UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

JUAN CARLOS SUMIRE ESQUIA

STUECKELBERG A LA UTIYAMA

Poços de Caldas/MG
2021

JUAN CARLOS SUMIRE ESQUIA

STUECKELBERG A LA UTIYAMA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alfenas. Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto

Poços de Caldas/MG
2021

Ministério da Educação
Universidade Federal de Alfenas

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700 - Bairro centro, Alfenas/MG - CEP 37130-001
Telefone: (35)3701-9263 - http://www.unifal-mg.edu.br

ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO Nº 30

Às 09:00 horas do dia 24 de fevereiro de 2021, foi realizada a sessão de defesa pública de dissertação do discente **Juan Carlos Sumire Esquia** do Programa de Pós-Graduação em Física.

A apresentação oral do trabalho **"Stueckelberg *a la* Utiyama"** teve duração de 53 minutos.

De acordo com os requisitos legais, a comissão examinadora designada para proceder ao exame foi presidida pelo orientador, Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto (UNIFAL-MG) e composta pelos professores: Prof. Dr. Pedro José Pompeia (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) e Prof. Dr. Cássius Anderson Miquele de Melo (UNIFAL-MG).

A arguição teve duração total de 1 h 30 min. Em reunião secreta a Comissão Examinadora fez a apreciação da dissertação e considerou o candidato:

(X) Aprovado ( ) Aprovado condicionalmente ( ) Reprovado

Parecer final dos examinadores: Candidato aprovado.

Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Rocha Cuzinatto**, **Professor do Magistério Superior**, em 24/02/2021, às 12:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Cassius Anderson Miquele de Melo**, **Professor do Magistério Superior**, em 24/02/2021, às 12:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Pedro José Pompeia**, **Usuário Externo**, em 24/02/2021, às 12:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, eletrônica do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unifal-mg.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0469893** e o código CRC **510F1ACB**.

Referência: Processo nº 23087.001079/2021-11 SEI nº 0469893

Esse documento não tem validade como homologação do título acadêmico

Dedico a minha família, professores e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha trajetória como estudante de Física.

Agradeço a meu orientador Rodrigo Rocha Cuzinatto pela paciência, apoio e constante motivação, durante estes dois anos, ele foi como um pai para mim.

Agradeço a minha mãe Alberta e meu pai Pedro, pelo apoio constante e por confiar em mim.

Agradeço a meus irmãos Jose Luis e Gustavo, pelo apoio moral, pela companhia e peço desculpas pelo trabalho que eu deixei para eles durante estes dois anos.

Agradeço a meu professor Rolando Perca pela exigência como orientador da graduação.

Agradeço a minha amiga Irina (aprendimos, vivimos y compartimos muchas experiencias juntos).

Agradeço a minha amiga Valentina (por toda la ayuda que me dió desde que la conocí).

Agradeço a minha amiga Alejandra (porque siempre me defiende de Irina xD).

Agradeço a meu amigo Braulio por ter me recibido como um irmão, pela paciência e apoio.

Agradeço a minha amiga Lizandra pelo apoio incondicional e por sempre acreditar em mim.

Agradeço a meu amigo Venancio por ter me recibido como um irmão e também pelas conversas e brincadeiras.

Agradeço a meus professores: Francisco, Ernesto, David, Pastor, Yessica, Nancy, Jose Luis, etc pelo apoio incondicional.

Agradeço a meus amigos da graduação: Wilfredo, Frank, John, Pepe, Saul, Danny, etc.

Agradeço a meus amigos do mestrado: Wallison, Silas, Yuri, Bruna, Cado, Carlos, Christianne.

Agradeço à UNIFAL-MG e ao Programa PAEC OEA-GCUB pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O formalismo de Utiyama permite fazer um estudo dedutivo das equações de movimento para os campos clássicos, a interação deles com os campos de matéria e as correntes de conservação que são consequências de manter a invariância nas transformações de gauge (UTIYAMA, 1956). A principal consequência de manter essa invariância mesmo a nível local é: os potenciais de gauge não admitem termos de massa em suas Lagrangianas. Neste trabalho de mestrado, pretendemos fazer o estudo da possibilidade de o formalismo de Utiyama ser estendido para comportar potenciais de gauge A^a_μ massivos, mantendo a invariância de gauge local com ajuda de um campo adicional *a la* Stueckelberg. Assim, seremos guiados pela teoria de Stueckelberg, um mecanismo que introduz um campo escalar massivo B para o caso do grupo $U(1)$ (RUEGG, 2004) e um campo vetorial massivo ω_μ para o caso do grupo $SU(2)$, cuja lei de transformação (no caso $U(1)$) carrega o parâmetro de massa m; essa massa é, então, transferida para A_μ.

Palavras-chave: Campos de gauge, invariância, campos vetoriais massivos.

ABSTRACT

Utiyama's formalism allows a deductive study of the equations of motion for the classical fields, their interaction with the fields of matter and the conservation currents that is consequences of maintaining the invariance of gauge transformations (UTIYAMA, 1956). The main consequence of maintaining this invariance even at the local level is: gauge potentials don't admit terms of mass in their Lagrangians. In this master's work, we intend to study the possibility of Utiyama's formalism being extended to include massive A^a_μ gauge potentials, maintaining the local gauge invariance with the help of a field additional *a la* Stueckelberg. Thus, we will be guided by the Stueckelberg theory, a mechanism that introduces a massive scalar field B for the case of the group $U(1)$ (RUEGG, 2004) and a massive vector field ω_μ for the case of the group $SU(2)$, whose transformation law (group $U(1)$) carries the mass parameter m; this mass is then transferred to A_μ.

Keywords: gauge fields, invariance, massive vector fields.

SUMÁRIO

Capítulo 1

1 Introdução

Os campos são objetos com um número infinito de graus de liberdade, sistemas contínuos (SOKOLOV, 1989). Para descrever o comportamento dos campos, também pode-se usar os metódos de Lagrange e Hamilton baseados no princípio variacional, assim como em mecânica clássica. Mas, o sentido físico das variáveis canônicas e de Lagrange, no caso contínuo não é tão evidente como na Mecânica Clássica. A teoria que estuda os campos, é a conhecida Teoria Clássica de Campos (LANDAU, 1992).

Na Teoria Clássica de Campos, temos transformações que são feitas nas coordenadas de espaço-tempo, transformações que compõem os conhecidos grupos de Lorentz e Poincare e transformações sobre os campos, conhecidas na literatura, como transformações de calibre ou transformações de gauge (SOKOLOV, 1989). Da mecânica clássica, sabemos que, se as equações de movimento são invariantes com respeito a uma determinada transfomação, então $\delta S = 0$. Temos, pelo teorema de Noether, uma integral de movimento, se por exemplo fazemos deslocamentos infinitesimais no espaço, e as equações de movimento não mudam, a quantidade que se conserva é o momento linear, A mesma situação acontece na teoria de Campos, se fazemos deslocamentos infinitesimais no espaço-tempo, temos uma quantidade que se conserva, o conhecido tensor Energia-Momento (SOKOLOV, 1989). Mas, pelo fato de ter transformações que afetam os campos (que não influenciam nas coordenadas do espaço-tempo), temos quantidades que se conservam, estos conceitos compõem as conhecidas simetrias internas dos campos, que mostram as propriedades internas, que não estão relacionadas com os possíveis deslocamentos no espaço-tempo do campo (SOKOLOV, 1989).

A origem das teorias de gauge foi registrada por O´Raifeartaigh (O´RAIFEA RTAIGH, 1997), foi Weyl quem introduziu o termo "gauge"em geometria diferencial na época da publicação do seu primeiro artigo (O´RAIFEARTAIGH, 1997), a palavra gauge era comum para designar medidas de tamanho. Yang e Mills fizeram o primeiro trabalho em teoria de gauge não abeliana (YANG, 1954). A forma da interação entre os campos pode ser determinada postulando-se a invariância com respeito a certos grupos de transformação. O formalismo de Utiyama vale para todos os grupos de transformação semi-simples e, em particular, para o grupo $SU(2)$ da teoria de Yang-Mills. Ainda sim, Pauli fez duras críticas por conta de ausência de massa dos campos de Yang-Mills (O´RAIFEARTAIGH, 1997). Posteriormente, se descobriu que temos campos de gauge massivos na natureza, como os bosones da interação fraca Z^0, $W^{\pm}$. Isso traçe a motivação para estudar campos de gauge massivos. A aplicação do mecanismo de Stueckelberg para o caso $SU(2)$ foi implementada com relativo sucesso (YANG, 1954; KUNIMASA, 1967), mas não é tão imediata como no caso do grupo $U(1)$ (RUEGG, 2004; GRACIA-BONDIA, 2008). Stueckelberg introduziu um campo escalar B para manter invariante de gauge local, o Lagrangiano de um campo vetorial com massa para o caso $U(1)$. Para o caso $SU(2)$, um campo ω_μé necessário.

De fato, um ponto delicado a se estudar no caso não abeliano é a possibilidade de introduzir o campo de Stueckelberg como o gradiente de um campo escalar massivo na versão infinitesimal das transformações de grupo locais. Isso é importante porque a teoria de Utiyama faz uso de transformações de gauge no nível infinitesimal (GRACIA-BONDIA, 2008). Ao estudar a compatibilidade do mecanismo de Stueckelberg e do formalismo de Utiyama para o grupo $SU(2)$, preparamos o terreno para uma teoria Stueckelberg-Utiyama para casos não abelianos gerais, isso constitui uma extensão da teoria de Utiyama para campos vetoriais com grupos de transformações gerais. Em um trabalho futuro, pretendemos estudar também a interação gravitacional com a fusão das propostas de Stueckelberg e Utiyama.

Capítulo 2

Teoria Geral de Utiyama

Neste capítulo, vamos fazer uma revisão da teoria de Utiyama, supondo que o Lagrangiano do sistema físico só depende do campo e das primeiras derivadas do campo. Assim, estudamos o caso de transformação de gauge global, com parâmetros de transformação constante, depois estudamos o caso geral, transformação de gauge local, com parâmetros que dependem do espaço-tempo (UTIYAMA, 1956; ACEVEDO, 2018).

2.1 Invariância local, o campo A e a prescrição de acomplamento mínimo

Vamos lembrar primeiro o princípio básico da mecânica clássica para um sistema de N partículas no formalismo Lagrangiano. O sistema tem $3N$ graus de liberdade e é descrito pelo conjunto de coordenadas generalizadas, que são funções do tempo (LANDAU, 1992):

$$q_i = q_i(t), \qquad i = 1, 2, 3, ..., N. \tag{2.1}$$

Definam-se as velocidades generalizadas como:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}(t), \tag{2.2}$$

assim para poder-se fazer estudo de um sistema físico qualquer, definimos uma função L (conhecida na literatura como função Lagrangiano) que depende das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas e possivelmente do tempo (se o sistema físico não é conservativo), que usualmente para o caso conservativo está descrito como:

$$L = L(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(q), \tag{2.3}$$

que é energia cinética menos a energia potencial. Tendo essa informação do Lagrangiano (em essência, da sua dependência explícita), podemos definir a ação S como:

$$S = \int_{t_{in}}^{t_{fi}} L(q,\dot{q}) dt. \tag{2.4}$$

O princípio de mínima ação estabelece que a trajetória do sistema entre um estado inicial $q_{in} = q(t_{in})$ e outro final $q_{fi} = q(t_{fi})$ fixos é um extremo (geralmente um mínimo) da ação, assim temos que:

$$\delta S = \delta \int_{t_{in}}^{t_{fi}} L(q,\dot{q}) dt = \int_{t_{in}}^{t_{fi}} \delta L(q,\dot{q}) dt = 0, \tag{2.5}$$

onde essa variação δ é um tipo de diferencial que age no Lagrangiano através das coordenadas e as velocidades generalizadas, então:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}(\delta q_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\delta \dot{q}_i) \right]$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}(\delta q_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) \right].$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}(\delta q_i) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)(\delta q_i) \right].$$

Inserindo na equação 2.5, e trocando a ordem das operações de soma e de integração:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{in}}^{t_{fi}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right](\delta q_i) dt + \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_{in}}^{t_{fi}}$$

O último termo é iguail a zero, posto que os pontos extremos são fixos e sua variação é nula. Logo:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{in}}^{t_{fi}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right](\delta q_i) dt = 0.$$

Para satisfazer o princípio de mínima ação, os termos que estão na integral devem ser zero. Como a variação das coordenadas generalizadas são diferentes de zero, temos que:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0. \tag{2.6}$$

A equação 2.6 nos dá as equações de movimento para cada coordenada generalizada do sistema físico, conhecida como equação de Euler-Lagrange. Agora vamos supor que temos um sistema com um número infinito de graus de liberdade, meio contínuo. Nesse caso o sistema físico está descrito pelos campos de matéria $\phi^A(x)$, onde $x = x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3$ representa coordenadas de espaço-tempo,

$$q_i(t) \rightarrow \phi^A(t, \vec{r}) = \phi^A(x), \tag{2.7}$$

com $A = 1, 2, 3, ..., N$. A dinâmica do sistema está descrita pelo Lagrangiano,

$$L = \int d^3x \mathcal{L}_M \left[\phi^A, \partial_\mu \phi^A\right], \tag{2.8}$$

onde $\mathcal{L}_M$ é conhecida na literatura como densidade Lagrangiana, que agora em diante chamaremos só de Lagrangiano. A ação é:

$$S = \int L dt = \int d^4x \mathcal{L}_M \left[\phi^A, \partial_\mu \phi^A\right]. \tag{2.9}$$

Do princípio de mínima ação, como no caso clássico, temos:

$$\delta \mathcal{L}_M \left[\phi^A, \partial_\mu \phi^A\right] = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A}\left(\delta \phi^A\right) + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} \delta\left(\partial_\mu \phi^A\right) = 0. \tag{2.10}$$

Lembrando que:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} \delta \phi^A\right) = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)}\right) \delta \phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} \delta\left(\partial_\mu \phi^A\right),$$

substituindo na equação (2.10), temos:

$$\delta \mathcal{L}_M \left[\phi^A, \partial_\mu \phi^A\right] = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A}\left(\delta \phi^A\right) + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} \delta \phi^A\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)}\right) \delta \phi^A. \tag{2.11}$$

Substituindo (2.11) e usando o princípio de mínima ação na equação (2.9), temos:

$$\delta S = \int d^4x \left[\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} \delta \phi^A\right)\right] + \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A}\left(\delta \phi^A\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)}\right) \delta \phi^A\right] = 0.$$

No primeiro termo usamos o teorema de Ostrogradski-Gauss,

$$\int_{\Omega} d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \left(\partial_\mu \phi^A\right)} \delta\phi^A\right)\right] = \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \left(\partial_\mu \phi^A\right)} \delta\phi^A.$$

Temos que na fronteira do domínio Ω os valores dos campos de matéria são fixos, então as variações $\delta\phi^A$ anulam-se na fronteira, assim:

$$\oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \left(\partial_\mu \phi^A\right)} \delta\phi^A = 0.$$

A variação da ação fica:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \left(\partial_\mu \phi^A\right)}\right)\right] \delta\phi^A = 0,$$

como o princípio de mínima ação e válida para qualquer campo, temos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \left(\partial_\mu \phi^A\right)}\right) = 0. \tag{2.12}$$

Como vimos na equação (2.12), a forma $\delta\phi^A \neq 0$, chamada de transformação dos campos de matéria, basicamente são transformações infinitesimais dos campos de matéria com respeito a parâmetros de transformação que agem nas funções dos campos, mas não nas coordenadas (isto não sugere que sejam só constantes, para um caso geral podemos ter parâmetros que sejam funções do espaço-tempo). Assim, vamos supor que cada campo de matéria transforma-se como:

$$\begin{gathered} \phi^A \to \phi^A + \delta\phi^A \\ \delta\phi^A = \epsilon^a I^A_{(a)B} \phi^B \\ \epsilon^a = \text{constante} \qquad (a = 1, 2, ..., n) \\ I^A_{(a)_B} = \text{coeficiente constante.} \end{gathered} \tag{2.13}$$

Ademais, assumimos a transformação (2.13) como correspondente a um grupo de Lie G_n dependente dos n parâmetros ϵ^a, onde as contantes $I_{(a)}$ são conhecidas como geradores das transformações na representação dos campos ϕ^A. A forma funcional de $\delta\phi^A$ é uma combinação bilinear de ϵ^a e ϕ^A, ou seja, é escolhida como linear nessas duas quantidades. Deve haver um conjunto de constantes f^c_{ab} independentes da representação chamadas constantes de estrutura, que são definidas pelas relações de comutação dos geradores $I_{(a)}$.

$$\left[I_{(a)}, I_{(b)}\right]^{A}_{\ B} = I^{A}_{(a)C} I^{C}_{(b)B} - I^{A}_{(b)C} I^{C}_{(a)B} = f^{c}_{ab} I^{A}_{(c)B}. \tag{2.14}$$

As constantes satisfazem uma regra de ciclicidade:

$$f^{m}_{ab} f^{l}_{mc} + f^{m}_{bc} f^{l}_{ma} + f^{m}_{ca} f^{l}_{mb} = 0, \tag{2.15}$$

pela identidade de Jacobi,

$$\left[\left[I_{(a)}, I_{(b)}\right], I_{(c)}\right]^{A}_{\ B} + \left[\left[I_{(b)}, I_{(c)}\right], I_{(a)}\right]^{A}_{\ B} + \left[\left[I_{(c)}, I_{(a)}\right], I_{(b)}\right]^{A}_{\ B} = 0. \tag{2.16}$$

Além disso, tem a propriedade de antissimetria (usando 2.14):

$$f^{c}_{ab} = -f^{c}_{ba}. \tag{2.17}$$

O grupo G_n é dito abeliano se suas constantes de estrutura são nulas, $f^{c}_{ab} = 0$, e seus geradores de transformação $I^{A}_{(a)B}$ comutam. Caso contrário, se $f^{c}_{ab} \neq 0$, o grupo de Lie é denominado não-abeliano.

Admitindo que a ação $S[\phi]$ é invariante pela transformação infinitesimal no campo (2.13) em qualquer domínio Ω do espaço-tempo, temos que:

$$\delta \mathcal{L}_M = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} \delta \phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \delta\left(\partial_\mu \phi^A\right) = 0. \tag{2.18}$$

Posto que a ação têm que manter-se invariante, além disso deve ser válido para qualquer ponto do espaço-tempo, e mais, esta relação independe do comportamento de ϕ^A e $\partial_\mu \phi^A$, $\delta \mathcal{L}_M = 0$ qualquer que seja o caráter do campo (escalar, vetorial, espinorial, etc.). Levando em conta que os ϵ^a são independentes (uns dos outros para cada valor de a) e diferentes de zero, da equação (2.18) temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} \delta \phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \partial_\mu \left(\delta \phi^A\right) = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} \epsilon^a I^{A}_{(a)B} \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \partial_\mu \left(\epsilon^a I^{A}_{(a)B} \phi^B\right) = 0.$$

Assumimos lícita a troca da ordem na operação variação δ pela derivação ordinária ∂. As transformações de gauge na lei (2.13) não afetam as coordenadas, chamadas transformações internas, com parâmetros constantes.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} I^{A}_{(a)B} \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} I^{A}_{(a)B} \partial_\mu \phi^B = 0. \tag{2.19}$$

Reescrevemos (2.18) e tendo em conta (**??**):

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)}\right)\right] \delta\phi^A + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \delta\phi^A\right] = 0.$$

A equação de campo (2.6) deve ser satisfeita. Usando a lei de transformação (2.13), temos que:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \epsilon^a I^A_{(a)B} \phi^B\right] = \epsilon^a \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B} \phi^B\right] = 0.$$

Da independência dos parâmetros, deve-se cumprir:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B} \phi^B\right] = 0.$$

Definindo a corrente de conservação:

$$J^\mu_a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B} \phi^B, \tag{2.20}$$

o resultado de acima pode ser escrito como:

$$\partial_\mu J^\mu_a = 0,$$

as quais são equações de continuidade, para os campos de matéria, lembrando que os parâmetros de transformação são constantes e independentes.

Agora para fazer uma generalização do grupo G_n, os parâmetros da transformação são funções que dependem de cada ponto do espaço-tempo, grupo $G_{\infty n}$,

$$\begin{aligned} \delta\phi^A(x) &= \epsilon^a(x) I^A_{(a)B} \phi^B \\ I^A_{(a)B} &= \text{coeficiente constante} \\ \epsilon^a &= \epsilon^a(x) \qquad (a = 1, 2, ..., n). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Neste caso:

$$\begin{aligned} \delta\left(\partial_\mu \phi^A\right) &= \partial_\mu \left(\delta\phi^A\right) = \partial_\mu \left(\epsilon^a(x) I^A_{(a)B} \phi^B\right) \\ \partial_\mu \left(\delta\phi^A\right) &= \epsilon^a(x) I^A_{(a)B} \partial_\mu \phi^B + \partial_\mu \epsilon^a(x) I^A_{(a)B} \phi^B, \end{aligned} \tag{2.22}$$

a variação da densidade lagrangiana é:

$$\delta\mathcal{L}_M = \epsilon^a(x)\left[\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A}I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\partial_\mu\phi^B\right] + \partial_\mu\epsilon^a(x)\left[\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B\right].$$

O termo que acompanha $\epsilon^a(x)$ é nulo sob a hipótese de que (2.19) continue válida mesmo que $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$ e, consequentemente,

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B\partial_\mu\epsilon^a(x). \tag{2.23}$$

Vemos, então que a variação $\delta\mathcal{L}_M$ com respeito ao grupo de movimentos mais geral $G_{\infty n}$ não se anula: $\mathcal{L}_M\left[\phi^A, \partial_\mu\phi^A\right]$ carrega sempre um termo cinético, os geradores $I^A_{(a)B}$ são não-nulos para que existam transformações, as derivadas de $\epsilon^a(x)$ são não nulas por hipótese.

Uma forma de preservar a invariância da densidade lagrangiana $\mathcal{L}_M$ sob (2.21), forçando $\delta\mathcal{L}_M \equiv 0$, é introduzir um novo conjunto de campos:

$$A'^J(x),$$

onde $J = 1, 2, ..., M$, que transforma-se como:

$$\delta A'^J(x) = \epsilon^a(x)U^J_{(a)K}A'^K(x) + \frac{1}{g}C^{J\mu}_a\partial_\mu\epsilon^a(x), \tag{2.24}$$

na esperança de que este procedimento cancele o segundo membro de (2.23). De fato, o segundo termo no lado direito do *ansatz* para $\delta A'^J$ vai com $\partial_\mu\epsilon^a(x)$, mesmo fator que aparece em (2.23), a equação (2.24) g é um parâmetro que caracteriza a intensidade da dependência dos campos compensadores A'^J e os coeficientes U e C são constantes a serem determinadas, o intervalo de valores assumidos pelo indice J, será determinado a seguir sob a exigência de invariância da teoria.
Ao inserir o campo auxiliar $A'^J(x)$ na teoria, passamos para a nova densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}'_M\left[\phi^A(x), \partial_\mu\phi^A(x), A'^J(x)\right]. \tag{2.25}$$

Não há necessidade de inserir a dependência da derivada do conjunto de campos compensadores $\partial_\nu A'^J$ em $\mathcal{L}'_{M(x)}$ pois a regra de transformação desse campo, depende explicitamente da derivada parcial dos parâmetros $\epsilon^a(x)$, termo que é suficiente para manter a invariância de gauge.

Postulemos que a ação construída a partir de $\mathcal{L}'_M$:

$$S'\left[\phi, A'\right] = \int_\Omega d^4x\mathcal{L}'_M(x),$$

seja invariante sobre a transformação (2.24), isto significa que:

$$\delta \mathcal{L'}_M = \frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial \phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)}\delta(\partial_\mu\phi^A) + \frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^J}\delta A'^J = 0.$$

Substituindo as regras de transformação (2.21), (2.22) e (2.24), e separando termos,

$$\epsilon^a(x)\left[\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial \phi^A} I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B}\partial_\mu\phi^B + \frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^J} U^J_{(a)K}A'^K\right]$$
$$+\partial_\mu \epsilon^a(x)\left[\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^J} C^{J\mu}_a\right] = 0.$$

Lembramos que os parâmetros $\epsilon^a(x)$ são arbitrários, isto nos permite escolhê-las de maneira que $\epsilon^a(x)$ e suas derivadas $\partial_\mu\epsilon^a(x)$ sejam independentes, cada coeficiente de ϵ^a e $\partial_\mu\epsilon^a$ deve anular-se independentemente, gerando o sistema de *equações hierárquicas* funcionais para o sistema $\mathcal{L'}_M(\phi, \partial_\mu\phi, A')$:

$$\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial \phi^A} I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B}\partial_\mu\phi^B + \frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^J} U^J_{(a)K}A'^K = 0 \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^J} C^{J\mu}_a = 0. \tag{2.27}$$

No caso do grupo de gauge global ($\epsilon^a = constante$) a equação (2.27) não aparece e a equação (2.26) tem o mesmo significado da condição de invariância de gauge global (2.19), na verdade (2.27) reduz-se à (2.19) quando $\mathcal{L'}_M$ passa à $\mathcal{L}_M$ para a qual $\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A'^J} = 0$.
Lembramos que os diversos índices das equações (2.26) e (2.27) assumem os valores $J = 1, 2, ..., N$ (índice de contagem para o número de componentes do potencial de gauge A'), $\mu = 0, 1, 2, 3$ (índice das coordenadas do espaço-tempo), $a = 1, 2, ..., n$ (índice de contagem do número de parâmetros de gauge ϵ^a). Assim a equação (2.27) pode ser posta em forma matricial, para isso resolvemos a somatória com respeito ao índice J:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^1} C^{1\mu}_a + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^2} C^{2\mu}_a + ... + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^N} C^{N\mu}_a = -\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B}\phi^B,$$

temos que para cada índice do espaço-tempo,

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^1} C^{10}_a + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^2} C^{20}_a + ... + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial A'^N} C^{N0}_a = -\frac{\partial \mathcal{L'}_M}{\partial(\partial_0 \phi^A)} I^A_{(a)B}\phi^B$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^1}C_a^{11}+\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^2}C_a^{21}+...+\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^N}C_a^{N1} &= -\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_1\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B \\
\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^1}C_a^{12}+\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^2}C_a^{22}+...+\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^N}C_a^{N2} &= -\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_2\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B \\
\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^1}C_a^{13}+\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^2}C_a^{23}+...+\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^N}C_a^{N3} &= -\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_3\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B.
\end{aligned}
$$

Para cada índice a temos:

$$
\begin{array}{lllll}
\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^1}C_1^{10}+ & \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^2}C_1^{20}+ & ... & +\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^N}C_1^{N0} & = -\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_0\phi^A)}I^A_{(1)B}\phi^B \\
\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^1}C_1^{11}+ & \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^2}C_1^{21}+ & ... & +\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^N}C_1^{N1} & = -\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_1\phi^A)}I^A_{(1)B}\phi^B \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^1}C_n^{12}+ & \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^2}C_a^{22}+ & ... & +\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^N}C_n^{N2} & = -\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_2\phi^A)}I^A_{(n)B}\phi^B \\
\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^1}C_n^{13}+ & \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^2}C_n^{23}+ & ...+ & \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^N}C_n^{N3} & = -\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_3\phi^A)}I^A_{(n)B}\phi^B,
\end{array}
$$

obtemos a forma de martiz:

$$
\frac{1}{g}\begin{bmatrix} C_1^{10} & C_1^{20} & ... & C_1^{N0} \\ C_1^{11} & C_1^{21} & ... & C_1^{N1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_n^{12} & C_n^{22} & ... & C_n^{N2} \\ C_n^{13} & C_n^{23} & ... & C_n^{N3} \end{bmatrix}_{4n\times N}
\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^{N-1}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^N} \end{bmatrix}_{N\times 1}
= -\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_0\phi^A)}I^A_{(1)B}\phi^B \\ \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_1\phi^A)}I^A_{(1)B}\phi^B \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_2\phi^A)}I^A_{(n)B}\phi^B \\ \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_3\phi^A)}I^A_{(n)B}\phi^B. \end{bmatrix}_{4n\times 1}
\tag{2.28}
$$

Para que a nova densidade Lagrangiana $\mathcal{L}'_M(\phi, \partial\phi, A')$ possa ser determinada univocamente, em virtude de (2.28), exige-se que a matriz $[C]_{4n\times N}$ seja quadrada e inversível (não-singular). Então temos que o número de campos A'_J que deve ser agregado à teoria original é:

$$N = 4n.$$

O que significa que são necessários quatro campos auxiliares para cada parâmetro de transformação ou equivalentemente um campo auxiliar de quatro componentes para cada parâmetro. Da condição de inversibilidade (não-singularidade) de $[C]_{4n\times N}$ temos que:

$$\left[C^{-1}\right]_{N\times 4n}[C]_{4n\times N}=I_{N\times N}$$
$$[C]_{4n\times N}\left[C^{-1}\right]_{N\times 4n}=I_{4n\times 4n},$$

onde $I_{N\times N}$ é a matriz identidade $N\times N$. Em termos das componentes de matriz:

$$C_a^{J\mu}(C^{-1})^a_{\mu K}=\delta^J_K$$
$$(C^{-1})^a_{\mu J}C_b^{J\nu}=\delta^a_b\delta^\nu_\mu. \tag{2.29}$$

Defina-se o *potencial de gauge* $A^a_\mu(x)$ correspondente ao parâmetro $\epsilon^a_{(x)}$ em termos desses elementos de matriz e de A'^J:

$$A^a_\mu(x)\equiv(C^{-1})^a_{\mu J}A'^J(x). \tag{2.30}$$

Já que o índice $\mu=0,1,2,3$ de C é um índice vetorial, $A^a_\mu(x)$ é de natureza vetorial. Isso explica a terminologia potencial-vetor usado para $A^a_\mu(x)$. Da equação (2.30),

$$A'^J=C_a^{J\mu}A^a_\mu, \tag{2.31}$$

então,

$$\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A^a_\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}\frac{\partial A'^J}{\partial A^a_\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}\frac{\partial}{\partial A^a_\mu}\left(C_b^{J\nu}A^b_\nu\right)=\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}\left(C_b^{J\nu}\delta^\mu_\nu\delta^b_a\right)=\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}C_a^{J\mu}.$$

Com o que reescrevemos a segunda das equações hierárquicas, equação (2.27).

$$\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B+\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A^a_\mu}=0. \tag{2.32}$$

Defina-se a seguinte quantidade:

$$\nabla_\mu\phi^A\equiv\partial_\mu\phi^A-gA^b_\mu I^A_{(b)B}\phi^B, \tag{2.33}$$

ou,

$$\nabla_\mu\phi^A=\partial_\mu\phi^A-gI^A_{(b)B}\phi^B(C^{-1})^b_{\mu J}A'^J, \tag{2.34}$$

denominada **derivada covariante**. Ademais, a forma (2.33) sugere que a constante g é uma medida da *intensidade* com o que o campo de gauge A^a_μ **interage** com o campo de materia ϕ^A, ambos aparecem no segundo termo do lado direito da equação. Por essa razão, g é chamada *constante de acoplamento*.

A equação (2.33) verifica (2.32). De fato:

$$\mathcal{L}'_M\left[\phi^A, \partial_\mu\phi^A, A^a_\mu\right] = \mathcal{L}''_M\left[\phi^A, \nabla_\mu\phi^A\right]. \tag{2.35}$$

Calculamos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} = \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\nu\phi^D)}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\left[\partial_\nu\phi^D - gA^b_\nu I^D_{(b)C}\phi^C\right] = \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\nu\phi^D)}\delta^D_A\delta^\mu_\nu,$$

assim,

$$\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} = \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)},$$

avalie-se:

$$\frac{\mathcal{L}'_M}{\partial A^a_\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\nu\phi^D)}\frac{\partial}{\partial A^a_\mu}\left[\partial_\nu\phi^D - gA^b_\nu I^D_{(b)C}\phi^C\right] = -g\frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\nu\phi^D)}I^D_{(b)C}\phi^C\delta^b_a\delta^\mu_\nu$$

$$\frac{\mathcal{L}'_M}{\partial A^a_\mu} = -g\frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^D)}I^D_{(a)C}\phi^C,$$

substituindo em (2.32).

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B - \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^D)}I^D_{(a)C}\phi^C = \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B - \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B = 0,$$

cumprindo com equação (2.32). Vamos a expressar a lei de transformação (2.24) para $\delta A'^J$ em termos de A^a_μ. Substituindo (2.31) em (2.24),

$$\delta(C^{J\alpha}_c A^c_\alpha) = \epsilon^a(x)U^J_{(a)K}C^{K\alpha}_c A^c_\alpha + \frac{1}{g}C^{J\mu}_a\partial_\mu\epsilon^a(x),$$

atuando os coeficientes constantes $(C^{-1})^d_{\nu J}$ pela esquerda, definimos:

$$S^{d\alpha}_{(a)\nu c} = (C^{-1})^d_{\nu J}U^J_{(a)K}C^{K\alpha}_c, \tag{2.36}$$

logo,

$$\delta(A^d_\nu) = \epsilon^a(x)S^{d\alpha}_{(a)\nu c}A^c_\alpha + \frac{1}{g}\partial_\nu\epsilon^d(x), \tag{2.37}$$

e trocamos o problema de encontrar as constantes $U^J_{(a)K}$ e $C^{K\alpha}_c$ para o de determinar apenas $S^{d\alpha}_{(a)\nu c}$.

Introduzida $\mathcal{L}''_M\left[\phi^A, \nabla_\mu\phi^A\right]$, nosso interesse passa ser o estudo da sua invariância,

$$\delta\mathcal{L}''_M = \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial\phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}\delta(\nabla_\mu\phi^A) = 0. \tag{2.38}$$

Calculemos a variança do novo objeto $\nabla_\mu\phi^A$, usando a equação (2.33).

$$\delta(\nabla_\mu\phi^A) \equiv \delta\left(\partial_\mu\phi^A - gA^b_\mu I^A_{(b)B}\phi^B\right) = \delta\left(\partial_\mu\phi^A\right) - g\delta\left(A^b_\mu\right)I^A_{(b)B}\phi^B - gA^b_\mu I^A_{(b)B}\delta\left(\phi^B\right)$$

Usando as equações (2.21), (2.22) e (2.37):

$$\delta(\nabla_\mu\phi^A) = \epsilon^a(x)I^A_{(a)B}\partial_\mu\phi^B + \partial_\mu\epsilon^a(x)I^A_{(a)B}\phi^B$$

$$-g\epsilon^a(x)S^{b\nu}_{(a)\mu c}A^c_\nu I^A_{(b)B}\phi^B - \partial_\mu\epsilon^b(x)I^A_{(b)B}\phi^B - g\epsilon^a(x)A^b_\mu I^A_{(b)B}I^B_{(a)C}\phi^C,$$

trocando $a \to b$ no segundo termo, obtemos:

$$\delta(\nabla_\mu\phi^A) = \epsilon^a(x)I^A_{(a)B}\partial_\mu\phi^B - g\epsilon^a(x)S^{b\nu}_{(a)\mu c}A^c_\nu I^A_{(b)B}\phi^B - g\epsilon^a(x)A^b_\mu I^A_{(b)B}I^B_{(a)C}\phi^C.$$

Usamos a equação (2.14) para mudar o terceiro termo,

$$\left[I_{(a)}, I_{(b)}\right]^A_C = I^A_{(a)B}I^B_{(b)C} - I^A_{(b)B}I^B_{(a)C} = f^c_{ab}I^A_{(c)C} \Rightarrow -I^A_{(b)B}I^B_{(a)C} = f^c_{ab}I^A_{(c)C} - I^A_{(a)B}I^B_{(b)C}.$$

Substituindo,

$$\delta(\nabla_\mu\phi^A) = \epsilon^a(x)I^A_{(a)B}\left[\partial_\mu\phi^B - gA^b_\mu I^B_{(b)C}\phi^C\right] + g\epsilon^a(x)\left[A^b_\mu f^c_{ab}I^A_{(c)B} - S^{b\nu}_{(a)\mu c}A^c_\nu I^A_{(b)B}\right]\phi^B.$$

Trocando os índices $b \to c$ e $c \to b$ no último termo, ademais da propriedade do delta Kronecker, temos:

$$\delta(\nabla_\mu\phi^A) = \epsilon^a(x)I^A_{(a)B}\nabla_\mu\phi^B + g\epsilon^a(x)\left[f^c_{ab}\delta^\nu_\mu - S^{c\nu}_{(a)\mu b}\right]A^b_\nu I^A_{(c)B}\phi^B. \tag{2.39}$$

Inserindo (2.39) em (2.38):

$$\delta\mathcal{L}''_M = \epsilon^a(x)\left[\frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial\phi^A}I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}\left[I^A_{(a)B}\nabla_\mu\phi^B + g\left(f^c_{ab}\delta^\nu_\mu - S^{c\nu}_{(a)\mu b}\right)A^b_\nu I^A_{(c)B}\phi^B\right]\right],$$

como esta equação deve valer para todo x e ϵ^a são funções arbitrárias independentes, então:

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial\phi^A}I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\nabla_\mu\phi^B + g\frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}\left(f^c_{ab}\delta^\nu_\mu - S^{c\nu}_{(a)\mu b}\right)A^b_\nu I^A_{(c)B}\phi^B = 0. \tag{2.40}$$

A equação (2.40) tem semelhança com a equação de movimento (2.19),

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B}\partial_\mu \phi^B = 0, \tag{2.41}$$

derivada para o caso em que G_n é o grupo de transformações (com ϵ^a constantes) atuando sobre o sistema de campos $\phi^A(x)$ caracterizado pela densidade lagrangiana $\mathcal{L}_M[\phi^A, \partial_\mu \phi^A]$. Temos em conta que $S^{c\nu}_{(a)\mu b}$ é uma constante a ser determinada e poderia ser escolhida para anular o terceiro termo de (2.40). Espera-se que uma teoria mais geral seja capaz de reproduzir os resultados da teoria particular, então os resultados de análise da invariância de $\mathcal{L}_M[\phi^A, \partial_\mu \phi^A]$ sob ação do grupo G_n devem ser recuperados em algum limite apropriado dos resultados encontrados pelo estudo da invariância do mesmo sistema $\phi^A(x)$ sob o grupo mais geral $G_{\infty n}$ em que $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$. A geralização em nosso procedimento consistiu da introdução do campo A^a_μ. Agora temos que considerar o comportamento de $\mathcal{L}''{}_M$ no limite em que o potencial A^a_μ é nulo, então,

$$\nabla_\mu \phi^A \to \partial_\mu \phi^A \quad (A^a_\mu \to 0) \ ,$$

e portanto:

$$\mathcal{L}''{}_M[\phi^A, \nabla_\mu \phi^A] \to \mathcal{L}''{}_M[\phi^A, \nabla_\mu \phi^A] = \mathcal{L}'{}_M[\phi^A, \partial_\mu \phi^A, A^a_\mu \to 0] = \mathcal{L}_M[\phi^A, \partial_\mu \phi^A].$$

Voltamos às variáveis iniciais de descrição do sistema ϕ e $\partial\phi$. Dada a identificação entre $\nabla\phi$ e $\partial\phi$ para $A^a_\mu \to 0$.

$$\mathcal{L}''{}_M[\phi^A, \nabla_\mu \phi^A] = \mathcal{L}_M[\phi^A, \nabla_\mu \phi^A] \quad (A^a_\mu \to 0). \tag{2.42}$$

Se entendemos esta identificação além do limite mencionado obtemos uma *prescrição de acoplamento mínimo:* ao introduzir o campo A^a_μ a interagir com ϕ^A devemos substituir a derivada ordinária $\partial_\mu \phi^A$ na densidade lagrangiana $\mathcal{L}_M[\phi^A, \partial_\mu \phi^A]$ pelo objeto $\nabla_\mu \phi^A$. Dizendo de outra forma, a "interpretação teórica da interação" é a prescrição:

$$\partial_\mu \phi^A \overset{int}{\to} \nabla_\mu \phi^A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{M+int}[\phi^A, \nabla_\mu \phi^A] \equiv \mathcal{L}''{}_M[\phi^A, \nabla_\mu \phi^A] = \mathcal{L}_M[\phi^A, \nabla_\mu \phi^A]. \tag{2.43}$$

A importância desta descrição é a fixação de covariância de $\nabla_\mu \phi^A$, aplicando a regra $\partial_\mu \phi^A \to \nabla_\mu \phi^A$ à (2.19) segue:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial \phi^A} I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B}\nabla_\mu \phi^B = 0. \tag{2.44}$$

Substituindo (2.43) em (2.40),

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial \phi^A} I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B}\nabla_\mu \phi^B + g\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\left(f^c_{ab}\delta^\nu_\mu - S^{c\nu}_{(a)\mu b}\right) A^b_\nu I^A_{(c)B}\phi^B = 0,$$

temos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\left(f^c_{ab}\delta^\nu_\mu - S^{c\nu}_{(a)\mu b}\right) A^b_\nu I^A_{(c)B}\phi^B = 0.$$

Então os coeficientes $S^{c\nu}_{(a)\mu b}$ desconhecidos ficam determinados,

$$S^{c\nu}_{(a)\mu b} = f^c_{ab}\delta^\nu_\mu. \tag{2.45}$$

Substituindo (2.45) em (2.39) fica explícito o caráter covariante da derivada $\nabla_\mu \phi^A$:

$$\delta(\nabla_\mu \phi^A) = \epsilon^a(x) I^A_{(a)B}\nabla_\mu \phi^B. \tag{2.46}$$

Na equação (2.37),

$$\delta(A^d_\mu) = \epsilon^a(x) f^d_{ab} A^b_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^d(x), \tag{2.47}$$

obtendo a regra de transformação do campo de gauge em função da constante de estrutura do grupo de transformações.

2.2 Densidade Lagrangiana para o potencial A livre

Nesta seção vamos fazer o estudo do Lagrangiano para os campos de gauge (UTIYAMA, 1956; GRACIA-BONDIA, 2008). Assumiremos que a densidade Lagrangiana $\mathcal{L}_A$ contém até derivadas de primeira ordem de A^a_μ, assim:

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A[A^a_\mu, \partial_\nu A^a_\mu],$$

onde:

$$\partial_\nu A^a_\mu = \frac{\partial A^a_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Esta densidade Lagrangiana é invariante pela transformação para o potencial A^a_μ, então:

$$\delta \mathcal{L}_A = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu}\delta A^a_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)}\delta(\partial_\nu A^a_\mu) = 0,$$

e como:

$$\delta A^a_\mu = \epsilon^c f^a_{cb} A^b_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a, \tag{2.48}$$

tendo em conta que os parâmetros ϵ^a são funções que dependem do espaço-tempo,

$$\delta(\partial_\nu A^a_\mu) = \partial_\nu \epsilon^c f^a_{cb} A^b_\mu + \epsilon^c f^a_{cb} \partial_\nu A^b_\mu + \frac{1}{g}\partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a,$$

substituindo na expressão 2.48 e reunindo os termos que contém os parâmetros de transformação, as derivadas primeiras dos parâmetros e as derivadas de segunda ordem dos parametros, temos:

$$\epsilon^c \left[\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu} f^a_{cb} A^b_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} f^a_{cb} \partial_\nu A^b_\mu\right] + \partial_\mu \epsilon^c \left[\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^c_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} f^a_{cb} A^b_\nu\right] + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a = 0.$$

No termo que contém as derivadas de segunda ordem dos parâmetros das transformações, para garantir a simetria com respeito à troca de $\mu \longrightarrow \nu$, fazemos:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a = \frac{1}{2g}\partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a \left[\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)}\right].$$

Como as derivadas dos parâmetros da transformação devem ser independentes, então as quantidades dentro dos colchetes têm que ser zero, para cumprir a equação, assim obtemos as equações hierárquicas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu} f^a_{cb} A^b_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} f^a_{cb} \partial_\nu A^b_\mu = 0 \tag{2.49}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^c_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} f^a_{cb} A^b_\nu = 0 \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} = 0. \tag{2.51}$$

A última das equações hierárquicas (2.51) estabelece que as derivadas de A^a_μ deve estar contida em $\mathcal{L}_A$ através da combinação:

$$A^a_{[\mu,\nu]} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu. \tag{2.52}$$

Em termos deste novo objeto,

$$\mathcal{L}_A \left[A^a_\mu, \partial_\nu A^a_\mu\right] = \mathcal{L'}_A \left[A^a_\mu, A^a_{[\mu,\nu]}\right],$$

e aplicando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^d_{[\alpha,\beta]}}\frac{\partial A^d_{[\alpha,\beta]}}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)},$$

onde o fator 1/2 foi introduzido para dar cabo da dupla contagem de termos idênticos (já que o novo objeto é antisimétrico com respeito à troca $\mu \to \nu$, $A^a_{[\mu,\nu]} = -A^a_{[\nu,\mu]}$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^d_{[\alpha,\beta]}}\left[\delta^d_a\delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta - \delta^d_a\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{[\nu,\mu]}} - \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{[\mu,\nu]}}\right].$$

Por antissimetria, temos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{[\nu,\mu]}} + \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{[\nu,\mu]}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{[\nu,\mu]}}, \tag{2.53}$$

substituindo em (2.51):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{[\nu,\mu]}} + \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{[\mu,\nu]}} = \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{[\nu,\mu]}} - \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{[\nu,\mu]}} = 0.$$

Com o que realmente verificamos (2.51). Agora reescrevemos a segunda equação hierárquica (2.50),

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^c_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_{[\mu,\nu]}} f^a_{cb}A^b_\nu = 0. \tag{2.54}$$

Novamente pelo mesmo argumento aplicado em (2.52), a derivada de A^a_μ aparece em $\mathcal{L}'_A$ somente através da combinação:

$$\mathcal{F}^a_{\mu\nu} \equiv A^a_{[\mu,\nu]} - g f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu, \tag{2.55}$$

o objeto $\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$ chamado tensor intensidade de campo, é antissimetrico nos índices de espaço-tempo, no terceiro termo da equação temos:

$$f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu = \frac{1}{2}\left[f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu - f^a_{bc}A^c_\mu A^b_\nu\right] = \frac{1}{2}f^a_{bc}\left[A^b_\mu A^c_\nu - A^b_\nu A^c_\mu\right],$$

onde passamos a antissimetria das constantes de estrutura ao par $A^b_\mu A^c_\nu$ Portanto:

$$\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - \frac{1}{2}g f^a_{bc}\left(A^b_\mu A^c_\nu - A^b_\nu A^c_\mu\right), \tag{2.56}$$

tal que:

$$\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = -\mathcal{F}^a_{\nu\mu}.$$

Tendo definido este novo objeto, passamos a escrever:

$$\mathcal{L}'_A \left(A^a_\mu, A^a_{[\mu\nu]}\right) = \mathcal{L}''_A \left(A^a_\mu, \mathcal{F}^a_{\mu\nu}\right).$$

Com esta identificação, observamos que $\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$ verifica a segunda das equações hierárquicas na forma (2.54). Primeiro, temos, usando a equação (2.55), que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial \mathcal{F}^d_{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathcal{F}^d_{\alpha\beta}}{\partial A^a_\mu} \mid_A + \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial A^a_\mu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_\mu} = -g\frac{1}{2}\left[f^d_{an}\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial \mathcal{F}^d_{\mu\beta}}A^n_\beta + f^d_{ma}\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial \mathcal{F}^d_{\alpha\mu}}A^m_\alpha\right] \mid_A + \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial A^a_\mu} \mid_F,$$

trocando $\alpha \to \beta$ no segundo termo da equção, tendo em conta que $\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = -\mathcal{F}^a_{\nu\mu}$ e $f^a_{bc} = -f^a_{cb}$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_\mu} = -g\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial \mathcal{F}^d_{\mu\beta}} \mid_A f^d_{an}A^n_\beta + \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial A^a_\mu} \mid_F . \tag{2.57}$$

Depois, calculamos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{[\mu\nu]}} = \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial \mathcal{F}^d_{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathcal{F}^d_{\alpha\beta}}{\partial A^c_{[\mu\nu]}} = \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial \mathcal{F}^d_{\alpha\beta}}\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\delta^d_c\right) = \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial \mathcal{F}^c_{\mu\nu}} \mid_A . \tag{2.58}$$

Substituindo (2.57) e (2.58) em (2.54), temos:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^c_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_{[\mu,\nu]}}f^a_{cb}A^b_\nu = -\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial \mathcal{F}^d_{\mu\beta}} \mid_A f^d_{an}A^n_\beta + \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial \mathcal{F}^a_{\mu\nu}} \mid_A f^a_{cb}A^b_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial A^a_\mu} \mid_F = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial A^a_\mu} \mid_F = 0.$$

Para cumprir a equação, o Lagrangiano não deve depender explicitamente do campo de gauge.

Agora fazemos $\delta\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$ para determinar como transforma-se o tensor intensidade,

$$\delta\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = \delta\left(\partial_\mu A^a_\nu\right) - \delta\left(\partial_\nu A^a_\mu\right) - gf^a_{bc}\left(\delta A^b_\mu\right)A^c_\nu - gf^a_{bc}A^b_\mu\left(\delta A^c_\nu\right).$$

Substituindo (2.48) para δA^a_μ e $\delta\left(\partial_\nu A^a_\mu\right)$ e separando os termos:

$$\delta\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = \epsilon^m f^a_{mn}\left(\partial_\mu A^n_\nu - \partial_\nu A^n_\mu\right) - g\epsilon^m\left(f^a_{bc}f^b_{mn} + f^a_{nb}f^b_{mc}\right)A^n_\mu A^c_\nu.$$

Trocando os índices das constantes de estrutura e lembrando a propiedade cíclica, temos:

$$f^a_{bc}f^b_{mn} + f^a_{nb}f^b_{mc} = -f^a_{bm}f^b_{nc} = f^a_{mb}f^b_{nc},$$

substituindo,

$$\delta\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = \epsilon^m f^a_{mn}\left(\partial_\mu A^n_\nu - \partial_\nu A^n_\mu\right) - g\epsilon^m\left(f^a_{mb}f^b_{nc}\right)A^n_\mu A^c_\nu$$

$$\delta\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = \epsilon^m f^a_{mn}\left(\partial_\mu A^n_\nu - \partial_\nu A^n_\mu - g f^n_{bc}A^b_\mu A^c_\nu\right),$$

Com (2.55):

$$\delta\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = \epsilon^m f^a_{mn}\mathcal{F}^n_{\mu\nu}. \tag{2.59}$$

Portanto as n quantidades $\mathcal{F}^1_{\mu\nu}, \mathcal{F}^2_{\mu\nu}, \mathcal{F}^3_{\mu\nu}, ..., \mathcal{F}^n_{\mu\nu}$, transformam-se co-gradientemente à transformação de ϕ: a variação de $\delta\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$ tem a mesma forma que a transformação de $\delta\phi^A$ com os coeficientes da álgebra f^a_{bc} no lugar dos geradores da transformação $I^A_{(a)B}$, compare (2.21) com (2.59). Para observar isso explicitamente, definam-se n matrizes M_c de ordem $n \times n$ e componentes.:

$$M^a_{(c)b} = f^a_{cb},$$

então,

$$\left[M_{(a)}, M_{(b)}\right]^c_d = M^c_{(a)e}M^e_{(b)d} - M^c_{(b)e}M^e_{(a)d} = f^c_{ae}f^e_{bd} - f^c_{be}f^e_{ad}$$

$$\left[M_{(a)}, M_{(b)}\right]^c_d = f^c_{ea}f^e_{db} + f^c_{eb}f^e_{ad} = -f^c_{ed}f^e_{ba} = f^c_{ed}f^e_{ab} = f^e_{ab}f^c_{ed}$$

$$\left[M_{(a)}, M_{(b)}\right]^c_d = f^e_{ab}M^c_{(e)d} \tag{2.60}$$

onde usamos a antissimetria def^a_{bc} nos índices inferiores e a identidade de Jacobi (**??**). O resultado (2.60) mostra que $M_{(a)}$ seguem a mesma algebra (2.14) das matrizes $I_{(c)}$. Logo, as matrizes M_c constituem uma representação do grupo G_n, a qual é chamada regular ou *representação adjunta* do grupo.

Da primeira equação hierárquica, eq.(2.49),para escrever em termos de $\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$ temos que substituir (2.50) em (2.49),

$$\left(-g\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\mu A^e_\nu)}f^e_{ad}A^d_\nu\right)f^a_{cb}A^b_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)}f^a_{cb}\partial_\nu A^b_\mu = 0.$$

Usando (2.58),

$$-g\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^e_\mu)}f^e_{ad}f^a_{cb}A^d_\mu A^b_\nu+\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)}f^a_{cb}\partial_\nu A^b_\mu=\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}f^a_{cb}\partial_\nu A^b_\mu-g\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^e_{\nu\mu}}f^e_{ad}f^a_{cb}A^d_\mu A^b_\nu=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}f^a_{cb}\partial_\nu A^b_\mu+\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}f^a_{cb}\partial_\nu A^b_\mu-g\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^e_{\nu\mu}}f^e_{ad}f^a_{cb}A^d_\mu A^b_\nu-g\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^e_{\nu\mu}}f^e_{ad}f^a_{cb}A^d_\mu A^b_\nu=0,$$

trocando $\nu\rightarrow\mu$ e $\mu\rightarrow\nu$ no primeiro e terceiro termo, temos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}f^a_{cb}\partial_\mu A^b_\nu+\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}f^a_{cb}\partial_\nu A^b_\mu-g\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^e_{\mu\nu}}f^e_{ad}f^a_{cb}A^d_\nu A^b_\mu-g\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^e_{\nu\mu}}f^e_{ad}f^a_{cb}A^d_\mu A^b_\nu=0.$$

Da antissimetria de $\mathcal{F}^a_{\nu\mu}=-\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$, e trocando $e\rightarrow a$ e $a\rightarrow e$ no terceiro e quarto termo,

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\left[f^a_{cb}\partial_\mu A^b_\nu-f^a_{cb}\partial_\nu A^b_\mu-gf^a_{ed}f^e_{cb}A^d_\nu A^b_\mu+gf^a_{ed}f^e_{cb}A^d_\mu A^b_\nu\right]=0,$$

trocando $b\rightarrow d$ e $d\rightarrow b$ no quarto termo,

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\left[f^a_{cb}\partial_\mu A^b_\nu-f^a_{cb}\partial_\nu A^b_\mu-gf^a_{ed}f^e_{cb}A^d_\nu A^b_\mu+gf^a_{eb}f^e_{cd}A^b_\mu A^d_\nu\right]=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\left[f^a_{cb}\left(\partial_\mu A^b_\nu-\partial_\nu A^b_\mu\right)-g\left(f^a_{ed}f^e_{cb}-f^a_{eb}f^e_{cd}\right)A^b_\mu A^d_\nu\right]=0.$$

Da identidade de Jacobi para os coeficientes de estructura, temos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\left[f^a_{cb}\left(\partial_\mu A^b_\nu-\partial_\nu A^b_\mu\right)-g\left(f^a_{ce}f^e_{bd}\right)A^b_\mu A^d_\nu\right]=0,$$

trocando $e\rightarrow b$ e $b\rightarrow e$ no último termo, e usando a equação (2.48),

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}f^a_{cb}\left[\left(\partial_\mu A^b_\nu-\partial_\nu A^b_\mu\right)-gf^b_{ed}A^e_\mu A^d_\nu\right]=\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}f^a_{cb}\mathcal{F}^b_{\mu\nu}=0.$$

Obtemos a equação (2.49) na forma:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}f^a_{cb}\mathcal{F}^b_{\mu\nu}=0. \tag{2.61}$$

Uma *condição sobre a densidade Lagrangiana* $\mathcal{L}_A$. Nesta condição já usamos o fato da descrição do sistema de campos A por $\mathcal{L}_A$ ser equivalente à descrição do mesmo sistema de acordo com $\mathcal{L}'_A$ ou $\mathcal{L}''_A$, i.e.

$$\mathcal{L}_A\left(A^a_\mu,\partial_\nu A^a_\mu\right)=\mathcal{L}''_A\left(A^a_\mu,\mathcal{F}^a_{\mu\nu}\right), \tag{2.62}$$

daí segue a identidade,

$$\delta\mathcal{L}_A \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu}\delta A^a_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\delta\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = 0,$$

se insere (2.48) e (2.49).

$$\delta\mathcal{L}_A \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu}\left(\epsilon^m f^a_{mn}A^n_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^a\right) + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\left(\epsilon^m f^a_{mn}\mathcal{F}^n_{\mu\nu}\right) = 0.$$

Separando termos, temos:

$$\epsilon^m\left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu}f^a_{mn}A^n_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}f^a_{mn}\mathcal{F}^n_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^a\left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu}\right) = 0,$$

da independência dos parâmetros e suas derivadas, temos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu} = 0 \tag{2.63}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu}f^a_{mn}A^n_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}f^a_{mn}\mathcal{F}^n_{\mu\nu} = 0$$

A segunda dessas equações é redundante pois já sabíamos da condição (2.61) que o segundo termo é nulo, a ecuação (2.63) informa-nos que $\mathcal{L}_A$ deve ser uma função somente de $\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A\left(\mathcal{F}^a_{\mu\nu}\right)$$

satisfazendo (2.61) e respeitando a lei de transformação (2.59). A equação (2.63) também representa um forte vínculo das teorias de gauge. De fato, implica que termos do tipo $m^2A^\mu A_\mu$ (onde m é uma constante) eventualmente presentes em $\mathcal{L}_A$ violam a invariância de gauge da teoria. Termos como esse são aqueles que dão massa ao potencial de gauge, onde o parâmetro m é entendido como a massa de A_μ. Portanto é preciso $m = 0$ para satisfazer (2.63), o que significa dizer que os campos de gauge devem ser não-massivos na teoria geral de Utiyama.

2.3 Densidade Lagrangiana total: campos em interação

E. Noether ensina-nos que a toda simetria corresponde uma lei de conservação (SOKOLOV, 1992; UTIYAMA, 1956). Agora vamos a encontrar a corrente consevada do sistema total, composto pelos campos $\phi^A(x)$ e $A^a_\mu(x)$. Assim densidade Lagrangiana total é:

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_T[\phi^A, \partial_\mu \phi^A, A^a_\mu, \partial_\nu A^a_\mu] = \mathcal{L}_{M+int}[\phi^A, \nabla_\mu \phi^A] + \mathcal{L}_A[\mathcal{F}^a_{\mu\nu}], \tag{2.64}$$

cuja variação deve anular-se,

$$\delta \mathcal{L}_T \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^a_\mu}\delta A^a_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)}\delta(\partial_\nu A^a_\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu \phi^A)}\delta(\partial_\mu \phi^A) = 0,$$

usando $[\delta, \partial] = 0$, fazendo a derivada do produto e definindo:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^a_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} \right) \tag{2.65}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \phi^A} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \right), \tag{2.66}$$

temos:

$$\delta \mathcal{L}_T = \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\delta A^a_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \phi^A}\delta\phi^A + \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu \phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)}\delta A^a_\nu \right\}. \tag{2.67}$$

No primeiro termo da equação (2.67) substituímos a eq. (2.48),

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\delta A^a_\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\epsilon^b(x) f^a_{bc} A^c_\mu \frac{1}{g}\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\epsilon^a(x) \right) - \frac{1}{g}\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu} \right)\epsilon^a(x),$$

da equação (2.64), segue:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}, \tag{2.68}$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \mathcal{F}^a_{\mu\nu}} \tag{2.69}$$

Substituindo em (2.67),

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_T = {} & \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \phi^A}\delta\phi^A + \epsilon^b(x)\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu} f^a_{bc} A^c_\mu - \frac{1}{g}\epsilon^a(x)\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu} \right) \\ & + \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\delta A^a_\nu + \frac{1}{g}\epsilon^a(x)\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Essa equação pode ser compactada sob as definições:

$$\mathcal{K} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \phi^A}\delta\phi^A + \epsilon^b(x)\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu} f^a_{bc} A^c_\mu - \frac{1}{g}\epsilon^a(x)\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\right) \tag{2.71}$$

$$\mathcal{V}^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\delta A^a_\nu + \frac{1}{g}\epsilon^a(x)\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\right), \tag{2.72}$$

assim a equação (2.70) resulta em:

$$\mathcal{K} + \partial_\mu \mathcal{V}^\mu = 0. \tag{2.73}$$

Nesta forma, fazemos integração na região Ω do espaço-tempo, onde os campos estão definidos,

$$\int_\Omega \mathcal{K} d^4x + \int_\Omega (\partial_\mu \mathcal{V}^\mu) d^4x = 0. \tag{2.74}$$

O segundo termo pode ser reescrito: o teorema de *Ostrogradski-Gauss* garante que a integral da divergência de $\mathcal{V}^\mu$ no volume Ω é igual á integral de superfície ao longo da fronteira $\partial\Omega$ deste mesmo volume, i.e.

$$\int_\Omega (\partial_\mu \mathcal{V}^\mu) d^4x = \oint_{\partial\Omega} \mathcal{V}^\mu d\sigma_\mu, \tag{2.75}$$

sendo $d\sigma_\mu$ um elemento de superfície orientado em $\partial\Omega$. A integral do lado direito de (2.75) é:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{V}^\mu d\sigma_\mu = \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\delta A^a_\nu + \frac{1}{g}\epsilon^a(x)\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\right)\right\}.$$

Substituindo (2.21) e (2.48) e fazendo renomeação adequada nos índices de álgebra,

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{V}^\mu d\sigma_\mu = \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \epsilon^a(x) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)} I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \mathcal{F}^m_{\mu\nu}} f^m_{an} A^n_\nu + \frac{1}{g}\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{g}\oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \partial_\nu \epsilon^a(x) \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \mathcal{F}^a_{\mu\nu}}.$$

As funções $\epsilon^a(x)$ e $\partial_\mu \epsilon^a(x)$ são escolhidas de forma que ambas se anularem identicamente na fronteira $\partial\Omega$ onde a integral de superfície está sendo calculada. Isso é perfeitamente consistente com os métodos do cálculo variacional e leva ao anulamento das duas integrais do lado direito da expressão acima:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{V}^\mu d^4\sigma_\mu = 0. \tag{2.76}$$

Usando (2.76) em (2.75) e o resultado desta substituição de volta na relação (2.74),

$$\int_\Omega \mathcal{K} d^4x = 0. \tag{2.77}$$

Essa identitade deve ser válida qualquer que seja o volume Ω escolhido arbitrariamente no domínio dos campos de matéria e de gauge. Por isso a equação (2.77) só pode ser válida caso o integrando seja identicamente nulo,

$$\mathcal{K} = 0, \tag{2.78}$$

então de (2.78) em (2.73), temos:

$$\partial_\mu \mathcal{V}^\mu = 0. \tag{2.79}$$

Pelas definições (2.71) e (2.72), as duas últimas equações são o mesmo que:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta\phi^A}\delta\phi^A + \epsilon^b(x)\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu} f^a_{bc} A^c_\mu - \frac{1}{g}\epsilon^a(x)\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\right) = 0 \tag{2.80}$$

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\delta A^a_\nu + \frac{1}{g}\epsilon^a(x)\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\right)\right\} = 0. \tag{2.81}$$

Da equação (2.81) e das leis de transformações para o campo de matéria e o campo de gauge, eqs. 2.13 e 2.37, obtemos:

$$\epsilon^a(x)\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)} I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^b_{\mu\nu}} f^b_{ac}A^c_\nu\right\}$$
$$+\partial_\mu\epsilon^a(x)\left\{\frac{1}{g}\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^b_{\nu\mu}}\right) + \frac{1}{g}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\right) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)} I^A_{(a)B}\phi^B\right) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^b_{\mu\nu}} f^b_{ac}A^c_\nu\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{g}\partial_\mu\partial_\nu\epsilon^a(x)\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^b_{\mu\nu}} = 0.$$

Toda informação vem dos dois primeiros termos já que o último termo é identicamente nulo. Assim da independência dos parâmetros e suas derivadas temos:

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)} I^A_{(a)B}\phi^B + \frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^b_{\mu\nu}} f^b_{ac}A^c_\nu\right\} = 0 \tag{2.82}$$

$$\frac{1}{g}\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^b_{\nu\mu}}\right)+\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}+\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B+\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^b_{\mu\nu}}f^b_{ac}A^c_\nu=0. \tag{2.83}$$

Das equações (2.65) e (2.69),

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial A^a_\mu}-\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial A^a_\mu}-\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\right),$$

Substituindo na equação (2.83):

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial A^a_\mu}+\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B+\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^b_{\mu\nu}}f^b_{ac}A^c_\nu=0. \tag{2.84}$$

Definamos:

$$J^\mu_a\equiv\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial A^a_\mu}. \tag{2.85}$$

Substituindo no termo volumétrico (2.84),

$$J^\mu_a=-g\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_{(a)B}\phi^B+\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^b_{\mu\nu}}f^b_{ac}A^c_\nu\right). \tag{2.86}$$

Pondo este resultado no termo de superfície (2.82),

$$\partial_\mu J^\mu_a=\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}\right). \tag{2.87}$$

Se a densidade Lagrangiana total $\mathcal{L}_T$ satisfaz e equação de Euler-Lagrange para o potencial de gauge A^a_μ i.e.

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_\mu}=0, \tag{2.88}$$

então obtemos de (2.87) a *lei de conservação*:

$$\partial_\mu J^\mu_a=0 \qquad (a=1,2,...,n). \tag{2.89}$$

Com a *corrente* J^μ_a definida pela equação (2.85). Encontramos, dessa forma, uma regra geral para introduzir um novo campo A^a_μ de uma maneira bem definida quando existe uma lei de conservação (2.89) análoga a (2.20). Note-se que há, em verdade, n leis de conservação para cada parâmetro de transformação dependente do ponto $\epsilon^a(x)$ com uma corrente J^μ_a conservada dada por (2.86). Desta equação conluímos que a corrente conservada não terá contribuições dos campos de gauge $\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$ no caso em que o grupo de transformações seja abeliano ($f^a_{bc}=0$) mas terá quando o grupo for não-abeliano ($f^a_{bc} \neq 0$). Isso significa que os campos de gauge associados a grupos de gauge não-abelianos possuem em si mesmos a carga de interação que mediam, por essa razão, espera-se que as equações de movimento dos campos de gauge deste tipo de teorias sejam não-lineares, com termos de auto-interação.

2.4 Grupo de transformação de fase e o campo eletromagnético

Determinemos o tipo de interação surgida da imposição de invariância do *campo escalar complexo* sob o grupo de *transformações de fase* (R. UTIYAMA, 1956;H. RUEGG, 2004). Neste contexto, escrevemos (o campo carregado) $\phi^A(x) = (\varphi^{\bar{A}}(x), \varphi^{*A'}(x))$ com $A = 1, 2, 3, ..., N$ (com N inteiro positivo e par), composto por $\varphi^{\bar{A}}(x)$ e seu conjugado $\phi^{*A'}(x)$ onde $\bar{A} = 1, 2, 3, ..., \frac{N}{2}$ e $A' = \frac{N}{2} + 1, ..., N$, transforma-se como:

$$\varphi^{\bar{A}}(x) \to e^{i\alpha}\varphi^{\bar{A}}(x) \qquad \varphi^{*A'}(x) \to e^{-i\alpha}\varphi^{*A'}(x).$$

$$\alpha = \text{coeficiente real}$$

A forma infinitesimal $\phi'^A(x) = \phi^A(x) + \delta\phi^A(x)$ dá:

$$\delta\varphi^{\bar{A}}(x) = i\alpha\varphi^{\bar{A}}(x) \qquad \delta\varphi^{*A'}(x) = -i\alpha\varphi^{*A'}(x),$$

pois $e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2), |x| \ll 1$ e comparando com equação (2.13) $\delta\phi^A(x) = \epsilon^a(x)I^A_{(a)B}\phi^B(x)$, identificamos:

$$\epsilon^a(x) = \alpha \qquad a = 1$$

$$I^{\bar{A}}_{(a)B} = i\delta^{\bar{A}}_B \qquad I^{A'}_{(a)B} = -i\delta^{A'}_B.$$

Como $I_{(a)}$ é zero ou $\pm i$,

$$\left[I_{(a)}, I_{(b)}\right]^A_B = 0.$$

Concluímos de $\left[I_{(a)}, I_{(b)}\right]^A_B = f^c_{ab}I^A_{(c)B}$ (Equação 2.17), que a constante de estrutura é nula,

$$f^c_{ab} = 0.$$

O grupo de transformações de fase a um parâmetro é comutativo-abeliano.

Se fizermos a transformação depender do ponto $\alpha \to \alpha(x)$, introduzimos um campo vetorial A^a_μ, cuja lei de transformação $\delta A^a_\mu = \epsilon^b(x) f^a_{bc} A^c_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a(x)$ equação (2.48), fica:

$$\delta A_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha(x).$$

Tendo em conta que as constantes de estrutura são zero. Com este novo campo especificamos a derivada covariante $\nabla_\mu \phi^A(x) = \partial_\mu \phi^A(x) - g A^a_\mu I^A_{(a)B}\phi^B(x)$, para este caso:

$$\nabla_\mu \phi^A(x) = \begin{cases} \nabla_\mu \varphi^A(x) = \partial_\mu \varphi^A(x) - ig\delta^A_B \varphi^B(x) A_\mu & \text{para} \quad A = 1,2,3,...,\frac{N}{2} \\ \nabla_\mu \varphi^{*A}(x) = \partial_\mu \varphi^{*A}_{(x)} + ig\delta^A_B \varphi^{*B}(x) A_\mu & \text{para} \quad A = \frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}+2, ..., N \end{cases},$$

i. e.,

$$\nabla_\mu \varphi^{\bar{A}} = \partial_\mu \varphi^{\bar{A}} - ig\phi^{\bar{A}} A_\mu \qquad \nabla_\mu \varphi^{A'*} = \partial_\mu \varphi^{A'*} + ig\varphi^{A'*} A_\mu,$$

com a qual realizamos a prescrição do acoplamento. Reescrevendo a densidade Lagrangiana,

$$\mathcal{L}_M[\phi^A, \partial_\mu \phi^A] \to \mathcal{L}_M[\phi^A, \nabla_\mu \phi^A] = \mathcal{L}_M[\varphi, \varphi^*, \nabla_\mu \varphi, \nabla_\mu \varphi^*].$$

A densidade Lagrangiana $\mathcal{L}_A$ para o campo livre A_μ é:

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_M\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}\right),$$

onde $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ via (2.55) $\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial^a_\nu - g f^a_{bc} A^b_\mu A^c_\nu$, então:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.90}$$

Vemos assim que o campo a ser introduzido ao tratarmos partículas carregadas aob transformações de fase dependentes do ponto é o *campo eletromagnético*. A corrente conservada pelas (2.85) e (2.86) como:

$$J^\mu \equiv -ig\left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\nabla_\mu \varphi^{\bar{A}})}\varphi^{\bar{A}} - \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\nabla_\mu \varphi^{*A'})}\varphi^{*A'}\right),$$

que não depende do campo de gauge eletromagnético. O campo eletromagnético não carrega a própria carga de interação que media, não há auto-interação do campo eletromagnético em nível clássico.

Capítulo 3

Elementos da teoria de Stueckelberg para o caso U(1)

Neste capítulo, fazemos uma revisão, dos formalismos de Proca e Stueckelberg, para conhecer a abordagem da dinâmica dos campos vetoriais massivos, e as implicações de manter a invariância de gauge local (H. RUEGG, 2004).

3.1 Campo vetorial com massa

O potencial eletromagnético está descrito por um campo vetorial real A_μ, obedecendo às equações de Maxwell. A quantização de este campo descreve uma partícula sem massa, o fotón, que tem 2 graus de liberdade físicos, suas duas polarizações transversais ou equivalentemente suas duas helicidades $(+1, -1)$. O campo A_μ tem 4 componentes, das quais uma some impondo-se a condição $\partial^\mu A_\mu = 0$ (condição de Lorentz) e pela condição de mass-shell. Se adicionamos um termo de massa no Lagrangiano do potencial A_μ a invariância de gauge se perde, esse novo Lagrangiano descreve uma partícula vetorial com massa, com 3 graus de liberdade, 2 graus de liberdade de polarização e um grau de liberdade longitudinal.
Stueckelberg propôs um método que mantém a invariância de gauge local para um campo vetorial com massa, adicionando um campo escalar B (RUEGG, 2004), esse novo campo é massivo e transforma-se de maneira linear com respeito ao parâmetro de transformação, salvando o termo de massa do campo de gauge, através da combinação do tipo $\left(gA^\mu - \dfrac{1}{m}\partial^\mu B\right)$, a forma de obter massa para o campo de gauge é muito diferente ao mecanismo de Higgs, posto que mantemos a invariância de gauge fixando o parâmetro de transfomação, uma característica de fato necessária, obtendo

também a condição de Lorentz de maneira natural. O tipo que equação que obtemos para o campo A_μ, é do tipo Proca, e o campo de Stueckelberg B obedece a equação de Klein-Gordon.

3.2 Proca

O formalismo matemático de Proca descreve melhor um campo vetorial com massa real ou complexo (RUEGG, 2004). Seja um campo vetorial com massa V_μ a qual obedece à equação de Proca:

$$\partial^\mu \mathcal{F}^V_{\mu\nu} + m^2 V_\nu = 0, \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{F}^V_{\mu\nu}$ é chamado tensor de intensidade do campo vetorial dada pela Eq. (2.90). Derivando a equação (3.1) temos:

$$\partial^\nu \left(\partial^\mu \mathcal{F}^V_{\mu\nu} + m^2 V_\nu\right) = \partial^\nu \partial^\mu \mathcal{F}^V_{\mu\nu} + m^2 \partial^\nu V_\nu = 0.$$

Tendo em conta que as derivadas comutam e que o tensor intensidade é antissimétrico:

$$\partial^\nu \partial^\mu \mathcal{F}^V_{\mu\nu} = 0,$$

então:

$$\partial^\nu V_\nu = 0.$$

Note-se que obtemos a condição de Lorentz de maneira natural com $m \neq 0$. A condição de Lorentz permite reduzir o número de graus de liberdade do sistema, mas se o sistema tem simetria de Lorentz não quer dizer que seja invariante de gauge local. A equação de Proca (3.1) se obtém do Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}^V_{\mu\nu}\mathcal{F}^{V\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 V_\mu V^\mu. \tag{3.2}$$

Para obter o Lagrangiano para um campo vetorial complexo, um caso geral de campo vetorial, usamos dois campos reais com mesmo valor de massa,

$$\mathcal{L}_{PC} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}^{V^{(1)}}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{V^{(1)}\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 V^{(1)}_\mu V^{(1)\mu} - \frac{1}{4}\mathcal{F}^{V^{(2)}}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{V^{2}\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 V^{(2)}_\mu V^{(2)\mu}. \tag{3.3}$$

Definimos:

$$V_\mu \equiv \frac{V^{(1)}_\mu + iV^{(2)}_\mu}{\sqrt{2}} \tag{3.4}$$

$$V_\mu^\dagger \equiv \frac{V_\mu^{(1)} - iV_\mu^{(2)}}{\sqrt{2}}. \tag{3.5}$$

Somando (3.4) e (3.5),

$$V_\mu^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(V_\mu + V_\mu^\dagger\right). \tag{3.6}$$

Subtraindo (3.4) com (3.5):

$$V_\mu^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2i}\left(V_\mu - V_\mu^\dagger\right). \tag{3.7}$$

Calculamos $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{V^{(1)}}$, usando (3.6):

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{V^{(1)}} = \partial_\mu V_\nu^{(1)} - \partial_\nu V_\mu^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + \partial_\mu V_\nu^\dagger - \partial_\nu V_\mu^\dagger\right].$$

Defina-se:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu, \tag{3.8}$$

e,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^\dagger \equiv \partial_\mu V_\nu^\dagger - \partial_\nu V_\mu^\dagger, \tag{3.9}$$

substituindo temos:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{V^{(1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu}^\dagger\right], \tag{3.10}$$

Calculamos, usando a equação (3.10):

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{V^{(1)}}\mathcal{F}^{V^{(1)}\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + 2\mathcal{F}_{\mu\nu}^\dagger\mathcal{F}^{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu}^\dagger\mathcal{F}^{\dagger\mu\nu}\right]. \tag{3.11}$$

Calculamos $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{V^{(2)}}$, usando (3.7) e, seguindo um procedimento análogo ao anterior, temos:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{V^{(2)}}\mathcal{F}^{V^{(2)}\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - 2\mathcal{F}_{\mu\nu}^\dagger\mathcal{F}^{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu}^\dagger\mathcal{F}^{\dagger\mu\nu}\right]. \tag{3.12}$$

Da equação (3.6),

$$V_\mu^{(1)}V^{(1)\mu} = \frac{1}{2}\left[V_\mu V^\mu + 2V_\mu^\dagger V^\mu + V_\mu^\dagger V^{\dagger\mu}\right]. \tag{3.13}$$

Analogamente:

$$V_\mu^{(2)}V^{(2)\mu} = -\frac{1}{2}\left[V_\mu V^\mu - 2V_\mu^\dagger V^\mu + V_\mu^\dagger V^{\dagger\mu}\right], \tag{3.14}$$

Substituindo (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) em (3.3):

$$\mathcal{L}_{PC} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}^\dagger\mathcal{F}^{\mu\nu} + m^2 V_\mu^\dagger V^\mu. \tag{3.15}$$

A equação (3.15) é o Lagrangiano para um campo vetorial complexo com massa.

3.3 Stueckelberg

Este formalismo descreve o comportamento para um campo vetorial com massa (RUEGG, 2004). É diferente do formalismo de Proca em que o campo vetorial obedece à equação de movimento:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) A^\nu = 0, \tag{3.16}$$

cuja densidade Lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu A^\dagger_\nu \partial^\mu A^\nu + m^2 A^\dagger_\mu A^\mu. \tag{3.17}$$

A desvantagem da Lagrangiana de Stueckelberg é tal que a condição de Lorentz não se obtém da equação de movimento. Esta característica tem consequências terríveis na positividade do hamiltoniano. Esse problema é corrigido com a introdução de um campo B que permite manter a massa do campo de gauge. Além disso, o campo B permite reobter a condição de Lorentz de forma natural.

$$\mathcal{H}_S = -\partial_\mu A^\dagger_\nu \partial^\mu A^\nu - m^2 A^\dagger_\mu A^\mu. \tag{3.18}$$

Mais informações a esse respeito podem ser encontradas na Ref (H. RUEGG, 2004).

Reescrevemos o Lagrangiano de Stueckelberg (3.17), introduzindo um campo escalar B de massa m:

$$\mathcal{L}_{Stue} = -\partial_\mu A^\dagger_\nu \partial^\mu A^\nu + m^2 A^\dagger_\mu A^\mu + \partial_\mu B^\dagger \partial^\mu B - m^2 B^\dagger B. \tag{3.19}$$

Assim temos as regras de transformação dos campos de gauge e Stueckelberg:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon(x), \tag{3.20}$$

e:

$$B(x) \to B'(x) = B(x) + m\epsilon(x). \tag{3.21}$$

O campo de Stueckelberg transforma-se de maneira linear com respeito aos parâmetros de transformação, para manter a invariância e a dependência do Lagrangiano com respeito ao campo de gauge através da combinação $\left(gA^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B\right)$. Além disso, temos que impor uma condição para o parâmetro de transformação, assim, o Lagrangiano descreve completamente a dinâmica de um campo escalar massivo B, e a dinâmica de um campo de gauge com massa,

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right) \epsilon = 0. \tag{3.22}$$

A invariância se manifesta reescrevendo (3.19), na forma:

$$\mathcal{L}_{Stue} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\dagger}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + m^2\left(gA^{\dagger}_{\mu} - \frac{1}{m}\partial_{\mu}B^{\dagger}\right)\left(gA^{\mu} - \frac{1}{m}\partial^{\mu}B\right)$$
$$- \left(g\partial^{\mu}A^{\dagger}_{\mu} + mB^{\dagger}\right)\left(g\partial_{\nu}A^{\nu} + mB\right), \tag{3.23}$$

onde $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, os últimos termos são consistentes com o vínculo do parâmetro de transformação. Agora calculamos $\left(gA'^{\dagger}_{\mu} - \frac{1}{m}\partial_{\mu}B'^{\dagger}\right)$ usando (3.20) e (3.21), tendo em conta que $\epsilon(x)$ é real

$$\left(gA'^{\dagger}_{\mu} - \frac{1}{m}\partial_{\mu}B'^{\dagger}\right) = gA^{\dagger}_{\mu} + \partial_{\mu}\epsilon(x) - \frac{1}{m}\partial_{\mu}B^{\dagger} - \partial_{\mu}\epsilon(x),$$

assim,

$$\left(gA'^{\dagger}_{\mu} - \frac{1}{m}\partial_{\mu}B'^{\dagger}\right) = gA^{\dagger}_{\mu} - \frac{1}{m}\partial_{\mu}B^{\dagger}, \tag{3.24}$$

e,

$$\left(gA'_{\mu} - \frac{1}{m}\partial_{\mu}B'\right) = gA_{\mu} - \frac{1}{m}\partial_{\mu}B. \tag{3.25}$$

O Lagrangiano $\mathcal{L}_{Stue}$ fica invariante com respeito às condições (3.20) e (3.21). Calculamos $g\partial^{\mu}A'^{\dagger}_{\mu} + mB'^{\dagger}$:

$$g\partial^{\mu}A'^{\dagger}_{\mu} + mB'^{\dagger} = g\partial^{\mu}\left(A^{\dagger}_{\mu} + \frac{1}{g}\partial_{\mu}\epsilon(x)\right) + m\left(B^{\dagger} + m\epsilon(x)\right)$$

$$g\partial^{\mu}A'^{\dagger}_{\mu} + mB'^{\dagger} = g\partial^{\mu}A^{\dagger}_{\mu} + mB^{\dagger} + \partial^{\mu}\partial_{\mu}\epsilon(x) + m^2\epsilon(x).$$

Da equação (3.22),

$$g\partial^{\mu}A'^{\dagger}_{\mu} + mB'^{\dagger} = g\partial^{\mu}A^{\dagger}_{\mu} + mB^{\dagger}, \tag{3.26}$$

e,

$$g\partial^{\mu}A'_{\mu} + mB' = g\partial^{\mu}A_{\mu} + mB, \tag{3.27}$$

Assim os termos na segunda linha da Eq. (3.23) para a densidade Lagrangiana também são invariantes pelas transformações $B \to B'$ e $A_{\mu} \to A'_{\mu}$, onde a condição de que o parâmetro de transformação obedece à equação de Klein-Gordon, ajuda a manter essa invariância como foi mostrado nas Eqs. (3.26,3.27). As Eqs. (3.24) até (3.27) garantem que $\mathcal{L}'_{Stue} = \mathcal{L}_{Stue}$, o tensor intensidade $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ também é invariante, ela não muda, posto que a sua dependência só está definida apenas pelas derivadas do campo de gauge.

As equações de Euler-Lagrange para o campo de gauge e o campo de Stueckelberg, são do tipo Proca e Klein-Gordon respectivamente. A condição usada para o parâmetro de transformação não aparece na hora de obter as equações de movimento, posto que ela só aparece para mostrar a invariância do Lagrangiano. As transformações (3.20) e (3.21) são mais gerais que as tranformações de gauge usuais em Maxwell.

Capítulo 4

Stueckelberg à Utiyama para o caso U(1)

Neste capiluto, vamos tentar obter o campo de Stueckelberg, seguindo o caminho de Utiyama, que é basicamente usar os argumentos da seção (2.1). Além disso, calculamos as correntes dos campos de interação como foi feito na seção (2.3). Uma outra tentativa, é usando os multiplicadores de Lagrange, método que tem certas contradiçoes que se mostram no apéndice A.

4.1 Implementação de B

Vamos propor o Lagrangiano que elvolve ao campo A e B, com suas derivadas:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0[A_\mu, \partial_\nu A_\mu, B, \partial_\mu B]. \tag{4.1}$$

Calculamos a variação é $\delta\mathcal{L}_0 = 0$,

$$\delta\mathcal{L}_0 = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\delta(\partial_\nu A_\mu) + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial B}\delta B + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu B)}\delta(\partial_\mu B).$$

Usando (3.20) e (3.21):

$$\delta\mathcal{L}_0 = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\mu}\frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\partial_\nu(\frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon) + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial B}\frac{m}{g}\epsilon + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu B)}\partial_\mu(\frac{m}{g}\epsilon).$$

Pela independência dos parâmetros ϵ e suas derivadas, temos 3 equações hierárquicas:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial B}\frac{m}{g} = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu}\frac{1}{g} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu B)}\frac{m}{g} = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0. \tag{4.4}$$

Da equação (4.4) temos que a dependência do $\mathcal{L}_0$ com respeito às derivadas do campo A, está feita pela combinação:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.5}$$

Assim (tendo em conta o dobro contagem da soma de quantidades antisimétricas e a propriedade antisimétrica de $\mathcal{F}_{\mu\nu}$):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}}.$$

Substituindo na equação (4.4) e usando antisimetria do F,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} = 0.$$

Assim a equação (4.4) é satisfeita.

A segunda equação hierárquica (4.3), sugere uma combinação do tipo:

$$G_\mu = mA_\mu - \partial_\mu B. \tag{4.6}$$

Com isso, precisamos expressar $\mathcal{L}_0$ em termos dessa nova quantidade G_μ. Para isto, calculamos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\alpha}\,|_A\,\frac{\partial G_\alpha}{\partial A_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu}\,|_G = m\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu}\,|_G,$$

e também:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu B)} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\alpha}\,|_A\,\frac{\partial G_\alpha}{\partial(\partial_\mu B)} = -\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\,|_A\,.$$

Substituindo na equação (4.3), temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu}\frac{1}{g} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu B)}\frac{m}{g} = \frac{m}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\,|_A - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\,|_A\,\frac{m}{g} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu}\,|_G = 0,$$

então:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu} \mid_G = 0.$$

Temos que o Lagrangiano não depende explicitamente do campo, assim a segunda equação hierárquica está satisfeita. No caso da primeira equação hierárquica, como a derivada parcial é nula, então o Lagrangiano não depende explícitamente do campo B nem do campo A, posto que o campo A fica implicitamente no G_μ.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial B} = 0. \tag{4.7}$$

A conclusão da Eq. (4.7) é que $\mathcal{L}_0$ não pode ter termos massivos do tipo B^2 para o campo de Stueckelberg. Ainda assim, esse campo é capaz de dar massa ao campo eletromagnético através de G_μ. Isso ficará mais claro na seção 4.3 onde estudamos o exemplo da Lagrangiana $\mathcal{L}_0 = \mathcal{F}^2 + G^2$. Finalmente temos que o Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0[A_\mu, \partial_\nu A_\mu, B, \partial_\mu B] = \mathcal{L}_0[F_{\mu\nu}, G_\mu]. \tag{4.8}$$

4.2 Campos em interação

Para calcular as correntes como no caso da seção 2.3, vamos supor que o Lagrangiano total, tem a dependência:

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_T[\phi^A, \partial_\mu \phi^A, A_\mu, \partial_\nu A_\mu, B, \partial_\mu B] = \mathcal{L}_{M+int}[\phi^A, \nabla_\mu \phi^A] + \mathcal{L}_0[\mathcal{F}_{\mu\nu}, G_\mu], \tag{4.9}$$

onde $\nabla_\mu \phi^A(x) = \partial_\mu \phi^A(x) - g A^a_\mu I^A_{(a)B} \phi^B(x)$, posto que o campo de Stueckelberg aparece apenas para dar massa ao campo de gauge, não interage com o campo de matéria, assim a definição de derivada covariante é mesma, assim a variação deve anular-se,

$$\delta \mathcal{L}_T \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta(\partial_\nu A_\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \phi^A} \delta \phi^A$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \delta(\partial_\mu \phi^A) + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial B} \delta B + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)} \delta(\partial_\mu B) = 0.$$

Usando $[\delta, \partial] = 0$ e fazendo algumas integrações por partes:

$$\delta \mathcal{L}_T = \left[\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) \right] \delta A_\mu + \left[\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \right) \right] \delta \phi^A$$

$$+ \left[\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial B} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)} \right) \right] \delta B + \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \delta \phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \delta A_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)} \delta B \right\}.$$

Usando as definições

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right) \tag{4.10}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta\phi^A} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial\phi^A} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\right) \tag{4.11}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta B} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial B} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)}\right), \tag{4.12}$$

temos:

$$\delta\mathcal{L}_T = \frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta\phi^A}\delta\phi^A + \frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta B}\delta B + \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta A_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)}\delta B\right\}. \tag{4.13}$$

No primeiro termo da equação (4.13), substituímos a eq. (3.20),

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\delta A_\mu = \frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\partial_\mu\epsilon = \frac{1}{g}\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\epsilon\right) - \frac{1}{g}\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right)\epsilon. \tag{4.14}$$

Da equação (4.9) segue:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} = \frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}, \tag{4.15}$$

e,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}}, \tag{4.16}$$

e também

$$\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)} = -\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}. \tag{4.17}$$

Substituindo as equações (4.14-4.17) na equação (4.13):

$$\delta\mathcal{L}_T = \frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta\phi^A}\delta\phi^A - \frac{1}{g}\epsilon\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) + \frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta B}\delta B$$

$$+ \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}}\delta A_\nu + \frac{1}{g}\epsilon\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\delta B\right\}. \tag{4.18}$$

Fazendo as definições:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta\phi^A}\delta\phi^A - \frac{1}{g}\epsilon\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) + \frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta B}\delta B \tag{4.19}$$

$$\mathcal{U}^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}}\delta A_\nu + \frac{1}{g}\epsilon\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\delta B, \tag{4.20}$$

temos,

$$\mathcal{D} + \partial_\mu \mathcal{U}^\mu = 0. \tag{4.21}$$

Tendo em conta que as condições na fronteira são as mesmas ao caso geral do formalismo de Utiyama, deve-se ter para qualquer que seja o volume Ω,

$$\mathcal{D} = 0 \tag{4.22}$$

$$\partial_\mu \mathcal{U}^\mu = 0. \tag{4.23}$$

Das equações (4.19) e (4.20),

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \phi^A}\delta\phi^A - \frac{1}{g}\epsilon\partial_\mu\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) + \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta B}\delta B = 0 \tag{4.24}$$

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}}\delta A_\nu + \frac{1}{g}\epsilon\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\frac{m}{g}\epsilon\right\} = 0. \tag{4.25}$$

Da equação (4.25), com as leis de transformação (2.11), (3.20) e (3.21), temos:

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\epsilon I^A_B\phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}}\left(\frac{1}{g}\partial_\nu\epsilon\right) + \frac{1}{g}\epsilon\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\frac{m}{g}\epsilon\right\} = 0.$$

Fazendo a derivada parcial,

$$\begin{aligned}
&\epsilon\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}I^A_B\phi^B + \frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} - \frac{m}{g}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\right)\right] \\
&+\partial_\mu\epsilon\left\{\frac{1}{g}\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}}\right) + \frac{1}{g}\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}I^A_B\phi^B\right) - \frac{m}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\right\} \\
&+\frac{1}{g}\partial_\mu\partial_\nu\epsilon\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} = 0.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

O último termo é nulo, conforme já mostramos antes no texto. Os parâmetros e suas derivadas são independentes, assim, da equação (4.26), temos duas equações:

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}I^A_B\phi^B + \frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} - \frac{m}{g}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\right)\right] = 0, \tag{4.27}$$

e,

$$\frac{1}{g}\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}}\right) + \frac{1}{g}\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}I^A_B\phi^B\right) - \frac{m}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu} = 0. \tag{4.28}$$

Da equação (4.10) e (4.9),

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}} \right).$$

Substituindo na equação (4.28),

$$\frac{1}{g}\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}} \right) + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}} \right) \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} I^A_B \phi^B - \frac{m}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} I^A_B \phi^B - \frac{m}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu} = 0.$$

Definindo:

$$J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\mu}, \tag{4.29}$$

temos:

$$J^\mu = -g \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} I^A_B \phi^B - \frac{\mathrm{m}}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu} \right). \tag{4.30}$$

Substituindo na equação (4.27),

$$\partial_\mu \left\{ -\frac{1}{g} J^\mu + \frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \right\} = 0$$

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \right). \tag{4.31}$$

Se a densidade Lagrangiana total $\mathcal{L}_T$ satisfaz e equação de Euler-Lagrange para o potencial de gauge A_μ i.e.

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} = 0,$$

obtemos:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{4.32}$$

com equações de coservação dadas pela Eq. (4.32) e corrententes (4.30).

Agora calculamos as correntes, o tensor F, G usando os os geradores das transformações para o caso $U(1)$. Temos (vide a Seção 2.4):

$$I^{\bar{A}}_{(a)B} = i\delta^{\bar{A}}_B$$

$$I^{A'}_{(a)B} = -i\delta^{A'}_B,$$

e a constante de estrutura é nula,

$$f^c_{ab} = 0.$$

Lembramos que o campo A transforma-se como:

$$\delta A_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon.$$

Especificamos a derivada covariante $\nabla_\mu \phi^A(x) = \partial_\mu \phi^A(x) - gA^a_\mu I^A_{(a)B}\phi^B(x)$, neste caso:

$$\nabla_\mu \varphi^{\bar{A}} = \partial_\mu \varphi^{\bar{A}} - ig\phi^{\bar{A}} A_\mu \qquad \nabla_\mu \varphi^{*A'} = \partial_\mu \varphi^{*A'} + ig\varphi^{*A'} A_\mu. \tag{4.33}$$

Lembrando também que:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.34}$$

$$G_\mu = mA_\mu - \partial_\mu B, \tag{4.35}$$

especificamos (4.30),

$$J^\mu \equiv -ig\left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\nabla_\mu \varphi^{\bar{A}})}\varphi^{\bar{A}} - \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\nabla_\mu \varphi^{*A'})}\varphi^{*A'} + \frac{\mathrm{mi}}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_\mu}\right). \tag{4.36}$$

O campo B não aparece explicitamente na derivada covariante, posto que o campo de matéria só interage com o campo A_μ, além disso, o campo de Stueckelberg só aparece para dar massa ao campo de gauge. A contribuição do campo de Stueckelberg esta presente na quantidade G_μ (salvando o termo de massa do campo de gauge no Lagrangiano). Além disso temos correntes de conservação que obedecem às equações de continuidade (4.32).

4.3 Caso particular $\mathcal{L}_p \propto \mathcal{F}^2 + G^2$

Agora vamos estudar um caso particular para o Lagrangiano, fazendo um análise das equações de movimento e as correntes dos campos. Observe $\mathcal{L}_p$ escrita em termos dos potenciais de gauge e de Stueckelberg não contém o termo $(g\partial_\nu A^\nu + mB)$, porque os parâmetros de transformação não obedecem a equação de Klein-Gordon, assim:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}G_\mu G^\mu,$$

onde $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ e G_μ obedecem às Eqs. (4.34) e (4.35). Obtemos as equações de movimento:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial A_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial G_\nu}\frac{\partial G_\nu}{\partial A_\mu} = mG^\mu,$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \left(\partial_\nu A_\mu\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \mathcal{F}_{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha\beta}}{\partial \left(\partial_\nu A_\mu\right)} = -\mathcal{F}^{\nu\mu}.$$

Assim, temos para o campo de gauge:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \left(\partial_\nu A_\mu\right)}\right) = mG^\mu + \partial_\nu \mathcal{F}^{\nu\mu} = 0,$$

ou seja:

$$\partial_\nu \mathcal{F}^{\nu\mu} + mG^\mu = 0. \tag{4.37}$$

Obtemos, assim, a equação de movimento para o campo de gauge, onde a quantidade m é interpretada como a massa do campo. A Eq. (4.37) é parecida com a equação de Proca (3.1), só que temos um termo a mais no campo G_μ, em função dos potenciais de gauge e de Stueckelberg temos:

$$\partial_\nu \left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right) + m\left(mA^\mu - \partial^\mu B\right) = 0,$$

oseja,

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu + m^2 A^\mu = \partial^\mu \left(\partial_\nu A^\nu + mB\right),$$

podemos anular o termo do lado direito, fazendo:

$$\partial_\nu A^\nu = -mB. \tag{4.38}$$

Para assim obter a equação de Stueckelberg para o campo de gauge massivo (eq. 3.16). Agora, calculamos a equação de movimento para o campo B em função do campo G_μ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial B} = 0,$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \left(\partial_\mu B\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial G_\nu}\frac{\partial G_\nu}{\partial \left(\partial_\mu B\right)} = -G^\mu.$$

Substituímos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial B} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \left(\partial_\mu B \right)} \right) = 0 + \partial_\mu G^\mu = 0,$$

assim obtemos que:

$$\partial_\mu G^\mu = 0. \tag{4.39}$$

Temos que o campo G_μ satisfaz a condição de Lorentz, podemos escrever a Eq. (4.39) en função dos campos A_μ e B, assim:

$$\partial^\mu \left(\partial_\mu B - m A_\mu \right) = \partial^\mu \partial_\mu B - m \partial^\mu A_\mu = 0,$$

usamos a condição para os campos, dada pela equação (4.38),

$$\partial^\mu \partial_\mu B + m^2 B = 0. \tag{4.40}$$

Vemos que o campo de Stueckelberg obedece a equação do tipo Klein-Gordon, só se fixamos os campos de gauge e de Stueckelberg com a condição (4.38), cuja condição é parecida ao último termo do Lagrangiano (3.23), só que nosso caso, esse termo não é nulo (enfatizamos que o parâmetro de transformação, neste tratamento, não obedece a equação de Klein-Gordon).

Usamos a Eq. (4.30) para obter as correntes:

$$J^\mu = -gi \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\nabla_\mu \varphi^{\bar{A}})} \varphi^{\bar{A}} - \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\nabla_\mu \varphi^{*A'})} \varphi^{*A'} + \frac{\mathrm{m}i}{g} \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial G_\mu} \right)$$

$$J^\mu = -gi \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\nabla_\mu \varphi^{\bar{A}})} \varphi^{\bar{A}} - \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\nabla_\mu \varphi^{*A'})} \varphi^{*A'} \right) + m G^\mu, \tag{4.41}$$

e usando a definição do campo G:

$$J^\mu = -gi \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\nabla_\mu \varphi^{\bar{A}})} \varphi^{\bar{A}} - \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\nabla_\mu \varphi^{*A'})} \varphi^{*A'} \right) + m \left(m A^\mu - \partial^\mu B \right). \tag{4.42}$$

O último termo que aparece na Eq. (4.42) é parecida com o segundo termo do Lagrangiano (3.23). A corrente depende explicitamente dos campos de gauge A_μ e do campo de Stueckelberg B, termos que não estão presentes na teoria geral de Utiyama, como nos vimos. O campo de gauge obedece à equação do tipo Proca, e o campo de Stueckelberg obedece uma equação do tipo ondulatoria.

Capítulo 5

Stuckelberg a la Utiyama para o caso SU(2)

Nesta seção vamos fazer o estudo da aplicação do formalismo de Utiyama para o grupo $SU(2)$. Para isto, vamos começar a análise de Stueckelberg para o caso não abeliano de transformações finitas (GRACIA-BONDIA, 2008), tentando assim obter a regra de transformação infinitesimal do campo de Yang-Mills e a regra para o campo de Stuckelberg.

5.1 Campos de Yang-Mills e de Stueckelberg

5.1.1 O estudo das leis de transformações na versão finita

Seja os campos de matéria $\Psi^A(x)$, onde $A = 1, 2, 3, ..., N$, que satisfazem a transformação do tipo:

$$\Psi^A(x) \longrightarrow U\Psi^A(x).$$

Onde $U(x) = e^{\frac{i}{2}\epsilon^a \sigma_a}$, ϵ^a são os parâmetros de transformação e $\frac{i}{2}\sigma_a$os geradores do grupo $SU(2)$, com:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essas são as famosas matrizes de Pauli. Neste caso, o campo de gauge se transforma da seguinte forma:

$$A_\mu \to U^{-} A_\mu U - \frac{i}{g} U^{-} \partial_\mu U, \tag{5.1}$$

onde:

$$A_\mu = \frac{\sigma_a}{2} A^a_\mu. \tag{5.2}$$

A equação 5.1, mostra a transformação finita para os campos 5.2. Para obter a forma da transformação infinitesimal fazemos uma expansão da matriz de transformação $U(x)$, tendo em conta que os termos de ordem 2 ou maior, tendem a zero:

$$U(x) = I + \frac{i}{2}\epsilon^a \sigma_a + \theta^2(\epsilon^b \sigma_b) \approx I + \frac{i}{2}\epsilon^a \sigma_a. \tag{5.3}$$

Assim, os campos de matéria transforma-se como:

$$\Psi^A(x) \longrightarrow \Psi^A(x) + \frac{i}{2}\epsilon^a \sigma_a \Psi^A(x),$$

ou,

$$\Psi'^A(x) = \Psi^A(x) + \delta\Psi^A(x) = \Psi^A(x) + \frac{i}{2}\epsilon^a \sigma_a \Psi^A(x),$$

assim os campos de matéria obedecem à regra de transformação:

$$\delta\Psi^A(x) = \frac{i}{2}\epsilon^a \sigma_a \Psi^A(x). \tag{5.4}$$

Substituindo as equações 5.2 e 5.3 na equação 5.1,

$$\frac{\sigma_a}{2} A^a_\mu \to \frac{\sigma_b}{2} A^b_\mu + \frac{i}{4} A^b_\mu \epsilon^a \sigma_b \sigma_a - \frac{i}{4}\epsilon^a \sigma_a \sigma_b A^b_\mu - \frac{1}{8} A^b_\mu \epsilon^a \epsilon^c \sigma_c \sigma_b \sigma_a + \frac{1}{2g}\partial_\mu \epsilon^a \sigma_a - \frac{i}{4g}\epsilon^b \sigma_b \partial_\mu \epsilon^a \sigma_a.$$

Os termos de segunda ordem são desprezíveis para o caso infinitesimal, assim temos:

$$\frac{\sigma_a}{2} A^a_\mu \to \frac{\sigma_b}{2} A^b_\mu + i A^b_\mu \epsilon^a \left[\frac{\sigma_b}{2}, \frac{\sigma_a}{2}\right] + \frac{1}{2g}\sigma_a \partial_\mu \epsilon^a.$$

Lembrando que:

$$\left[\frac{\sigma_b}{2}, \frac{\sigma_a}{2}\right] = i\varepsilon^c_{ba}\frac{\sigma_c}{2}, \tag{5.5}$$

onde ε^c_{ba} é conhecida na literatura como tensor antissimétrico de Levi-Civita, assim

$$\frac{\sigma_a}{2}\left[A^a_\mu \to A^a_\mu - A^b_\mu \epsilon^c \varepsilon^a_{bc} + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a\right],$$

i.e.

$$A^a_\mu \to A^a_\mu + \epsilon^c \varepsilon^a_{cb} A^b_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a.$$

Lembrando que o parâmetro de transformação não precisa obedecer a equação de Klein-Gordon, assim podemos escrever de forma:

$$A'^a_\mu = A^a_\mu + \delta A^a_\mu = A^a_\mu + \epsilon^c \varepsilon^a_{cb} A^b_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a,$$

assim reconhecemos, a transformação infinitesimal para as componentes do campo vetorial de gauge A^a_μ,

$$\delta A^a_\mu = \epsilon^c \varepsilon^a_{cb} A^b_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a. \tag{5.6}$$

Para manter a invariância de gauge local para o caso não abeliano-finito, é preciso introduzir um conjunto de campos ω_μ, os quais transformam-se como segue (KUNIMASA, 1967) e (GRACIA-BONDIA, 2008):

$$\omega_\mu \to U^- \omega_\mu U - iU^- \partial_\mu U, \tag{5.7}$$

onde:

$$\omega_\mu = \frac{\sigma_a}{2}\omega^a_\mu. \tag{5.8}$$

Introduzimos os campos ω_μ em vez e um campo escalar B como no caso abeliano, posto que a inclusão deste campo B apresenta dificuldades para encontrar uma lei de transformação infinitesimal que resultasse em um quadro coerente para Stueckelberg a la Utiyama no caso não abeliano. Além disso, não conseguimos mostrar que esse novo campo vetorial é proporcional ao gradiente do campo B no nível de transformações infinitesimais, embora a referência (GRACIA-BONDIA, 2008) mostre que isso é possível em nível de transformações finitas. Por isso, seguindo as referências (KUNIMASA, 1967) e (GRACIA-BONDIA, 2008) o campo ω_μ transforma-se como se mostra na Eq. (5.7), o conjunto de campos ω_μ mantem a invariância de gauge local para campos vetoriais com massa, posto que os termos de massa estão contidas na forma:

$$m^2 Tr\left(A_\mu A^\mu\right) = \frac{1}{2} m^2 A_\mu^a A^{a\mu}.$$

A invariância se manifesta introduzindo-se os campos na forma: $G_\mu = A_\mu - \frac{1}{g}\omega_\mu$. A razão para isso ficará clara quando implementarmos, nas próximas páginas, o roteiro dedutivo de Utiyama. Por ora, veja-se:

$$m^2 Tr\left(A_\mu - \frac{\omega_\mu}{g}\right) = m^2 Tr\left(U^- A_\mu U - \frac{i}{g}U^-\partial_\mu U - \frac{1}{g}U^-\omega_\mu U + \frac{i}{g}U^-\partial_\mu U\right)$$

$$m^2 Tr\left[U^-\left(A_\mu - \frac{1}{g}\omega_\mu\right)U\right] = m^2 Tr\left[\left(A_\mu - \frac{1}{g}\omega_\mu\right)U^- U\right] = m^2 Tr\left[A_\mu - \frac{1}{g}\omega_\mu\right]. \tag{5.9}$$

Para ter a forma da transformação infinitesimal do campo ω_μ, usamos a expansão da matriz de transformação. Substituindo na equação (5.7), temos:

$$\frac{\sigma_a}{2}\omega_\mu^a \to \left(I - \frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a\right)\left(\frac{\sigma_b}{2}\omega_\mu^b\right)\left(I + \frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a\right) - i\left(I - \frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a\right)\partial_\mu\left(I + \frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a\right),$$

i.e.

$$\frac{\sigma_a}{2}\omega_\mu^a \to \frac{\sigma_b}{2}\omega_\mu^b + \frac{i}{4}\omega_\mu^b\epsilon^a\sigma_b\sigma_a - \frac{i}{4}\epsilon^a\omega_\mu^b\sigma_a\sigma_b + \frac{i}{8}\epsilon^c\omega_\mu^b\epsilon^a\sigma_c\sigma_b\sigma_a + \frac{\sigma_a}{2}\partial_\mu\epsilon^a - \frac{i}{4}\epsilon^b\sigma_b\partial_\mu\left(\epsilon^a\right)\sigma_a.$$

Tendo em conta que os termos de segunda ordem dos parâmetros de transformação são desprezíveis, e usando a equação 5.5, temos:

$$\frac{\sigma_a}{2}\omega_\mu^a \to \frac{\sigma_a}{2}\omega_\mu^a - \frac{\sigma_a}{2}\omega_\mu^b\epsilon^c\varepsilon_{bc}^a + \frac{\sigma_a}{2}\partial_\mu\epsilon^a,$$

ou seja,

$$\omega_\mu^a \to \omega_\mu^a + \epsilon^c\varepsilon_{cb}^a\omega_\mu^b + \partial_\mu\epsilon^a,$$

ou,

$$\omega_\mu^{\prime a} = \omega_\mu^a + \delta\omega_\mu^a = \omega_\mu^a + \epsilon^c\varepsilon_{cb}^a\omega_\mu^b + \partial_\mu\epsilon^a.$$

Assim, obtemos a regra de transformação infinitesimal para o campo ω_μ:

$$\delta\omega_\mu^a = \epsilon^c \varepsilon_{cb}^a \omega_\mu^b + \partial_\mu \epsilon^a. \tag{5.10}$$

Possívelmente há uma condição de Lorentz para o caso do grupo de transformações $SU(2)$, mas isso deve ser verificado para um caso particular do Lagrangiano, assim como vimos na seção 4.3.

5.1.2 Estudo do caso não abeliano com o formalismo de Utiyama

Agora vamos analizar o caso não abeliano, usando o formalismo de Utiyama. Seja o Lagrangiano $\mathcal{L}_{NA}$ que depende do tensor intensidade de campo de gauge $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a$, do campo de gauge A_μ^a e do campo de Stuckelberg ω_μ^a, posto que nossa experiência com o setor da teoria envolvendo o potencial de gauge A_μ^a, sabemos que a dependência da Lagrangiana nas suas derivadas só pode acontecer através do tensor intensidade do campo $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a$-vide o Capítulo 2. Por isso já partimos de uma Lagrangiana com a dependência funcional $\mathcal{L}_{NA}\left[\mathcal{F}_{\mu\nu}^a, A_\mu^a, \omega_\mu^a\right]$. Observe também que admitimos um campo de Stueckelberg não dinâmico: não existe dependência de $\mathcal{L}_{NA}$ nas derivadas de ω_μ^a. Essa é uma hipótese de simplicidade, que poderia ser relaxada em trabalhos futuros. Aqui queremos evitar as sutilezas de um campo auxiliar ω_μ^a, que foi introduzido apenas para dar massa a A_μ^a, e que também tenha sua própria dinâmica. Assim, a variação do Lagrangiano deve ser zero:

$$\delta\mathcal{L}_{NA} = \frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}^a}\delta\mathcal{F}_{\mu\nu}^a + \frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial A_\mu^a}\delta A_\mu^a + \frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\omega_\mu^a}\delta\omega_\mu^a = 0.$$

Usando as regras de transformação dos campos 5.6, 5.10 e 2.59, temos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}^a}\epsilon^c\varepsilon_{cb}^a\mathcal{F}_{\mu\nu}^b + \frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial A_\mu^a}\left(\epsilon^c\varepsilon_{cb}^a A_\mu^c + \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^a\right) + \frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\omega_\mu^a}\left(\epsilon^c\varepsilon_{cb}^a\omega_\mu^b + \partial_\mu\epsilon^a\right) = 0,$$

ou,

$$\epsilon^c\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}^a}\varepsilon_{cb}^a\mathcal{F}_{\mu\nu}^b + \frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial A_\mu^a}\varepsilon_{cb}^a A_\mu^c + \frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\omega_\mu^a}\varepsilon_{cb}^a\omega_\mu^b\right) + \partial_\mu\epsilon^a\left(\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial A_\mu^a} + \frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\omega_\mu^a}\right) = 0.$$

Obtemos, assim, 2 equações hierárquicas, posto que os parâmetros de transformação e suas derivadas são independentes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial \mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\varepsilon^a_{cb}\mathcal{F}^b_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial A^a_\mu}\varepsilon^a_{cb}A^c_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial \omega^a_\mu}\varepsilon^a_{cb}\omega^b_\mu = 0 \tag{5.11}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial A^a_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial \omega^a_\mu} = 0. \tag{5.12}$$

A segunda equação hierárquica sugere uma combinação do tipo:

$$G^a_\mu = A^a_\mu - \frac{1}{g}\omega^a_\mu.$$

Esta é a dedução que o método de Utiyama oferece para o objeto usado anteriormente na Eq. (5.9).

Assim passamos o estudo do Lagrangiano $\mathcal{L}_{NA}\left[\mathcal{F}^b_{\mu\nu}, A^c_\mu, \omega^b_\mu\right] \to \mathcal{L}'_{NA}\left[\mathcal{F}^b_{\mu\nu}, G^a_\mu\right]$. Calculamos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial A^a_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial G^b_\nu}\frac{\partial G^b_\nu}{\partial A^a_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial \mathcal{F}^b_{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathcal{F}^b_{\alpha\beta}}{\partial A^a_\mu} =$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial A^a_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial G^b_\nu}\frac{\partial A^b_\nu}{\partial A^a_\mu} - g\frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial \mathcal{F}^b_{\alpha\beta}}\left[f^b_{dc}A^d_\alpha\delta^c_a\delta^\mu_\beta + f^b_{dc}A^c_\beta\delta^d_a\delta^\mu_\alpha - f^b_{dc}A^d_\beta\delta^c_a\delta^\mu_\alpha - f^b_{dc}A^c_\alpha\delta^d_a\delta^\mu_\beta\right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial A^a_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial G^a_\mu} - g\left[\frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial \mathcal{F}^b_{\alpha\mu}}f^b_{da}A^d_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial \mathcal{F}^b_{\mu\alpha}}f^b_{ad}A^d_\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial \mathcal{F}^b_{\mu\alpha}}f^b_{da}A^d_\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial \mathcal{F}^b_{\alpha\mu}}f^b_{ad}A^d_\alpha\right] = \frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial G^a_\mu}.$$

Agora fazemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial \omega^a_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial G^b_\nu}\frac{\partial G^b_\nu}{\partial \omega^a_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial G^b_\nu}\frac{\partial}{\partial \omega^a_\mu}\left[A^b_\nu - \frac{1}{g}\omega^b_\nu\right] = -\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial G^b_\nu}\frac{\partial \omega^b_\nu}{\partial \omega^a_\mu} = -\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial G^a_\mu}.$$

Substituindo na equação 5.12,

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial A^a_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial \omega^a_\mu} = \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial G^a_\mu} - \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_{NA}}{\partial G^a_\mu} = 0.$$

Assim, fica satisfeita a segunda equação hierárquica. Agora vamos estudar a regra de transformação para o novo objeto G^a_μ usando as equações (5.6) e (5.10), então:

$$\delta G^a_\mu = \delta\left(A^a_\mu - \frac{1}{g}\omega^a_\mu\right) = \epsilon^c\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^a - \frac{1}{g}\left(\epsilon^c\varepsilon^a_{cb}\omega^b_\mu + \partial_\mu\epsilon^a\right),$$

ou seja,

$$\delta G_{\mu}^{a}=\epsilon^{c}\varepsilon_{cb}^{a}\left(A_{\mu}^{b}-\frac{1}{g}\omega_{\mu}^{b}\right)$$

$$\delta G_{\mu}^{a}=\epsilon^{c}\varepsilon_{cb}^{a}G_{\mu}^{b}.$$

Isso que mostra que os campos G_{μ}^{a} se transformam co-gradientemente, de uma maneira análoga ao que acontece com o tensor $\mathcal{F}_{\mu\beta}^{b}$. Calculamos a variação do Lagrangiano:

$$\delta\mathcal{L}'_{NA}=\frac{\partial\mathcal{L}'_{NA}}{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}^{a}}\delta\mathcal{F}_{\mu\nu}^{a}+\frac{\partial\mathcal{L}'_{NA}}{\partial G_{\mu}^{a}}\delta G_{\mu}^{a}=\frac{\partial\mathcal{L}'_{NA}}{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}^{a}}\epsilon^{c}\varepsilon_{cb}^{a}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{b}+\frac{\partial\mathcal{L}'_{NA}}{\partial G_{\mu}^{a}}\epsilon^{c}\varepsilon_{cb}^{a}G_{\mu}^{b}=0.$$

O Lagrangiano passa de $\mathcal{L}'_{NA}\to\mathcal{L}_{NA}$, assim, obtemos, finalmente:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}^{a}}\varepsilon_{cb}^{a}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{b}+\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G_{\mu}^{a}}\varepsilon_{cb}^{a}G_{\mu}^{b}=0.$$

Esta equação tem a mesma forma das equações (2.44) e (2.18), onde a quantidade G_{μ}^{b} contém implicitamente o termo de massa do campo vetorial, e o tensor intensidade leva a parte dinâmica do campo de gauge, satisfazendo a variação do Lagrangiano.

5.2 Corrente de conservação Stueckelberg-Utiyama

Agora vamos fazer o estudo da corrente de conservação para o caso do grupo de transformações $SU(2)$. Para isto, seja o Lagrangiano total do sistema, que envolve os campos de matéria $\Psi^{A}(x)$, os campos de gauge A_{μ}^{b} e campo de Stuckelberg ω_{μ}^{b}. Assim, $\mathcal{L}_{Total}\to\mathcal{L}_{Total}\left[\Psi^{A}(x),\partial_{\mu}\Psi^{A}(x),A_{\mu}^{b},\partial_{\nu}A_{\mu}^{b},\omega_{\mu}^{b}\right]$. Como vimos, o campo de Stueckelberg aparece para dar massa ao campo de gauge, mas não interage com o campo de materia Fazemos a variação do Lagrangiano:

$$\delta\mathcal{L}_{Total}=\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\Psi^{A}}\delta\Psi^{A}+\frac{\partial\mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_{\mu}\Psi^{A}\right)}\delta\left(\partial_{\mu}\Psi^{A}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}_{Total}}{\partial A_{\mu}^{a}}\delta A_{\mu}^{a}$$

$$+\frac{\partial\mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_{\nu}A_{\mu}^{a}\right)}\delta\left(\partial_{\nu}A_{\mu}^{a}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}_{Total}}{\partial\omega_{\mu}^{a}}\delta\omega_{\mu}^{a},$$

usando a regra da derivada do produto,

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial \Psi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_\mu \Psi^A\right)}\right)\right]\delta\Psi^A + \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial A^a_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_\nu A^a_\mu\right)}\right)\right]\delta A^a_\mu$$

$$+\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial \omega^a_\mu}\delta\omega^a_\mu + \partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_\nu \Psi^A\right)}\delta\Psi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_\nu A^a_\mu\right)}\delta A^a_\mu\right) = 0.$$

Usando as definições de derivada funcional, temos:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{Total}}{\delta \Psi^A(x)}\delta\Psi^A(x) + \frac{\delta \mathcal{L}_{Total}}{\delta A^a_\mu}\delta A^a_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial \omega^a_\mu}\delta\omega^a_\mu + \partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_\nu \Psi^A(x)\right)}\delta\Psi^A(x) + \frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_\nu A^a_\mu\right)}\delta A^a_\mu\right) = 0,$$

e usamos as equações (5.4), (5.6) e (5.10):

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{Total}}{\delta \Psi^A}\left(\frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a\Psi^A\right) + \frac{\delta \mathcal{L}_{Total}}{\delta A^a_\mu}\epsilon^c\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu + \frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_{Total}}{\delta A^a_\mu}\partial_\mu\epsilon^a + \frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial \omega^a_\mu}\epsilon^c\varepsilon^a_{cb}\omega^b_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial \omega^a_\mu}\partial_\mu\epsilon^a$$

$$+\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_\nu \Psi^A\right)}\left(\frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a\Psi^A\right) + \frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_\nu A^a_\mu\right)}\left(\epsilon^c\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^a\right)\right) = 0.$$

Lembrando as relações:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_\nu \Psi^A\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial\left(\nabla_\nu \Psi^A\right)},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial\left(\partial_\nu A^a_\mu\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial \mathcal{F}^a_{\nu\mu}},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial \omega^a_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial \omega^a_\mu} = -\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial G^a_\mu},$$

e isolando os termos que contém os parâmetros e suas derivadas, temos:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{Total}}{\delta \Psi^A}\left(\frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a\Psi^A\right) + \frac{\delta \mathcal{L}_{Total}}{\delta A^a_\mu}\epsilon^c\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu - \partial_\mu\left(\frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_{Total}}{\delta A^a_\mu}\right)\epsilon^a - \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial G^a_\mu}\epsilon^c\varepsilon^a_{cb}\omega^b_\mu - \partial_\mu\left(\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial G^a_\mu}\right)\epsilon^a$$

$$+\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial\left(\nabla_\nu \Psi^A\right)}\frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a\Psi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial \mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\epsilon^c\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial \mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\partial_\mu\epsilon^a - \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_{NA}}{\partial G^a_\nu}\epsilon^a + \frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_{Total}}{\delta A^a_\mu}\epsilon^a\right) = 0.$$

Conforme o tratamento desenvolvido no Capítulo 2, temos dois termos que se anulam independentemente. De fato, temos um termo volumétrico:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta\Psi^A}\left(\frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a\Psi^A\right)+\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta A^a_\mu}\epsilon^c\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu-\partial_\mu\left(\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta A^a_\mu}\right)\epsilon^a$$
$$-\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G^a_\mu}\epsilon^c\varepsilon^a_{cb}\omega^b_\mu-\partial_\mu\left(\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G^a_\mu}\right)\epsilon^a=0, \tag{5.13}$$

e um termo superficial:

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\left(\nabla_\nu\Psi^A\right)}\left(\frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a\Psi^A\right)+\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\epsilon^c\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu\right)$$
$$+\partial_\nu\left(\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\partial_\mu\epsilon^a-\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G^a_\nu}\epsilon^a+\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta A^a_\nu}\epsilon^a\right)=0. \tag{5.14}$$

Da equação (5.14), temos:

$$\epsilon^c\left[\partial_\nu\left(\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta A^c_\nu}\right)-\partial_\nu\left(\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G^c_\nu}\right)+\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\left(\nabla_\nu\Psi^A\right)}\frac{i}{2}\sigma_c\Psi^A\right)+\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu\right)\right]$$

$$+\partial_\mu\epsilon^c\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\left(\nabla_\nu\Psi^A\right)}\frac{i}{2}\sigma_c\Psi^A+\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu-\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G^c_\nu}+\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta A^c_\nu}+\partial_\nu\left(\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^c_{\nu\mu}}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\partial_\mu\partial_\nu\epsilon^a-\frac{1}{2g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\mu\nu}}\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^a=0.$$

Lembrando de novo que pela antisimetria do tensor intensidade, o último termo é nulo, assim, temos:

$$\epsilon^c\partial_\nu\left[\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta A^c_\nu}-\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G^c_\nu}+\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\left(\nabla_\nu\Psi^A\right)}\frac{i}{2}\sigma_c\Psi^A+\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu\right]$$

$$+\partial_\mu\epsilon^c\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\left(\nabla_\nu\Psi^A\right)}\frac{i}{2}\sigma_c\Psi^A+\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu-\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G^c_\nu}+\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta A^c_\nu}+\partial_\nu\left(\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^c_{\nu\mu}}\right)\right].$$

Pela independência dos parâmetros de transformação e suas derivadas, temos 2 equações:

$$\partial_\nu\left[\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta A^c_\nu}-\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G^c_\nu}+\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\left(\nabla_\nu\Psi^A\right)}\frac{i}{2}\sigma_c\Psi^A+\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu\right]=0 \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\left(\nabla_\nu\Psi^A\right)}\frac{i}{2}\sigma_c\Psi^A+\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu-\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G^c_\nu}+\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_{Total}}{\partial A^c_\nu}=0.$$

Definindo:

$$J^\nu_c\equiv\frac{\partial\mathcal{L}_{Total}}{\partial A^c_\nu}.$$

Assim temos:

$$J^\nu_c=\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial G^c_\nu}-g\frac{\partial\mathcal{L}_{NA}}{\partial\mathcal{F}^a_{\nu\mu}}\varepsilon^a_{cb}A^b_\mu-g\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\left(\nabla_\nu\Psi^A\right)}\frac{i}{2}\sigma_c\Psi^A. \tag{5.16}$$

Substituindo na equação (5.15):

$$\partial_\nu\left[\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta A^c_\nu}-\frac{1}{g}J^\nu_c\right]=0,$$

ou seja,

$$\partial_\nu J^\nu_c=\partial_\nu\left[\frac{\delta\mathcal{L}_{Total}}{\delta A^c_\nu}\right]. \tag{5.17}$$

A equação 5.17, mostra que se os campos de gauge satisfazem a equação de Euler-Lagrange, para o Lagrangiano total do sistema, obtemos correntes de conservação $\partial_\nu J^\nu_c=0$, onde a corrente tem uma contribuição a mais, em comparação com o resultado do formalismo de Utiyama. Esse termo a mais envolve os temos de massa dos campos de Yang-Mills e os campos de Stuckelberg para o caso , mas tudo preservando a invariância de gauge.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho, fizemos um estudo detalhado da teoria de Utiyama, para os casos abeliano e não abeliano. Vimos como o princípio de gauge relacionado a propriedades de simetria de um sistema físico está associada ao aparecimento de um campo mediador de interação A_μ, esse campo mediador, foi primeiro identificado no eletromagnetismo como consequência imediata das simetrias admitidas pelos campos elétrico e magnético. O que surpreende é o fato de outras interações fundamentais partilharem essa mesma propriedade; o trabalho de Utiyama mostra isso de forma sistemática e numa construção a partir de primeiros princípios.

Os campos de gauge, como a teoria de Utiyama mostra, são campos de natureza vetorial que não tem massa, para assim manter a invariância de gauge local; o tensor intensidade satisfaz a equação (2.61), e as derivadas ordinárias passam à forma $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$. A imposição de simetria local força a introdução de A_μ e determina como esses campos vetoriais interagem entre si e com os campos de matéria. Na teoria de Utiyama, A_μ não é um campo massivo.

O formalismo de Proca mostra a dinâmica dos campos vetoriais massivos. A condição de Lorentz é obtida de forma natural, mas o Lagrangiano de Proca não é invariante de gauge local. O formalismo de Stueckelberg, além de permitir a dinâmica dos campos de gauge vetoriais, mostra a invariância local. No tratamento tradicional de Stueckelberg para construir um potencial eletromagnético massivo, usa-se um campo escalar B e impondo uma condição de que os parâmetros de transformação obedecem à equação de Klein-Gordon (RUEGG, 2004).

Em nosso trabalho, fizemos a análise de tratar os potenciais vetoriais de gauge do caso abeliano como campos massivos, incluindo para isso um campo escalar B massivo em acordo com a proposta de Stueckelberg. O procedimento de Utiyama mostrou de maneira dedutiva que é necessário definirmos uma quantidade $G_\mu = mA_\mu - \partial_\mu B$, através da qual o termo de massa para o campo de gauge é introduzido no Lagrangiano. Obtivemos as correntes de conservação para a Lagrangiana total do sistema e mostramos que ela contém um termo dependente do campo de Stueckelberg através de G_μ. Em nosso tratamento do campo de Stueckelberg à maneira de Utiyama obtivemos uma condição de fixação de gauge de Lorentz para o campo $G_\mu$no caso abeliano para um Lagrangiano do tipo F^2+G^2. Nesta abordagem, o campo de gauge obedece à equação do tipo Proca.

Em nossa abordagem para o grupo $U(1)$ não foi preciso incluir uma condição de vínculo para o parâmetro de transformação para gerar massa para o campo de gauge A_μ; isso difere do que foi feito na Ref. (RUEGG, 2004), em que ϵ satisfaz uma equação do tipo Klein-Gordon. Estudamos uma maneira de conciliar essa diferença de abordagem no Apêndice A.

Também fizemos a análise de tratar os potenciais de gauge para o caso não abeliano como se fosem campos massivos. Neste caso, incluindo um campo vetorial não dinâmico ω_μ, conseguimos um termo de massa do campo A_μ. Obtivemos a regra de transformação infinitesimal para o campo ω_μe as correntes de consevação. A principal diferença o nosso resultado e aqueles obtidos nas Ref. (RUEGG, 2004) e (GRACIA-BONDIA, 2008) é o fato de não temos uma relação direta entre o campo ω_μ (caso não abeliano) e o campo B (caso abeliano).

Na abordagem do Capítulo 4, não foi essencial introduzir um vínculo sobre os parâmetros de transformação, com o objetivo de gerar massa para o campo de gauge A_μ. Neste abordagem, o campo de gauge obedece a equação do tipo Proca. Vimos também, que a corrente de conservação, tem uma dependência direta com o campo G_μ.

A ideia de introduzir o campo ω_μ não dinâmico surgiu da Ref. (RUEGG, 2004; GRACIA-BONDIA, 2008). Partimos de uma transformação finita para um campo vetorial, e obtivemos a regra de transformação infinitesimal para ω_μ. Então, usamos o roteiro de Utiyama, que nos levou a definir uma quantidade $G^a_\mu = A^a_\mu - \frac{1}{g}\omega^a_\mu$ parecida ao caso abeliano, que mantém a invariância de gauge ao mesmo tempo que concede massa ao potencial de gauge.

Algumas perspectivas futuras para continuação do trabalho incluem a análise do caso particular $\mathcal{L} \propto F^2 + G^2$ para a Lagrangiana do campo de gauge no caso $SU(2)$. Também pretendemos fazer a análise o análise da dinâmica de ω^a_μ, posto que no Capítulo 5, tratamos ao campo ω^a_μ como um campo não dinâmico (as derivadas parciais de ω^a_μ não estavam presentes no Lagrangiano). Queremos, ainda, checar as condições de fixação de gauge (Feynmann, Gupta-Bleuer, t'Hooft) (RUEGG, 2004; GRACIA-BONDIA, 2008). pretendemos fazer o estudo da teoria do ponto de vista quântico, onde aparecem as questões da Simetria BRST, fantasmas, etc. Uma outra avenida de pesquisa é fazer uma análise comparativa detalhada entre os mecanismos de geração de massa de Stueckelberg e Higgs. Uma outra perspectiva a futuro é fazer o estudo do caso gravitacional como teoria de gauge massiva Stueckelberg-Utiyama e suas possíveis aplicações.

REFERÊNCIAS

ACEVEDO, O. A.; CUZINATTO, R. R.; PIMENTEL, B. M.; POMPEIA, P. J. Teorias de gauge a la Utiyama, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 2018.

BUTKOV, E. **Mathematical Physics**. Massachusetts: Addison-Wesley, 1973.

GAUMÉ L. A.; VASQUEZ-MOZO, M. A. **An Invitation to Quantum Field Theory**. Salamanca: Springer, 2012.

GRACIA-BONDIA, J. M. Lecture on BRS invariance for massive boson fields. **arXiv**:0808.2853 [hep-th], 2008.

GRIFFITHS, D. **Introduction to Elementary Particle Physics**. 2nd ed. Willey-VCH, 2010.

KUNIMASA, T; GOTO, T. Generalization of the Stueckelberg Formalism to the Massive Yang-Mills Field. **Progress of Theoretical Physics**, p. 452-464, 1967.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Teoría Clásica de los Campos**. Segunda edición, volúmen 2. Moskú: REVERTÉ S. A., 1992

MORIYASU, K. An Elementary Primer for Gauge Theory, **World Scientific**, 1983.

O'RAIFEARTAIGH, L.**The Dawning of Gauge Theory**. New Jersey: Princeton University Press, 1997.

RUEGG, H.; RUIZ-ALTABA, M. The Stueckelberg Field. **International Journal od Modern Physics A**, p. 3265-3347, Aug 2004.

SOKOLOV, A. A.; TERNOV, O. M.; ZHUKOVSKI, V. CH.; BORISOV, A. V.

Electrodinámica Cuántica. Moscú: Mir, 1989.

SONODA, T.; TSAI, S.Y. The Generalized Stueckelberg Formalism and the Glashow-Weinberg-Salam Electroweak Model, **Progress of Theoretical Physics**, p. 878-880, 1984.

STUEKELBERG, E. C. G. **Die Wechselwirkungs Kraefte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkraefte.** Helv: Phys. Acta, III, p. 313, 1938.

SUDARSHAN, E. C. G.; MUKUNDA, N. Classical Dynamic: A Modern Perspective. **Willey-Interscience Publication**, 1974.

UTIYAMA, R. Invariant Theoretical Interpretation of Interaction, **Physical Review Letters**, 1956.

WEYL, H. **Gravitation and Electricity**. Berlin: Preuss. Akad, 1918.

YANG, C. N.; MILLS, R. L.Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. **Physical Review,** p. 96-191, 1954.

Apêndice A – Stueckelberg-Utiyama com vínculo

Uma tentativa para obter uma extensão do formalismo de Utiyama com o campo B do caso $U(1)$ sob as condições da seção 3.3 é fazendo uso dos multiplicadores de Lagrange, a qual é uma ferramenta matemática muito usada na Mecânica Clássica; Para isso, vejamos o seguinte Lagrangiano que contém o campo de gauge A e um campo escalar B (com as derivadas da primeira ordem):

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0\left(A, \partial A, B, \partial B, \lambda, \epsilon, \partial^2\epsilon\right) = \mathcal{L}_G\left(A, \partial A, B, \partial B\right) - \lambda\left(\partial^2 + m^2\right)\epsilon, \tag{1}$$

onde λ é um multiplicador de Lagrange e o parâmetro ϵ obedece à equação de Klein-Gordon:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\epsilon = 0. \tag{2}$$

A Eq. (2) é o vínculo sob os parâmetros de transformações adotado pelas Ref. (STUECKELBERG, 1938; GRACIA-BONDIA, 2008).

Os campos transformam-se como:

$$\delta A_\mu = A'_\mu - A_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon \tag{3}$$

$$\delta B = B' - B = C\epsilon \tag{4}$$

A variação do Lagrangiano é:

$$\delta\mathcal{L}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\delta\left(\partial_\mu A_\nu\right) + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial B}\delta B + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu B\right)}\delta\left(\partial_\mu B\right) - \lambda\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\epsilon.$$

Usando as eqs. (3) e (4),

$$\delta\mathcal{L}_0 = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial A_\mu}\frac{1}{g}\right)\left(\partial_\mu \epsilon\right) + \left[\frac{\mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\frac{1}{g}\right]\partial_\mu \partial_\nu \epsilon$$

$$+\left(\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial B}C\right)\epsilon + \left[\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu B\right)}C\right]\partial_\mu\epsilon + \left[-\lambda\eta^{\mu\nu}\right]\partial_\mu\partial_\nu\epsilon + \left(-\lambda m^2\right)\epsilon.$$

Sobre a exigência de:

$$\delta\mathcal{L}_0 = 0,$$

assim como na seção (2.2), temos equações hierárquicas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial B}C - \lambda m^2 = 0 \text{ (termos com } \epsilon) \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial A_\mu}\frac{1}{g} + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu B\right)}C = 0 \text{ (termos com } \partial_\mu\epsilon) \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\frac{1}{g} - \lambda\eta^{\mu\nu} = 0 \text{ (termos com } \partial_\mu\partial_\nu\epsilon). \tag{7}$$

Da equação hierárquica (7),

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = \lambda g\eta^{\mu\nu} \Rightarrow \mathcal{L}_G = \lambda g\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = \lambda g\left(\partial^\nu A_\nu\right).$$

Então, essa equação indica que a dependência de $\mathcal{L}_G$ com respeito à λ acontece pelo termo

$$\Lambda = \lambda g\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu\right).$$

Também, dessa mesma equação devido à simetria presente em $\partial_\mu\partial_\nu\epsilon$,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\frac{1}{g} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)}\frac{1}{g} - \frac{1}{2}\lambda\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\lambda\eta^{\nu\mu} = 0, \tag{8}$$

os dois primeiros termos indicam que a dependência de $\mathcal{L}_G$ em $\left(\partial_\mu A_\nu\right)$ acontece através de:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{9}$$

Então, passamos de $\mathcal{L}_G$ para $\mathcal{L}_1$, tal que:

$$\mathcal{L}_G\left(A, \partial A, B, \partial B\right) \to \mathcal{L}_1\left(A, \mathcal{F}, B, \partial B\right) + \Lambda = \mathcal{L}_1\left(A, \mathcal{F}, B, \partial B\right) + \lambda g\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu\right).$$

Vamos analisar a equação hierárquica (8) para $\partial_\mu\partial_\nu\epsilon$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\frac{1}{g} - \lambda\eta^{\mu\nu} = 0,$$

em termos dessas novas variáveis $(\mathcal{F}_{\mu\nu}, \partial^\mu A_\mu)$, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mathcal{F}_{\rho\sigma}} \frac{\partial \mathcal{F}_{\rho\sigma}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} + \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\left[\lambda g \eta^{\rho\sigma}\left(\partial_\rho A_\sigma\right)\right] = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}} + \lambda g \eta^{\mu\nu},$$

ou seja

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = 2\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} + \lambda g \eta^{\mu\nu}. \tag{10}$$

Usando (10) na equação (8):

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)}\right] - \lambda g \eta^{\mu\nu} - \lambda g \eta^{\mu\nu} = 2\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} + \lambda g \eta^{\mu\nu} + 2\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}} + \lambda g \eta^{\nu\mu} - \lambda g \eta^{\mu\nu} - \lambda g \eta^{\mu\nu} = 0$$

Isso mostra que a equação hierárquica para $\partial_\mu\partial_\nu\epsilon$ é satisfeita em termos de $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ e λ. Logo, passamos a:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_G\left(A, \partial A, B, \partial B\right) + \lambda\left(\partial_\mu\partial^\mu\epsilon + m^2\epsilon\right),$$

i.e.

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1\left(A, \mathcal{F}, B, \partial B\right) + \lambda g \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu\right) + \lambda\left(\partial_\mu\partial^\mu\epsilon + m^2\epsilon\right).$$

O termo envolvendo $\partial^\nu A_\nu$, pode ser incorporado ao termo de vínculo. Isso termina o estudo da equação hierárquica (7). Agora vamos analisar a equação hierárquica (6). Esta equação, pelo argumento de D'Alembert, que sugere que $\mathcal{L}_G$ depende de A_μ e $\partial_\mu B$ através da combinação:

$$G_\mu = \left(\partial_\mu B - g C A_\mu\right), \tag{11}$$

então:

$$\mathcal{L}_1\left(A, \mathcal{F}, B, \partial B\right) \to \mathcal{L}_2\left(A, \mathcal{F}, B, G\right),$$

e,

$$\mathcal{L}_G\left(A, \partial A, B, \partial B\right) = \mathcal{L}_2\left(A, \mathcal{F}, B, G\right) + \lambda g \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu\right).$$

Vamos estudar como fica o lado esquerdo da equação hierárquica (6) em termos da nova variável G_μ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial A_\mu} = \frac{\partial}{\partial A_\mu}\left[\mathcal{L}_2\left(A_\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}, B, G_\mu\right) + \lambda g \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu\right)\right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial A_\mu} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial A_\mu}\right|_G + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial G_\rho}\frac{\partial G_\rho}{\partial A_\mu} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial A_\mu}\right|_G + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial G_\rho}\left(-g C \delta^\mu_\rho\right) = \left.\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial A_\mu}\right|_G - g C \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial G_\mu},$$

também temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu B\right)}=\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial G_\rho}\frac{\partial G_\rho}{\partial\left(\partial_\mu B\right)}=\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial G_\rho}\frac{\partial\left(\partial_\rho B-gCA_\rho\right)}{\partial\left(\partial_\mu B\right)}=\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial G_\rho}\delta_\rho^\mu=\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial G_\mu},$$

logo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial A_\mu}\frac{1}{g}+\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu B\right)}C=\left[\left.\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial A_\mu}\right|_G-gC\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial G_\mu}\right]\frac{1}{g}+\frac{\partial L_2}{\partial G_\mu}C=\left.\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial A_\mu}\right|_G\frac{1}{g}-C\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial G_\mu}+\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial G_\mu}C,$$

ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial A_\mu}\frac{1}{g}+\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial\left(\partial_\mu B\right)}C=\left.\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial A_\mu}\right|_G\frac{1}{g},$$

que será zero somente se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial A_\mu}=0.$$

Ou seja, obtemos a condição de que termos do tipo $m^2A_\mu A^\mu$, não podem aparecer explicitamente na Lagrangiana, mas esses termos podem ser gerados através de G.

$$\mathcal{L}_2\left(A_\mu,\mathcal{F}_{\mu\nu},B,G_\mu\right)=\mathcal{L}_2\left(\mathcal{F}_{\mu\nu},B,G_\mu\right),$$

e passamos a:

$$\mathcal{L}_0=\mathcal{L}_1\left(A,F,B,\partial B\right)+\lambda g\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu\right)-\lambda m^2\epsilon=\mathcal{L}_2\left(\mathcal{F}_{\mu\nu},B,G_\mu\right)+\lambda g\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu\right)-\lambda m^2\epsilon.$$

Agora vamos estudar a última equação hierárquica:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial B}C-\lambda m^2=0,$$

em que vale:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial B}=\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial B}.$$

O argumento de D'Alembert aplicado à equação:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial B}=\frac{\lambda}{C}m^2,$$

sugere que a dependência de $\mathcal{L}_2$ em B deve acontecer na forma:

$$\mathcal{L}_2 \to \frac{\lambda}{C} m^2 B.$$

Logo,

$$\mathcal{L}_2 \left(\mathcal{F}_{\mu\nu}, B, G_\mu \right) = \mathcal{L}_3 \left(\mathcal{F}_{\mu\nu}, G_\mu \right) + \frac{\lambda}{C} m^2 B.$$

Assim:

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_3 \left(\mathcal{F}_{\mu\nu}, G_\mu \right) + g\lambda \left(\partial^\nu A_\nu + \frac{m^2}{Cg} B \right),$$

escolhendo:

$$C = \frac{m}{g}, \tag{12}$$

temos:

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_3 \left(\mathcal{F}_{\mu\nu}, G_\mu \right) + g\lambda \left(\partial^\nu A_\nu + mB \right). \tag{13}$$

Esta equação mostra, qual é a dependência explícita do Lagrangiano composto pelos campos A e B, tendo em conta que o parâmetro de transformação ϵ é uma função do espaço-tempo e satisfaz a equação (3.22).

A.1 Aplicação: $\mathcal{L}_G = F^2 + G^2$sob vínculos em ϵ

Para poder obter mais informação física, vamos supor que o Lagrangiano tem a seguinte estrutura:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + kG_\mu G^\mu + g\lambda \left(\partial^\nu A_\nu + mB \right).$$

Calculamos as equações de movimento para o campo A, tendo em conta que:

$$G_\mu = \left(\partial_\mu B - mA_\mu \right),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial A_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial G_\mu} \left(-m\delta_\mu^\alpha \right),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \left(\partial_\alpha A_\beta \right)} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} \left(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha \right) + g\lambda \eta^{\nu\mu} \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta.$$

Substituindo na equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \left(\partial_\alpha A_\beta \right)} \right) = 0,$$

temos:

$$2\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \mathcal{F}_{\beta\alpha}} - m\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial G_\alpha} - g\partial_\beta \lambda \eta^{\alpha\beta} = 0. \tag{14}$$

Calculamos o primeiro termo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \mathcal{F}_{\beta\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{F}_{\beta\alpha}}\left(-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathcal{F}^{\beta\alpha}\right),$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial G_\alpha} = \frac{\partial}{\partial G_\alpha}\left(kG_\mu G^\mu\right) = 2kG^\alpha.$$

Substituindo na Eq. (14), temos:

$$\partial_\beta \mathcal{F}^{\alpha\beta} - 2mkG^\alpha - g\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta\lambda = 0.$$

Tomando k=1/2 e substituindo G:

$$\partial_\beta \mathcal{F}^{\alpha\beta} + m^2 A^\alpha = \partial^\alpha(mB + g\lambda).$$

Existem duas interpretações possíveis, impondo condições na equação acima:
Primeira interpretação:

$$J^\alpha = \partial^\alpha(mB + g\lambda),$$

temos a equação de Proca com fonte onde o J é fonte.
Segunda interpretação.
Podemos sugerir que o lado direito é zero, um caso simples, então obtemos a equação de Proca:

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} + m^2 A^\alpha = 0,$$

e um vínculo entre B e lambda:

$$\lambda = -\frac{m}{g}B.$$

Agora vamos calcular as equações de movimento para o campo B, assim:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\beta B)} = 2k\frac{\partial G_\alpha}{\partial(\partial_\beta B)}G^\alpha,$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial B} = mg\lambda.$$

Substituindo na equação de Euler-Lagrange,

$$2k\partial_\beta\left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial(\partial_\beta B)}G^\alpha\right) - mg\lambda = 0,$$

tendo em conta que $k = 1/2$ e que:

$$G_\mu = \partial_\mu B - mA_\mu,$$

$$\frac{\partial G_\alpha}{\partial(\partial_\beta B)} = \delta^\beta_\alpha,$$

temos:

$$\partial_\beta\partial^\beta B - m\partial_\beta A^\beta - mg\lambda = 0. \tag{15}$$

Podemos usar a primeira interpretação, na Eq. (15). Com isso, obtemos:

$$\partial_\beta\partial^\beta B = m\partial_\beta A^\beta + mg\lambda.$$

Este resultado não tem uma interpretação fisica direita, sendo uma equação acoplada entre os campos A e B, usando a segunda interpretação:

$$\lambda = -\frac{m}{g}B$$

na Eq. (15), temos:

$$\partial_\beta\partial^\beta B + m^2 B = m\partial_\beta A^\beta,$$

ou seja, o campo B obedece à equação de Klein-Gordon com fonte.

A.2 Correntes de Stueckelberg-Utiyama com vínculo nos parâmetros de transformação

Vamos calcular a corrente conservada do sistema total para um caso geral, composto pelos campos ϕ^A, B e A_μ no caso $U(1)$:

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_T[\phi^A, \partial_\mu\phi^A, A_\mu, \partial_\nu A_\mu, B, \partial_\mu B] = \mathcal{L}_{M+int}[\phi^A, \nabla_\mu\phi^A] + \mathcal{L}_0[A_\mu, \partial_\nu A_\mu, B, \partial_\mu B]. \tag{16}$$

Da equação (13), temos:

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_{M+int}[\phi^A, \nabla_\mu\phi^A] + \mathcal{L}_3[\mathcal{F}_{\mu\nu}, G_\mu] + g\lambda\left(\partial^\nu A_\nu + mB\right), \tag{17}$$

cuja variação deve anular-se:

$$\delta\mathcal{L}_T \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial A_\mu}\delta A_\mu+\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\delta(\partial_\nu A_\mu)+\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial\phi^A}\delta\phi^A+\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\delta(\partial_\mu\phi^A)+\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial B}\delta B+\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)}\delta(\partial_\mu B). \tag{18}$$

Lembrando que $[\delta,\partial]=0$, calculamos as derivadas:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\delta\left(\partial_\nu A_\mu\right)=\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\delta A_\mu\right)-\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right)\delta A_\mu, \tag{19}$$

e,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\delta\left(\partial_\mu\phi^A\right)=\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\delta\phi^A\right)-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\right)\delta\phi^A. \tag{20}$$

Para o campo B:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)}\delta\left(\partial_\mu B\right)=\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)}\delta B\right)-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)}\right)\delta B. \tag{21}$$

Substituindo as equações (19), (21) e (20) na equação (18):

$$\delta\mathcal{L}_T=\left[\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial A_\mu}-\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right)\right]\delta A_\mu+\left[\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial\phi^A}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\right)\right]\delta\phi^A$$

$$+\left[\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial B}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)}\right)\right]\delta B+\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\delta\phi^A+\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta A_\nu+\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)}\delta B\right\}.$$

Definindo:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial A_\mu}-\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right) \tag{22}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta\phi^A}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial\phi^A}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\right) \tag{23}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta B}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial B}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)}\right). \tag{24}$$

Temos:

$$\delta\mathcal{L}_T=\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\delta A_\mu+\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta\phi^A}\delta\phi^A+\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta B}\delta B+\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\delta\phi^A+\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta A_\nu+\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)}\delta B\right\}. \tag{25}$$

No primeiro termo da equação (25) substituímos a eq. (3),

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\delta A_\mu=\frac{1}{g}\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\epsilon\right)-\frac{1}{g}\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right)\epsilon. \tag{26}$$

Também temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}, \tag{27}$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} + g\lambda\eta^{\mu\nu}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\mu B)} = \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial G_\mu}, \tag{29}$$

substituindo as equações (26,27,28,29) na equação (25):

$$\delta\mathcal{L}_T = \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \phi^A}\delta\phi^A - \frac{1}{g}\epsilon\partial_\mu\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) + \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta B}\delta B$$

$$+ \partial_\mu\left\{\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}}\delta A_\nu + \frac{1}{g}\epsilon\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) + g\lambda\eta^{\mu\nu}\delta A_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial G_\mu}\delta B\right\}. \tag{30}$$

Fazendo as definições:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \phi^A}\delta\phi^A - \frac{1}{g}\epsilon\partial_\mu\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) + \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta B}\delta B \tag{31}$$

$$\mathcal{U}^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}}\delta A_\nu + \frac{1}{g}\epsilon\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) + g\lambda\eta^{\mu\nu}\delta A_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial G_\mu}\delta B, \tag{32}$$

temos:

$$\mathcal{D} + \partial_\mu \mathcal{U}^\mu = 0. \tag{33}$$

Nesta forma, fazemos integração na região Ω do espaço-tempo onde os campos estão definidos:

$$\int_\Omega \mathcal{D} d^4x + \int_\Omega (\partial_\mu \mathcal{U}^\mu) d^4x = 0.$$

Pelo teorema de Ostrogradski-Gauss a integral da divergência de $\mathcal{U}^\mu$, no volume Ω é igual à integral de superfície ao longo da fronteira $\partial\Omega$, deste mesmo volume, i.e.:

$$\int_\Omega (\partial_\mu \mathcal{U}^\mu) d^4x = \oint_{\partial\Omega} \mathcal{U}^\mu d\sigma_\mu,$$

sendo $d\sigma_\mu$ um elemento de superfície orientado em $\partial\Omega$.

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{U}^\mu d\sigma_\mu = \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \left\{\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}}\delta A_\nu + \frac{1}{g}\epsilon\left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right) + g\lambda\eta^{\mu\nu}\delta A_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial G_\mu}\delta B\right\}.$$

Tendo em conta que:

$$\delta\phi^A = \epsilon I^A_B \phi^B, \tag{34}$$

$$\delta A_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon, \tag{35}$$

$$\delta B = \frac{m}{g}\epsilon, \tag{36}$$

temos:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{U}^\mu d\sigma_\mu = \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \left\{ \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)} I^A_B \phi^B + \frac{1}{g}\epsilon \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial G_\mu} \frac{m}{g}\epsilon \right\}$$

$$+ \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \left[\frac{1}{g}\partial_\nu \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} + \partial_\nu \epsilon \lambda \eta^{\mu\nu} \right],$$

assim:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{U}^\mu d\sigma_\mu = \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \epsilon \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)} I^A_B \phi^B + \frac{1}{g} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial G_\mu} C \right\} + \frac{1}{g} \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \partial_\nu \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}}.$$

As funções ϵ e $\partial_\mu \epsilon$ são escolhidas de tal forma que na fronteira $\partial\Omega$ sejam zero,

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{U}^\mu d^4\sigma_\mu = 0,$$

assim:

$$\int_\Omega \mathcal{D} d^4x = 0.$$

Essas identidades são válidas para qualquer que seja o volume Ω, então:

$$\mathcal{D} = 0, \tag{37}$$

$$\partial_\mu \mathcal{U}^\mu = 0. \tag{38}$$

Nas equações (31) e (32):

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \phi^A} \delta\phi^A - \frac{1}{g}\epsilon \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \right) + \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta B} \delta B = 0 \tag{39}$$

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)} \delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}} \delta A_\nu + \frac{1}{g}\epsilon \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \right) + g\lambda\eta^{\mu\nu} \delta A_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial G_\mu} \frac{m}{g}\epsilon \right\} = 0. \tag{40}$$

Da equação (40):

$$\epsilon\left\{\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_B\phi^B\right)+\frac{1}{g}\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial G_\mu}\frac{m}{g}\right\}$$

$$+\frac{1}{g}\partial_\nu\epsilon\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}}\right)+\frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right)+\partial_\mu\epsilon\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_B\phi^B\right)+\partial_\mu\epsilon\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial G_\mu}\frac{m}{g}$$

$$+\frac{1}{g}\partial_\mu\partial_\nu\epsilon\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}^b_{\mu\nu}}+\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\epsilon\lambda\eta^{\mu\nu}=0,$$

tendo em conta a equação (2),

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\epsilon=-m^2\epsilon,$$

temos:

$$\epsilon\left\{\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_B\phi^B+\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}+\frac{m}{g}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial G_\mu}\right)\right]-m^2\lambda\right\}$$

$$+\partial_\mu\epsilon\left\{\frac{1}{g}\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}_{\nu\mu}}\right)+\frac{1}{g}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right)+\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_B\phi^B\right)+\frac{m}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial G_\mu}\right\}$$

$$+\frac{1}{g}\partial_\mu\partial_\nu\epsilon\frac{\partial\mathcal{L}_3}{\partial\mathcal{F}_{\mu\nu}}=0. \tag{41}$$

O último termo e identicamente nulo, assim:

$$\epsilon\left\{\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_B\phi^B+\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}+\frac{m}{g}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial G_\mu}\right)\right]-m^2\lambda\right\}$$

$$+\partial_\mu\epsilon\left\{\frac{1}{g}\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\mathcal{F}_{\nu\mu}}\right)+\frac{1}{g}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right)+\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_B\phi^B\right)+\frac{m}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial G_\mu}\right\}=0. \tag{42}$$

Usando o mesmo argumento de que os parâmetros e suas derivadas são independentes, obtemos:

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_B\phi^B+\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}+\frac{m}{g}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_3}{\partial G_\mu}\right)\right]-m^2\lambda=0 \tag{43}$$

$$\frac{1}{g}\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_3}{\partial\mathcal{F}_{\nu\mu}}\right)+\frac{1}{g}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A_\mu}\right)+\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}I^A_B\phi^B\right)+\frac{m}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_3}{\partial G_\mu}=0 \tag{44}$$

Da equação (22) e (17),

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}} \right),$$

substituindo na equação (44):

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)} I^A_B \phi^B + \frac{m}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial G_\mu} = 0.$$

Definindo:

$$J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\mu}, \tag{45}$$

quantidade que vamos chamar de corrente, temos:

$$J^\mu = -g \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)} I^A_B \phi^B + \frac{\mathrm{m}}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial G_\mu} \right) \tag{46}$$

Substituindo na equação (43),

$$\partial_\mu \left\{ -\frac{1}{g} J^\mu_a + \frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \right\} - m^2 \lambda = 0$$

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} \right) + g m^2 \lambda. \tag{47}$$

Se a densidade Lagrangiana total $\mathcal{L}_T$ satisfaz e equação de Euler-Lagrange para o potencial de gauge A_μ i.e.:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A_\mu} = 0,$$

obtemos:

$$\partial_\mu J^\mu = g m^2 \lambda$$

Não temos correntes de conservação, posto que as derivadas das correntes são não nulas, a ausência de correntes conservadas é uma desvantagem dessa abordagem, isso pode indicar que adotar o vínculo sobre os parâmetros ϵ pode ser não consistente dentro da teoria de Utiyama.

$$J^\mu = -g \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{M+int}}{\partial(\nabla_\mu \phi^A)} I^A_B \phi^B + \frac{\mathrm{m}}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_\mu} \right). \tag{48}$$

Agora vamos aplicar o aprendido para o caso $U(1)$, sejam os campos $\phi^A(x) = (\varphi^{\bar{A}}(x), \varphi^{*A'}(x)$ com $A = 1, 2, 3, ..., N$ (com N inteiro positivo), composto por $\varphi^{\bar{A}}(x)$

e seu conjugado $\varphi^{*A'}(x)$ onde $\bar{A} = 1, 2, 3, ..., \frac{N}{2}$ e $A' = \frac{N}{2} + 1, ..., N$. Transforma-se como:

$$\varphi^{\bar{A}(x)} \to e^{i\epsilon}\varphi^{\bar{A}(x)}, \tag{49}$$

$$\varphi^{*A'}(x) \to e^{-i\epsilon}\varphi^{*A'}(x). \tag{50}$$

A forma infinitesimal $\phi'^{A}(x) = \phi^{A}(x) + \delta\phi^{A}(x)$ dá:

$$\delta\varphi^{\bar{A}}(x) = i\epsilon\varphi^{\bar{A}}(x),$$

$$\delta\varphi^{*A'}(x) = -i\epsilon\varphi^{*A'}(x),$$

temos os geradores das transformações,

$$I^{\bar{A}}_{(a)B} = i\delta^{\bar{A}}_{B},$$

$$I^{A'}_{(a)B} = -i\delta^{A'}_{B},$$

assim,

$$\left[I_{(a)}, I_{(b)}\right]^{A}_{B} = 0,$$

e a constante de estrutura é nula.

$$f^{c}_{ab} = 0.$$

Assim, especificamos a derivada covariante $\nabla_\mu\phi^A(x) = \partial_\mu\phi^A(x) - gA^a_\mu I^A_{(a)B}\phi^B(x)$, neste caso:

$$\nabla_\mu\phi^A_{(x)} = \begin{cases} \nabla_\mu\varphi^{\bar{A}}_{(x)} = \partial_\mu\varphi^{\bar{A}}_{(x)} - ig\delta^{\bar{A}}_{B}\varphi^{B}_{(x)}A_\mu & \text{para} \quad \bar{A} = 1, 2, 3, ..., \frac{N}{2} \\ \nabla_\mu\varphi^{*A'}_{(x)} = \partial_\mu\varphi^{*A'}_{(x)} + ig\delta^{A'}_{B}\varphi^{*B}_{(x)}A_\mu & \text{para} \quad A' = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, ..., N \end{cases} \tag{51}$$

assim,

$$\nabla_\mu\varphi^{\bar{A}} = \partial_\mu\varphi^{\bar{A}} - ig\phi^{\bar{A}}A_\mu \qquad \nabla_\mu\varphi^{*A'} = \partial_\mu\varphi^{*A'} + ig\varphi^{*A'}A_\mu. \tag{52}$$

Lembrando também que:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

$$G_\mu = \partial_\mu B - mA_\mu.$$

E usando (48),

$$J^\mu \equiv -ig\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\nabla_\mu\varphi^{\bar{A}})}\varphi^{\bar{A}} - \frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\nabla_\mu\varphi^{*A'})}\varphi^{*A'} - \frac{\mathrm{mi}}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial G_\mu}\right). \tag{53}$$

O campo B não aparece explicitamente na derivada covariante, posto que o campo de matéria só interage com o campo A. A contribuição do campo de Stueckelberg está presente na quantidade G_μ (mantendo o termo de massa no Lagrangiano). A tentativa com o multiplicador de Lagrange não é consistente com a teoria de Utiyama, posto que não temos correntes conservadas. A abordagem do Capítulo 3. Apresenta a mesma condição para os parâmetros de transformação, onde os parâmetros de transformação obedecem à equação de Klein-Gordon, a principal diferença, é a maneira de introduzir essa condição no Lagrangiano através dos multiplicadores de Lagrange, obtendo como já vimos, correntes não conservadas, pelo fato de que λ é, em princípio, diferentes de zero. A abordagem do Capítulo 4, é muito diferente, posto que os parâmetros de transformação não estão restritos, nesse caso, como já vimos, temos correntes de conservação.