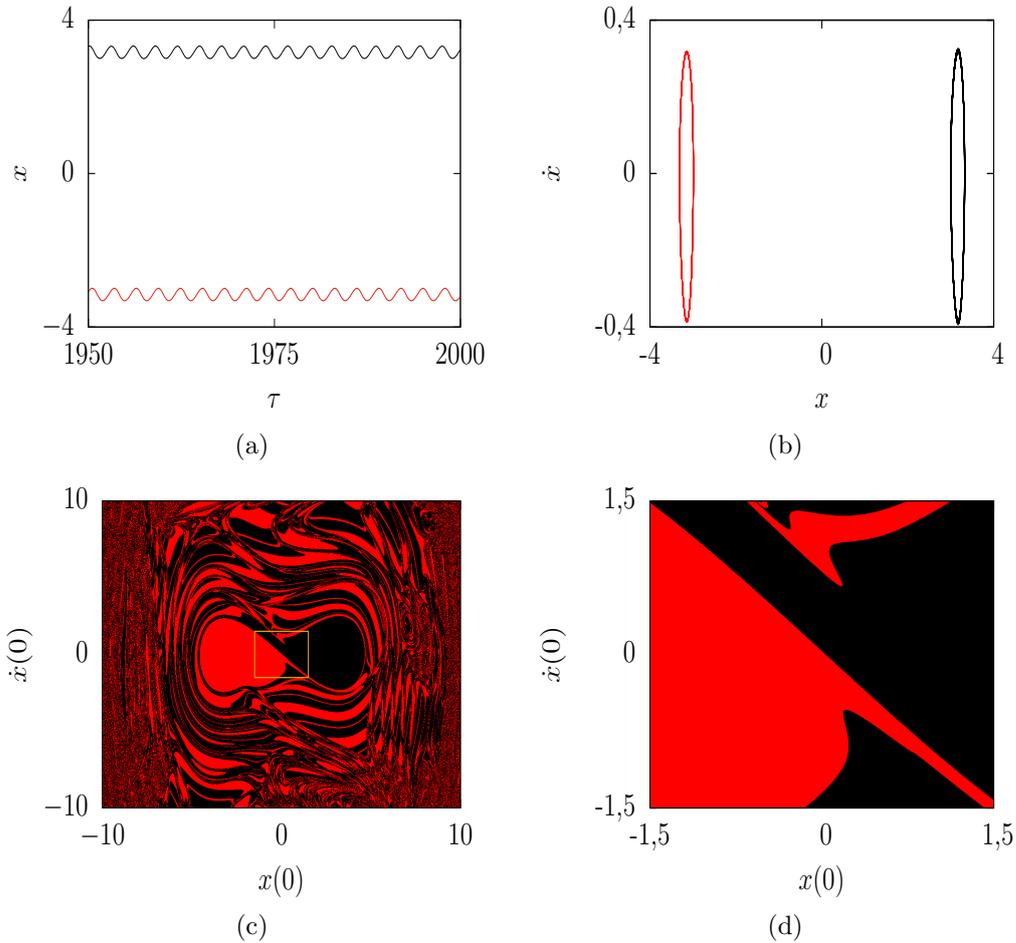


Figura 3.7: Coexistência de dois atratores periódicos com $\alpha = 3,25$ e $\varepsilon = 0,09$: (a) soluções $x(\tau)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (x, \dot{x}) ; (c) bacia de atração; (d) ampliação da bacia

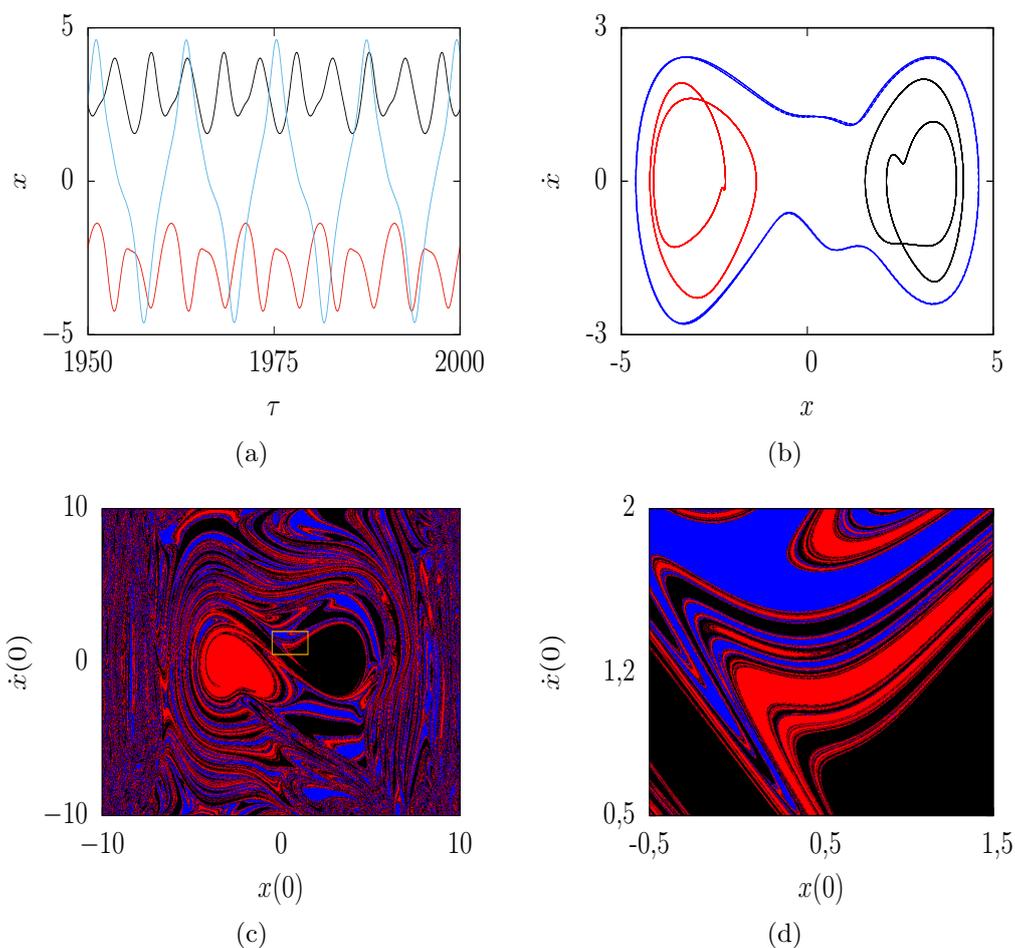


Figura 3.8: Coexistência de três atratores periódicos com $\alpha = 3,25$ e $\varepsilon = 0,2$: (a) soluções $x(\tau)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (x, \dot{x}) ; (c) bacia de atração; (d) ampliação da bacia.

As figuras 3.7(a)(b) mostram a coexistência de dois atratores periódicos de período 1 plotados em vermelho e preto. Para o conjunto de parâmetros em questão, variadas as condições iniciais, temos apenas oscilações simples de período 1. A figura 3.7(c) mostra a bacia de atratores para os dois atratores em questão. Observa-se que, próximo à origem, de ambos os lados, temos duas regiões bem distintas de condições iniciais que delimitam muito bem para qual atrator o sistema é conduzido. Fora dessa região, a fronteira entre duas bacias se torna mais complexa e, como notamos pelo gráfico, para algumas regiões essa distinção entre bacias é pouco ou nada evidente. A ampliação de

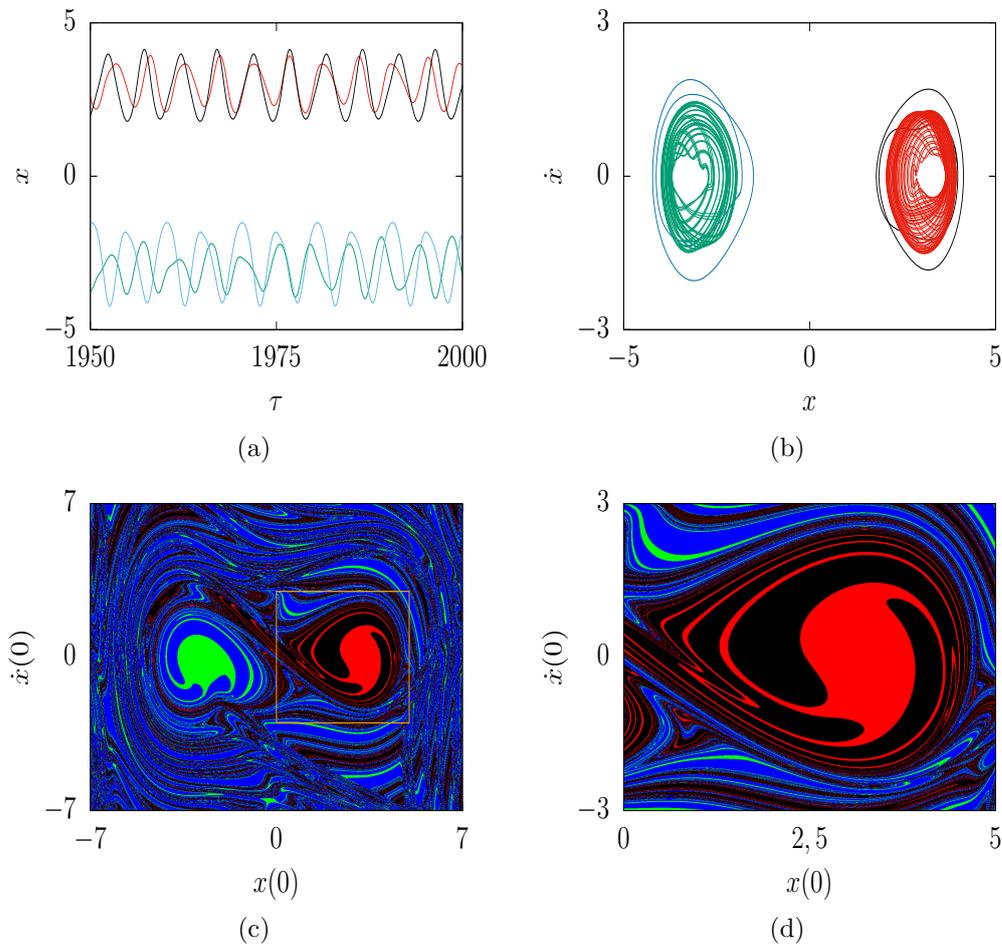


Figura 3.9: Coexistência de dois atratores periódicos e dois quase-periódicos com $\alpha = 3, 25$ e $\varepsilon = 0, 13$: (a) soluções $x(\tau)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (x, \dot{x}) ; (c) bacia de atração; (d) ampliação da bacia.

uma determinada região da bacia é mostrada 3.7(d). A fronteira entre duas bacias é suave e, nessa região de valores de condições iniciais, por exemplo, a escolha de uma condição inicial é mais efetiva do que em outras regiões uma vez que o tamanho das bacias é apreciável.

Adicionalmente, verifica-se, pelas figuras 3.8(a) e 3.8(b), a coexistência de três atratores periódicos plotados em vermelho, preto e azul. A figuras 3.8(c) e 3.8(d) mostram a bacia dos atratores e uma ampliação de uma região dela. Embora a região ampliada seja menor, novamente verificamos uma estrutura complexa na fronteira entre as

bacias e a distinção entre as bacias já não é tão evidente.

Dada a riqueza de fenômenos não-lineares do sistema estudado, foi observada a coexistência de quatro atratores, dois periódicos, plotados em preto e azul e, dois quase-periódicos, plotados em vermelho e verde, como mostrado nas figuras 3.9(a) e 3.9(b). A bacia de atração, figura 3.9(c) e sua ampliação, figura 3.9(d) são mostrados e fica evidente a complexidade das bacias à medida que o número de atratores coexistentes aumenta.

Por fim, geramos os diagramas do espaço de parâmetros bidimensional. Tal gráfico foi obtido avaliando o maior expoente de Lyapunov para cada par de parâmetros de controle α e ε . O diagrama é composto de 800 valores do parâmetro α e 800 valores do parâmetro ε igualmente espaçados. Numericamente, um dos quatro expoentes de Lyapunov é nulo.

Se ordenarmos os expoentes em ordem decrescente $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, temos as seguintes possibilidades:

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$	Atrator
$(+, 0, -, -)$	Caótico
$(0, 0, -, -)$	Quase-periódico
$(0, -, -, -)$	Periódico

Cada possibilidade é avaliada com uma cor e a paleta de cores indica os valores do maior expoente de Lyapunov. Para soluções caóticas temos a cor branca e quase-periódicas o vermelho. As soluções periódicas estão em preto, verde e azul para termos mais detalhes dessas soluções.

A figura 3.10(a) mostra o espaço de parâmetros para a condição inicial $(3, 0, 0, 0)$. No estudo de diagramas de espaços de parâmetros, é bastante comum o uso de ampliações, como feito nas figuras 3.10(b)(c)(d). A figura 3.11 é uma ampliação da figura 3.10(d).

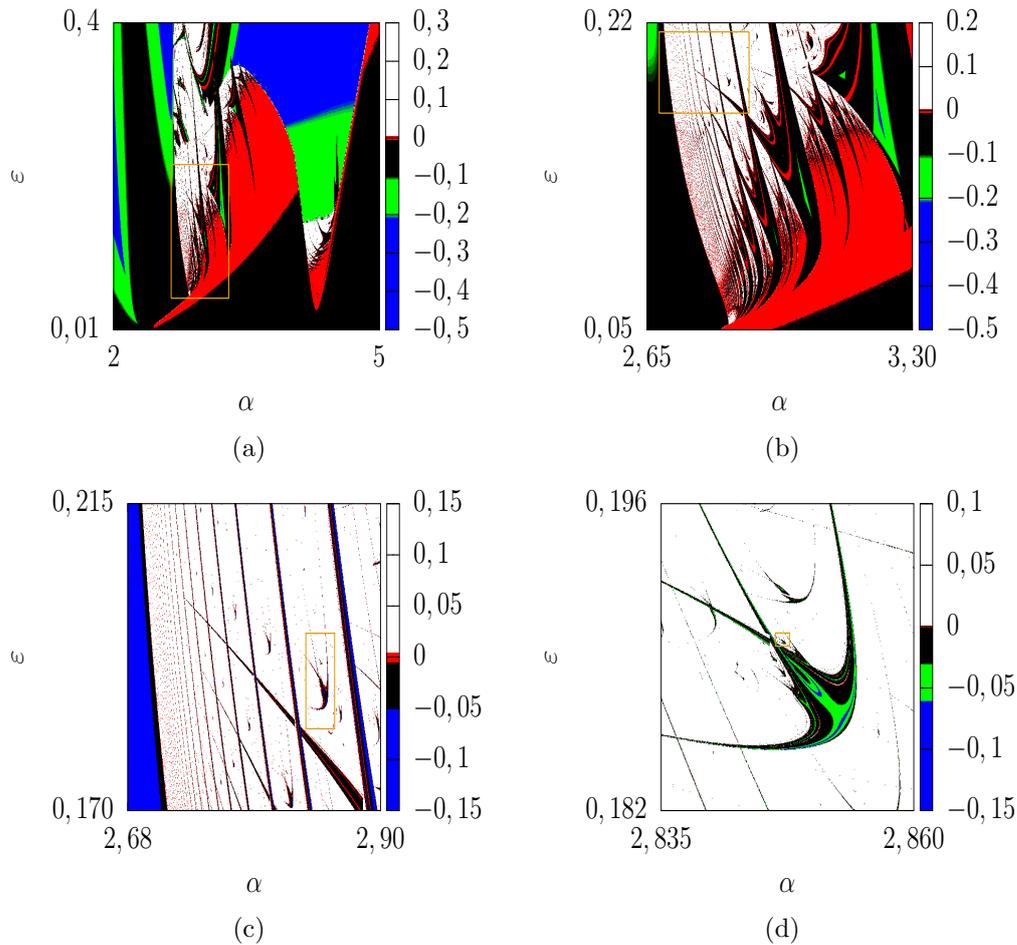


Figura 3.10: (a) Diagrama do espaço de parâmetros α versus ϵ ; (b)(c)(d) sucessivas ampliações do gráfico (a)

Observamos que, para uma grande gama de pares de parâmetros, o sistema se comporta de forma periódica ou quase-periódica, como mostrado na figura 3.10(a). Os atratores quase-periódicos “vivem”, por assim dizer, em duas regiões (vermelho) claramente evidenciadas no gráfico.

Assim, o espaço de parâmetros 3.10(a), mostra que, na busca de trajetórias regulares, temos regiões largas e, dessa forma, as oscilações do sistema podem ser controladas com relativa facilidade.

Nas regiões caóticas (em branco), encontramos informações valiosas na busca de trajetórias periódicas. As figuras 3.10(b)(c)(d) mostram sucessivas ampliações da fi-

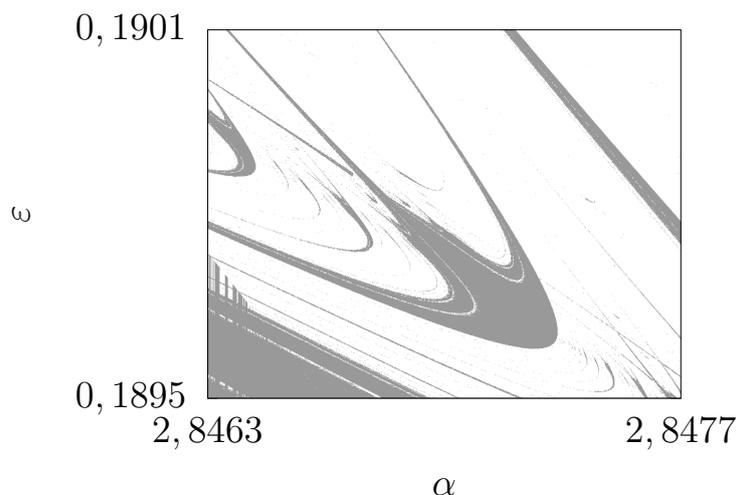


Figura 3.11: Ampliação de uma pequena região próxima a estrutura periódica da figura 3.10(d).

gura 3.10(a). Na figura 3.10(b) encontramos as chamadas *línguas de Arnold* [25,27,46] (em preto). As línguas são estruturas triangulares encurvadas. Tais estruturas foram observadas, por exemplo, no estudo do mapa circular. As línguas são formadas por parâmetros referentes a órbitas periódicas, especificamente, quando o sistema se encontra no estado travado. Observamos, também, que as línguas se encontram imersas simultaneamente nas regiões de quase-periodicidade (vermelho) e caos (branco).

Já a figura 3.10(c) mostra várias pequenas estruturas periódicas (em preto), imersas em regiões de regime caótico. A ampliação de uma dessas estruturas, figura 3.10(d), revela serem elas os conhecidos *shrimps*. Tais estruturas, como já foi discutido, possuem um corpo bem definido e são dotados de auto-similaridade.

A figura 3.11 mostra a ampliação de uma porção do gráfico 3.10(d), especificamente, uma pequena região próxima ao *shrimp* em destaque na referida figura. A cor cinza representa a estrutura periódica e a branca a região de caos. Na ampliação, observamos novas estruturas periódicas, *shrimps*, aninhadas naquele descrito em 3.10(d). Sucessivas ampliações de porções próximas ao *shrimp* secundário obtido levariam a

novas estruturas secundárias.

3.4 Conclusões

O estudo do oscilador de Duffing Não-Ideal apresentou uma rica variedade de fenômenos não-lineares. Para citar alguns temas: caos, quase-periodicidade, crise, duplicações de período e coexistência de atratores.

As bacias de atração possuem estrutura inicialmente mais simples (dois atratores) e, observou-se que a complexidade das bacias aumentou drasticamente à medida que o número de atratores coexistentes aumentou também. Curiosamente, a coexistência de atratores periódicos e quase-periódicos foi verificada.

O espaço de parâmetros mostrou uma ampla variedade de soluções em regime permanente do sistema, majoritariamente, soluções periódicas. Entretanto, a quase-periodicidade e o comportamento caótico foi verificado.

Estruturas periódicas, quais sejam, línguas de Arnold e *shrimps* foram encontrados. As línguas se iniciam para valores baixos do parâmetro ε e evoluem em uma sequência altamente organizada. Além disso, as estruturas *shrimps* foram observadas imersas na região caótica tal qual foi apresentado no capítulo 2.

4 Vibração de uma Viga com Fundação Elástica Não-Linear

Neste capítulo, vamos estudar a dinâmica temporal da vibração de uma viga de Bernoulli-Euler engastada. Será usada uma aproximação em que a equação diferencial parcial que governa as vibrações de uma viga possa ser separada em soluções espaciais e temporais. Dessa forma, no presente trabalho, vamos estudar a solução temporal da citada equação.

Ademais, é importante dizer que essa é uma solução aproximada que, a despeito de tal aproximação, mostrou, de acordo com as investigações numéricas, fenômenos não-lineares interessantes. Foram verificadas soluções periódicas, caóticas, duplicações de período, crise e estruturas periódicas no espaço de parâmetros.

4.1 Modelo Matemático

A equação governante de uma viga elástica sujeita a carregamentos externos e condições de contorno previamente definidas é a equação de Bernoulli-Euler. Ela é válida para as chamadas vigas elásticas delgadas que possuem uma relação entre o comprimento e o raio de giração maior que 10, bem como os deslocamentos transversais de cada ponto da viga são considerados pequenos.

Seja L o comprimento de uma viga, $A(x)$ a área da seção transversal ao longo do eixo x que é transversal a direção de vibração, $\rho(x)$ a densidade do material ao longo

do eixo x , E o módulo de Young do material, $p(x, t)$ a força axial de tração, k a rigidez por área unitária (constante de mola) e $f(x, t)$ um carregamento externo. A equação que governa o movimento dessa viga é a de Bernoulli-Euler dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + kw(x, t) + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (4.1)$$

onde a quantidade $I(x)$ é o momento de inércia de área de seção da viga em torno do eixo y e é calculado por

$$\int \int z^2 dz dy . \quad (4.2)$$

A figura (4.1) mostra um esquema simplificado do problema que vamos abordar.

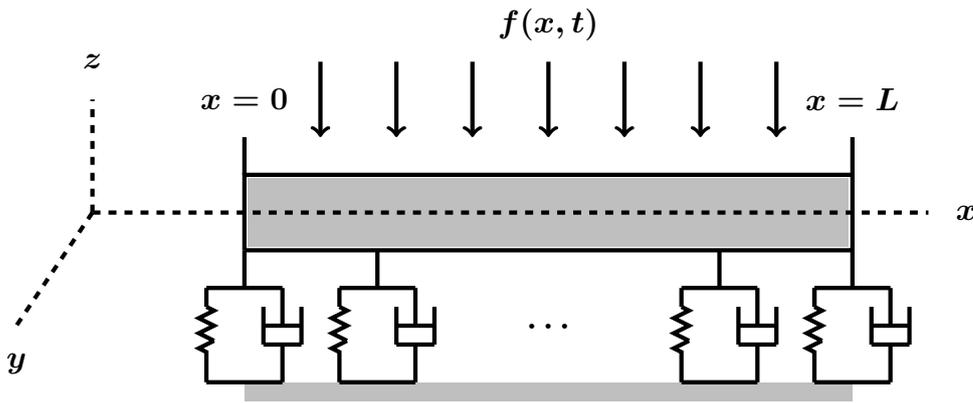


Figura 4.1: Modelo simplificado da vibração de uma viga sobre uma fundação elástica não-linear

A fundação é composta de amortecimentos elásticos e viscosos. A linha que passa pelo centro das seções transversais da viga (eixo x) é chamada linha central. As soluções $w(x, t)$ nos fornecem o deslocamento transversal em relação a linha central de um ponto da viga na posição x e no instante de tempo t .

Em nossa modelagem do problema vamos considerar que a viga não está sujeita a nenhuma força ao longo da linha central $p(x, t) = 0$ e que $A(x) = A$ e $\rho(x) = \rho$, ou seja, a área da seção transversal da viga, bem como sua densidade, são constantes.

Tradicionalmente, as soluções de (4.1) consideram que o termo $kw(x, t)$, conhecido como fundação elástica, corresponde à Lei de Hooke. Com o objetivo de estudar o eventual aspecto não-linear das vibrações $w(x, t)$, vamos considerar, para a fundação elástica, a seguinte expressão

$$k_1w(x, t) + k_2w(x, t)^3 . \quad (4.3)$$

Assumimos que a adição do termo $k_2w(x, t)^3$ provoque uma pequena perturbação no sistema, mas, em contrapartida, teremos uma equação não-linear.

Para o carregamento externo, vamos propôr a seguinte expressão

$$f(x, t) = -b\frac{\partial w}{\partial t} + w(x, t)F \cos \Omega t , \quad (4.4)$$

onde o primeiro termo à direita de (4.4) é uma força de amortecimento contrária ao deslocamento vertical da viga. Essa força é proporcional à velocidade transversal dos pontos da viga e b é um parâmetro de amortecimento. O segundo termo é uma força externa periódica com amplitude F e frequência angular Ω .

Substituindo (4.3) e (4.4) em (4.1) temos a equação de Bernoulli-Euler no formato que será estudado em nosso trabalho

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + k_1w(x, t) + k_2w(x, t)^3 + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -b\frac{\partial w}{\partial t} + w(x, t)F \cos \Omega t , \quad (4.5)$$

com condições de contorno $w(0, t) = w(L, t) = 0$ e $\dot{w}(0, t) = \dot{w}(L, t) = 0$.

Vamos buscar soluções do tipo $w(x, t) = v(x)u(t)$, ou seja, separar a solução geral como o produto da parte espacial com a temporal. Temos então

$$u \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + \rho Av \frac{d^2 u}{dt^2} + k_1vu + k_2v^3u^3 = -bv \frac{du}{dt} + uvF \cos \Omega t . \quad (4.6)$$

Dividindo ambos os lados de (4.6) por vu temos

$$\frac{1}{v} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + \frac{\rho A}{u} \frac{d^2 u}{dt^2} + k_1 + k_2 v^2 u^2 = -\frac{b}{u} \frac{du}{dt} + F \cos \Omega t . \quad (4.7)$$

Pelo método da separação de variáveis, introduzimos uma constante de separação λ e temos, de forma parcial (pois ainda existe um termo que depende de x), a seguinte equação

$$\frac{\rho A}{u} \frac{d^2 u}{dt^2} + k_1 + k_2 v^2 u^2 + \frac{b}{u} \frac{du}{dt} - F \cos \Omega t = \lambda . \quad (4.8)$$

A equação acima ainda não é a parte temporal pois temos o termo $k_2 v^2 u^2$ que depende de x e de t . A fim de transformarmos tal equação, de fato, na parte temporal de $w(x, t)$, tomamos a média espacial de todos os termos na equação (4.8). Tal técnica é frequentemente usada em mecânica dos fluidos. Toma-se a média temporal de alguma variável hidrodinâmica de interesse, por exemplo, o fluxo de um fluido, e obtém-se soluções aproximadas [47] [48].

A média espacial de uma soma de funções $\phi_i(x)$ que dependem de x é a soma das médias espaciais de cada uma. Tal média, para uma função definida em um intervalo $[0, L]$, por exemplo, é $\overline{\phi(x)} = \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx$. Caso uma função não dependa de x , digamos $\phi(t)$, a média espacial é $\overline{\phi(t)} = \phi(t)$.

A média espacial do termo que depende de x é

$$\gamma = \frac{k_2}{L} \int_0^L v(x)^2 dx . \quad (4.9)$$

Dessa forma, temos, para a parte temporal, uma equação diferencial ordinária de segunda ordem dada por

$$\frac{\rho A}{u} \ddot{u} + \frac{b}{u} \dot{u} + (k_1 - F \cos \Omega t) + \gamma u^2 = -\lambda . \quad (4.10)$$

Introduzindo novas constantes, a notação (\cdot) como sendo a derivada da variável u

em relação ao tempo e reagrupando os termos temos

$$\ddot{u} + \sigma [b\dot{u} + (\theta - F \cos \Omega t)u + \gamma u^3] = 0 , \quad (4.11)$$

onde $\sigma = 1/\rho A$ (inverso da densidade linear) e $\theta = k_1 + \lambda$.

As soluções $u(t)$ da equação (4.11) nos fornecem a evolução temporal de $w(x, t)$.

Por fim, vale ressaltar que, ao tomarmos a média espacial na equação (4.8), temos a equação (4.11), que é uma aproximação, tal qual é mostrado nas referências [47] [48].

4.2 Algoritmos Numéricos

Para encontrarmos as soluções $u(t)$ de (4.11) vamos fazer a seguinte mudança de variáveis

$$u_1 = u \quad u_2 = \dot{u} \quad z = t . \quad (4.12)$$

Com as novas variáveis temos três equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 , \\ \dot{u}_2 &= -\sigma [bu_2 + (\theta - F \cos \Omega z)u_1 + \gamma u_1^3] , \\ \dot{z} &= 1 . \end{aligned} \quad (4.13)$$

A matriz Jacobiana para o sistema de equações (4.13) é

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \dot{u}_1 / \partial u_1 & \partial \dot{u}_1 / \partial u_2 & \partial \dot{u}_1 / \partial z \\ \partial \dot{u}_2 / \partial u_1 & \partial \dot{u}_2 / \partial u_2 & \partial \dot{u}_2 / \partial z \\ \partial \dot{u}_3 / \partial u_1 & \partial \dot{u}_3 / \partial u_2 & \partial \dot{u}_3 / \partial z \end{bmatrix} . \quad (4.14)$$

Os elementos da matriz Jacobiana são

$$J_{11} = J_{13} = J_{31} = J_{32} = J_{33} = 0 \quad J_{12} = 1$$

$$J_{21} = -\sigma(\theta - F \cos \Omega z + 3\gamma u_1^2) \quad J_{22} = -\sigma b \quad J_{23} = -\sigma F \Omega u_1 \sin \Omega z .$$

Temos então, o sistema de equações linearizadas, na forma matricial, como se segue

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{3+i} \\ \dot{u}_{6+i} \\ \dot{u}_{9+i} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u_{3+i} \\ u_{6+i} \\ u_{9+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{6+i} \\ J_{21}u_{3+i} + J_{22}u_{6+i} + J_{23}u_{9+i} \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (4.15)$$

com $i = 1, 2, 3$.

A solução do sistema (4.13), juntamente com o sistema (4.15), é obtida pelo algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem e passo fixo com condições iniciais $u_1(0) = u(0)$, $u_2(0) = \dot{u}(0)$ e $z(0) = t_0$. Os expoentes de Lyapunov são computados pelo algoritmo de Wolf. Em todas as simulações, alguns parâmetros foram mantidos constantes, quais sejam, $\sigma = \theta = \Omega = \gamma = 1, 0$. Os parâmetros de controle que serão variados são: F (amplitude da força externa) e b (constante de amortecimento).

4.3 Resultados Numéricos e Discussão

No estudo de vibração de vigas, diversos trabalhos teóricos e experimentais tem sido realizados. As formulações envolvem métodos matemáticos aproximados e, em especial, a formulação de Bernoulli-Euler.

Em um trabalho teórico [49] foi estudada a rotação de uma viga em torno de seu eixo, rotação essa provocada por um motor de torção. Um segundo trabalho [50], estudou a vibração de uma viga engastada em uma extremidade, e na outra extremidade, temos uma excitação periódica. Resultados numéricos revelaram oscilações caóticas. O espaço de fase para os atratores caóticos possuem uma estrutura interessante, tal como o sistema de Lorenz.

Na referência [51], temos o estudo numérico de uma viga de Euler-Bernoulli engas-

tada em uma de suas extremidades. Toda a viga sofre a ação de um carregamento externo periódico. No referido trabalho, foi feita uma ampla investigação numérica do sistema com diagramas de órbitas, espaços de fase e expoentes de Lyapunov. Foi verificado regimes periódicos, caóticos e hipercaóticos.

O presente trabalho segue uma linha bastante peculiar. A equação diferencial parcial que modela a dinâmica de uma viga sujeita a uma fundação elástica não-linear, segundo nossa modelagem, é a equação (4.5). Conforme já discutido, temos uma aproximação, e esse fato deve ser frisado. O objeto de nosso estudo é a parte temporal das soluções $w(x, t)$. A equação diferencial de segunda ordem (4.11) fornece soluções $u(t)$ e tal equação contém um termo não-linear u^3 . Evidente que, a solução temporal, mesmo sendo uma aproximação, deve ser acoplada a solução da parte espacial. No entanto, mesmo a solução da parte temporal mostra resultados numéricos característicos de fenômenos não-lineares e, é de se esperar, que tal comportamento influencie as soluções $w(x, t)$.

Vamos, nessa seção, seguir, de forma similar, a mesma linha de raciocínio na apresentação dos resultados numéricos do capítulo 3. Resultados numéricos iniciais mostram soluções $u(t)$, espaço de fase $u\dot{u}$ e os três expoentes de Lyapunov.

As figuras 4.2(a)(b) mostram um atrator periódico. A figura 4.2(c) mostra os três expoentes de Lyapunov e notamos que os dois maiores (exceto aquele que é identicamente nulo) são negativos. Nas figuras 4.3(a)(b) temos um atrator caótico. A figura 4.3(c) mostra claramente a existência de um expoente de Lyapunov positivo, o que caracteriza o comportamento caótico.

Diagramas de bifurcação com o valor máximo da variável u em função dos parâmetros de interesse foram gerados. As figuras 4.4(a)(b), são dois diagramas de bifurcação, referentes a duas condições iniciais diferentes, em função do parâmetro b . Da mesma forma, temos as figuras 4.5(a)(b), para o parâmetro F . Adicionalmente, a fim de

obter mais informações sobre as bifurcações ocorridas, a figura 4.6 mostra ampliações sucessivas do diagrama plotado em azul, na figura 4.5(a).

É importante mencionar que os “saltos” observados nos diagramas se devem ao fato de que, a cada incremento no parâmetro, o sistema pode se encontrar em outro atrator pois foi mantida a condição inicial fixa. De outra forma, uma vez que o estado final do sistema depende não só das condições iniciais mas também dos parâmetros, o sistema pode ser levado a outro atrator e então, temos essas mudanças súbitas (descontinuidades) observadas no valor máximo da variável u .

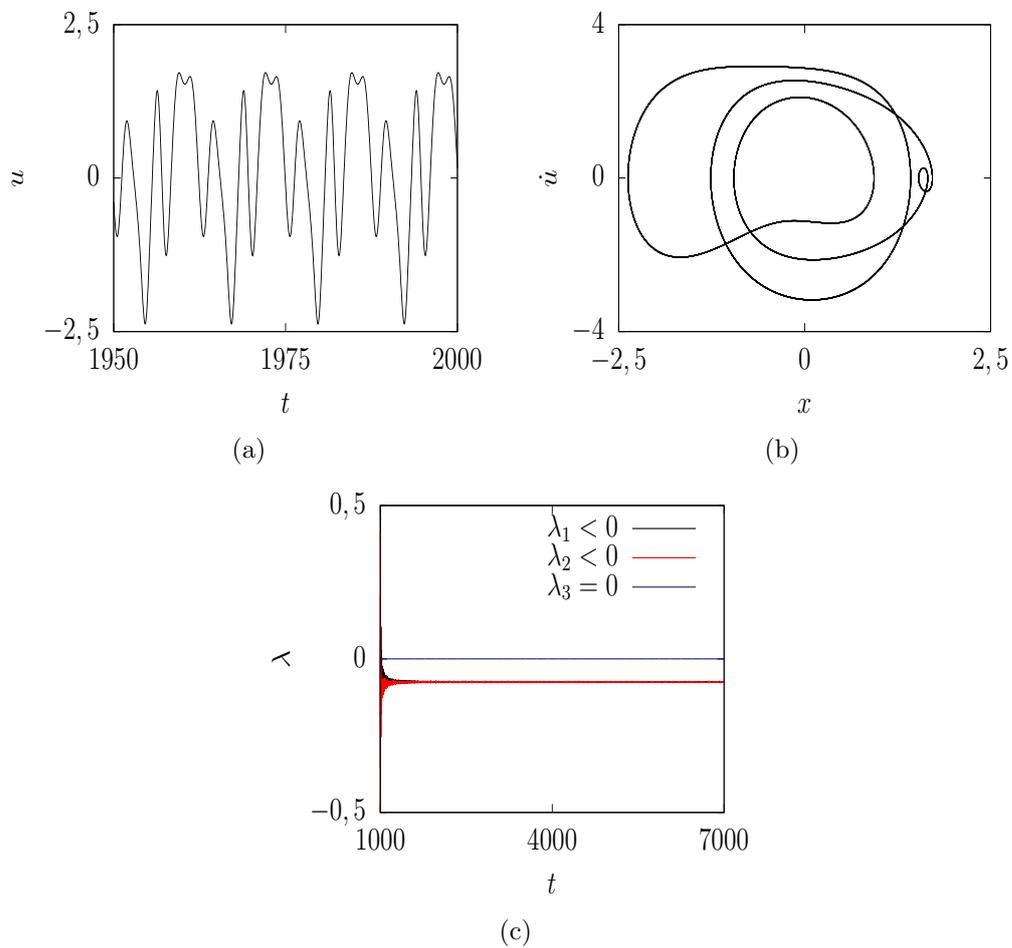


Figura 4.2: Atrator Periódico com $F = 4$ e $b = 0,15$: (a) soluções $u(t)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (u, \dot{u}) ; (c) expoentes de Lyapunov $\lambda(t)$.

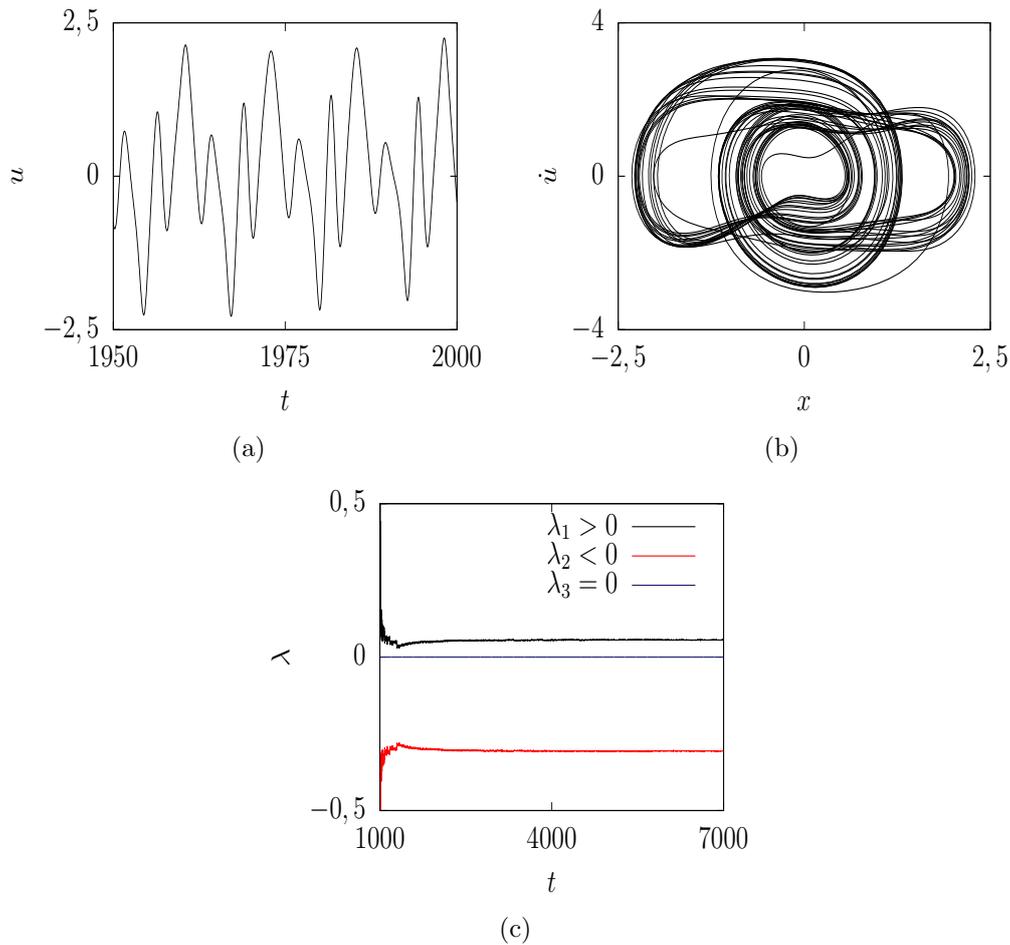


Figura 4.3: Atrator Caótico com $F = 4$ e $b = 0,25$: (a) soluções $u(t)$; (b) projeção do espaço de fase no plano (u, \dot{u}) ; (c) expoentes de Lyapunov $\lambda(t)$.

A coexistência de atratores, comum em sistemas mecânicos não-lineares, foi verificada em nosso trabalho. Os diagramas de bifurcação 4.4(a)(b) mostram a coexistência de atratores quando o parâmetro b é variado. De forma análoga, temos os diagramas de bifurcação das figuras 4.5(a)(b) para o parâmetro F . Observamos duplicações de período e atratores caóticos.

Maior ênfase é dada aos fenômenos não-lineares com as figuras 4.6(a)(b). Os diagramas citados são sucessivas ampliações dos atratores plotados em azul, figuras 4.5(a)(b).

Nascimento e morte súbitas de atratores caóticos, crises, são verificados. Verifica-se, também, a existência de janelas periódicas imersas em regiões caóticas.

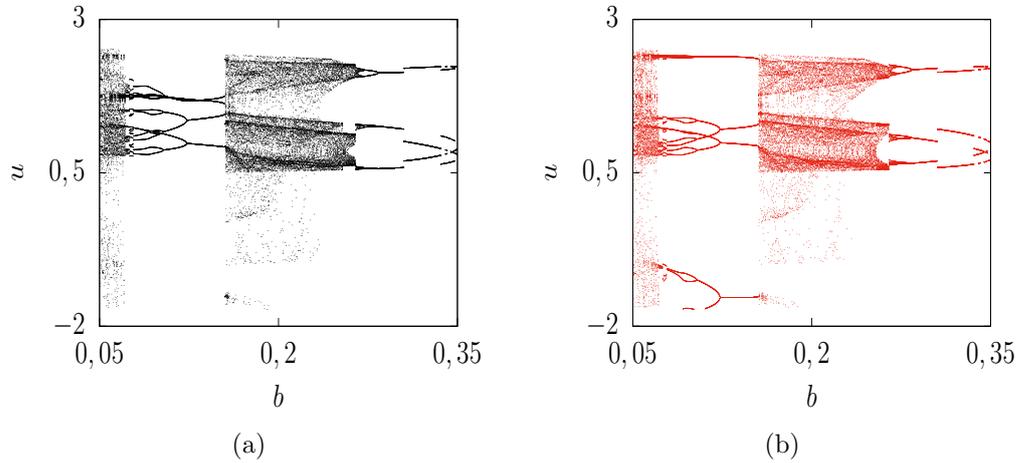


Figura 4.4: Diagrama de bifurcação do valor máximo da variável dinâmica u em função do parâmetro b para duas condições iniciais diferentes com $F = 4$. Condições iniciais: (a) $(1,0,0)$ e (b) $(-1,0,0)$.

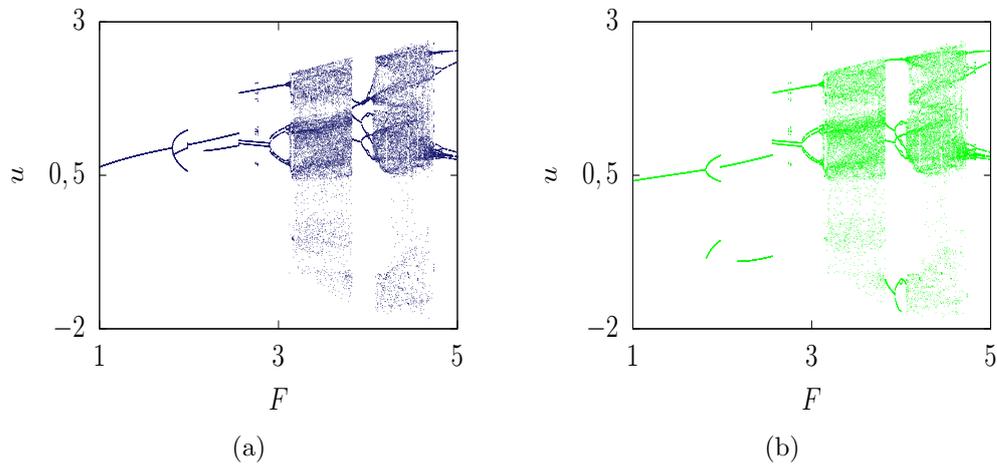


Figura 4.5: Diagrama de bifurcação do valor máximo da variável dinâmica u em função do parâmetro F para duas condições iniciais diferentes com $b = 0,1$. Condições iniciais: (a) $(1,0,0)$ e (b) $(-1,0,0)$.

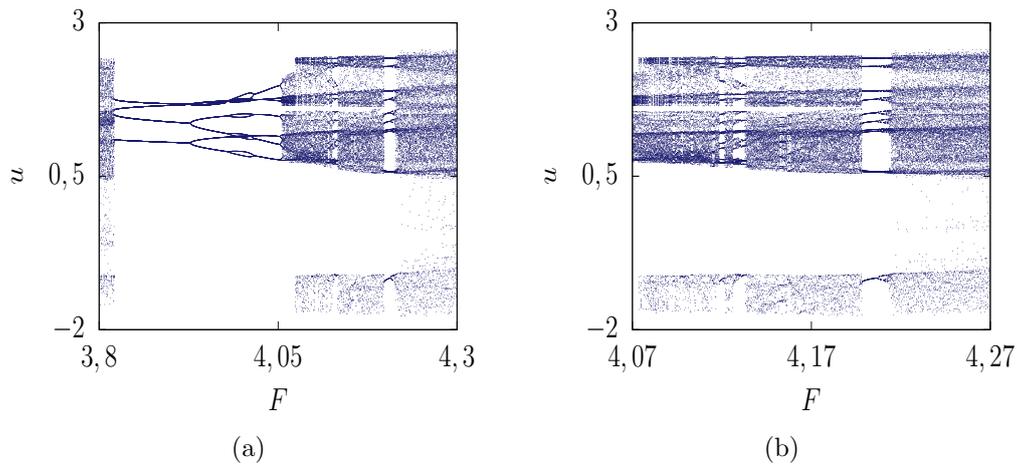


Figura 4.6: (a)(b) Sucessivas ampliações do diagrama de bifurcação da figura 4.5(a) plotado em azul.

Uma vez verificada a coexistência de atratores, foi feita uma busca por atratores periódicos coexistentes. A bacia de atratores foi construída com 1000 valores da condição inicial $u(0)$ e, 1000 valores com a condição inicial $\dot{u}(0)$ igualmente intervalados. O critério usado para gerar as bacias é o mesmo do capítulo 3. A única diferença é que identificamos os atratores (periódicos) pelo valor máximo global. Cada bacia recebe uma cor. Juntamente com as bacias, temos os diagramas de órbitas $u(t)$ e o espaço de fase reduzido $u\dot{u}$ após transientes, com as respectivas cores.

As figuras 4.7(a)(b) mostram a coexistência de três atratores periódicos. Nas figuras 4.7(c)(d) temos a bacia para os três atratores coexistentes seguida da ampliação de uma porção da bacia. As fronteiras entre os atratores em preto e vermelho se revelam bastante complexas o que dificulta a determinação da forma de oscilar da viga. No entanto, observamos pelos gráficos $u(t)$ que tais atratores são simétricos. Curiosamente, a região que separa o atrator plotado em azul dos demais é bem definida e maior que a dos outros.

Nas figuras 4.8(a)(b) temos quatro atratores coexistentes. A bacia de atratores e

a ampliação de uma porção desta é mostrada em 4.8(c)(d). A complexidade da nova bacia é drasticamente maior. Temos aqui uma dificuldade, devido a complexidade das fronteiras, possivelmente fractal, de escolher órbitas periódicas específicas.

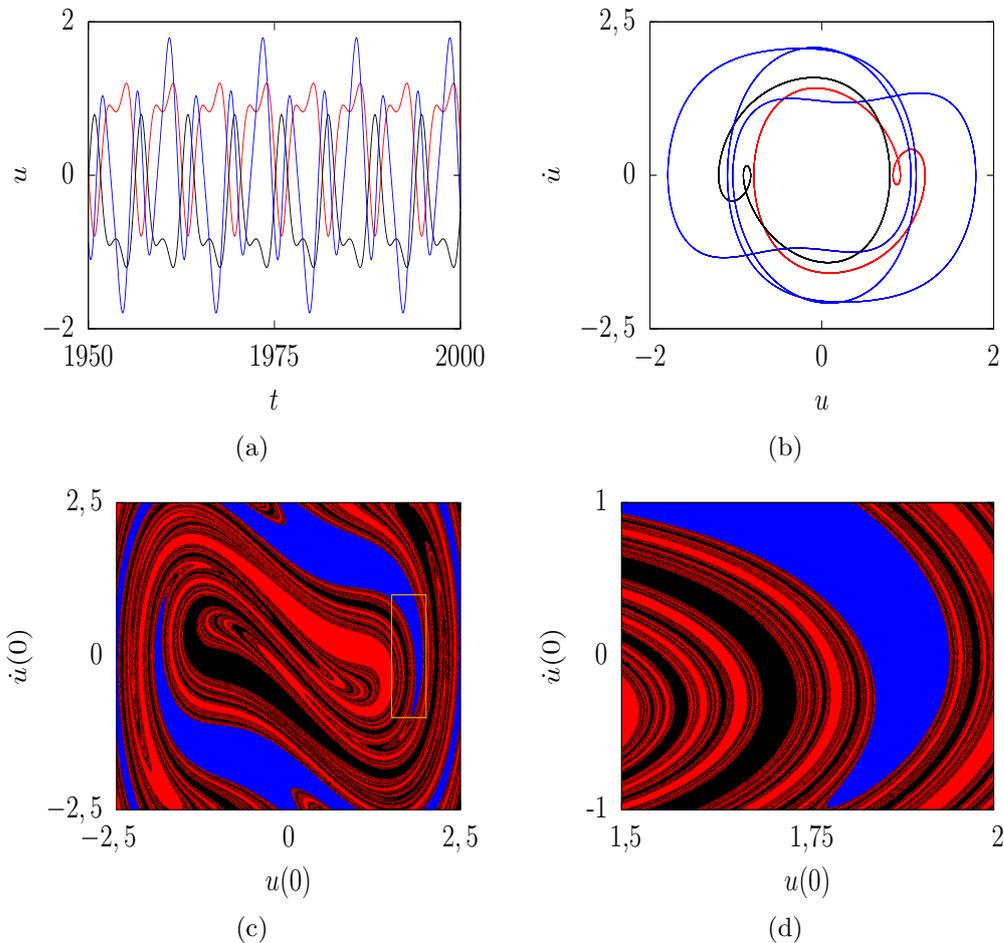


Figura 4.7: Coexistência de 3 atratores periódicos para $b = 0, 15$ e $F = 2, 5$: (a) $u(t)$; (b) projeção do espaço de fase no plano $u\dot{u}$; (c) bacia de atratores; (d) ampliação da bacia.

A novidade aqui, em relação aos trabalhos anteriormente mencionados, e, em relação a vários outros, é o estudo do espaço de parâmetros bidimensional. Foram tomados 600

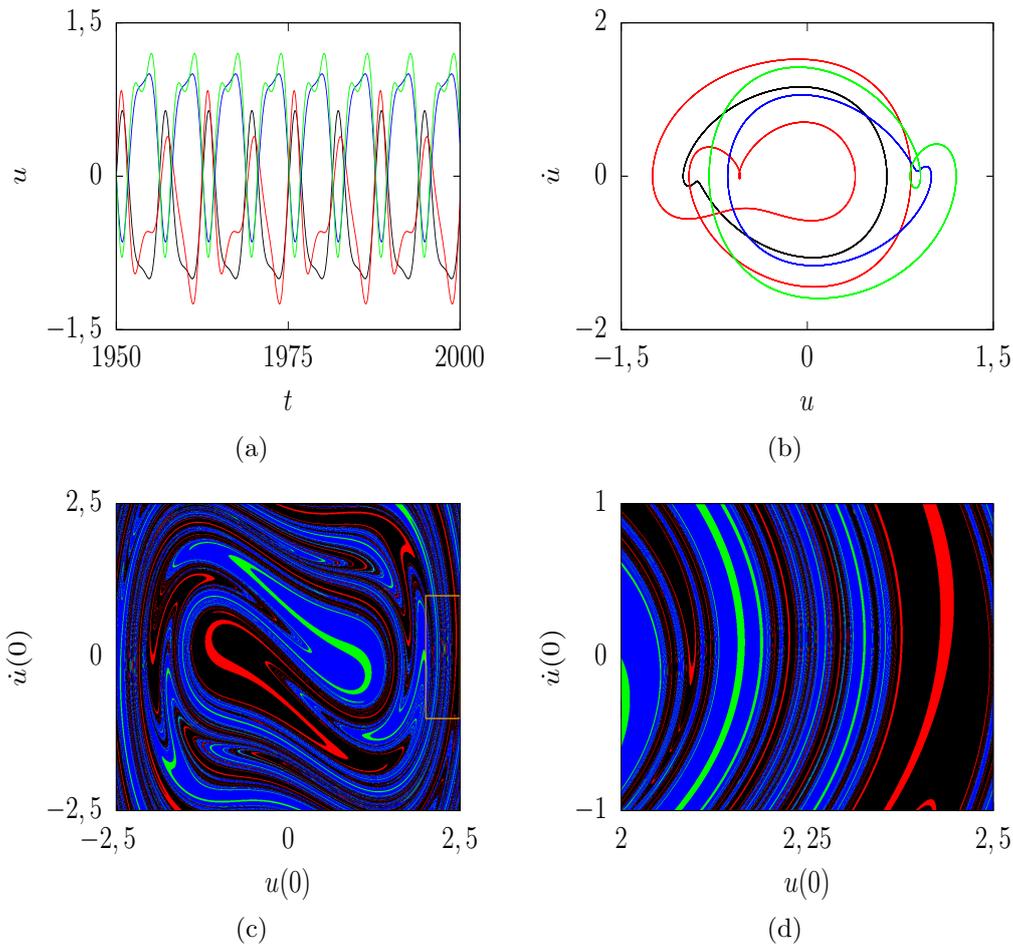


Figura 4.8: Coexistência de 4 atratores periódicos para $b = 0, 1$ e $F = 2$: (a) $u(t)$; (b) projeção do espaço de fase no plano $u\dot{u}$; (c) bacia de atratores; (d) ampliação da bacia.

valores de b e 600 valores de F igualmente espaçados. Para cada par de parâmetros, foi avaliado o maior expoente de Lyapunov, desconsiderando aquele que é identicamente nulo. Cada par de parâmetros recebe uma cor, e a paleta de cores ao lado de cada gráfico indica o valor do maior expoente. Se o maior expoente de Lyapunov for negativo temos soluções periódicas. Se for positivo temos caos. Para expoentes negativos, a escala de cores vai de preto até cinza. Os expoentes positivos estão em azul.

Na figura 4.9 observamos, para uma vasta gama de pares de parâmetros, que o sistema se comporta de forma regular (regiões em preto e cinza). Entretanto, temos três

regiões de caos (azul). Dentro dessas regiões observamos diversas estruturas (cinza) que se referem a atratores periódicos.

Uma melhor investigação do espaço de parâmetros, como já sabemos, é feita via ampliações de porções da região caótica. As figuras 4.10(a)(b)(c)(d) mostram sucessivas ampliações de uma das regiões de caos. Na primeira figura temos várias estruturas com formatos diferenciados. O gráfico (b) mostra uma dessas estruturas. Ela possui um esqueleto central e também as linhas superestáveis tal qual um *shrimp*. Linhas superestáveis aparecem dentro da estruturas *shrimps* e são curvas que contém os menores expoentes de Lyapunov dentro da estrutura. A ampliação de uma região próxima a essa estrutura é mostrada na figura (c). Temos, então, diversas estruturas periódicas alinhadas à estrutura principal. A figura 4.10(d) mostra o mesmo padrão, sendo esta a ampliação de uma das estruturas mostrada em 4.10(c).

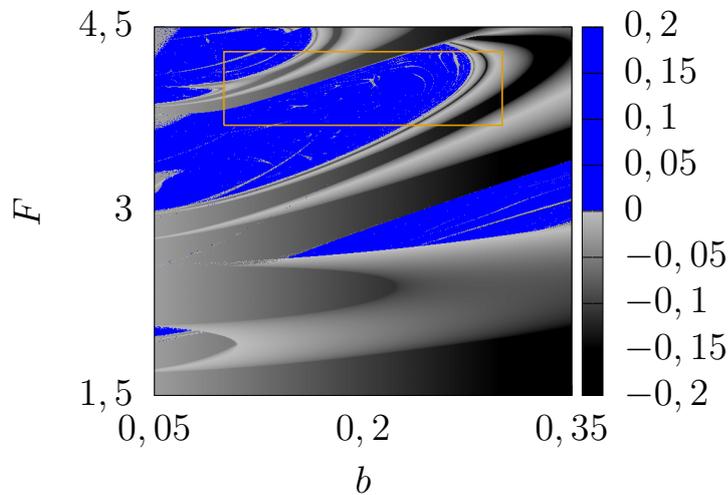


Figura 4.9: Espaço de Parâmetros bidimensional com condição inicial $(1, 0, 0)$.

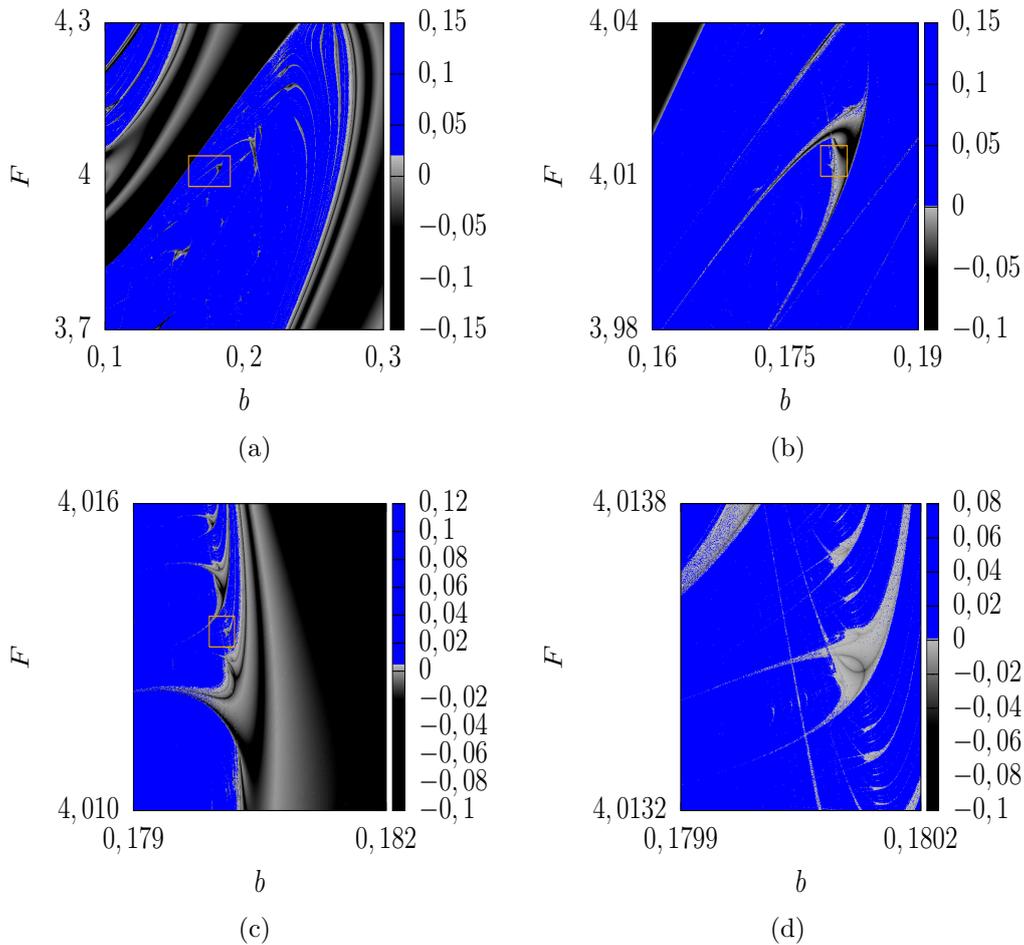


Figura 4.10: (a)(b)(c)(d) Sucessivas ampliações de uma porção do gráfico 4.9.

4.4 Conclusões

O estudo da viga apresentou fenômenos não-lineares semelhantes aos observados no oscilador não-ideal. Os diagramas de bifurcação revelaram órbitas de período elevado e diversas duplicações de período bem como eventos de crise.

A estrutura das bacias também mostrou aumento de complexidade a medida que o número de atratores coexistentes aumentou. Curiosamente em uma das bacias, figura 4.7, um dos atratores ocupa uma região bem distinta dos demais e não se entrelaça com os outros.

No espaço de parâmetros, novamente, observamos uma extensa região de comporta-

mento periódico. Na região caótica temos diversas estruturas periódicas com formatos diversos. Sucessivas ampliações de uma delas mostra uma série de *shrimps* alinhados.

5 Conclusões

O estudo do oscilador de Duffing Não-ideal mostrou, de acordo com os diagramas de bifurcação, janelas periódicas intercaladas com bandas caóticas em uma estrutura altamente organizada. Notamos que o incremento no parâmetro α leva a decréscimo de período unitário. Dessa forma, para valores de α maiores, temos oscilações mais simples. A coexistência de atratores nos levou a bacias de atração com fronteiras lisas e algumas regiões com aparente comportamento fractal. A caracterização do sistema no espaço de parâmetros mostrou variadas regiões de comportamento periódico e quase-periódico. As *línguas de Arnold* foram observadas em uma sequência bastante organizada. Tais estruturas surgem quando o sistema composto se encontra no estado sincronizado. Além disso, foram observadas incontáveis estruturas *shrimps* em regiões de caos. Isso mostra a possibilidade de o sistema se estabilizar em regiões caóticas.

Para a viga de Bernoulli-Euler, fenômenos similares aos mencionados para o oscilador de Duffing foram encontrados. Os diagramas de bifurcação mostraram oscilações periódicas simples e complexas. As bacias de atração revelaram fronteiras lisas e fractais. No espaço de parâmetros, observamos, novamente, largas regiões onde o sistema pode se estabilizar. Soluções periódicas, imersas em regiões caóticas, com diversos formatos, foram observadas. A investigação de uma delas mostrou uma série de outras aninhadas. Aparentemente, se tratam de *shrimps*.

Como perspectivas futuras de trabalho, temos, por exemplo, a caracterização de ambos os sistemas no espaço de parâmetros com outros parâmetros; investigar melhor

outras estruturas periódicas; coexistência de atratores caóticos; ampliações das bacias de atração nas regiões mais complexas. Mudanças na curva característica do motor, adição de outro pêndulo ou mesmo outras modelagens de vigas seria interessante.

Ambos os sistemas parecem ser factíveis experimentalmente. No caso da viga, uma perspectiva de estudo futuro seria a verificação do modelo aproximado que utilizamos conectado à parte espacial.

Por fim, como mostrado, ambos os sistemas mostram soluções periódicas para uma gama grande parâmetros e suas oscilações podem, em princípio, ser controladas, o que pode ser importante para sistemas mecânicos.

Referências Bibliográficas

- [1] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 130-141.
- [2] Li, T. Y., & Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10), 985-992.
- [3] Lichtenberg, A.J., Lieberman, M.A. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2nd ed., Applied Mathematical Sciences, Vol. 38, New York, NY: Springer-Verlag, 1992.
- [4] Tufaile, A., Pinto, R. D., Gonçalves, W. M., & Sartorelli, J. C. (1999). Simulations in a dripping faucet experiment. *Physics Letters A*, 255(1), 58-64.
- [5] Baptista, M. S., Caldas, I. L., Heller, M. V. A. P., & Ferreira, A. A. (2003). Periodic driving of plasma turbulence. *Physics of Plasmas* (1994-present), 10(5), 1283-1290.
- [6] Leonel, E. D., McClintock, P. V., & da Silva, J. K. L. (2004). Fermi-Ulam accelerator model under scaling analysis. *Physical Review Letters*, 93(1), 014101.
- [7] Maranhão, D. M., Sartorelli, J. C., & Baptista, M. D. S. (2009). Experimental identification of chaotic fibers. *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(1), 9-16.
- [8] Arneodo, A., Coulet, P., & Tresser, C. (1980). Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations. *Physics Letters A*, 79(4), 259-263.

- [9] Tél, T., de Moura, A., Grebogi, C., & Károlyi, G. (2005). Chemical and biological activity in open flows: A dynamical system approach. *Physics Reports*, 413(2), 91-196.
- [10] Ma, J., & Mu, L. (2007). Complex dynamics in a nonlinear cobweb model for real estate market. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2007.
- [11] Wiercigroch, M. (1997). Chaotic vibration of a simple model of the machine tool-cutting process system. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119(3), 468-475.
- [12] Wiercigroch, M., & Cheng, A. D. (1997). Chaotic and stochastic dynamics of orthogonal metal cutting. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(4), 715-726.
- [13] Kovacic, I., & Brennan, M. J. (2011). *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*. John Wiley & Sons.
- [14] Berger, J. E., & Nunes Jr, G. (1997). A mechanical Duffing oscillator for the undergraduate laboratory. *American Journal of Physics*, 65(9), 841-846.
- [15] Parlitz, U., & Lauterborn, W. (1985). Superstructure in the bifurcation set of the Duffing equation $\ddot{x} + d\dot{x} + x + x^3 = f \cos(\omega t)$. *Physics Letters A*, 107(8), 351-355.
- [16] Ge, Z. M., & Ou, C. Y. (2007). Chaos in a fractional order modified Duffing system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(2), 262-291.
- [17] Savi, M. A., & Pacheco, P. M. C. (2002). Chaos in a two-degree of freedom Duffing oscillator. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, 24(2), 115-121.

- [18] de Souza, S. L. T., Lima, A. A., Caldas, I. L., Medrano-T, R. O., & Guimarães-Filho, Z. D. O. (2012). Self-similarities of periodic structures for a discrete model of a two-gene system. *Physics Letters A*, 376(15), 1290-1294.
- [19] Medeiros, E. S., de Souza, S. L. T., Medrano-T, R. O., & Caldas, I. L. (2010). Periodic window arising in the parameter space of an impact oscillator. *Physics Letters A*, 374(26), 2628-2635.
- [20] de Souza, S. L., Caldas, I. L., & Viana, R. L. (2009). Multistability and self-similarity in the parameter-space of a vibro-impact system. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009.
- [21] Medeiros, E. S., de Souza, S. L. T., Medrano-T, R. O., & Caldas, I. L. (2011). Replicate periodic windows in the parameter space of driven oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 44(11), 982-989.
- [22] Nascimento, M. A., Gallas, J. A., & Varela, H. (2011). Self-organized distribution of periodicity and chaos in an electrochemical oscillator. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 13(2), 441-446.
- [23] Marion, J. B. (2013). *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press.
- [24] Balachandran, B., & Magrab, E. B. (2011). *Vibrações mecânicas*. São Paulo: Cengage Learning.
- [25] Hilborn, R. C., Coppersmith, S., Mallinckrodt, A. J., & McKay, S. (1994). Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. *Computers in Physics*, 8(6), 689-689.
- [26] Savi, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. Editora E-papers, 2006.

- [27] Fiedler-Ferrara, N., & do Prado, C. C. (1994). *Caos: uma introdução*. Edgar Blucher.
- [28] Monteiro, L. H. A. (2006). *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física.
- [29] Strogatz, S. H. (2014). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview press.
- [30] Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems* (Vol. 13046). Reading: Addison-Wesley.
- [31] Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5), 397-398.
- [32] Castro, V., Monti, M., Pardo, W. B., Walkenstein, J. A., & Rosa Jr, E. (2007). Characterization of the Rössler system in parameter space. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(03), 965-973.
- [33] Bonatto, C., Gallas, J. A., & Ueda, Y. (2008). Chaotic phase similarities and recurrences in a damped-driven Duffing oscillator. *Physical Review E*, 77(2), 026217.
- [34] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3), 285-317.
- [35] Gallas, J. A. (1993). Structure of the parameter space of the Hénon map. *Physical Review Letters*, 70(18), 2714.
- [36] Gallas, J. A. (1994). Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 202(1-2), 196-223.

- [37] de Souza, S. L. T., Batista, A. M., Baptista, M. S., Caldas, I. L., & Balthazar, J. M. (2017). Characterization in bi-parameter space of a non-ideal oscillator. *Physica. A* , 466, 224-231.
- [38] Grebogi, C., Ott, E., & Yorke, J. A. (1985). Attractors on an N-torus: Quasi-periodicity versus Chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 15(3), 354-373.
- [39] Brzeski, P., Perlikowski, P., Yanchuk, S., & Kapitaniak, T. (2012). The dynamics of the pendulum suspended on the forced Duffing oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 331(24), 5347-5357.
- [40] Alasty, A., & Shabani, R. (2006). Chaotic motions and fractal basin boundaries in spring-pendulum system. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 7(1), 81-95.
- [41] Feudel, U., Grebogi, C., Poon, L., & Yorke, J. A. (1998). Dynamical properties of a simple mechanical system with a large number of coexisting periodic attractors. *Chaos, Solitons & Fractals*, 9(1), 171-180.
- [42] Grebogi, C., Kostelich, E., Ott, E., & Yorke, J. A. (1987). Multi-dimensioned intertwined basin boundaries: basin structure of the kicked double rotor. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 25(1-3), 347-360.
- [43] Gwinn, E. G., & Westervelt, R. M. (1986). Fractal basin boundaries and intermittency in the driven damped pendulum. *Physical Review A*, 33(6), 4143.
- [44] de Souza, S. L. T., Caldas, I. L., Viana, R. L., Balthazar, J. M., & Brasil, R. M. L. R. F. (2005). Basins of attraction changes by amplitude constraining of oscillators with limited power supply. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(4), 1211-1220.

- [45] de Souza, S. L. T., Caldas, I. L., Viana, R. L., Balthazar, J. M., & Brasil, R. M. L. R. F. (2006). Dynamics of vibrating systems with tuned liquid column dampers and limited power supply. *Journal of Sound and Vibration*, 289(4), 987-998.
- [46] Ecke, R. E., Farmer, J. D., & Umberger, D. K. (1989). Scaling of the Arnold tongues. *Nonlinearity*, 2(2), 175.
- [47] Tennekes, H., & Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. MIT press.
- [48] Celik, I.B (1999). *Introductory Turbulence Modeling, Lectures Notes*. West Virginia University.
- [49] Fenili, A., & Balthazar, J. M. (2005). Some remarks on nonlinear vibrations of ideal and nonideal slewing flexible structures. *Journal of Sound and Vibration*, 282(1), 543-552.
- [50] Berdichevsky, V. L., Kim, W. W., & Özbek, A. (1995). Dynamical potential for non-linear vibrations of cantilevered beams. *Journal of Sound and Vibration*, 179(1), 151-164.
- [51] Awrejcewicz, J., Krysko, A. V., Kutepov, I. E., Zagniboroda, N. A., Dobriyan, V., & Krysko, V. A. (2013). Chaotic dynamics of flexible Euler-Bernoulli beams. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 23(4), 043130.