



LAYSA GONÇALVES MARTINS

**MODELOS COSMOLÓGICOS E BURACOS
NEGROS NO CONTEXTO DA GRAVITAÇÃO
DE HOŘAVA-LIFSHITZ**

LAVRAS - MG

2015

LAYSA GONÇALVES MARTINS

**MODELOS COSMOLÓGICOS E BURACOS NEGROS NO CONTEXTO
DA GRAVITAÇÃO DE HOŘAVA-LIFSHITZ**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Gilson Dallabona

Coorientador

Dr. José Alberto Casto Nogales Vera

LAVRAS - MG

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Martins, Laysa Gonçalves.

Modelos cosmológicos e buracos negros no contexto da gravitação
de Hořava-Lifshitz / Laysa Gonçalves Martins.

– Lavras: UFLA, 2015.

76 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)-Universidade Federal de
Lavras, 2015.

Orientador: Gilson Dallabona.

Bibliografia.

1. Cosmologia quântica. 2. Teoria de de Broglie-Bohm. 3. Buraco
negro. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

LAYSA GONÇALVES MARTINS

**MODELOS COSMOLÓGICOS E BURACOS NEGROS NO CONTEXTO
DA GRAVITAÇÃO DE HOŘAVA-LIFSHITZ**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 24 de fevereiro de 2015.

Dr. Helvécio Geovani Fagnoli Filho

UFLA

Dr. Moises Porfirio Rojas Leyva

UFLA

Dr. Gil de Oliveira Neto

UFJF

Dr. Gilson Dallabona
Orientador

Dr. José Alberto Casto Nogales Vera
Coorientador

LAVRAS - MG

2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado forças e iluminado o meu caminho para que pudesse concluir mais uma etapa da vida.

Ao Prof. Dr. José Alberto Casto Nogales Vera, pela paciência, ensinamentos, apoio, disponibilidade e pelos anos de orientação.

À Prof. Dra Karen Luz Burgoa Rosso pelas colaborações e dicas que facilitaram a minha vida de mestranda.

Aos professores, Dr. Helvécio Geovani Fagnoli Filho, Dr. Moises Porfirio Rojas Leyva e Dr. Gil de Oliveira Neto, por terem aceitado o convite de participar da banca e contribuir de forma significativa.

Aos meus pais, Fábio e Virgínia e ao meu irmão Fábio Antônio, pelo incentivo, apoio e carinho.

Ao André, pela compreensão e por me alegrar nos momentos difíceis.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa estudos.

Aos amigos, Ana Luiza, Bruno, Thalís Girardi, Jenny, Rodrigo, Felipe Velozo, Kayo.

Aos professores e funcionários do Departamento de Ciências Exatas (DEX), que me ajudaram nesta jornada.

À Universidade Federal de Lavras e ao Programa de Pós-Graduação em Física.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi estudar as singularidades em modelos cosmológicos assim como em buracos negros do ponto de vista quântico no contexto da gravidade de Hořava-Lifshitz. Para a cosmologia, a teoria de Hořava-Lifshitz foi utilizada na perspectiva de minisuperespaços para se analisar a singularidade no início do universo na fase ultravioleta, enquanto que em buracos negros estudou-se a singularidade no horizonte de eventos assim como em seu interior. Utilizou-se a interpretação de de Broglie-Bohm para analisar as soluções, as quais mostram que as singularidades são evitáveis devido a efeitos quânticos. No contexto quântico, foi também considerado o fator de ordenamento dos operadores. Os resultados obtidos na cosmologia mostram que o fator de escala em função do tempo conduziu à soluções finitas e regulares, sendo a singularidade removida quanticamente em geral e também nos modelos fechado e aberto. No caso dos buracos negros, mostra-se que a singularidade no interior foi também removida e no horizonte de eventos, obteve-se que a área foi quantizada assim como a massa, a energia e a entropia. Esses resultados tornaram-se originais ao se considerar, em todos os casos, o fator de ordenamento, que contribui na remoção das singularidades e na quantização do horizonte de eventos de buracos negros.

Palavras Chaves: Cosmologia quântica. Teoria de de Broglie-Bohm. Buraco negro.

ABSTRACT

The purpose of this research was to study the singularity in cosmological models, as well as in black holes; in the quantum point of view of the Hořava-Lifshitz gravity. For the cosmology, the Hořava-Lifshitz theory was used in the perspective of minisuperspaces, seeking to analyze the singularity in the beginning of the universe in the ultraviolet phase; while in black holes we studied the singularity in the event horizon as well as inside them. The de Broglie-Bohm interpretation was used to analyze solutions, which showed that singularities may be avoidable due to quantum effects. In this context, it was also considered the spatial factor of operators. Results found in relation to cosmology showed that the scaling factor, in the time function, leads to finite and regular solutions, and the singularity is moved quantically in general, as well as in closed and open models. In case of black holes, it was found that the singularity inside is also removed and, in the event horizon, was found that the area, mass, energy, and entropy were quantized. These results became unique when was considered, in all cases, the spatial factor, which contributes to the removal of singularities and quantization of event horizon in black holes.

Key-words: Quantum cosmology. The de Broglie-Bohm theory. Black hole.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	REFERENCIAL TEÓRICO	10
2.1	Relatividade Geral	10
2.1.1	Obtenção das equações de campo gravitacional	11
2.1.2	Propriedades das equações de campo de Einstein	14
2.2	Modelo de Hořava-Lifshitz	15
2.3	Formalismo ADM	17
2.3.1	Foliação do espaço-tempo	19
2.3.2	Lagrangiana e hamiltoniano no formalismo ADM	21
2.4	Condição de balanço detalhado	23
2.5	Versão projetável	24
2.6	Versão não-projetável	25
2.7	Teoria de de Broglie-Bohm	25
2.7.1	A teoria da onda piloto	26
3	COSMOLOGIA	31
3.1	Solução para a muito pequeno	35
3.2	Universo Fechado	41
3.3	Universo aberto	44
4	BURACOS NEGROS	46
4.1	Equação de Schrödinger para buracos negros de Schwarzschild	48
4.2	Autovalores e Autovetores	58
4.3	Solução da equação WdW para $a \rightarrow 0$	62
4.4	Buracos negros na teoria de HL	64
5	CONCLUSÃO	68
	REFERÊNCIAS	72

1 INTRODUÇÃO

A curiosidade do homem em tentar compreender o Universo é conhecida desde tempos remotos. Destacou-se esse interesse com o surgimento de observações do comportamento dos astros no céu. Pode-se ver isso através da criação de lendas, mitologias, crenças, superstições, teorias, dentre outras. O desejo de se conhecer a dinâmica do universo, produz efeitos sociais, políticos e econômicos na sociedade. Um exemplo simples, seria o abandono da teoria geocêntrica para a teoria heliocêntrica. Nesta dissertação, foi estudado um dos aspectos que desperta grande interesse na comunidade científica, que são as singularidades presentes na teoria gravitacional.

Foi analisada a singularidade no início do universo e a singularidade dentro de um buraco negro de Schwarzschild. Para isso, foram estudados os conceitos físicos e as ferramentas matemáticas necessárias. Das diversas interpretações existentes da mecânica quântica, foi escolhida a interpretação de de Broglie-Bohm, pelo fato dessa interpretação não necessitar de um observador. Considerou-se também que, ao se descrever o sistema físico quanticamente, seria pertinente discutir os efeitos produzidos pelo fator de ordenamento dos operadores quânticos.

Em resumo, essa dissertação está organizada em cinco seções, a saber: introdução, referencial teórico, cosmologia, buracos negros e conclusão. Na segunda seção, é apresentado o referencial teórico necessário para o desenvolvimento e compreensão dos problemas a serem estudados. Em especial, são apresentados sucintamente os conceitos básicos da teoria da Relatividade Geral (RG), a obtenção das equações do campo gravitacional e suas propriedades. O tópico seguinte dessa seção descreve o modelo de Hořava-Lifshitz (HL), o qual utiliza o formalismo ADM com a foliação do espaço-tempo. Faz-se também uma breve descrição das condições sobre a teoria de HL, tais como balanço detalhado,

versão projetável e não projetável. A seguir são apresentados os conceitos físicos da interpretação de de Broglie-Bohm, em que a onda piloto e as partículas são as quantidades que descrevem esse sistema.

Na terceira seção analisa-se a singularidade no início do universo, encontrando a função de onda, a qual é interpretada segundo de Broglie-Bohm. É também feito o estudo dessas singularidades quando se tem geometrias esférica e hiperbólica. É mostrado que a função de onda cosmológica nos pontos singulares, é finita e regular em todo espaço-tempo.

Na quarta seção, é estudada a singularidade no interior de buracos negros. Para isso, é encontrada a equação de Schrödinger para buracos negros de Schwarzschild. Em seguida, determina-se os autovalores e os autovetores, o que conduz a quantização de quantidades físicas. É apresentada uma solução para a equação de Wheeler DeWitt (WdW), em que a singularidade é removida. É feito também um comentário no contexto de buracos negros na teoria de HL e nesse sentido, tem-se que algumas das quantidades analisadas nessa seção da dissertação foram reinterpretadas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A seguir apresenta-se os conteúdos necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Inicialmente, apresenta-se os conceitos básicos da relatividade geral (CARMELI, 1982; D'INVERNO, 1992; LANDAU; LIFSHITZ, 1975). Posteriormente, tratar-se-á do modelo de Hořava-Lifshitz (HOŘAVA, 2009; VAKILI; KORD, 2013), o qual descreve o sistema gravitacional no limite de altas energias, e que recupera a relatividade no limite de baixas energias. No entanto, nesse modelo torna-se necessário introduzir o formalismo ADM (GOURGOULHON, 2012), já que devido a quebra de simetria, deve-se foliar o espaço-tempo em hipersuperfícies e em uma coordenada temporal. Para interpretar esse sistema que possui características quânticas, utilizou-se a interpretação de de Broglie-Bohm (DÜRR; TEUFEL, 2009; HE; GAO; CAI, 2014; PINTO NETO, 2005).

2.1 Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral (RG) foi proposta por Albert Einstein, em 1916, em seu artigo “Os fundamentos da teoria da relatividade geral” (“Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie”) (EINSTEIN, 1916). Através das equações dessa teoria clássica de campos é possível descrever o campo gravitacional e seus efeitos sobre sistemas físicos.

Os alicerces dessa teoria são o Princípio da Equivalência e o Princípio da Covariância Geral. O tratamento matemático utilizado na gravitação necessita considerar uma geometria não euclidiana, desenvolvida por Riemann e conhecida como geometria de Riemann. O Princípio da Equivalência trouxe consequências importantes ao identificar a relação existente entre a massa inercial e a massa gravitacional, ou seja, foi possível concluir que a trajetória de um corpo depende

apenas das condições iniciais (posição e velocidade) e não da constituição química do corpo. Consequentemente, foi possível estabelecer a equivalência entre referenciais acelerados e referenciais num campo gravitacional. Todavia, essa teoria requer também que as leis físicas sejam as mesmas em qualquer referencial. Por isso, o Princípio da Covariância Geral possibilita que estas possam ser expressadas matematicamente usando, por exemplo, o cálculo tensorial.

2.1.1 Obtenção das equações de campo gravitacional

As equações de campo gravitacional newtoniano assumem a existência de apenas um potencial que descreve o campo gravitacional, porém na teoria da RG, são dez potenciais. Os potenciais na RG são identificados através do tensor métrico $g_{ab}(x)$ da geometria curva do espaço-tempo de Riemann. Portanto, são dez equações diferenciais parciais de segunda ordem, que para o caso em que se tem velocidades muito menores que a velocidade da luz $v \ll c$ e que a interação gravitacional é fraca, resultam na equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi(x) = 4\pi G \rho(x),$$

onde ϕ representa o campo gravitacional, G é a constante gravitacional newtoniana, cujo valor corresponde a $G = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ no sistema internacional de unidades (SI) e $\rho(x)$ é a densidade de massa da matéria devido ao campo gravitacional.

As equações do campo gravitacional são dadas por:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \kappa T_{ab}, \quad (2.1)$$

onde R_{ab} é o tensor de Ricci, R é o escalar de curvatura, κ é a constante gravitacional de Einstein e T_{ab} é o tensor energia-momento.

Usando as identidades de Bianchi contraídas obtem-se::

$$\begin{aligned}\nabla_c R - \nabla_b R^b_c - \nabla_d R^d_c &= 0 \\ \nabla_b (R^b_a - \frac{1}{2}\delta_a^b R) &= 0 \\ \nabla_b R_a^b &= \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^a}.\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (2.1), tem-se:

$$\begin{aligned}R_a^b - \frac{1}{2}\delta_a^b R &= \kappa T_a^b \\ \nabla_a (R_a^b - \frac{1}{2}\delta_a^b R) &= 0,\end{aligned}$$

onde $\nabla_a T^{ab} = 0$, representa a conservação covariante do tensor energia-momento.

Portanto, as equações de campo de Einstein são:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa T_{ab} \quad (2.2)$$

$$R_a^b - \frac{1}{2}\delta_a^b R = \kappa T_a^b. \quad (2.3)$$

Para determinar o valor de κ , considera-se, inicialmente, a contração dos índices a e b , multiplica-se a equação (2.2) por g^{ab} :

$$\begin{aligned}g^{ab} R_{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}g_{ab}R &= \kappa g^{ab}T_{ab} \\ R_a^a - \frac{1}{2}\delta_a^a R &= \kappa T_a^a,\end{aligned}$$

fazendo $R_a^a = R$ e $kT_a^a = \kappa T$, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} R - \frac{1}{2}\delta_a^a R &= \kappa T, \\ R(1 - \frac{1}{2}\delta_a^a) &= \kappa T, \\ R &= -\kappa T. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Substituindo-se a equação (2.4) em (2.2), tem-se:

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}(-\kappa T) &= \kappa T_{ab} \\ R_{ab} &= \kappa(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Quando não há matéria no espaço-tempo, o tensor energia-momento desaparece. Então, as equações de campo de Einstein reduzem-se a $R_{ab} = 0$, que é conhecida como equações de campo de Einstein no vácuo. Se $R_{ab} = 0$ for satisfeito, então o tensor de Riemann é equivalente ao tensor de Weyl. De acordo com as equações do campo gravitacional dadas por (2.5), a constante gravitacional de Einstein k tem dimensões $cm^{-1} \cdot g^{-1} \cdot s^2$. Comparando esta, com a constante gravitacional de Newton G , a qual tem dimensões $cm^3 \cdot g^{-1} \cdot s^2$, pode-se escrever $\kappa \simeq G/c^4$. Assim, a constante gravitacional de Einstein também pode ser expressa como:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2,08 \cdot 10^{-48} cm^{-1} \cdot g^{-1} \cdot s^2,$$

em unidades CGS. Portanto, a equação de Einstein torna-se:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}$$

2.1.2 Propriedades das equações de campo de Einstein

Algumas das propriedades das equações de campo de Einstein são:

- (i) As funções de campo são funções não lineares, devido às consequências das identidades de Bianchi.
- (ii) O princípio da superposição não é válido, portanto a soma de duas soluções das equações de campo de Einstein não é necessariamente solução.
- (iii) A conservação do tensor energia-momento contém as equações de movimento da distribuição da matéria, ou seja, $\nabla_a T^{ab} = 0$.
- (iv) As equações de campo de Einstein contêm as equações de movimento da matéria que o campo gravitacional produz. Por isso, a distribuição e o movimento da matéria produzidos pelo campo gravitacional não podem ser determinados arbitrariamente, e sim devido ao tensor métrico (ao mesmo tempo que este é determinado pela distribuição e movimento da matéria através das equações de campo de Einstein), isto é, não se pode separar as equações de movimento e da matéria.

Outra versão das equações de Einstein é:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab},$$

onde Λ é a constante cosmológica introduzida por Einstein para que o universo seja estático, pois as soluções mostravam, por exemplo, um universo se expandindo. Atualmente, essa constante cosmológica é uma candidata para se explicar a energia escura.

O primeiro modelo universal realista proposto para a métrica do espaço-tempo foi elaborada por Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker, conhecido

como FLRW. Neste modelo utiliza-se a suposição inicial de que o conteúdo da massa do universo é homogêneo, isotrópico e conexo. A homogeneidade significa que regiões distintas do universo possuem a mesma densidade. A isotropia fornece, aproximadamente, as mesmas propriedades independente da direção em que se olhe. O conexo, a princípio, possibilita viajar de uma região para outra qualquer, sem abandonar o universo.

2.2 Modelo de Hořava-Lifshitz

Já se questiona a algum tempo sobre o fato da relatividade geral não ser uma teoria fundamental da gravidade e da necessidade de ser alterada, quando se considera altas energias. Uma das propostas, entre muitas, que complementa a teoria de Einstein a altas energias, foi apresentada em 2009 por Hořava e é uma teoria da gravidade, a qual propõe modificações na relatividade geral quando estamos no limite ultravioleta (UV), já que o procedimento de quantização apresenta dificuldades.

Após a publicação da teoria de Hořava (HOŘAVA, 2009), tem-se publicados muitos trabalhos nesta área, pois estes conduzem a resultados na gravidade quântica e na cosmologia. A proposta de Hořava tem-se inspirado numa transição de fase de segunda ordem na física do estado sólido, trabalho este desenvolvido por Lifshitz. Assim essa teoria é conhecida na literatura como teoria de Hořava-Lifshitz.

O modelo de Hořava-Lifshitz, ao propor alterações na gravitação de Einstein quando se está a altas energias, UV, torna esta, renormalizável e quantizável, e recupera a relatividade geral padrão para o limite de baixas energias, no infravermelho. No entanto, quando são feitas as medições para o comportamento UV, é necessário inserir derivadas de ordem superior na lagrangiana, estabelecendo

a renormalização. Todavia essa inserção resulta em alguns problemas, como derivadas de ordem superior no tempo, que ao serem aplicadas na teoria, levam a campos fantasmas (SOTIRIOU; VISSER; WEINFURTNER, 2009a).

Hořava, ao perceber que as derivadas espaciais de ordem superior contribuem para a renormalização da teoria, enquanto que as derivadas temporais de ordem superior produzem fantasmas, teve a ideia de construir uma teoria que utilizasse apenas as derivadas espaciais de ordem superior. Para isso utilizou o trabalho desenvolvido por Lifshitz, na física do estado sólido (GARATTINIA; SARIDAKIS, 2014), o qual propõe um reescalamento anisotrópico no espaço-tempo no regime UV, que é expresso por:

$$t \rightarrow b^z t, \quad \vec{x} \rightarrow b\vec{x},$$

onde b é um parâmetro de escala e z representa um expoente de dinâmica crítico. Assim, no limite UV, tem-se que as derivadas espaciais de maior ordem não estão acompanhadas pelas derivadas temporais, ocasionando numa quebra de simetria de Lorentz. Enquanto, no limite IR, a simetria de Lorentz é mantida. Quando $z = 1$, recupera-se a RG no IR e tem-se, para $z = 3$, o invariante da escala de Lifshitz.

Para inserir as derivadas espaciais de ordem superior na lagrangiana, sem que seja necessário inserir tais derivadas na coordenada temporal, uma possibilidade interessante é usar o formalismo desenvolvido por Arnowitt-Deser-Misner (ADM), no qual é feita uma foliação no espaço-tempo, que será o tema tratado na próxima seção.

2.3 Formalismo ADM

O formalismo ADM é uma abordagem para a relatividade geral que corta o espaço-tempo quadridimensional em superfícies tridimensionais espaciais, conhecidas por hipersuperfícies. Isso permite, do ponto de vista matemático, decompor o espaço-tempo em espaço + tempo, de modo que os campos tensoriais são trabalhados apenas no espaço tridimensional (hipersuperfície), isto é, o problema de encontrar soluções para as equações de Einstein torna-se um problema de Cauchy com restrições.

O formalismo ADM recebe este nome, pois, foi um trabalho desenvolvido por Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner (ADM) no final de 1950 e início de 1960 (GOURGOULHON, 2012). O formalismo ADM é também conhecido por foliação da relatividade geral e é uma possibilidade de abordagem da gravidade quântica, por meio da formulação hamiltoniana da relatividade geral (GOURGOULHON, 2012). Vamos descrever sucintamente as bases do formalismo ADM.

Considere a equação de Einstein abaixo:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa T_{ab}(-\Lambda),$$

onde κ é a constante gravitacional de Einstein, Λ é a constante cosmológica e G_{ab} é o tensor de Einstein. A lagrangiana de Einstein-Hilbert é dada por:

$$L = \sqrt{-g}R,$$

onde g é o determinante de g_{ab} .

Será descrito na próxima subseção o formalismo ADM. Para isso, deve-se inicialmente foliar a variedade espaço-tempo em uma série de hipersuperfícies do

tipo espacial Σ_t , em seguida, expressar a lagrangiana em termos das quantidades h_{ij} , N e N_i , encontrar o momento conjugado para h_{ij} , N e N_i e finalmente fazer uma variação no hamiltoniano em relação a N e N_i para as duas equações de restrição, onde N e N_i serão os multiplicadores de Lagrange e em relação a h_{ij} para determinar as demais equações de Einstein. A figura abaixo representa a foliação do espaço-tempo em termos de tais hipersuperfícies espaciais.

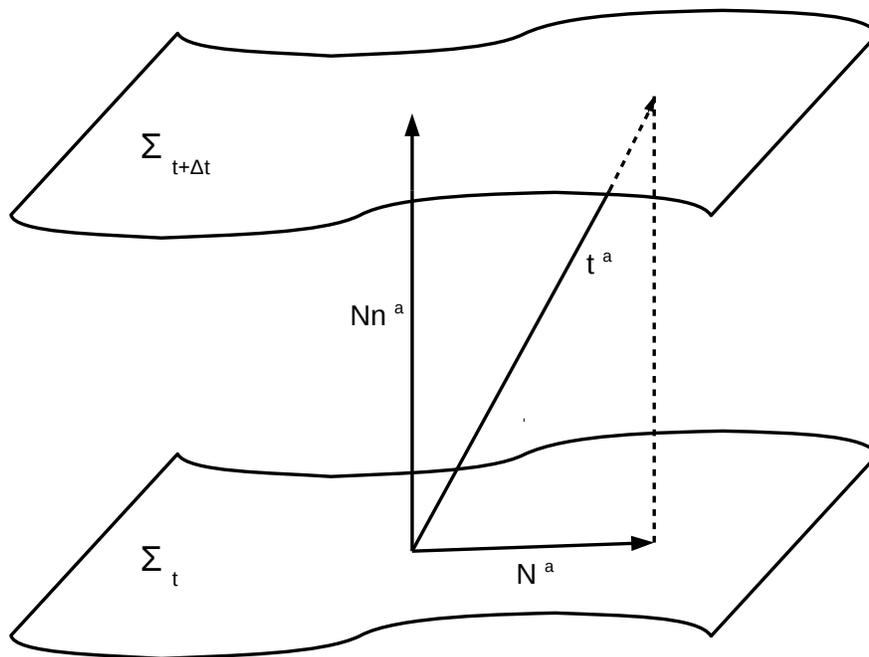


Figura 1 Foliação do espaço-tempo em hipersuperfícies espaciais Σ_t , onde h_{ij} é a métrica puramente espacial, N é a função *lapse*, N^a é o vetor *shift* e t^a é o fluxo temporal.

2.3.1 Foliação do espaço-tempo

De acordo com Gourgoulhon (2012), pode-se foliar uma variedade hiperbólica global arbitrária em uma família de hipersuperfícies Σ de constante t , a qual denominaremos por Σ_t . Dessa maneira, pode-se definir para cada hipersuperfície Σ_t uma métrica puramente espacial h_{ij} dada por:

$$h_{ij} = g_{ij} + n_i n_j,$$

onde n_i é um vetor normal unitário à hipersuperfície Σ_t . Esse vetor normal unitário possui comprimento $n_i n^i = 1$. A distância infinitesimal em uma hipersuperfície é dada por $h_{ij}(t, x^i) dx^i dx^j$, o tempo próprio para um observador comóvel é diferente do tempo de coordenadas dada pela função *lapse* N que fornece:

$$d\tau = N(t, x^i) dt.$$

A distância infinitesimal entre dois pontos de uma hipersuperfície é dada por,

$$x_2^i = x_1^i - N^i(t, x^i) dt,$$

onde N^a é chamado de vetor *shift*. Do ponto de vista físico a função *lapse* representa a taxa de variação do tempo próprio em relação ao tempo t ,

$$N = -t^a \eta_a,$$

onde t^a representa o fluxo do tempo e é um vetor qualquer que satisfaça $t^a \nabla_a t = 1$ e o vetor *shift* N^a representa o movimento tangente a hipersuperfície Σ_t ,

$$N^i = h^i_j t^j.$$

Vamos agora escrever o elemento de linha em termos da função lapse e do vetor shift, como:

$$\begin{aligned} ds^2 &= h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - (N dt)^2, \\ &= g_{ab} dx^a dx^b, \end{aligned}$$

onde pode-se identificar:

$$\begin{aligned} g_{00} &= h_{ij} N^i N^j - N^2 = N_j N^j - N^2, \\ g_{0b} &= h_{ij} N^i = N_j, \\ g_{a0} &= h_{ij} N^j = N_i, \\ g_{ab} &= h_{ij}, \end{aligned}$$

e também:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\det g_{ab}} = N \sqrt{h}.$$

Assim temos que h_{ij} , N_i , N são as novas quantidades que definem o campo, pois contêm as mesmas informações da métrica do espaço-tempo.

O próximo passo será escrever a lagrangiana em termos dessas novas variáveis.

2.3.2 Lagrangiana e hamiltoniano no formalismo ADM

Para descrever a hamiltoniana no formalismo ADM, deve-se expressar o momento canônico em termos dessas novas quantidades, dadas porourgoulhon (2012):

$$\begin{aligned}\pi^{ij} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ij}}, \\ \pi_N &= \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0, \\ \pi^i_N &= \frac{\partial L}{\partial \dot{N}^i} = 0.\end{aligned}$$

onde N e N^i não são variáveis dinâmicas.

Consequentemente, pode-se estabelecer as seguintes relações:

$$\begin{aligned}g_{ab} &\rightarrow h_{ij}, \\ \nabla_a &\rightarrow D_a \\ V^d &\rightarrow \omega_d \\ R^d_{abc} &\rightarrow {}^{(3)}R^d_{abc}.\end{aligned}$$

Usando as equações de Gauss-Codazzi obtém-se que:

$$\begin{aligned}{}^{(3)}R_{abc}{}^d &= h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k h^d{}_j R_{fgk}{}^j - K_{ac}K_b{}^d + K_{bc}K_a{}^d, \\ R_{abcd}h^{ac}h^{bd} &= 2G_{ac}n^a n^c,\end{aligned}$$

onde ${}^{(3)}R$ é o escalar de Ricci em 3 dimensões espaciais e K_{ac} é o tensor de curvatura extrínseca.

O escalar de Ricci será dado por:

$$R = 2(G_{ab}n^a n^b - R_{ab}n^a n^b).$$

Assim pode-se expressar as equações de campo de Einstein no vácuo, por:

$$\begin{aligned} G_{ij}n^i n^j &= \frac{1}{2}({}^{(3)}R - K_{ij}K^{ij} + K^2), \\ R_{ij}n^i n^j &= K^2 - K_{ij}K^{ij}, \end{aligned}$$

onde K_{ij} é o tensor de curvatura extrínseca. Logo, pode-se escrever:

$$L = \sqrt{h}N \left[{}^{(3)}R + \left(\frac{1}{4}N^{-2}(\mathcal{L}_t h_{ij} - \mathcal{L}_N h_{ij})(\mathcal{L}_t h^{ij} \mathcal{L}_N h^{ij}) - K^i_i K^i_i \right) \right],$$

onde \mathcal{L}_x é a derivada de Lie ao longo do eixo x . Com as equações de movimento dadas por:

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &= \sqrt{h}(K^{ij} - Kh^{ij}), \\ \pi_N &= \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0, \\ \pi^i_N &= \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i} = 0. \end{aligned}$$

onde π^{ij} define o momento, e π_N e π^i_N são os vínculos que dão origem as equações de movimento. Segundo Gourgoulhon (2012), a densidade hamiltoniana fica dada por:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{h}N \left(-{}^{(3)}R + h^{-1}\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2 \right) - 2N_j D_i (h^{-1/2}\pi^{ij}) + \\ &+ 2D_i (h^{-1/2}N_j \pi^{ij}). \end{aligned}$$

Neste trabalho consideraremos também o fator de ordenamento p dos operadores quânticos, visando buscar por interpretações físicas para as soluções encontradas em estudos de singularidades. Existem muitas opções possíveis de escolha do fator de ordenamento que poderia ter sido feita, já que a ação da holonomias comutam. A escolha feita é dada por:

$$-a^{-p} \frac{\partial}{\partial a} \left(a^p \frac{\partial}{\partial a} \right).$$

Cada uma dessas escolhas possíveis conduzirá, a princípio, a um fator de ordenação diferente da equação WDW resultante (NELSON; SAKELLARIADOU, 2008). É conhecido que no limite clássico, a escolha de qualquer p reproduzirá a gravidade clássica de Einstein, como mostrado por Hawking e Page (1986). Mas no limite quântico, o fator de ordenamento p torna-se relevante. Segundo Steigl (2008), é possível definir um produto interno com auxílio da equação da continuidade para o problema do fator de ordenamento, encontrando interpretações para as quantidades conservadas ou probabilidades.

2.4 Condição de balanço detalhado

Essa condição tem como objetivo reduzir o número de constantes de acoplamento independentes, impondo uma simetria adicional na teoria. A maneira de implementar essa restrição lembra os métodos utilizados nos fenômenos críticos de não equilíbrio e sistemas críticos quânticos (HOŘAVA, 2009). No contexto da teoria de Hořava, essa condição exige que o potencial deva surgir de um superpotencial, reduzindo-o significativamente em parte da ação, resultando na

seguinte lagrangiana:

$$L_{BD} = N\sqrt{g} \left\{ \frac{k^2}{\omega^4} C_{ab} C^{ab} - \frac{2k^{3/2}\mu}{\omega^2} \frac{\epsilon^{abc}}{\sqrt{g}} R_{ad} \nabla_b R_c^d + \frac{\mu^2}{k} R_{ab} R^{ab} - \right. \\ \left. - \frac{\mu^2}{1-3\lambda} \left[\frac{1-4\lambda}{4} R^2 + \Lambda R - \frac{3\Lambda^2}{k} \right] \right\},$$

onde $C^{ab} = \epsilon^{abc} \nabla_k (R^b{}_d - \delta^b_d R/4) / \sqrt{g}$ é o tensor de Cotton, que é concomitante a métrica, as derivadas covariantes são definidas com respeito a métrica espacial g_{ab} e ϵ^{abc} é um tensor unitário totalmente antissimétrico. As quantidades λ, ω, μ e Λ são constantes, em especial λ é uma constante de acoplamento. Portanto, a condição de balanço detalhado, além de reduzir os termos na parte do potencial da ação, também correlaciona seus coeficientes, isto é, o número total de coeficientes é menor que o número total de termos.

2.5 Versão projetável

No contexto da teoria de HL, a condição de projetabilidade é uma versão fraca da invariância com relação a reparametrização para o tempo, ou seja, a função lapse é apenas uma função do tempo, $N = N(t)$. Essa condição também permite uma redução significativa nos termos do potencial, pois elimina as derivadas espaciais da função lapse N . Assim, a lagrangiana torna-se:

$$L_p = N\sqrt{g} \{ g_0 k^{-1} + g_1 R + k(g_2 R^2 + g_3 R^{ab} R_{ab}) + \\ + k^2(g_4 R^3 + g_5 R R^{ab} R_{ab} + g_6 R_b^a R_c^b R_a^c + g_7 R \nabla^2 R + g_8 \nabla_a R_{bc} \nabla^a R^{bc}) \},$$

onde $g_m (m = 0, \dots, 8)$ são constantes de acoplamento adimensionais. Note-se que a condição de projetabilidade é uma imposição adicional á condição de balanço detalhado.

2.6 Versão não-projetável

É o que acontece, em geral, quando as condições de balanço detalhado e a versão projetável não são impostas, podendo-se ter disponível na parte do potencial da ação possíveis invariantes de curvatura de g_{ab} , além do vetor $a_a = \partial_a \ln N$, o qual é diferente de zero. Nesse caso, a parte do potencial na ação é:

$$L_{np} = N\sqrt{g} \left\{ -\xi R - \eta a_i a^i - \frac{1}{M_A^2} L_4 - \frac{1}{M_b^2} L_6 \right\},$$

$a_a a^a$ é a ordem mais baixa do novo termo, os termos R, L_4 e L_6 contêm todas as possíveis ordens de invariância e podem ser construídos por a_{ab} e g_{ab} e suas combinações e contrações. Assim, o potencial acima contém muito mais termos que a condição de balanço detalhado e a versão projetável. Para recuperar a RG no limite IR, além de $\lambda \rightarrow 1$, deve-se ter também $\eta \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow 1$.

2.7 Teoria de de Broglie-Bohm

No congresso de Solvay, em 1927, Louis de Broglie apresentou sua teoria de onda piloto sobre fenômenos quânticos. Neste congresso, foram também apresentadas outras duas teorias sobre estes mesmos fenômenos, as quais são, a mecânica ondulatória de Schrödinger e a mecânica quântica de Heisenberg e Born. Na teoria de Schrödinger, as partículas seriam pacotes de onda localizados construídos a partir da função de onda, enquanto que na teoria de Heisenberg e Born não existiria estados de realidade ao nível quântico sem a observação.

Os anais da conferência de Solvay de 1927 mostram que não houve consenso sobre qual teoria seria a mais apropriada para a descrição de fenômenos quânticos. A teoria da onda piloto de de Broglie teve nove páginas dos anais desta conferência para relatá-la. Foram também registradas questões e comentários

referentes à onda piloto feitas por Born, Brilloin, Einstein, Kramers, Lorentz, Schrödinger e Pauli, segundo Pinto Neto (2010).

Posteriormente, de Broglie não conseguiu prosseguir com sua teoria devido às dificuldades encontradas em sua formulação ao explicar o processo de medida, o que foi realizado mais tarde por Bohm. Também, foi devido ao fato de não conseguir fornecer uma interpretação física para a onda piloto, já que esta era definida no espaço de configurações e não no espaço-tempo.

2.7.1 A teoria da onda piloto

Segundo Pinto Neto (2010), de Broglie considerava que a posição e a trajetória de objetos quânticos possuíam realidade independente da observação. No entanto, a mecânica a ser utilizada para a descrição da trajetória deveria ser diferente da mecânica conhecida, pois estas apresentam comportamentos distintos dos objetos clássicos. Por exemplo, no experimento da fenda dupla, onde as partículas quânticas não interagem com nenhuma outra partícula.

A proposta feita por de Broglie é que a partícula, estando ou não livre terá sua velocidade determinada por uma onda, chamada onda piloto, que será dada por:

$$\frac{d\vec{x}_a(t)}{dt} = \frac{\vec{j}_a(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)}{|\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)|^2} \quad \text{com} \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2m_a}(\psi * \vec{\nabla}\psi), \quad (2.6)$$

para um sistema de N partículas não relativístico em 3 dimensões espaciais. As quantidades \vec{x}_a são vetores clássicos da posição da partícula a de massa m_a e a quantidade $\vec{j}_a(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$ é a corrente quântica referente a partícula a , associada a onda piloto $\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$, que satisfaz a equação de conservação, dada por:

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t^2} + \sum_{a=1}^N \vec{\nabla}_a \cdot \vec{j}_a = 0, \quad (2.7)$$

esta corrente quântica é a mesma presente na interpretação de Copenhague. A forma explícita da corrente depende do spin das correntes consideradas.

Analisando a equação (2.6), observa-se que esta difere das equações da mecânica newtoniana quando olhamos para suas duas primeiras leis, no que diz respeito ao fato de não haver derivadas de segunda ordem, ou seja, não envolver aceleração.

Para obter-se a função de onda do sistema considerado, é necessário utilizar a equação de Schrödinger, que fornece:

$$i\hbar \frac{d\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)}{dt} = \hat{H}\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t), \quad (2.8)$$

onde \hat{H} representa o operador hamiltoniano do sistema, contendo os termos das interações entre as partículas.

Pode-se perceber que as partículas possuem realidade objetiva, e que para caracterizar completamente o sistema quântico é necessário a função de onda inicial, $\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t = 0)$, as posições iniciais das partículas, $\vec{x}_i(t = 0)$, já que tem-se equações diferenciais de primeira ordem. Assim, pode-se identificar essas quantidades iniciais como adicionais às quantidades envolvidas na interpretação de Copenhague, que para muitos, são conhecidas como variáveis escondidas da teoria.

Por outro lado, também pode-se expor esta teoria segundo Bohm. Para isso, considera-se que o operador hamiltoniano da equação (2.8) foi obtido de uma hamiltoniana que possui um termo cinético e uma função potencial, através das regras de quantização. Dessa forma, pode-se escrever a equação (2.8) como

sendo:

$$i\hbar \frac{d\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)}{dt} = \left[- \sum_{a=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_a} \nabla_a^2 + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) \right] \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t), \quad (2.9)$$

onde ∇_a^2 é o operador laplaciano referente a partícula a e $V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$ é o potencial de interação entre as partículas.

De acordo com Pinto Neto (2010), pode-se expressar a corrente da equação (2.6) sendo,

$$\begin{aligned} \vec{j}_a(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) &= \frac{1}{m_a} \text{Im} \left[\psi^* (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) \vec{\nabla}_a \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) \right] \\ &= \frac{1}{m_a} \vec{\nabla}_a S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t), \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$ é a fase da função de onda. Reescrevendo a equação (2.6) como sendo:

$$\vec{p}_a = m_a \frac{d\vec{x}_a}{dt} = \vec{\nabla}_a S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t), \quad (2.11)$$

onde \vec{p}_a é o momento linear da partícula a . Essa equação mostra que a partícula é guiada por uma fase que apenas depende das coordenadas sobre ela. Agora a função de onda será expressa na sua forma polar, $\psi = R e^{iS/\hbar}$, e substituir na equação (2.9). Após fazer esse procedimento encontra-se uma equação que pode ser separada em uma parte real e outra imaginária, as quais são, respectivamente,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{a=1}^N \frac{(\vec{\nabla}_a S) \cdot \vec{\nabla}_a S}{2m_a} + V - \sum_{a=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_a} \frac{\nabla_a^2 R}{R} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \sum_{a=1}^N \vec{\nabla}_a \cdot \left(R^2 \frac{\nabla_a S}{m_a} \right) = 0. \quad (2.13)$$

A equação (2.12) possui a forma da equação de Hamilton-Jacobi para S , onde se destaca o termo,

$$Q \equiv - \sum_{a=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_a} \frac{\nabla_a^2 R}{R},$$

esse termo é conhecido como potencial quântico. Pode-se perceber que quando $Q \neq 0$, a trajetória da partícula será diferente da trajetória clássica. O limite clássico na teoria de de Broglie-Bohm acontece quando o potencial quântico Q é desprezível perante os demais termos da equação (2.12). Portanto, a equação (2.12) fornece a dinâmica do sistema.

Pode-se interpretar a equação (2.13) segundo Pinto Neto (2010), como sendo um conjunto de N partículas cuja probabilidade dessas N partículas estarem nas posições $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ no tempo t é dada por $R^2(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$. Assim, a equação (2.13) dá uma ideia da equação da continuidade para R^2 sendo que a equação (2.11) fornece o campo de velocidade dessas partículas. Ou seja, a equação (2.13) diz que há conservação do número de partículas e as trajetórias não possuem começo nem fim. É importante ressaltar que a equação (2.13) indicará as distribuições de posições das partículas quânticas, por exemplo, para as posições iniciais do conjunto, ter-se-á $P_0 = R^2(t = 0)$ e para um instante de tempo arbitrário t , segundo a regra de Born, (para se obter a regra de Born na teoria de de Broglie-Bohm sem ser preciso postulá-la (VALENTINI, 1991), tem-se que a equação (2.13) garante que $P = R^2(t) = |\psi(t)|^2$. Esses resultados estatísticos são análogos aos encontrados na interpretação de Copenhague.

Assim, pode-se dizer que na teoria de de Broglie-Bohm, a função de onda possui duas características importantes, a primeira de guiar as partículas através da equação (2.6) e a segunda é estatística, ao fornecer as distribuições das posições das partículas.

As trajetórias bohmianas possuem algumas características tais como:

- (i) As trajetórias não podem se cruzar, pois $\vec{\nabla}_a$ é uma função injetora da posição.
- (ii) As trajetórias bohmianas não podem passar nos pontos onde $|\psi(t)|^2 = 0$ e as fases não são definidas, ou seja, a probabilidade da partícula estar nesses pontos é nula.
- (iii) Pode-se encontrar a aceleração das trajetórias bohmianas derivando a equação (2.11) em relação ao tempo e usando a equação (2.12) temos que:

$$\frac{d^2 \vec{x}_a(t)}{dt^2} = -\vec{\nabla}_a V - \vec{\nabla}_a Q. \quad (2.14)$$

Vale ressaltar que para um único potencial clássico podem existir vários potenciais quânticos, os quais serão determinados pelas condições de contorno (presença de fendas, anteparos, etc.) e a fase da função de onda. É dessa maneira que as condições experimentais influenciam o sistema quântico.

3 COSMOLOGIA

Nessa seção são analisadas singularidades que aparecem no início do universo, mas que podem ser evitadas devido a efeitos quânticos. Para isso, será apresentado a teoria de Hořava-Lifshitz, construindo seu hamiltoniano e transformando-o em operador hamiltoniano. Em seguida, no tópico 3.1 considera-se o caso em que se está muito perto da singularidade, nesse sentido o hamiltoniano pode ser reescrito considerando apenas os termos do potencial que são dominantes perante aos outros termos. Nas subseções seguintes, são estudadas regiões não tão próximas à singularidade como em 3.1, mas que também são relevantes. Para isso, é adicionado um termo de potencial a mais em relação a 3.1. Esse estudo foi feito para as geometrias esférica e hiperbólica, respectivamente. É determinado os efeitos quânticos sobre o sistema e analisado a contribuição do fator de ordenamento nas soluções, o que não foi feito em outros trabalhos.

Inicialmente será escrito a cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) no contexto da gravidade de HL. Para isso considere a métrica do espaço-tempo escrita em coordenadas esféricas r, ϑ, φ , dada por:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right], \quad (3.1)$$

onde $N(t)$ é a função lapse, $a(t)$ é o fator de escala e k representa a geometria do espaço-tempo, que pode ser esférica $k = 1$, hiperbólica $k = -1$ ou plana $k = 0$. Reescrevendo a métrica acima em termos do formalismo ADM, obtem-se:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + h_{ab}dx^a dx^b,$$

onde

$$h_{ij} = a^2(t) \text{diag} \left(\frac{1}{1 - kr^2}, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta \right),$$

sendo h_{ij} a métrica da hipersuperfície tridimensional.

A ação da gravidade de HL projetável sem a condição de balanço detalhado é dada por Sotiriou, Visser e Weinfurter (2009b):

$$\begin{aligned} S = & \frac{M_{pl}^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d^3x dt N \sqrt{h} [K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 - g_0 M_{pl}^{-2} - g_1 R - \\ & - M_{pl}^{-2} (g_2 R^2 + g_3 R_{ij} R^{ij}) - M_{pl}^4 (g_4 R^3 + g_5 R R_j^i R_i^j + \\ & + g_6 R_j^i R_k^j R_i^k + g_7 R \nabla^2 R + g_8 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk})], \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $M_{pl} = (8\pi G)^{-1/2}$ é a massa de Planck, K_{ij} são as componentes do tensor curvatura extrínseca, h é o determinante de h_{ij} , R é o escalar de Ricci para a geometria de h_{ij} e K é o traço de K_{ij} . As constantes λ e $g_n = (0, 1, \dots, 8)$ representam as correções de HL para a RG usual. De acordo com Vakili e Kord (2013), quando $\Lambda = g_0 M_{pl}^2/2$, $g_1 = -1$ e $\lambda = 1$, a RG é redescoberta no limite do infravermelho. Reescrevendo a equação (3.2) em termos dessas quantidades, tem-se:

$$\begin{aligned} S = & \frac{M_{pl}^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d^3x dt N \sqrt{h} [K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 + R - 2\Lambda - \\ & - M_{pl}^{-2} (g_2 R^2 + g_3 R_{ij} R^{ij}) - M_{pl}^4 (g_4 R^3 + g_5 R R_j^i R_i^j + \\ & + g_6 R_j^i R_k^j R_i^k + g_7 R \nabla^2 R + g_8 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk})], \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde λ foi deixado livre para representar uma constante de acoplamento no limite IR da teoria da gravitação.

Utilizando a definição de curvatura extrínseca dada por:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right),$$

onde N_i é o vetor shift e $N_{i|j}$ é a derivada covariante em relação à quantidade h_{ij} , pode-se calcular as quantidades abaixo para a métrica dada pela equação (3.1):

$$K_{ij}K^{ij} = \frac{3\dot{a}^2}{N^2a^2} \quad \text{e} \quad K = -\frac{3\dot{a}}{Na}, \quad (3.4)$$

onde \dot{a} representa a derivada em relação ao tempo. Calculando o tensor de Ricci e o escalar de Ricci para a 3-geometria de h_{ij} foi obtido, respectivamente:

$$R_{ij} = \frac{2kh_{ij}}{a^2} \quad \text{e} \quad R = \frac{6k}{a^2}. \quad (3.5)$$

Substituindo as equações (3.4) e (3.5) na equação (3.3), a ação fica dada por:

$$S = \frac{3V_0M_{pl}^2(3\lambda - 1)}{2} \int dtN \left\{ -\frac{a\dot{a}^2}{N^2} + \frac{6ka}{3(3\lambda - 1)} - \frac{2\Lambda a^3}{3(3\lambda - 1)} - \right. \\ \left. - M_{pl}^{-2} \left[\frac{12k^2(3g_2 + g_3)}{3a(3\lambda - 1)} \right] - M_{pl}^4 \left[\frac{24k(9g_4 + 3g_5 + g_6)}{3a^3(3\lambda - 1)} \right] \right\}, \quad (3.6)$$

onde $V_0 = \int d^3x \sqrt{h}$ é uma integral sobre dimensões espaciais.

Fazendo $3V_0M_{pl}^2(3\lambda - 1)/2 = 1$, pode-se escrever a lagrangiana como sendo:

$$L = \frac{N}{2} \left(-\frac{a\dot{a}^2}{N^2} + g_c k a - g_\lambda a^3 - \frac{g_r k^2}{a} - \frac{g_s k}{a^3} \right), \quad (3.7)$$

onde as constantes na equação acima foram definidas em Sotiriou, Visser e Weinfurtner (2009b), como:

$$\begin{aligned} g_c &= \frac{2}{3\lambda - 1}, & g_\lambda &= \frac{2\Lambda}{3(3\lambda - 1)}, & g_r &= 6V_0(3g_2 + g_3), \\ g_s &= 18V_0^2(3\lambda - 1)(9g_4 + 3g_5 + g_6), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $g_c > 0$ representa a constante de acoplamento de curvatura, g_λ está associado com a constante cosmológica, g_r corresponde fisicamente ao termo de radiação, enquanto que a constante de acoplamento g_s comporta-se como a matéria “dura”, de acordo com a equação de estado ($p = \rho$). As constantes de acoplamento g_r e g_s podem ser positivas ou negativas, todavia seu sinal não altera a estabilidade da gravidade HL (MAEDA; MISONOH; KOBAYASHI, 2010).

Para determinar o hamiltoniano do sistema, faz-se:

$$H = \dot{a}\Pi_a - L$$

sendo o momento canônico definido por:

$$\Pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{a\dot{a}}{N},$$

assim, reescreve-se o hamiltoniano como:

$$\begin{aligned} H &= \dot{a} \left(-\frac{a\dot{a}}{N} \right) - \frac{N}{2} \left(-\frac{a\dot{a}^2}{N^2} + g_c k a - g_\lambda a^3 - \frac{g_r k^2}{a} - \frac{g_s k}{a^3} \right) \\ H &= -\frac{1}{2} \left(\frac{N}{a} \right) \left[-\Pi_a^2 - g_c k a^2 + g_\lambda a^4 + g_r k^2 + \frac{g_s k}{a^2} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

o qual está escrito sem incluir termos de matéria, possui somente termos que envolvem geometria.

Agora pode-se estudar o comportamento quântico do sistema descrito pela hamiltoniana acima. Para isso, torna-se necessário quantizar a equação (3.9), onde o operador momento será dado por:

$$\Pi_a^2 = \frac{1}{a^p} \frac{\partial}{\partial a} \left(a^p \frac{\partial}{\partial a} \right), \quad (3.10)$$

onde p indica a ambiguidade do ordenamento dos fatores a e Π_a . Assim substituindo a equação (3.10) na equação (3.9), e posteriormente aplicando na função de onda, tem-se:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{p}{a} \frac{\partial}{\partial a} + g_c k a^2 - g_\lambda a^4 - g_r k^2 - \frac{g_s k}{a^2} \right) \psi(a) = 0, \quad (3.11)$$

a equação acima é da forma:

$$\hat{H}\psi(a) = 0, \quad (3.12)$$

sendo conhecida por equação Wheeler-DeWitt, onde \hat{H} é o operador hamiltoniano que contém as informações espaciais e temporais e $\psi = \psi(a)$ é a função de onda correspondente a um universo quântico. Na próxima seção será apresentada a solução para a equação WdW quando se considera regiões muito próximas da singularidade $a \ll 1$.

3.1 Solução para a muito pequeno

Nesse tópico serão estudadas as singularidades clássicas presentes no início do universo. Para isso considera-se que o fator escala é muito pequeno, $a \rightarrow 0$ na equação (3.11). Então, tem-se que o termo predominante no potencial é:

$$V(a) = -\frac{g_s k}{a^2},$$

portanto a equação (3.11) torna-se:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{p}{a} \frac{\partial}{\partial a} - \frac{g_s k}{a^2} \right) \psi(a) = 0. \quad (3.13)$$

Os casos em que $a \gg 1$ já foram estudados e mostram que eles decaem na cosmologia padrão (BERTOLAMI; ZARRO, 2011; VAKILI; KORD, 2013). Para a função de onda $\psi(a)$ serão utilizadas as ideias de de Broglie-Bohm, cuja forma de $\psi(a)$ é dada por:

$$\psi(a) = R(a)e^{iS(a)}, \quad (3.14)$$

em que $R = R(a)$ representa a parte real e $S = S(a)$ é a fase da função onda. Da teoria de de Broglie-Bohm, pode-se estabelecer a densidade de probabilidade e a velocidade, respectivamente, por:

$$\rho = R^2 \quad \text{e} \quad \vec{v} = \vec{\nabla} S. \quad (3.15)$$

Substituindo a equação (3.14) na equação (3.13), tem-se:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{p}{a} \frac{\partial}{\partial a} - \frac{g_s k}{a^2} \right) R(a)e^{iS(a)} = 0.$$

Resolvendo essa última equação e separando-a em sua parte real e imaginária, encontra-se, respectivamente:

$$(S'(a))^2 + Q(a) + V(a) = 0, \quad (3.16)$$

$$S''(a) + \frac{2R'(a)S'(a)}{R(a)} + \frac{p}{a} S'(a) = 0, \quad (3.17)$$

onde a equação (3.16) fornece a dinâmica do sistema (equação de Hamilton-Jacobi), sendo seu segundo termo o potencial quântico, o qual é definido por:

$$Q(a) = - \left(\frac{R''(a)}{R(a)} + \frac{p R'(a)}{a R(a)} \right).$$

É bem conhecido que os efeitos quânticos são importantes para pequenos valores do fator de escala e que para o limite de grandes valores do fator de escala esses efeitos podem ser negligenciados. Por isso que, na aproximação semiclássica desenvolvida por Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), não há o termo do potencial quântico, no entanto existe uma correlação entre as soluções clássica e quântica, dada por $\partial S/\partial a$. Dessa maneira, deve-se considerar os efeitos quânticos para valores pequenos do fator de escala, sendo que a aproximação WKB para o caso em que $a \rightarrow 0$ não é válida.

Já a equação (3.17) trará a ideia da equação da continuidade. No modelo adotado de minisuperespaço, a corrente é dada por:

$$j^a = \frac{i}{2} a^p (\psi^*(a) \partial_a \psi(a) - \psi(a) \partial_a \psi^*(a)),$$

onde $\psi^*(a) = R(a)e^{-iS(a)}$, é o conjugado da função dada por (3.14) e a^p é o termo devido ao ordenamento escolhido. Da equação acima encontra-se que:

$$j^a = -a^p [(R(a))^2 S'(a)].$$

A solução da equação (3.13) que descreve singularidades presentes no início do universo é dada por:

$$\psi(a) = c_1 a^{-\frac{1}{2}(p-1) + \frac{1}{2}\sqrt{(p-1)^2 + 4kgs}} + c_2 a^{-\frac{1}{2}(p-1) - \frac{1}{2}\sqrt{(p-1)^2 + 4kgs}}, \quad (3.18)$$

analisando essa solução através da interpretação de de Broglie-Bohm, tem-se que o primeiro termo irá divergir para valores pequenos do fator de escala, o que será justificado com maiores detalhes no final dessa subseção. Assim considerar-se-á apenas o segundo termo, sobre o qual serão estabelecidas condições para que se evite singularidades clássicas. Então, a solução dada pela equação (3.18) torna-se:

$$\psi(a) = c_2 a^{-\frac{1}{2}(p-1) - \frac{1}{2}\sqrt{(p-1)^2 + 4kg_s}}. \quad (3.19)$$

Considere-se as mudanças de variáveis:

$$\alpha = \frac{1}{2}(p-1) \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{(p-1)^2 + 4kg_s}, \quad (3.20)$$

para $(p-1)^2 + 4kg_s < 0$. Logo, pode-se escrever a equação (3.19) na forma polar em termos das quantidades dadas em (3.20) como sendo:

$$\psi(a) = c_2 a^{-(\alpha+i\beta)}. \quad (3.21)$$

Analisando a condição na equação (3.20), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{(p-1)^2 + 4kg_s} &< 0, \\ (p-1)^2 &< -4kg_s, \end{aligned}$$

assim, conclui-se que o produto de k por g_s necessariamente é um número negativo, isto é, $k > 0$ e $g_s < 0$ ou $k < 0$ e $g_s > 0$. No primeiro caso, quando $k > 0$,

ter-se-á um universo esférico e para a constante g_s tem-se:

$$\begin{aligned} g_s &< 0 \\ 288\pi(3\lambda - 1)(9g_4 + 3g_5 + g_6) &< 0 \\ \lambda &< \frac{1}{3}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde se supôs que $9g_4 + 3g_5 + g_6 > 0$, o que não recupera a RG, pois λ não tende a 1, como proposto por Hořava. No segundo caso, em que $k < 0$ e $g_s > 0$, encontra-se um universo hiperbólico e para a constante g_s , tem-se:

$$\begin{aligned} g_s &> 0 \\ 288\pi(3\lambda - 1)(9g_4 + 3g_5 + g_6) &> 0 \\ \lambda &> \frac{1}{3}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde também foi considerado que $9g_4 + 3g_5 + g_6 > 0$, e assim a RG é recuperada para baixas energias.

Após analisar estas condições para k e g_s , no intuito de escrever a equação (3.19) na forma da equação (3.21), pode-se fazer:

$$\begin{aligned} \psi(a) &= c_2 a^{-\alpha} e^{\ln a^{-i\beta}}, \\ \psi(a) &= c_2 a^{-\alpha} e^{-i\beta \ln a}, \end{aligned}$$

comparando com a equação (3.14), identifica-se as quantidades:

$$R(a) = c_2 a^{-\alpha} \quad \text{e} \quad S(a) = -\beta \ln a.$$

As trajetórias bhomianas são obtidas pela relação guia:

$$\dot{a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial S}{\partial a}, \quad (3.24)$$

onde pode-se escrever:

$$\dot{a} = \beta \frac{1}{a^2}.$$

Para encontrar o fator de escala em função do tempo, basta integrar a equação acima em relação ao tempo, assim tem-se:

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} \sqrt{(p-1)^2 - 4kg_s}(t+t_0) \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.25)$$

que é uma função finita e regular, mas válida para pequenos valores do fator de escala a . Com essa solução é possível determinar a densidade de probabilidade ao longo do tempo como sendo:

$$\rho(t) = c_2^2 \left(\frac{3}{2} \sqrt{(p-1)^2 - 4kg_s}(t+t_0) \right)^{\frac{1}{3}(1-p)}, \quad (3.26)$$

observa-se que o fator de ordenamento p indicará como a densidade de probabilidade evoluirá ao longo do tempo para qualquer geometria do espaço-tempo. Analisando os possíveis valores de p , torna-se necessário exigir na mudança de variável dada pela equação (3.20), que p seja menor do que 1, pois assim α será menor que 0, e quando a for muito pequeno, ter-se-á pela equação (3.26) que $\rho \rightarrow 0$, ou seja, a medida que $t \rightarrow 0$, a densidade de probabilidade cresce, o que significa ser mais provável encontrar o fator de escala com valores de t maiores, ou seja, longe de $t = 0$ que dá origem a singularidade $a = 0$. Portanto, a singularidade é removível.

Se na função de onda dada pela equação (3.18) for considerado o primeiro

termo, não será encontrada uma solução finita e regular como a dada pela equação (3.25), pois a função que relaciona o fator de escala a com o tempo t será decrescente, o que não corresponde ao observado fisicamente. E se $p > 1$, ter-se-á que quando $a \rightarrow 0$, a densidade de probabilidade divergirá.

Nas duas subseções seguintes, serão analisados os casos em que se está próximo da singularidade, mas não tão próximo como considerado nessa subseção 3.1. Assim, se levará em conta mais um termo do potencial que contém a constante g_r na equação (3.11). Esse estudo será feito para as geometrias esférica e hiperbólica, respectivamente.

3.2 Universo Fechado

A equação Wheeler-DeWitt (3.11) para o caso em que o universo é fechado, torna-se:

$$\frac{d^2\psi(a)}{da^2} + \frac{p}{a} \frac{d\psi(a)}{da} - g_r\psi(a) - \frac{g_s}{a^2}\psi(a) = 0. \quad (3.27)$$

A solução analítica para este caso é:

$$\psi(a) = a^{\frac{(1-p)}{2}} \left[c_1 J_\nu(\sqrt{-g_r}a) + c_2 Y_\nu(\sqrt{-g_r}a) \right], \quad (3.28)$$

onde J_ν é a função de Bessel de primeira ordem, e Y_ν é a função de Bessel de segunda ordem e ν é dado por:

$$\nu = \frac{\sqrt{(p-1)^2 + 4g_s}}{2}. \quad (3.29)$$

Pode-se escrever a fase da função como sendo:

$$S = \tan^{-1} \left[\frac{c_1 J_\nu(\sqrt{-g_r a})}{c_2 Y_\nu(\sqrt{-g_r a})} \right], \quad (3.30)$$

e

$$R = a^{(1-p)/2} \sqrt{[c_1 J_\nu(\sqrt{-g_r a})]^2 + [c_2 Y_\nu(\sqrt{-g_r a})]^2}.$$

Como se está estudando singularidades no início do universo, $a \ll 1$, tem-se que o fator de escala é pequeno. Assim, pode-se utilizar as formas assintóticas das funções de Bessel (SPIEGEL, 1973), as quais são:

$$J_\nu(\sqrt{g_r a}) \sim \left(\frac{\sqrt{-g_r a}}{2} \right)^2, \quad (3.31)$$

$$Y_\nu(\sqrt{g_r a}) \sim \frac{-\Gamma(\nu) 2^{\nu-1}}{(\sqrt{-g_r a})^\nu}, \quad \nu \neq 0, \quad (3.32)$$

onde $\Gamma(\nu)$ é a função Gamma. Utilizando as aproximações assintóticas dadas pelas equações (3.31) e (3.32) na equação (3.30), obtém-se:

$$S(a \ll 1) \sim -\frac{c_1}{2^{2\nu-1} c_2 \Gamma(\nu) \Gamma(\nu+1)} \left(\sqrt{-g_r a} \right)^{2\nu}, \quad \text{para } \nu \neq 0.$$

Para se determinar o fator de escala em função do tempo, deve-se substituir a equação acima na relação guia dada pela equação (3.24) e em seguida integrar em relação ao tempo, obtendo:

$$a(t) = \begin{cases} [(3-2\nu)\gamma(\nu)(g_r)^{-2\nu}(t+t_0)]^{\frac{1}{3-2\nu}}, & \text{para } \nu \neq 0, \frac{3}{2} \\ e^{\gamma(3/2)(g_r)^\nu(t-t_0)}, & \text{para } \nu = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (3.33)$$

onde $\gamma = 2c_1\nu/2^{2\nu-1}c_2\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1)$. Na solução acima, quando $\nu \neq 0, 3/2$, essa função é finita e regular para pequenos valores do fator de escala, fazendo com que a singularidade seja removida. Para o caso em que $\nu = 3/2$, o universo terá uma expansão exponencial. Analisando $\nu = 3/2$ na equação (3.29), obtem-se:

$$p = 1 \pm \sqrt{9 - 4g_s},$$

onde vê-se que o fator de ordenamento depende da constante de acoplamento g_s do modelo. Se $\gamma(3/2) > 0$, ter-se-à uma expansão do universo e para $\gamma(3/2) < 0$, tem-se uma contração, o que não satisfaz a evolução do início do universo.

Para se analisar o mecanismo quântico que descreve o início do universo é necessário determinar o potencial quântico. Para o caso em $\nu = 3/2$, obtem-se:

$$Q(a \rightarrow 0) = -g_r - \frac{g_s}{a^2} - \gamma(3/2)a^2. \quad (3.34)$$

Quando $Q(a \rightarrow 0)$, os primeiros termos do potencial cancelam exatamente com o potencial clássico $V(a) = g_r + g_s/a^2$. E o termo $\gamma(3/2)a^2$ se comporta de maneira similar ao potencial do campo escalar ou a constante cosmológica na inflação, como apresentado em He, Gao e Cai (2014). Portanto, vê-se que os efeitos quânticos para pequenos valores do fator de escala são dominantes perante outros potenciais, já que se requer, desde o início, que $a(t)$ tenha um comportamento regular, provocando assim uma expansão exponencial.

3.3 Universo aberto

Para esse caso, em que o universo é aberto, a equação Wheeler-DeWitt (3.11), pode ser escrita como:

$$\frac{d^2\psi(a)}{da^2} + \frac{p}{a} \frac{d\psi(a)}{da} - g_r\psi(a) + \frac{g_s}{a^2}\psi(a) = 0, \quad (3.35)$$

cuja solução analítica é:

$$\psi(a) = a^{\frac{(1-p)}{2}} \left[i c_1 J_\mu(\sqrt{-g_r a}) + c_2 Y_\mu(\sqrt{-g_r a}) \right], \quad (3.36)$$

onde J_μ é a função de Bessel de primeira ordem, e Y_μ é a função de Bessel de segunda ordem e μ é dado por:

$$\mu = \frac{\sqrt{(p-1)^2 - 4g_s}}{2}. \quad (3.37)$$

Pode-se escrever a fase da função como sendo:

$$S = \tan^{-1} \left[\frac{c_1 J_\mu(\sqrt{-g_r a})}{c_2 Y_\mu(\sqrt{-g_r a})} \right], \quad (3.38)$$

e

$$R = a^{(1-p)/2} \sqrt{[c_1 J_\mu(\sqrt{-g_r a})]^2 + [c_2 Y_\mu(\sqrt{-g_r a})]^2}.$$

Utilizando os mesmos métodos para o caso do universo fechado, pode-se determinar o fator de escala em função do tempo, que é dado por:

$$a(t) = \begin{cases} [(3-2\mu)\gamma'(\mu)(g_r)^{-2\mu}(t+t_0)]^{\frac{1}{3-2\mu}}, & \text{para } \mu \neq 0, \frac{3}{2} \\ e^{\gamma'(3/2)(g_r)^\mu(t-t_0)}, & \text{para } \mu = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (3.39)$$

onde $\gamma' = 2c_1\mu/2^{2\nu-1}c_2\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + 1)$. Para o caso em $\mu = 3/2$, obtem-se:

$$p = 1 \pm \sqrt{9 + 4g_s},$$

onde vê-se que o fator de ordenamento depende da constante de acoplamento g_s do modelo e o fator de escala terá um comportamento similar ao universo fechado.

O potencial quântico quando $a \rightarrow 0$ para $\mu = 3/2$, nesse caso é dado por:

$$Q(a \rightarrow 0) = -g_r + \frac{g_s}{a^2} - \gamma'(3/2)a^2. \quad (3.40)$$

Comparando com o resultado encontrado para o universo fechado, tem-se que apenas o termo que envolve a constante g_s muda de sinal simultaneamente com o potencial clássico que envolve essa mesma constante, sendo que todos os termos continuam sendo cancelados da mesma forma. Portanto, o termo $\gamma'(3/2)a^2$ provoca a expansão exponencial.

Nessa seção foi apresentado e discutido como os efeitos quânticos removem as singularidades existentes no início do universo, através do potencial quântico. Para valores pequenos do fator de escala, o potencial quântico possui termos dominantes em relação ao potencial clássico. Foi visto também, que o fator de ordenamento depende da constante de acoplamento g_s , o qual será decisivo para caracterizar a evolução do universo. Todavia, quando se está estudando valores grandes do fator de escala, no regime do IR, não se percebe contribuições adicionais devido aos efeitos quânticos, e assim, não há nenhuma dependência na escolha do fator de ordenamento p para o limite de baixas energias (VAKILI; KORD, 2013).

4 BURACOS NEGROS

Nesta seção será primeiro apresentado um pouco da história da descoberta e do tratamento matemático para os buracos negros. A seguir, será feita uma mudança de coordenadas que permite tratar o interior dos buracos negros, região que contém singularidades, adequadamente. Os resultados encontrados mostram que há quantidades quantizadas no horizonte de eventos e que a singularidade dentro do buraco negro pode ser evitada quanticamente. Finalmente é feito um comentário sobre buracos negros no contexto da gravidade de HL, sendo possível reescrever algumas das quantidades quantizadas em termos da entropia.

Buracos negros são regiões do espaço que possuem um campo gravitacional muito intenso, o qual não permite que nem mesmo a luz escape. O conceito de buraco negro surgiu com John Michell em 1783 e Pierre Laplace em 1795. E a expressão buraco negro foi proposta em 1969 pelo cientista norte americano John Wheeler (WHEELER, 1969).

Ao se analisar o comportamento dual da luz, têm-se segundo Isaac Newton, que a luz é composta por partículas e por outro lado, há uma teoria que descreve a luz com um comportamento ondulatório. Sob o ponto de vista da mecânica quântica as duas teorias estão corretas, a luz possui um comportamento dual, ora é considerada como partícula, ora como onda. Se a luz é descrita através de conceitos da ondulatória, têm-se que essa não sofrerá efeitos da gravidade. Todavia, se a luz for constituída por partículas, poder-se-á pensar que haverá efeitos gravitacionais sobre a mesma, já que Ole Roemer (MICHELL, 1784) descobriu que a velocidade da luz é finita, ou seja, eliminou-se a possibilidade da gravidade não ser capaz de atraí-la.

Baseado nessa proposta, John Michell em 1783 (MICHELL, 1784) enviou um artigo para *Philosophical Transaction of Royal Society* argumentando que

corpos que tivessem um raio da ordem de 500 vezes superior ao raio do Sol e cuja densidade fosse igual ou superior a deste, criaria um campo gravitacional tão intenso que nem mesmo a luz conseguiria escapar, impossibilitando dessa maneira perceber tais objetos através dos nossos sentidos. Todavia, não é adequado descrever os efeitos da gravidade sobre a luz, utilizando apenas os conceitos presentes na teoria de Newton. Uma explicação mais consistente, surgiu posteriormente com a teoria da Relatividade Geral (TRG), ao mostrar que a massa deforma o espaço-tempo e que este também traz informações sobre a massa.

Após a divulgação da TRG em 1915, que descreve por meio de uma equação, o campo gravitacional, Karl Schwarzschild propôs uma solução para essa equação. Sendo essa a primeira solução da equação de campo de Einstein, para o caso de simetria esférica e considerando o vácuo. Em coordenadas esféricas, a métrica de Schwarzschild pode ser expressa como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

onde G é a constante da gravitação universal, M é interpretada como a massa do objeto e $d\Omega^2$ é o elemento de linha da superfície esférica de raio 1, correspondendo ao ângulo sólido, ou seja, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. A quantidade $2GM/c^2$ é conhecida como raio de Schwarzschild R_s , o qual desempenhará um papel importante na solução de Schwarzschild. A solução dada pela métrica de Schwarzschild, para um corpo esférico de raio r , é válida para $r > R_s$. Para o caso, em que $r < R_s$, têm-se a solução para um buraco negro. Se for considerado $r = R_s$, é necessário descobrir a solução de Schwarzschild, para determinar o campo gravitacional.

A métrica dada pela equação (4.1) apresenta singularidades nos pontos $r = R_s$ e $r = 0$. De acordo com D'Inverno (1992), a singularidade $r = R_s$, não representa uma singularidade física, pois é possível removê-las através de

uma transformação adequada de coordenadas, como será feito na seção a seguir. Para a singularidade $r = 0$, não é conhecido na literatura uma transformação de coordenadas que elimine essa singularidade, ela é chamada de singularidade física. Nas próximas seções deste trabalho será apresentado um estudo que mostra que efeitos quânticos podem eliminar a singularidade $r = 0$ para buracos negros de Schwarzschild.

Para mais informações sobre o desenvolvimento, do ponto de vista histórico, de buracos negros, veja Franchi, Reis e Borges Neto (2012).

4.1 Equação de Schrödinger para buracos negros de Schwarzschild

Serão estudados as regiões dentro de um buraco negro de Schwarzschild, na singularidade $r = 0$, perto dessa singularidade e também na singularidade removível $r = R_s$. Para isso, é necessário utilizar ferramentas da cosmologia quântica (MÄKELÄ, 2014), cujos resultados fornecem a quantização da área e do volume, como desenvolvido por Ashtekar, Rovelli e Smolin e a existência da emissão da radiação de Hawking (HAWKING, 1975).

Para descrever o sistema proposto, deve-se inicialmente escrever a equação de Schrödinger para buracos negros de Schwarzschild, dada por:

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (4.2)$$

onde \hat{H} representa o operador hamiltoniano do buraco negro, ψ é a função de onda e E é a energia do buraco negro. Essa energia pode ser expressa como:

$$E = Mc^2,$$

onde c é a velocidade da luz e M é a medida da massa do buraco negro. Ao resolver a equação (4.2) será encontrado os autovalores de energia E_n para o operador hamiltoniano e ψ_n será as autofunções que correspondem às amplitudes de probabilidade. De posse dessas duas quantidades, estabelece-se os possíveis valores de massa para buracos negros.

Pode-se expressar o espectro da área do horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild através da equação:

$$A_s := \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2. \quad (4.3)$$

Será adotado nesse trabalho o hamiltoniano dado por:

$$H := H_0 + E_{ADM},$$

onde H_0 contém os vínculos do hamiltoniano, escrito em termos da função lapse N , do vetor shift N^i do formalismo ADM e E_{ADM} é conhecida por energia ADM e é um termo adicional de fronteira para espaços-tempos assintoticamente planos, respectivamente, dados por:

$$H_0 := \int d^3x (N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i),$$

$$E_{ADM} = \frac{c^4}{16\pi G} \oint d^2s_j (g_{ij,i} - g_{ii,j}),$$

onde $i, j = 1, 2, 3$, o vínculo \mathcal{H} é chamado de super-hamiltoniano e o vínculo \mathcal{H}_i de super-momento, para mais detalhes veja Santini (2013). Donde obtem-se:

$$E_{ADM} = Mc^2.$$

As quantidades apresentadas acima serão reescritas em termos do momento canônico Π e de uma variável a , no intuito de se estabelecer a dinâmica do sistema. Para isso, a métrica dada pela equação (4.1) será reescrita em termos das coordenadas de Novikov, cuja ideia básica consiste em considerar observadores em queda livre radial, dirigindo-se para o centro do buraco negro de tal maneira que esses observadores estejam em repouso em relação ao buraco negro quando $t = 0$, e em um tempo t estejam em queda livre. A coordenada temporal será dada pelo tempo próprio desses observadores, enquanto que as coordenadas espaciais para cada ponto do espaço-tempo, será dada por uma variável adequada. Assim, tendo o tempo próprio coincidindo com o tempo t no infinito, quando for considerado o observador em queda livre, esse estará em repouso em relação ao buraco negro no infinito, então as coordenadas de Novikov estão da forma desejada.

Pode-se escrever para um observador em queda livre radial, a expressão dada por:

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \dot{t} = \text{constante} := \frac{\chi}{\sqrt{1 + \chi^2}}, \quad (4.4)$$

onde têm-se a derivada temporal do tempo próprio e χ é uma constante, tal que $\chi \geq 0$. Quando tem-se r indo para $r - dr$ e o tempo próprio τ do observador em queda livre indo de τ para $\tau + d\tau$, pode-se escrever:

$$c^2 d\tau^2 = -\frac{\frac{\chi^2}{1+\chi^2}}{\frac{2GM}{c^2 r} - 1} c^2 d\tau^2 + \frac{dr^2}{\frac{2GM}{c^2 r} - 1},$$

a qual nos fornece a equação de movimento para o observador em queda livre sendo:

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{c^2}{1 + \chi^2}. \quad (4.5)$$

Considerando o observador em repouso em relação ao buraco negro, tem-se que a distância máxima r_{max} entre eles será dada por:

$$r = r_{max} := (1 + \chi^2) \frac{2GM}{c^2},$$

reescrevendo a equação acima em termos de r_{max} , obtem-se:

$$\chi = \left(\frac{r_{max}}{R_s} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considerando agora que as coordenadas de Novikov estão escritas em termos das coordenadas τ e χ , para quando $r = r_{max}$ e $t = 0$ se $\tau = 0$, as coordenadas r e t serão escritas em termos das coordenadas independentes χ e τ , ou seja, ter-se-á $r = r(\tau, \chi)$ e $t = t(\tau, \chi)$, que podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} dr &= \frac{\partial r}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial r}{\partial \chi} d\chi, \\ dt &= \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial t}{\partial \chi} d\chi. \end{aligned}$$

Agora, a métrica dada pela equação (4.1) será reescrita em termos das quantidades acima, obtendo:

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(c \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau + c \frac{\partial t}{\partial \chi} d\chi \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \left(\frac{\partial r}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial r}{\partial \chi} d\chi \right)^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

A partir da equação (4.5), é possível expressar de forma implícita a relação entre as quantidades r , τ e χ , que é dada por:

$$\tau = \frac{1}{c} (1 + \chi^2) \left(R_s r - \frac{r^2}{1 + \chi} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{R_s}{c} (1 + \chi^2)^{\frac{3}{2}} \cos \left[\left(\frac{r/R_s}{1 + \chi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Derivando a equação acima em ambos os lados em relação a χ , será obtida uma expressão $(\partial r/\partial\chi)$ em termos de r e χ :

$$\frac{\partial r}{\partial\chi} = 3R_s\chi - \frac{\chi r}{1+\chi^2} + 3R_s\chi(1+\chi^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R_s}{r} - \frac{1}{1+\chi^2} \right)^2 * \cos^{-1} \left[\left(\frac{r/R_s}{1+\chi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.7)$$

Reescrevendo as equações (4.4) e (4.5), tem-se:

$$\frac{\partial t}{\partial\tau} = \left(\frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}} \right) \left(\frac{\chi}{\sqrt{1+\chi^2}} \right), \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial r}{\partial\tau} = -c \left(\frac{R_s}{r} - \frac{1}{1+\chi^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.9)$$

as quais podem expressar a relação entre r e t da seguinte maneira:

$$r = \frac{1}{2}R_s(1+\chi^2)(1+\cos\eta), \quad (4.10)$$

$$t = \frac{R_s}{c} \ln \left| \frac{\chi + \tan(\eta/2)}{\chi - \tan(\eta/2)} \right| + \frac{R_s}{c} \chi \left[\eta + \frac{1}{2}(1+\chi^2)(\eta + \sin\eta) \right], \quad (4.11)$$

onde η é um parâmetro.

É possível reescrever a métrica dada pela equação (4.6), em termos de r e χ . Para isso, deve-se expressar uma solução para η da equação (4.8) em termos de r e χ . Essa solução para η deve ser inserida na equação (4.9), obtendo uma expressão para t em termos de χ e r . Posteriormente, deve-se calcular $(\partial t/\partial\chi)$ em termos de χ e r , utilizando a relação dada pela equação (4.7). Finalmente, encontra-se a métrica em termos de r e χ , dada por:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \frac{1+\chi^2}{\chi^2} \left(\frac{\partial r}{\partial\chi} \right)^2 d\chi^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.12)$$

e substituindo a equação (4.7) na equação (4.12), têm-se:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -c^2 d\tau^2 + (1 + \chi^2) \\
 &\times \left\{ 3R_s - \frac{r}{1 + \chi^2} + 3R_s(1 + \chi^2)^{1/2} \left(\frac{R_s}{r} - \frac{1}{1 + \chi^2} \right)^{1/2} \right. \\
 &\left. * \cos^{-1} \left[\left(\frac{r/R_s}{1 + \chi^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^2 d\chi^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

A métrica escrita acima possui um bom comportamento quando se analisa o ponto em $r = R_s$, no horizonte de eventos do buraco negro. Agora é necessário encontrar uma variável que descreva os graus de liberdade geométricos de um buraco negro de Schwarzschild e escrever a métrica em termos dessa variável. Essa variável deve conter uma dependência de τ , dada por:

$$a(\tau) := r(\tau, 0),$$

para todo $\tau \geq 0$. A equação acima pode ser entendida como sendo a condição de contorno para a equação diferencial (4.7). Utilizando essa condição de contorno na equação (4.7), encontra-se a solução:

$$(1 + \chi^2) \left(R_s r - \frac{r^2}{1 + \chi^2} \right)^{\frac{1}{2}} + R_s (1 + \chi^2)^{\frac{3}{2}} \cos^{-1} \left[\left(\frac{r R_s}{1 + \chi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \text{cte} := C,$$

podendo dessa forma escrever:

$$\begin{aligned}
 (1 + \chi^2) \left(R_s r - \frac{r^2}{1 + \chi^2} \right)^{1/2} + R_s (1 + \chi^2)^{3/2} \cos^{-1} \left[\left(\frac{r/R_s}{1 + \chi^2} \right)^{1/2} \right] \\
 = (R_s a - a^2)^{1/2} + R_s \cos^{-1} \left[\left(\frac{a}{R_s} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Para se obter uma intuição sobre o significado geométrico da variável $a(\tau)$, considere a métrica escrita para o caso em que se faz $\chi = 0$ nas equações (4.7), (4.8) e (4.9), obtem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial \chi} &= 0, & \frac{\partial t}{\partial \tau} &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial \tau} &= -c \left(\frac{R_s}{r} - 1 \right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

aplicando a condição de contorno na métrica (4.13), tem-se:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \left(\frac{2GM}{c^2 a(\tau)} - 1 \right) \left(\frac{\partial t}{\partial \chi} \right)^2 c^2 d\chi^2 + a^2(\tau)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Assumindo $0 < a(\tau) < R_s$, e usando t como uma coordenada temporal, obtem-se a métrica:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \left(\frac{2GM}{c^2 a(\tau)} - 1 \right) c^2 dt^2 + a^2(\tau)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.15)$$

As equações (4.1) e (4.15) mostram que a quantidade $a(\tau)$ é o raio do buraco negro. As equações escritas em termos da variável $a(\tau)$ satisfazem as equações de Einstein e descrevem também os graus de liberdade gravitacional dentro do horizonte do buraco negro.

Agora, torna-se necessário escrever a energia ADM e os vínculos do hamiltoniano em termo da variável $a(\tau)$ e do momento canônico Π . Para isso, considera-se o vínculo hamiltoniano do espaço-tempo com a ausência do campo de matéria, dado por:

$$\mathcal{H} = \frac{c^4}{16\pi G} \sqrt{q}(K_{ij}K^{ij} - K^2 - \mathcal{R}) = 0,$$

onde q é o determinante da métrica de uma hipersuperfície no formalismo ADM, K_{ij} é o tensor curvatura extrínseca, K é o seu traço e \mathcal{R} é o escalar de Riemann na hipersuperfície. Utilizando a métrica (4.12), conferiu-se que:

$$\mathcal{R} = -\frac{4}{r} \frac{\chi}{(1+\chi^2)^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \chi} \right)^{-1} + \frac{2}{r^2} \frac{1}{1+\chi^2}, \quad (4.16)$$

$$K_{ij}K^{ij} - K^2 = -\frac{4}{c^2 r} \left(\frac{\partial r}{\partial \chi} \right)^{-1} \frac{\partial r}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial r}{\partial \chi} \right) - \frac{2}{c^2 r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \tau} \right)^2. \quad (4.17)$$

Devido a dependência temporal e a equação (4.14), obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \tau} &= \frac{\partial r}{\partial a} \dot{a}, \\ \frac{\partial r}{\partial a} &= \left(\frac{\frac{R_s}{r} - \frac{1}{1+\chi^2}}{\frac{R_s}{a} - 1} \right)^2, \end{aligned}$$

e o vínculo hamiltoniano torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{3c^4}{8\pi G} \sin \theta \left\{ \frac{R_s}{(1+\chi^2)^{1/2}} - \frac{r}{(1+\chi^2)^{3/2}} + R_s \left(\frac{R_s}{r} - \frac{1}{1+\chi^2} \right)^{1/2} \right\} * \\ * \cos^{-1} \left[\left(\frac{r/R_s}{1+\chi^2} \right)^{1/2} \right] \left\{ \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{R_s}{a} - 1 \right)^{-1} \dot{a}^2 - 1 \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Pode-se conferir que a solução é:

$$\dot{a}^2 = c^2 \left(\frac{2GM}{c^2 a} - 1 \right),$$

onde pode-se reescrever a equação acima e destacar que a massa M de um buraco negro depende de a e de sua derivada temporal, isto é, reescrevendo a equação acima para M , obtem-se:

$$M = \frac{1}{2G} (a\dot{a}^2 + c^2 a).$$

Lembrando que a energia do buraco negro é Mc^2 , pode-se expressar o hamiltoniano por:

$$H = \frac{c^2}{2G}a\dot{a}^2 + \frac{c^4}{2G}a,$$

onde o primeiro termo do lado direito está associado ao termo cinético e o segundo termo é a energia potencial do buraco negro. A hamiltoniana acima também foi encontrada por Modesto (2006). Expressando a lagrangiana, tem-se:

$$L = \frac{c^2}{2G}a\dot{a}^2 - \frac{c^4}{2G}a.$$

Escrevendo o momento canônico para a variável a , obtém-se:

$$\Pi := \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = \frac{c^2}{G}a\dot{a}.$$

Assim o hamiltoniano clássico de um buraco negro pode ser expresso por:

$$H = \frac{G}{2c^2} \frac{1}{a} \Pi^2 + \frac{c^4}{2G}a.$$

Para obter a equação de Schrödinger para um buraco negro, deve-se transformar o hamiltoniano clássico no operador hamiltoniano. Todavia, esse operador hamiltoniano deve satisfazer o produto interno entre os estados $|\psi\rangle$ que representam as funções de onda $\psi = \psi(a)$ para o buraco negro.

A diferença desse trabalho em relação aos demais, é referente ao momento canônico, que ao se tornar o operador momento, será utilizada a proposta segundo Šteigl (2008), dado por:

$$\hat{\Pi}^2 = \frac{1}{a^p} \frac{\partial}{\partial a} a^p \frac{\partial}{\partial a},$$

onde p representa o fator de ordenamento do operador.

Assim, o hamiltoniano pode ser escrito como:

$$\hat{H} = \left[-\frac{\hbar^2 G}{2c^2} \frac{1}{a} \left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{p}{a} \frac{d}{da} \right) + \frac{c^4}{2G} a \right],$$

aplicando o operador acima na função de onda $\psi(a)$, obtem-se:

$$\left[-\frac{\hbar^2 G}{2c^2} \frac{1}{a} \left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{p}{a} \frac{d}{da} \right) + \frac{c^4}{2G} a \right] \psi(a) = E\psi(a), \quad (4.18)$$

essa é a equação de Schrödinger independente do tempo para um buraco negro de Schwarzschild. Reescrevendo-a em termos do comprimento de Planck, o qual é dado por:

$$l_p^2 = \frac{\hbar G}{c^3},$$

para isso, multiplica-se a equação (4.18) em ambos os lados por $1/c\hbar$, obtendo:

$$\left[-\frac{l_p^2}{2} \frac{1}{a} \left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{p}{a} \frac{d}{da} \right) + \frac{a}{2l_p^2} \right] \psi(a) = \frac{E}{c\hbar} \psi(a). \quad (4.19)$$

Agora, o termo do lado direito da igualdade acima será reescrito em termos do raio de Schwarzschild, dado por:

$$R_s := \frac{2GM}{c^2},$$

para isso, considere a operação:

$$\frac{E}{c\hbar} = \left(\frac{Mc^2}{c\hbar} \right) \left(\frac{2c^3 G}{2c^3 G} \right) = \left(\frac{2GM}{c^2} \right) \left(\frac{c^3}{2\hbar G} \right) = \frac{R_s}{2l_p^2}.$$

Assim podemos reescrever a equação (4.19) como:

$$\left[-\frac{l_p^2}{2} \frac{1}{a} \left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{p}{a} \frac{d}{da} \right) + \frac{a}{2l_p^2} \right] \psi(a) = \frac{R_s}{2l_p^2} \psi(a).$$

Multiplicando essa equação em ambos os lados por a/l_p^2 , tem-se:

$$\left[-\left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{p}{a} \frac{d}{da} \right) + \frac{a^2}{l_p^4} - \frac{R_s a}{l_p^4} \right] \psi(a) = 0,$$

ou,

$$-l_p^4 \left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{p}{a} \frac{d}{da} \right) \psi(a) + (a^2 - aR_s) \psi(a) = 0, \quad (4.20)$$

essa é a equação de Schrödinger para buracos negros, escrita em termos do fator de escala a e do comprimento de Planck l_p .

4.2 Autovalores e Autovetores

Nesta seção será solucionada a equação de Schrödinger para buracos negros dada por (4.20). Para isso, considere inicialmente a mudança de variável:

$$x = \frac{a}{l_p},$$

onde tem-se $da = l_p dx$. Usando essas relações, pode-se escrever a equação (4.20) em termos da variável x , tornando-se:

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{p}{x} \frac{d}{dx} \right) \psi(x) + \left(x^2 - x \frac{R_s}{l_p} \right) \psi(x) = 0,$$

vamos denominar $N = R_s/l_p$, onde N será um número real. Assim a equação acima torna-se:

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{p}{x} \frac{d}{dx}\right) \psi(x) + (x^2 - xN) \psi(x) = 0, \quad (4.21)$$

essa equação é conhecida como equação Wheeler-DeWitt (WdW), cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} \psi(x) = & c_1 e^{\frac{1}{2}(-x+N)} HeunB\left(-1+p, N, \frac{1}{4}N^2, 0, -x\right) + \\ & + c_2 e^{\frac{1}{2}(-x+N)} HeunB\left(-1+p, N, \frac{1}{4}N^2, 0, -x\right) x^{1-p}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $HeunB(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$ é a solução da equação biconfluente de Heun, a qual é uma equação diferencial ordinária, homogênea, linear e de segunda ordem fuchsiana com quatro pontos singulares (RONVEAUX, 1995). A equação de Heun pode ser escrita como:

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \left(\frac{y}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{z}{z-d}\right) \frac{dy(z)}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-d)} y(z) = 0,$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e x são parâmetros complexos e estão relacionados com os expoentes característicos das soluções, $d(d \neq 0, 1, \infty)$ localiza o quarto ponto singular da equação que pode ser ou não complexo, conhecido por parâmetro acessório. Para mais informações sobre a função de Heun no contexto de buracos negros, veja Momeni, Yerzhanov e Myrzakulov (2012).

Analisando a solução dada pela equação (4.22), para o caso em que $a \rightarrow Nl_p$, ou seja, $x \rightarrow N$, será considerado apenas o segundo termo $p > 1$,

dessa maneira a função de onda torna-se:

$$\psi(x) \sim c_2 e^{\frac{1}{2}(-x+N)} \text{HeunB} \left(-1+p, N, \frac{1}{4}N^2, 0, -x \right) x^{1-p}. \quad (4.23)$$

A solução dada por (4.23) será analisada para o caso especial em que o terceiro parâmetro da equação de Heun satisfaz $\gamma = 2(n+1) + \alpha$, onde n é um número inteiro positivo. Nesse caso, o coeficiente $n+1$ representa uma expansão em série de um polinômio de grau n em δ . Quando δ for raiz desse polinômio e os coeficientes $n+1$ e seus subsequentes cancelarem-se, a série é truncada, resultando em um polinômio de grau n para Heun. Aplicando essa condição na função de onda dada em (4.23), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}N^2 &= 2(n+1) + 1 - p, \\ N &= \sqrt{8(n+1) + 4(1-p)}, \end{aligned}$$

onde N expressa a razão entre o raio de Schwarzschild e o comprimento de Planck, dessa maneira, temos que o raio de Schwarzschild, será:

$$R_s = l_p \sqrt{8(n+1) + 4(1-p)},$$

donde se vê que o raio de Schwarzschild é quantizado e que depende do fator de ordenamento. Aqui, p carrega a informação quântica do buraco negro. Quando se faz $p = 2$, recupera-se o resultado encontrado em Mäkelä (2014).

A área do horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild é determinada por:

$$A_s = 4\pi R_s^2,$$

logo, tem-se:

$$A_s = 32\pi l_p^2(n+1) + 16\pi l_p^2(1-p), \quad (4.24)$$

o que mostra que a área do horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild só pode assumir certos valores discretos e da ordem do comprimento de Planck, isto é, existe uma área mínima definida por p e n .

Utilizando a equação (4.3) é possível expressar os autovalores da massa de um buraco negro de Schwarzschild como sendo dado por:

$$M = \frac{c^2}{4G} \sqrt{\frac{A_s}{\pi}}, \quad (4.25)$$

substituindo a equação (4.24) na equação (4.25), obtem-se:

$$M = \frac{c^2}{G} l_p \sqrt{2(n+1) + (1-p)}.$$

A equação acima pode ser expressa em termos da massa de Planck $M_{pl} = c^2 l_p / G$, tornando-se:

$$M = M_{pl} \sqrt{2(n+1) + (1-p)},$$

cujos autovalores de energia correspondem a:

$$E = E_{pl} \sqrt{2(n+1) + (1-p)},$$

onde $E_{pl} = \sqrt{\hbar c^5 / G}$ é a energia de Planck.

Como mostrado por Hawking (1975), os buracos negros podem emitir radiação e ao emitir essa radiação, eles perdem massa. Assim, será calculada a

radiação de Hawking, para esse modelo. Considere que a área dada pela equação (4.3) varie de A_s para $A_s + dA_s$ e a massa mude de M para $M + dM$, tal que:

$$\begin{aligned} dA_s &= \frac{32\pi G^2}{c^4} M dM, \\ dM_s &= \frac{c^4}{32\pi G^2} \frac{dA_s}{M}, \end{aligned}$$

donde obtém-se:

$$dM = M_{pl}^2 \left[n + \frac{1}{2}(3 - p) \right],$$

onde M_{pl} é a massa de Planck. Assim a energia emitida por um buraco negro numa transição de estados é dada por:

$$\Delta E_n = \frac{E_{pl}^2}{E} \left[n + \frac{1}{2}(p - 1) \right]^2,$$

onde tal energia de um quanta da radiação de Hawking depende do fator de ordenamento. E a frequência emitida por essa radiação é dada por:

$$\nu = \frac{E_{pl}^2}{\hbar E} \left[n + \frac{1}{2}(p - 1) \right]^2.$$

4.3 Solução da equação WdW para $a \rightarrow 0$

Nesta seção será analisada regiões próximas à singularidade do buraco negro de Schwarzschild em que o fator de escala é muito pequeno, $a \rightarrow 0$, o que implica que $x \rightarrow 0$. Assim, pode-se escrever a equação (4.21) como sendo:

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{p}{x} \frac{d}{dx} \right) \psi(x) = 0, \quad (4.26)$$

cuja solução é dada por:

$$\psi(x) = c_1 + ic_2 x^{1-p}, \quad (4.27)$$

onde $p \neq 1$. Expressando a equação acima em termos do fator de escala a , tem-se:

$$\psi(a) = c_1 + ic_2 \left(\frac{a}{l_p} \right)^{1-p}. \quad (4.28)$$

Utilizando a interpretação de de Broglie-Bohm, pode-se escrever a fase da função de onda como sendo:

$$S = \tan^{-1} \left[\frac{c_2}{c_1} \left(\frac{a}{l_p} \right)^{1-p} \right],$$

para $p \neq 1$ e a parte real da função de onda será dada por:

$$R = \sqrt{c_1^2 + \left[c_2 \left(\frac{a}{l_p} \right)^{1-p} \right]^2},$$

para $p \neq 1$. Usando a relação guia dada pela equação (3.24), pode-se expressar as trajetórias bhomianas como sendo:

$$a(t) = \begin{cases} \left[\frac{c_2}{l_p c_1} (3 - |1 - p|)(t + t_0) \right]^{\frac{1}{3 - |1 - p|}}, & \text{para } |1 - p| \neq 0, 3, \\ e^{c_2(t-t_0)/l_p c_1}, & \text{para } |1 - p| = 3, \end{cases} \quad (4.29)$$

quando $|1 - p| \neq 0, 3$, a função de onda $a(t)$ é finita e regular, considerando valores de a muito pequenos, o que resulta na remoção da singularidade. Para o caso em que $|1 - p| = 3$, obteve-se o comportamento exponencial. É importante ressaltar que quando o fator de ordenamento satisfaz a condição $p < 2$, a singularidade na função de onda dada pela equação (4.28) é evitada.

Esse resultado também é encontrado na cosmologia de HL quando se considera $k = 0$.

4.4 Buracos negros na teoria de HL

Seguindo o trabalho de Suresh e Kuriakose (2013), a ação da teoria gravitacional renormalizável não relativística proposta por Hořava é dada por:

$$I = \int dt d^3x \sqrt{g} N (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1), \quad (4.30)$$

onde

$$\mathcal{L}_0 = \left\{ \frac{2}{k^2} (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2) + \frac{k^2 \mu^2 (\Lambda R - 3\Lambda^2)}{8(1 - 3\lambda)} \right\},$$

e

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \frac{k^2 \mu^2 (1 - 4\lambda)}{32(1 - 3\lambda)} R^2 - \frac{k^2}{2\omega^4} Z_{ij} Z^{ij} \right\},$$

a quantidade Z_{ij} é dada por:

$$Z_{ij} = C_{ij} - \frac{\mu\omega^2}{2} R_{ij},$$

sendo C_{ij} o tensor de Cotton e $k^2, \mu, \omega, \lambda$ e Λ constantes. Para a solução esfericamente simétrica da gravidade de HL é considerado o elemento de linha dado por:

$$ds^2 = -N(r)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2.$$

Substituindo esta métrica na equação (4.30) e calculando a integração, a lagrangiana reduz-se a:

$$L = \frac{k^2 \mu^2 N}{8(1-3\lambda)\sqrt{f}} \left\{ \frac{\lambda-1}{2} f'^2 + \frac{(2\lambda-1)(f-1)^2}{r^2} - \frac{2\lambda(f-1)}{r} f' - 2\omega(1-f-rf') \right\}, \quad (4.31)$$

onde

$$\omega = \frac{8\mu^2(3\lambda-1)}{k^2}.$$

Fazendo $\lambda = 1$ e solucionando as equações de campo para (4.31), obtém-se a solução KS (SURESH; KURIAKOSE, 2013):

$$f_{KS} = N_{KS}^2 = 1 + \omega r^2 - \sqrt{r(\omega^2 r^3) + 4\omega M}.$$

Analisando os aspectos termodinâmicos de buracos negros de KS, para a condição $f_{KS}(r_+ = 0)$, tem-se que os raios externos e internos ao horizonte são dados por:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \frac{1}{2\omega}}.$$

É possível estabelecer uma relação entre a massa M de um buraco negro e o raio do horizonte r_+ como:

$$M = \frac{r_+}{2} + \frac{1}{4\omega r_+}.$$

A lei da área de Bekenstein-Hawking, é dada por:

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_+^2, \quad (4.32)$$

assim o raio de horizonte r_+ , pode ser escrito em termos da entropia S , como:

$$r_+ = \sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

e portanto a massa torna-se:

$$M = \frac{1}{4\omega} \sqrt{\frac{\pi}{S}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Agora, será feita a mesma análise apresentada acima, porém, os objetos estudados serão buracos negros de Schwarzschild. Então, pode-se expressar a equação (4.32) como:

$$S = \frac{A_s}{4}, \quad (4.33)$$

utilizando a equação (4.24), tem-se que a entropia é dada por:

$$S = 8\pi l_p^2(n+1) + 4\pi l_p^2(1-p), \quad (4.34)$$

onde esta equação fornece a quantização da entropia.

Fazendo $A_s = 4\pi R_s^2$ na equação (4.33) e expressando o raio do horizonte de eventos em termos da entropia, tem-se:

$$R_s = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Assim, pode-se fazer uma conexão entre a massa de um buraco negro e o raio do horizonte de eventos em termos da entropia, a qual é dada por:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{c^2}{4G} \sqrt{\frac{A_s}{\pi}}, \\
 &= \frac{c^2}{4G} \sqrt{\frac{4\pi R_s^2}{\pi}} \\
 &= \frac{c^2}{G} \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \\
 &= \frac{M_{pl}}{l_p} \sqrt{\frac{S}{\pi}},
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

esta equação mostra que a massa de um buraco negro é descrita em termos de uma densidade linear, que envolvem as quantidades de Planck (M_{pl} e l_p) e que quando mais desordem (entropia) exista num buraco negro, maior será sua massa. Também, pode-se concluir que a área e o espectro de entropia não dependem dos parâmetros do buraco negro, como pode ser visto pelas equações (4.33) e (4.34).

Em resumo, nessa seção foram encontrados os autovalores e os autovetores da equação de Schrödinger que descreve buracos negros de Schwarzschild. Essas quantidades produzem a quantização do raio de Schwarzschild, da área, da massa e conseqüentemente da energia. Em seguida, analisou-se a singularidade presente no interior do buraco negro através da interpretação de de Broglie-Bohm, cujos resultados mostram que tal singularidade é evitável quanticamente. Encerrando a seção, foi feito um breve comentário sobre buracos negros na cosmologia de HL, resultando na quantização da área e da entropia, as quais são independentes dos parâmetros presentes em buracos negros.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram analisadas as singularidades da cosmologia como também as singularidades no horizonte de eventos e no interior de buracos negros de Schwarzschild. Para isso, foram estudados os conceitos físicos e as ferramentas matemáticas utilizadas no formalismo ADM, na mecânica quântica e na gravitação quântica para interpretar tais singularidades. No caso da cosmologia, analisou-se a singularidade primordial do universo, na fase ultravioleta (UV), sendo adotado o modelo proposto por Hořava-Lifshitz. Para buracos negros, foram feitas mudanças de coordenadas no intuito de se escrever a equação de Schrödinger com variáveis adequadas, tais como o fator de escala a e o comprimento de Planck l_p . As soluções obtidas foram analisadas por meio da mecânica quântica de de Broglie-Bohm, que ao serem interpretadas resultam na remoção das singularidades da cosmologia e de buracos negros e na quantização do horizonte de eventos. Para se analisar as soluções do ponto de vista quântico também foi considerado o fator de ordenamento dos operadores.

Para a cosmologia foram analisados três casos, o primeiro caso, trata-se do termo do potencial clássico predominante perante aos outros termos, dado pela equação (3.13), cuja solução é dada pela função de onda (3.18). A partir da análise dessa solução, foram estabelecidas as condições em que $4kg_s > (p - 1)^2$ e que $p < 1$, das quais permitem considerar que a função de onda (3.18) seja escrita como (3.19). Utilizando a interpretação de de Broglie-Bohm, foi determinado o fator de escala em função do tempo, dado pela equação (3.25), donde se pode concluir, que essa é uma função finita e regular, mas válida apenas para o fator de escala a muito pequeno. Utilizando a equação (3.15) foi calculada a densidade de probabilidade em função do tempo, a qual depende do fator de ordenamento p , e é válida para qualquer geometria do espaço-tempo. A equação (3.26), mostra

que quando a é muito pequeno, tem-se que $\rho \rightarrow 0$, removendo a singularidade. Conclui-se também que para $p > 1$, a singularidade não é evitada, já que a densidade de probabilidade diverge.

Nos outros dois casos, estudou-se regiões próximas às singularidades para geometrias esférica e hiperbólica, sendo acrescentado um termo de potencial a mais, o qual contém a constante de acoplamento g_r . A equação utilizada para descrever o universo fechado, nesse caso, é dada pela equação (3.27), cuja solução é dada por (3.28). Utilizando a interpretação de de Broglie-Bohm foi possível escrever a equação (3.33), a qual descreve como o fator de escala evolui ao longo do tempo. Quando é considerado $\nu \neq 0, 3/2$, a expansão é descrita por uma função finita e regular, válida para pequenos valores do fator de escala. Por outro lado, se $\nu = 3/2$, a expansão será exponencial e é provocada pelo termo $\gamma(3/2)a^2$ presente no potencial quântico da equação (3.34). Logo, a singularidade é removida devido a efeitos quânticos.

No caso em que o universo é aberto, a equação que o descreve é dada por (3.35), cuja função de onda é expressa pela equação (3.36). Os resultados encontrados para o fator de escala em função do tempo, equação (3.39) e para o potencial quântico, equação (3.40), são similares aos resultados encontrados para o universo fechado, apenas o termo que envolve a constante de acoplamento g_s muda de sinal simultaneamente com o potencial clássico que envolve essa mesma constante. Dessa maneira, a singularidade é evitada. Para os casos de geometrias esférica e hiperbólica, o fator de ordenamento p depende da constante de acoplamento g_s . Ressalta-se no limite de baixas energias, quando o fator de escala é grande, os efeitos quânticos não são relevantes, assim não há dependência na escolha do fator de ordenamento.

No estudo de buracos negros de Schwarzschild, ao se escrever a equação de Schrödinger em termos do fator de escala a e do comprimento de Planck l_p ,

dada pela equação (4.20), foi feita uma mudança de variável, a qual permite expressar a equação de Schödinger como (4.21). A função de onda encontrada é escrita em termos da função de Heun, a qual é solução da equação biconfluente de Heun. Em seguida, analisou-se o comportamento dessa função de onda para quando se tem valores do fator de escala muito pequenos, sendo possível reescrevê-la da forma dada pela equação (4.23). Analisando o caso especial em que o terceiro parâmetro da equação de Heun satisfaz a condição $\gamma = 2(n + 1) + \alpha$, onde n é um número inteiro positivo, foi possível quantizar o raio de Schwarzschild e consequentemente encontrar o espectro da área, da massa, da energia e a frequência emitida pela radiação de Hawking. Mostrando que é possível quantizar o horizonte de eventos de buracos negros de Schwarzschild, destaca-se que todas as quantidades quantizadas dependem do fator de ordenamento dos operadores, o que ainda não havia sido feito na literatura.

Em seguida, analisou-se a singularidade no interior do buraco negro. Para isso, considerou-se que $a \rightarrow 0$ na equação (4.20), a qual foi escrita como aparece em (4.26). A função de onda é dada pela equação (4.28), que ao ser interpretada do ponto de vista de de Broglie-Bohm, resultou na equação (4.29), a qual descreve a evolução do fator de escala ao longo do tempo. Pode-se concluir, que essa solução é finita e regular, válida apenas para pequenos valores do fator de escala. Dessa maneira, a singularidade presente no interior do buraco negro é removida, lembrando que isso só é possível se a condição em que $p < 2$ for satisfeita. O resultado encontrado na seção 4.3 é análogo ao resultado para o caso em se considera $k = 0$ na cosmologia.

Por fim, foi feito um breve comentário dos buracos negros na teoria de HL, onde também há quantidades físicas quantizadas, tais como a área, a massa, a entropia, dentre outras. Nesse sentido, foi possível estabelecer uma relação entre buracos negros do modelo de HL com o estudo realizado nessa dissertação.

Destacando-se a determinação do espectro da entropia em termos do comprimento de Planck e do fator de ordenamento, como pode ser visto na equação (4.34), e a quantização da massa em termos da entropia e da densidade linear, equação (4.35), dada pelas quantidades de Planck (M_{pl} e l_p). Logo, conclui-se para esse caso, que a área e o espectro da entropia são independentes dos parâmetros do buraco negro.

REFERÊNCIAS

BERTOLAMI, O.; ZARRO, C. A. D. Hořava-Lifshitz quantum cosmology. **Physical Review D**, New York, v. 84, n. 4, p. 44042-44054, Aug. 2011.

CARMELI, M. **Classical fields: general relativity and gauge theory**. New York: J. Wiley, 1982. 670 p.

D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's relativity**. New York: Oxford University, 1992. 387 p.

DÜRR, D.; TEUFEL, S. **Bohmian mechanics: the physics and mathematics of quantum theory**. New York: Springer, 2009. 395 p.

EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, Berlin, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916.

FRANCHI, C. M. G. G.; REIS, R. G.; BORGES NETO, M. F. Breve história de buracos negros. **Revista Científica UNILAGO**, São José do Rio Preto, v. 1, n. 1, p. 41-54, nov. 2012. Disponível em: <<http://www.unilago.edu.br/revista/edicaoanterior/Sumario/2013/downloads/2013/BREVE%20HIST%C3%93RIA%20DOS%20BURACOS%20NEGROS.pdf>>. Acesso em: 22 dez. 2014.

GARATTINI, R.; SARIDAKISC, E. N. **Gravity's Rainbow: a bridge towards Hořava-Lifshitz gravity**. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1411.7257>>. Acesso em: 2 dez. 2014.

GOURGOULHON, E. **3+1 formalism and bases of numerical relativity**. New York: Springer, 2012. 220 p.

HAWKING, S. Particle creation by black holes. **Communications in Mathematical Physics**, New York, v. 43, n. 3, p. 199-220, 1975.

HAWKING, S.; PAGE, D. N. Operator ordering and the flatness of the universe. **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 264, p. 185–196, 1986.

HE, D.; GAO, D.; CAI, Q. Spontaneous creation of the universe from nothing. **Physical Review D**, New York, v. 89, n. 8, p. 83510-83515, Apr. 2014.

HOŘAVA, P. Quantum Gravity at a Lifshitz Point. **Physical Review D**, New York, v. 79, n. 8, p. 84008-84037, Apr. 2009.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The classical theory of fields**. 4th ed. New York: Institute for Physical Problems, Academy of Sciences of the U.R.S.S., 1975. v. 2, 438 p.

MAEDA, K.; MISONOH, Y.; KOBAYASHI, T. Oscillating Universe in Horava-Lifshitz Gravity. **Physical Review D**, New York, v. 82, n. 6, p. 64024-64037, Sept. 2010.

MÄKELÄ, J. **Schrödinger equation of the Schwarzschild black hole**. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9602008.pdf>>. Acesso em: 15 mar. 2014.

MICHELL, J. **On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose**. London: Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1784. 74 p.

MODESTO, L. Loop quantum black hole. **Classical and Quantum Gravity**, Bristol, v. 23, n. 18, p. 5587-5598, Aug. 2006.

MOMENI, D.; YERZHANOV, K.; MYRZAKULOV, R. Quantized black hole and heun function. **Canadian Journal of Physics**, Ottawa, v. 90, n. 9, p. 877-881, 2012.

NELSON, W.; SAKELLARIADOU, M. Unique factor ordering in the continuum limit of loop quantum cosmology. **Physical Review D**, New York, v. 78, n. 2, p. 24006-24012, July 2008.

PINTO NETO, N. The Bohm interpretation of quantum cosmology. **Foundations of Physics**, New York, v. 35, n. 4, p. 577-603, Apr. 2005.

PINTO NETO, N. **Teorias e interpretações da mecânica quântica**. Rio de Janeiro: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2010. 139 p.

RONVEAUX, A. **Heun's differential equations**. New York: Oxford University, 1995. 380 p.

SANTINI, E. S. **Geometrodinâmica Quântica na Interpretação de Bohm-de Broglie**. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0005092.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2013.

SOTIRIOU, T. P.; VISSER, M.; WEINFURTNER, S. Phenomenologically viable Lorentz-violating quantum gravity. **Physical Review Letters**, New York, v. 102, n. 25, p. 251601-251605, June 2009a.

SOTIRIOU, T. P.; VISSER, M.; WEINFURTNER, S. Quantum gravity without Lorentz invariance. **Journal of High Energy Physics**, New York, v. 2009, n. 10, p. 1-37, Oct. 2009b.

SPIEGEL, M. R. **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas**. São Paulo: McGraw-Hill, 1973. 270 p. (Coleção Schaum).

STEIGL, R. **Model examples of quantum cosmology**. Brno: Masaryk University, 2008. 80 p.

SURESH, J.; KURIAKOSE, V. C. Area spectrum and thermodynamics of KS black holes in Hořava gravity. **General Relativity and Gravitation**, New York, v. 45, n. 10, p. 1877-1886, Oct. 2013.

VAKILI, B.; KORD, V. Classical and quantum Hořava-Lifshitz cosmology in a minisuperspace perspective. **General Relativity and Gravitation**, New York, v. 45, n. 7, p. 1313-1331, July 2013.

VALENTINI, A. Signal-locality, uncertainty, and the sub-quantum H-theorem, I. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 156, n. 5, p. 5-11, 1991.

WHEELER, J. A. Our Universe: the know and the unknow. **The Physics Teacher**, College Park, v. 7, n. 1, p. 24, 1969.

NOTAÇÃO

Índices latinos $ijkl$ vão de 1 até 3 e os índices abc vão de 0 até 3, $x^0 = ct$.

Índices repetidos geralmente serão somados, salvo indicação em contrário.

A assinatura da métrica é $(-,+,+,+)$.

Um ponto sobre qualquer quantidade denota a derivada temporal dessa quantidade.

κ denota a constante gravitacional de Einstein.

k indica a curvatura do espaço-tempo, por exemplo, hiperbólico $k = -1$, plano $k = 0$ e esférico $k = 1$.

K_{ij} é o tensor curvatura extrínseca.

$a = a(t)$ é o fator de escala.

p é o fator de ordenamento dos operadores quânticos.

g_{ab} é a métrica do espaço-tempo.

h_{ij} é a métrica puramente espacial.

∇_a é a derivada covariante.

D_a é a derivada exterior.

R^d_{abc} é o tensor de Riemann.

${}^{(3)}R^d_{abc}$ é o tensor de Riemann tridimensional escrito na hipersuperfície espacial h_{ij} .