UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Elves Silva Moreira

CONGRUÊNCIAS EM RELATIVIDADE GERAL E CONSEQUÊNCIAS COSMOLÓGICAS

Ouro Branco - MG

2022

Elves Silva Moreira

CONGRUÊNCIAS EM RELATIVIDADE GERAL E CONSEQUÊNCIAS COSMOLÓGICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba, em associação ampla com a Universidade Federal de Alfenas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física de Partículas e Campos.
Linha de Pesquisa: Gravitação e Cosmologia.

Orientador: Prof. Dr. Érico Goulart de Oliveira Costa

Ouro Branco – MG
Departamento de Física e Matemática - UFSJ
2022

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Moreira, Elves Silva.
M838c   Congruências em relatividade geral e consequências cosmológicas / Elves Silva Moreira ; orientador Érico Goulart de Oliveira Costa. -- Ouro Branco, 2022.
102 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei, 2022.

1. Relatividade Geral. 2. Congruências tipo tempo. 3. Equações de Evolução. 4. Equação de Raychaudhuri. 5. Cosmologia. I. Costa, Érico Goulart de Oliveira, orient. II. Título.

Elves Silva Moreira

CONGRUÊNCIAS EM RELATIVIDADE GERAL E CONSEQUÊNCIAS COSMOLÓGICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei, Campos Alto Paraopeba, em associação ampla com a Universidade Federal de Alfenas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física de Partículas e Campos.
Linha de Pesquisa: Gravitação e Cosmologia.

Aprovada em: 31/05/2022.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Érico Goulart de Oliveira Costa (Orientador)
Universidade Federal de São João del Rei (UFSJ)

____

Prof. Dr. José Eloy Ottoni
Universidade Federal de São João del Rei (UFSJ)

____

Prof. Dr. Sofiane Faci
Universidade Federal Fluminense (UFF)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 3 / 2022 - PPGF (13.29)

Nº do Protocolo: 23122.022004/2022-81

São João del-Rei-MG, 06 de junho de 2022.

São João del-Rei, 31 de maio de 2022.

A dissertação de mestrado **"Congruências em relatividade geral e consequências cosmológicas"** elaborada por **Elves Silva Moreira** e aprovada por todos os membros da banca examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

(Assinado digitalmente em 06/06/2022 14:49)
ERICO GOULART DE OLIVEIRA COSTA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 2351300

(Assinado digitalmente em 07/06/2022 17:20)
JOSE ELOY OTTONI
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 1673925

(Assinado digitalmente em 06/06/2022 14:29)
SOFIANE FACI
ASSINANTE EXTERNO
Passaporte: V799154-L

Dedico este trabalho à toda a minha família, em especial para a minha mamãe Elza Silva Moreira, e para a minha vovó Maria das Virgens Silva.

Dedico-o também para aquele que foi o meu amigo, mentor, e maior incentivador para eu trilhar o caminho da carreira científica: Prof. Dr. Peter Leroy Faria. (In Memoriam)

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Érico Goulart, pela sua imensa generosidade ao compartilhar o conhecimento, pela sua paciência com os não iniciados em Física Teórica, e por sua extraordinária capacidade de compreensão e empatia.

À toda a minha família, em especial a minha mamãe Elza, minha vovó Maria, minha irmã Elma, meus irmãos Herbert e Carlos, por todo o apoio incondicional.

À minha companheira (atualmente noiva) Lorrayne, por sempre estar ao meu lado, nos melhores e nos piores momentos. Obrigado por tentar me fazer enxergar com os seus olhos o que há de melhor em mim, e por ter me ajudado a amadurecer enquanto filho, irmão, tio, companheiro, e enquanto profissional.

Serei eternamente grato ao tempo que pude conviver com o Prof. Peter Leroy ao longo da minha graduação na PUC MG, enquanto monitor de Astronomia e Astrofísica no Museu de Ciências Naturais da mesma instituição. Devido a esse convívio, conversas e devaneios, que a semente do sonho de tornar-me um professor e pesquisador universitário foi plantada. Para além de um mentor, o Prof. Peter foi para mim muito mais que um sábio amigo e companheiro. Infelizmente, a sua passagem precoce nos impossibilitou de dialogarmos com mais profundidade (de minha parte, naturalmente) sobre assuntos de interesse em comum, dentre os quais encontram-se os tópicos deste trabalho.

Agradeço também à UFSJ pelo apoio financeiro.

“Como sou pouco e sei pouco, faço o pouco que me cabe me dando por inteiro.”

Ariano Suassuna

“Pode-se afirmar que o eterno mistério do mundo é sua compreensibilidade.”

Albert Einstein

RESUMO

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein é caracterizada como uma teoria geométrica da gravitação, posto que sua formulação trata de uma identificação entre a geometria do espaço-tempo quadridimensional (1 dimensão temporal mais 3 dimensões espaciais) e o conteúdo total de matéria-energia existente. Toda teoria de gravitação sugere uma Cosmologia correspondente. Assim, tal como a Teoria da Gravitação Universal de Newton (TGUN) deu sustentação para o desenvolvimento de uma Cosmologia Newtoniana, a TRG possibilitou a formulação de modelos Cosmológicos Relativistas. O primeiro modelo relativista de Universo foi obtido pelo próprio Einstein, em 1917. O segundo modelo relativista do Cosmos foi formulado por Friedmann, entre os anos de 1922 e 1924. Neste trabalho, reproduz-se as chamadas Métricas de Friedmann por meio de congruências do tipo-tempo. Os modelos cosmológicos de Friedmann constituem o ponto de partida teórico para a elaboração do Modelo Cosmológico Padrão (MCP), também chamado de modelo Λ-CDM. Embora historicamente superados, o estudo detalhado dos primeiros modelos cosmológicos constitui um rico laboratório matemático para se adquirir maturidade para estudos e pesquisas futuras em Gravitação e Cosmologia.

Palavras-chave: Teoria da Relatividade Geral; Congruências tipo-tempo; Parâmetros Cinemáticos; Equações de Evolução; Equação de Raychaudhuri, Modelos FLRW.

ABSTRACT

Einstein's General Theory of Relativity (GRT) is characterized as a geometric theory of gravitation, since its formulation deals with an identification between the geometry of four-dimensional space-time (1 temporal dimension plus 3 spatial dimensions) and the total content of matter-energy existing. Every theory of gravitation suggests a corresponding cosmology. Thus, just as Newton's Theory of Universal Gravitation (NTUG) supported the development of a Newtonian Cosmology, the TRG enabled the formulation of Relativistic Cosmological models. The first relativistic model of the Universe was obtained by Einstein himself, in 1917. The second relativistic model of the Cosmos was formulated by Friedmann, between 1922 and 1924. In this work, the so-called Friedmann Metrics are reproduced through congruences of the time-type. Friedmann's cosmological models constitute the theoretical starting point for the elaboration of the Standard Cosmological Model (SCM), also called Λ -CDM model. Although historically outdated, the detailed study of the first cosmological models constitutes a rich mathematical laboratory to acquire maturity for future studies and research in Gravitation and Cosmology.

Keywords: General Theory of Relativity; Timelike Congruences; Kinematic Parameters; Evolution Equations; Raychaudhuri's Equation; FLRW Models.

CONVENÇÕES E NOTAÇÕES

- Índices gregos minúsculos, como: $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, variam de 0 a 3.

- Índices latinos minúsculos, como: i, j, k, l, variam de 1 a 3.

- Índices latinos minúsculos, como: a, b, c, d, variam de 1 a D, onde D é a dimensão do espaço em questão.

- Índices repetidos seguem à convenção da soma de Einstein. Exemplo:

$$\sum_{\mu=0}^{3} V^{\mu} e_{\mu} = V^{0}e_{0} + V^{1}e_{1} + V^{2}e_{2} + V^{3}e_{3} \equiv V^{\mu}e_{\mu}$$

- Sistema de unidades naturais → $c = 8\pi G \equiv 1$, onde c é a velocidade da luz, e G é a constante da Gravitação Universal de Newton.

- Constante de acoplamento → $\kappa = \frac{8\pi G}{c^{4}} \equiv 1$

- Assinatura da métrica → $(+,-,-,-)$

- Derivada parcial de V^{ν} → $\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} V^{\nu} \equiv V^{\nu}{}_{,\mu}$

- Símbolos de Christoffel → $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}\right)$

- Derivada covariante de V^{ν} → $V^{\nu}{}_{;\mu} = V^{\nu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu} V^{\lambda}$

- Tensor de Riemann → $V_{\alpha;\mu\nu} - V_{\alpha;\nu\mu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} V^{\beta}$, também podendo ser obtido diretamente em função dos Símbolos de Christoffel:

$$R^{\mu}{}_{\epsilon\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\varepsilon\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\varepsilon\beta,\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\varepsilon\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\varepsilon}$$

- Tensor de Ricci → $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$

- Escalar de Ricci → $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$

- Tensor de Einstein → $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu}$

ABREVIAÇÕES

- TRG: Teoria da Relatividade Geral;
- TGUN: Teoria da Gravitação Universal de Newton;
- ECE: Equações de Campo de Einstein;
- PE: Princípio da Equivalência;
- PC: Princípio Cosmológico;
- EFE: Equação Fundamental de Evolução;
- MCP: Modelo Cosmológico Padrão;
- FLRW: Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker;
- RCFM: Radiação Cósmica de Fundo em Microondas.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

Introdução

Em 1915, o físico alemão Albert Einstein (1879–1955) concluiu a formulação da sua Teoria da Relatividade Geral (TRG), publicada no ano seguinte, em 1916, com o artigo intitulado "Die Feldgleichungen der Gravitation" [1], cuja tradução para o português é "As Equações de Campo da Gravitação", disponível em [2]. Tal teoria pode ser identificada como uma teoria geométrica da gravitação, pois ela trata da relação do conteúdo de matéria-energia com a geometria do espaço-tempo.

No mesmo ano de publicação do artigo que apresentou a TRG, em 1916, outro físico alemão, Karl Schwarzschild (1873–1916), deu uma importante contribuição para os primeiros anos de desenvolvimento da TRG ao apresentar a primeira solução exata das Equações de Campo de Einstein (ECE). A solução de Schwarzschild, aplicável à parte externa de um corpo estático[1], com distribuição de massa com simetria esférica, revelou-se bastante importante para consolidação da TRG, pois permitiu diversos testes da teoria ao ter suas previsões confrontadas com as observações astronômicas dos principais corpos pertencentes ao nosso Sistema Solar [3].

Tal como a Teoria da Gravitação Universal de Newton (TGUN) sugere uma Cosmologia Newtoniana, a Teoria da Relatividade Geral, por ser ela uma teoria de gravitação, também propõe uma visão de mundo, ou seja, uma Cosmologia Relativista.

Em 1917, o próprio Einstein aplicou as suas equações de campo da TRG ao Universo como um todo, "inaugurando", assim, a Cosmologia Moderna. O modelo de Universo de Einstein foi apresentado no artigo intitulado "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie" [5], em português: "Considerações Cosmológicas da Teoria da Relatividade Geral". O modelo cosmológico einsteiniano possui como principais características o fato dele ser estático, homogêneo, isotrópico, finito, ilimitado, e com simetria espacial esférica. Para a época, segunda década do século XX, o seu modelo cosmológico representava a concepção de mundo vigente.

Historicamente, o primeiro modelo cosmológico relativista foi obtido pelo próprio Einstein. O segundo[2] foi obtido pelo matemático, físico e meteorologista russo Alexander

---

[1] Embora não se trate de objetos estáticos, a solução de Schwarzschild também pode ser aplicada em corpos que possuem movimentos de baixa magnitude, tais como os planetas (e suas luas) do Sistema Solar.

[2] Vale destacar que, ainda no ano de 1917, o físico, astrônomo e matemático neerlandês Willen de Sitter (1872–1934) também elaborou um Modelo Cosmológico Relativista. No entanto, o seu modelo era para um espaço completamente vazio, ou seja, na total ausência de matéria-energia. Por esse motivo, em termos de capacidade de

Friedmann (1888–1925). O primeiro Modelo Cosmológico de Friedmann foi elaborado em 1922, onde ele apresenta uma nova solução exata para as ECE [6]. Em 1924, ele publica um artigo com um modelo mais geral, que apresenta três possibilidades de métricas (geometrias do espaço-tempo) para o Universo, a depender da sua densidade total de matéria-energia, são elas: um Universo finito, fechado e ilimitado; um Universo aberto e infinito; um Universo plano e infinito [3]. Vale destacar que todos esses modelos obtidos por Friedmann são dinâmicos, apresentando fases de expansão, ou de contração, a depender da configuração física do sistema.

Neste trabalho, nos concentramos em reproduzir as soluções cosmológicas obtidas por Friedmann, por meio de uma abordagem das congruências do tipo-tempo.

O trabalho foi desenvolvido da seguinte maneira:

- No Capítulo 1, nos dedicamos a fazer uma breve introdução ao ferramental matemático mínimo necessário para se acompanhar os conteúdos posteriores, priorizando-se por um tratamento operacional da álgebra tensorial no espaço-tempo;
- No Capítulo 2, faz-se uma introdução formal à TRG, destacando algumas características e propriedades dos seus principais objetos matemáticos, tais como o tensor de Riemann, o tensor de Ricci, o escalar de Ricci, e o tensor de Einstein;
- No Capítulo 3, tratamos das congruências do tipo-tempo no contexto da TRG, apresentamos os parâmetros cinemáticos (fator de expansão, tensor de cisalhamento e o tensor de vorticidade), bem como as suas equações de evolução. Também neste capítulo, faz-se a decomposição do tensor momento-energia, demonstrando as suas equações de conservação de energia e momento;
- No Capítulo 4, inicia-se com um breve histórico do Modelo Cosmológico Padrão (MCP), chama-se a atenção para o “Grande Debate” travado na primeira metade do século passado, onde é discutido o tamanho do nosso Universo, e o modelo de Universo de Einstein é apresentado de forma qualitativa;
- No Capítulo 5, apresentamos o Princípio Cosmológico (homogeneidade e isotropia do Universo), as métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) para um observador comóvel são obtidas, e a solução exata para as Equações de Campo de Einstein para esse mesmo observador são apresentadas. O capítulo finaliza com a obtenção das equações de estado para as eras cosmológicas.

---

descrição das características físicas do Universo, o Modelo de Friedmann pode ser considerado como o segundo Modelo Cosmológico Relativista.

- No Capítulo 6 encontram-se as conclusões, bem como algumas considerações sobre as questões das quais tratam a Cosmologia, enquanto Ciência da totalidade.

Ao longo de todo o trabalho, buscou-se, sempre que possível, desenvolver todas as passagens matemáticas e manipulações algébricas da forma mais clara e detalhada possível, de forma tal que, um (a) leitor (a) que tenha interesse pelo assunto, ainda que seja iniciante, seja capaz de acompanhar e reproduzir todos os passos necessários para se obter as expressões fundamentais[3].

[3] Para um (a) leitor (a) mais experiente, já familiarizado com o tema, tal tratamento pode lhe parecer demasiadamente detalhado. No entanto, o desenvolvimento do presente trabalho também tem como objetivo a produção de um material com valor didático para futuros (as) pesquisadores (as) em Gravitação e Cosmologia.

Capítulo 1

1 PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Neste capítulo, objetiva-se apresentar o ferramental matemático mínimo necessário para que seja possível trabalhar com a Teoria da Relatividade Geral (TRG), que, por sua vez, é o alicerce fundamental para o estudo dos modelos cosmológicos padrões, dentre eles, os Modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que serão objeto de estudo deste trabalho.

A abordagem que será feita da TRG neste trabalho, por questões de enfoque, terá um caráter mais operacional. Para maiores detalhes referentes aos fundamentos da TRG, pode-se consultar as obras clássicas [7, 8, 9, 10, 11].

1.1 O que é um tensor

Os fenômenos físicos que encontramos na Natureza podem ser descritos a partir de objetos matemáticos que caracterizamos como: escalares, vetores ou tensores[4]. E o que define se uma grandeza física é escalar, vetorial ou tensorial é a forma como ela se transforma perante um grupo de transformações em um determinado sistema de coordenadas adotado [12].

Os objetos matemáticos acima foram mencionados em ordem de generalidade, de forma tal que: um vetor é um objeto mais geral que um escalar, um tensor é um objeto mais geral que um vetor.

Em álgebra e análise tensorial, os entes matemáticos caracterizados como escalares e vetores são considerados como casos particulares de tensores, como veremos mais adiante.

De forma elementar, "pode-se caracterizar um tensor como um conjunto de objetos matemáticos (em geral) ou físicos (em particular) que estão relacionados entre si e que determinam algum tipo de relação entre duas outras entidades matemáticas (ou físicas)" [13]. De maneira mais específica, fisicamente, os tensores apontam para as propriedades físicas, inerentes, do meio.

---

[4] Vale mencionar que ainda existem os espinores, que são objetos matemáticos bastante relevantes para a formulação da Mecânica Quântica.

Pode-se identificar tais entes matemáticos a partir de um número finito de índices[5], sendo que tais objetos possuem leis de transformação bem definidas, de forma tal que, um determinado objeto num dado referencial, possa ser representado em um outro referencial [13].

Os tensores possibilitam-nos fazer uma abordagem mais abrangente (em comparação com os vetores) de sistemas físicos com um elevado grau de complexidade. Tais entes matemáticos podem ser utilizados como ferramenta (tornando as equações bastante elegantes e compactas) em diversas áreas, dentre elas, podem-se citar: Formulação Covariante do Eletromagnetismo; Mecânica de Meios Contínuos; Física de Plasmas; Mecânica Quântica; Topologia Algébrica; Geometria Diferencial; Teoria da Relatividade Geral.

Embora os tensores sejam objetos que possuem aplicações diversas, a abordagem que será feita neste trabalho tem como foco a sua aplicabilidade na Física, mais especificamente, no estudo das equações de campo de Einstein (que descrevem a relação entre geometria e a distribuição de matéria-energia no espaço-tempo).

1.2 Propriedades fundamentais dos tensores

Um tensor pode ser caracterizado a partir de certas propriedades, tais como: número de índices que ele possui; da posição que tais índices estão localizados, se subscrito ou sobrescrito; e pela forma como a troca na posição de alguns índices altera (ou não) a sua natureza.

Tais objetos matemáticos possuem propriedades básicas, como: ordem (ou rank) do tensor; tipo de tensor; simetria ou antissimetria de um tensor. A seguir, veremos com um pouco mais de detalhe como identificar cada uma dessas propriedades.

1.2.1 Ondem de um tensor (N)

Diz-se que a ordem (ou rank) de um tensor está associada ao número de índices que tal ente matemático possui:

- Um tensor de ordem zero (ou rank zero) não possui nenhum índice. Pode ser representado por um escalar $\rightarrow \mathrm{T}$;

---

[5] Nas seções 1.1 e 1.2, esses índices serão tratados genericamente, por exemplo: a, b, c, d, variando de 1 até D, onde D é a dimensão do espaço em questão.

- Um tensor de 1ª ordem (ou de rank 1) possui um índice. Pode ser representado por um vetor → T^a ;
- Um tensor de 2ª ordem (ou rank 2) possui dois índices. Pode ser representado por uma matriz → T^{ab} ;
- Um tensor de 3ª ordem (ou rank 3) possui três índices. Pode ser representado por uma matriz tridimensional (algo análogo a um cubo) → T^{abc} ;
- E assim por diante.

De posse do número de dimensões (D) com o qual se esteja trabalhando, a partir da ordem (N) de um certo tensor, é possível determinar o número de componentes que ele possui a partir da relação D^N, como mostram as tabelas a seguir, para os casos de 3 e 4 dimensões, respectivamente:

Tabela 1 – Número de componentes, em três dimensões (D = 3), de alguns tensores

ordem do tensor	número de componentes do tensor → D^N
0	$3^0 = 1$
1ª	$3^1 = 3$
2ª	$3^2 = 9$
3ª	$3^3 = 27$
4ª	$3^4 = 81$

Fonte: Elaboração própria

Agora, vejamos os números de componentes de alguns tensores em quatro dimensões:

Tabela 2 – Número de componentes, em quatro dimensões (D = 4), de alguns tensores

ordem do tensor	número de componentes do tensor → D^N
0	$4^0 = 1$
1ª	$4^1 = 4$
2ª	$4^2 = 16$
3ª	$4^3 = 64$
4ª	$4^4 = 256$

Fonte: Elaboração própria

1.2.2 Tipos de tensor

Dependendo da localização, em cima ou embaixo, de um índice (ou mais índices) em um determinado tensor, tal ente matemático pode ser caracterizado como:

- Tensor contravariante → índice sobrescrito. Exemplo: T^a ;
- Tensor covariante → índice subscrito. Exemplo: T_a ;
- Tensor misto → índices sobrescrito e subscrito. Exemplo: $T^a{}_b$.

Um tensor do tipo (m, n) possui m índices contravariantes e n índices covariantes, e a sua ordem é dada pela soma do número de índices contravariantes e covariantes (ordem de um tensor misto $N = m + n$). Caso o tensor possua apenas índices contravariantes (ou covariantes) a sua ordem é dada apenas pelo número de índices do tipo presente. Exemplo: O tensor $Q^a{}_{bc}$ possui um índice contravariante e dois índices covariantes, sendo ele do tipo (1, 2), e de 3ª ordem $(N = 1 + 2)$.

1.2.3 Simetria e antissimetria de um tensor

Caracteriza-se um tensor como simétrico quando a troca de dois índices subscritos, ou sobrescritos, não altera o valor de suas componentes, obedecendo a seguinte condição:

$$T_{ab} = T_{ba} \tag{1.2.3.1}$$

Neste caso, o tensor covariante de 2ª ordem T_{ab} é simétrico. Não obstante, tal propriedade também é válida para tensores de ordem maior, desde que se respeite algumas propriedades de permutação dos índices.

O tensor contravariante de 2ª ordem T^{ab} também é simétrico, desde que

$$T^{ab} = T^{ba} \tag{1.2.3.2}$$

Agora, dado um tensor contravariante de segunda ordem B^{ab}, ele é caracterizado como antissimétrico se, ao trocar seus dois índices sobrescritos (o mesmo valeria aqui se os índices fossem subscritos, ou seja, se fosse um tensor covariante de segunda ordem B_{ab}), o valor de suas componentes é alterado da seguinte forma:

$$B^{ab} = -B^{ba} \tag{1.2.3.3}$$

O que também é válido para

$$B_{ab} = -B_{ba} \tag{1.2.3.4}$$

De uma forma mais geral, pode-se definir um tensor covariante de 2ª ordem como a soma de um tensor simétrico com um tensor antissimétrico:

$$G_{ab} \equiv \frac{1}{2}(G_{ab} + G_{ba}) + \frac{1}{2}(G_{ab} - G_{ba}) \tag{1.2.3.5}$$

Observa-se que o primeiro termo, que será caracterizado como $G_{(ab)}$, ao se efetuar uma permutação de seus índices, não sofre nenhuma alteração, ou seja, ele é simétrico.

$$G_{(ab)} \equiv (G_{ab} + G_{ba}) = G_{(ba)} \tag{1.2.3.6}$$

No entanto, o segundo termo, que será caracterizado como $G_{[ab]}$, ao se efetuar uma permutação de seus índices, adquire um sinal negativo, isto é, ele é antissimétrico.

$$G_{[ab]} \equiv (G_{ab} - G_{ba}) = -G_{[ba]} \tag{1.2.3.7}$$

Para o caso de um tensor covariante de 3ª ordem, as suas partes simétricas (1.2.3.8) e antissimétricas (1.2.3.9) são, respectivamente, dadas da seguinte maneira:

$$G_{(abc)} \equiv (G_{abc} + G_{acb} + G_{cab} + G_{cba} + G_{bca} + G_{bac}) \tag{1.2.3.8}$$

$$G_{[abc]} \equiv (G_{abc} - G_{acb} + G_{cab} - G_{cba} + G_{bca} - G_{bac}) \tag{1.2.3.9}$$

Portanto, ao longo deste trabalho, sempre que aparecerem índices de um determinado tensor entre parênteses, significa que o tensor é simétrico para quaisquer permutações de seus índices. De forma análoga, sempre que aparecerem índices de um determinado tensor entre colchetes, significa que o tensor em questão é antissimétrico para quaisquer permutações de seus índices.

1.3 Álgebra tensorial no espaço-tempo

Seja uma variedade diferenciável quadrimensional[6] caracterizada pelo par $(\mathcal{M}_4, \mathrm{g})$, onde g é a métrica, com assinatura $(+,-,-,-)$. Tal variedade quadrimensional será identificada com o espaço-tempo, e terá a qualidade de ser localmente parecida com o espaço de Minkowski $\mathbb{M}^4$. Contudo, em termos globais a variedade pode ser bastante distinta do espaço $\mathbb{M}^4$.

A expressão "localmente parecida" com o espaço $\mathbb{M}^4$ significa que, para uma região suficientemente pequena ao redor de um ponto qualquer da variedade, será sempre possível mapear os pontos da variedade em pontos do espaço $\mathbb{M}^4$.

Considere um sistema de coordenadas S com coordenadas x^μ, e um sistema de coordenadas $\overline{\mathrm{S}}$ com coordenadas $\overline{\mathrm{x}}^\nu$, definidas no espaço-tempo. As coordenadas de $\overline{\mathrm{S}}$ podem ser escritas como funções das coordenadas de S [14], da seguinte maneira:

$$\overline{\mathrm{x}}^\nu = \overline{\mathrm{x}}^\nu\,(\mathrm{x}^0, \mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3) \qquad (1.3.1)$$

A relação de transformação para deslocamentos infinitesimais é obtida a partir da derivação da equação (1.3.1)

$$\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}^\nu = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \overline{\mathrm{x}}^\nu}{\partial \mathrm{x}^\mu} \mathrm{dx}^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \, \overline{\mathrm{x}}^\nu \mathrm{dx}^\mu \qquad (1.3.2)$$

Neste trabalho, adotaremos a convenção da soma de Einstein. Tal convenção nos diz que:

---

[6] A partir deste momento, utilizaremos sempre índices gregos minúsculos, onde os mesmos variam de 0 a 3.

- "Omitem-se todos os símbolos de somatório, ficando implícito que se um mesmo índice aparece uma única vez em cima e embaixo, estamos somando sobre ele." [15];
- Ressalta-se a identificação dos "índices mudos" de uma dada expressão matemática: índices que se repetem uma única vez em cima e outra embaixo são chamados de "índices mudos", podendo ser trocados por uma outra letra, sem alterarmos a natureza da equação;
- Vale salientar também o reconhecimento adequado dos chamados índices livres, os quais aparecem uma única vez em ambos os lados da equação.

Na equação (1.3.2) o "índice mudo" é a letra grega μ (mi) e o índice livre é a letra grega ν (ni). Assim sendo, pode-se reescrever tal equação utilizando a convenção da soma de Einstein da seguinte maneira:

$$d\bar{x}^{\nu} = \partial_{\mu}\bar{x}^{\nu}dx^{\mu} \tag{1.3.3}$$

A partir da relação de transformação acima descrita, definimos as componentes de um vetor contravariante

$$\bar{V}^{\mu} = \frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}V^{\nu} \equiv \partial_{\nu}\bar{x}^{\mu}V^{\nu} \tag{1.3.4}$$

Já as componentes de um vetor covariante $\bar{V}_{\mu}$ são obtidas de acordo com a seguinte lei de transformação

$$\bar{V}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial\bar{x}^{\mu}}V_{\nu} \equiv \bar{\partial}_{\mu}x^{\nu}V_{\nu} \tag{1.3.5}$$

Como foi exposto anteriormente, um vetor pode ser classificado como um tensor de 1ª ordem. Tensores de 2ª ordem podem ser definidos a partir da seguinte lei de transformação:

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial\bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}}T^{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}\bar{x}^{\alpha}\,\partial_{\nu}\bar{x}^{\beta}T^{\mu\nu} \tag{1.3.6}$$

A equação (1.3.6) define um tensor de 2ª ordem contravariante. A definição de um tensor de 2ª ordem covariante é

$$\overline{T}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}} T_{\mu\nu} \equiv \bar{\partial}_{\alpha} x^{\mu} \bar{\partial}_{\beta} x^{\nu} T_{\mu\nu} \tag{1.3.7}$$

Ao passo que a definição de um tensor misto de 2ª ordem é

$$\overline{T}^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}} T^{\mu}{}_{\nu} \equiv \partial_{\mu} \overline{x}^{\alpha} \bar{\partial}_{\beta} x^{\nu} T^{\mu}{}_{\nu} \tag{1.3.8}$$

A generalização da equação (1.3.8) permite-nos definir um tensor de ordem $m + n$:

$$\overline{T}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}{}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = \frac{\partial \overline{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{\alpha_m}}{\partial x^{\mu_m}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \overline{x}^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial \overline{x}^{\beta_n}} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \tag{1.3.9.a}$$

$$\overline{T}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}{}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \equiv \partial_{\mu_1} \overline{x}^{\alpha_1} \dots \partial_{\mu_m} \overline{x}^{\alpha_m} \; \bar{\partial}_{\beta_1} x^{\nu_1} \dots \bar{\partial}_{\beta_n} x^{\nu_n} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \tag{1.3.9.b}$$

Entes matemáticos como os escalares e os vetores possuem operações matemáticas bem definidas, tais como: adição, subtração, multiplicação por um escalar, produto escalar e produto vetorial. Com os tensores idem, ou seja, existem operações matemáticas bem definidas para tais objetos matemáticos, dentre as quais pode-se destacar o produto interno, e o produto tensorial. A seguir, trataremos de tais operações com um pouco mais de detalhe.

1.3.1 Produto interno

A partir do produto interno (entre dois vetores) pode-se definir um escalar, ou seja, um tensor de ordem zero:

$$\overline{V}^{\mu} \overline{U}_{\mu} = \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\mu}} V^{\beta} U_{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} V^{\beta} U_{\alpha} = V^{\alpha} U_{\alpha} \tag{1.3.1.1}$$

Onde o termo $\frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\mu}} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$ é a delta de Kronecker, que possui as seguintes características:

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{cases} 1 \text{ se } \alpha = \beta \\ 0 \text{ se } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{1.3.1.2}$$

Em um espaço de 4 dimensões, a sua representação matricial é

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{bmatrix} \delta^{0}{}_{0} & \delta^{0}{}_{1} & \delta^{0}{}_{2} & \delta^{0}{}_{3} \\ \delta^{1}{}_{0} & \delta^{1}{}_{1} & \delta^{1}{}_{2} & \delta^{1}{}_{3} \\ \delta^{2}{}_{0} & \delta^{2}{}_{1} & \delta^{2}{}_{2} & \delta^{2}{}_{3} \\ \delta^{3}{}_{0} & \delta^{3}{}_{1} & \delta^{3}{}_{2} & \delta^{3}{}_{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3.1.3}$$

Um resultado relevante de se mencionar da delta de Kronecker é:

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta}\delta^{\beta}{}_{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{\alpha} = \overbrace{\delta^{0}{}_{0}}^{1} + \overbrace{\delta^{1}{}_{1}}^{1} + \overbrace{\delta^{2}{}_{2}}^{1} + \overbrace{\delta^{3}{}_{3}}^{1} = 4 \tag{1.3.1.4}$$

Também conhecido como contração, o produto interno possui a propriedade de, quando aplicado em tensores de ordem superior, subtrair em dois os seus índices. Exemplo:

$$T_{\mu\nu} = T^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = A^{\lambda}B_{\mu\lambda\nu} \tag{1.3.1.5}$$

A contração de um tensor de tipo (1, 3) produz um tensor de tipo (0, 2). Ou seja, um tensor de 4ª ordem, ao ser contraído, resultará em um tensor de 2ª ordem.

1.3.2 Produto tensorial

O produto tensorial, também conhecido como produto externo, entre um tensor de tipo (m, n) e um tensor de tipo (r, s) acarreta em um tensor de ordem $(m + r,\ n + s)$. Exemplo:

$$T^{\lambda}{}_{\alpha\mu\nu} = A_{\alpha}B^{\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{1.3.2.1}$$

A equação (1.3.2.1) mostra o produto externo entre um tensor de tipo (0, 1) e um tensor de tipo (1, 2), lado direito da equação, resultando em um tensor de 4ª ordem, de tipo (1, 3), lado esquerdo da equação.

1.4 O tensor métrico

Pode-se definir o tensor métrico g em uma variedade diferenciável $\mathcal{M}_4$, covariante de tipo (0, 2), como o produto interno de dois vetores base covariantes:

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \, . \vec{e}_\nu \tag{1.4.1}$$

Tendo o produto interno a propriedade de ser comutativo ($\vec{e}_\mu \, . \vec{e}_\nu = \vec{e}_\nu \, . \vec{e}_\mu$), conclui-se que o tensor métrico é simétrico:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{1.4.2}$$

O tensor métrico (que a partir deste momento passará a ser chamado apenas de métrica) é invertível, ou seja, possui inversa

$$\left(g_{\mu\nu}\right)^{-1} = g^{\mu\nu} \tag{1.4.3}$$

A inversa da métrica também é simétrica, logo,

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} \tag{1.4.4}$$

A inversa da métrica $g^{\mu\nu}$ é, portanto, um tensor contravariante de 2ª ordem, de tipo (2, 0). Ao efetuarmos o produto interno da métrica com a sua inversa, obtém-se a delta de Kronecker:

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta^{\nu}{}_{\mu} \tag{1.4.5}$$

Para o caso particular de uma variedade diferenciável quadrimensional $\mathcal{M}_4$, cuja métrica é $g_{\mu\nu}$, onde $\mu, \nu = 0\,, 1\,, 2, 3.$, a sua representação matricial é;

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \tag{1.4.6}$$

Sendo a métrica um tensor covariante de 2ª ordem ($N = 2$), num espaço-tempo quadrimensional ($D = 4$), ela possui, portanto, 16 componentes ($D^N \rightarrow 4^2 = 16$), como foi apresentado na Tabela 2.

A métrica é o ente matemático que determina as propriedades de um certo espaço-tempo, capaz de descrever a sua geometria.

1.5 Elemento de linha

Dada uma variedade diferenciável $\mathcal{M}_4$, o elemento de linha ds^2 nos fornece uma maneira de calcular distâncias entre dois pontos sobre tal variedade num certo sistema de coordenadas, da seguinte forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.5.1}$$

Havendo uma mudança de coordenadas, o elemento de linha $d\bar{s}^2$ pode ser expresso como

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \tag{1.5.2}$$

E como o elemento de linha é um escalar (invariante), tem-se que ele se transforma de forma trivial:

$$ds^2 = d\bar{s}^2 \tag{1.5.3}$$

1.6 Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel, que serão representados pela letra grega Γ (gama maiúscula) podem ser estabelecidos a partir da inversa da métrica $g^{\mu\nu}$ e das derivadas parciais da própria métrica $g_{\mu\nu}$, a partir da seguinte expressão:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \tag{1.6.1}$$

Neste trabalho, utilizaremos a vírgula {,} para denotar derivada parcial, de forma tal que a equação (1.6.1) pode ser reescrita como:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu} \right) \tag{1.6.1.a}$$

Vale ressaltar que, embora os símbolos de Christoffel $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ possuam dois índices subscritos e um índice sobrescrito, eles não são tensores.

Ainda assim, os símbolos de Christoffel possuem a propriedade de simetria entre os seus dois índices subscritos, portanto,

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} \tag{1.6.2}$$

1.7 Derivada covariante

Consideremos o vetor covariante $\overline{V}_{\mu}$ definido pela equação (1.3.5). Ao executarmos uma derivação parcial sobre este vetor, obtemos

$$\bar{\partial}_{\lambda} \overline{V}_{\mu} = \frac{\partial \overline{V}_{\mu}}{\partial \bar{x}^{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\lambda}} \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \right) V_{\nu} \tag{1.7.1}$$

Sendo

$$\bar{\partial}_{\lambda} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \tag{1.7.2}$$

Substituindo a equação (1.7.2) em (1.7.1), e aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\bar{\partial}_{\lambda} \overline{V}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} V_{\nu} + \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\lambda} \partial \bar{x}^{\mu}} V_{\nu} \tag{1.7.3}$$

Reescrevendo a equação (1.7.3), temos que

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\lambda}}\partial_{\alpha}V_{\nu} = \bar{\partial}_{\lambda}\bar{V}_{\mu} - \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\lambda}\,\partial \bar{x}^{\mu}}V_{\nu} \tag{1.7.4}$$

Conclui-se que a derivação simples do vetor $\bar{V}_{\mu}$ não se transforma como um tensor, pois na equação (1.7.4) surge um termo com derivada segunda, em desacordo com a equação (1.3.5) para uma transformação de coordenadas do mesmo objeto.

Contudo, pode-se definir uma operação de derivação que conserva o caráter tensorial do vetor $\bar{V}_{\mu}$. Para tal propósito, ela precisa assumir a seguinte estrutura matemática:

$$\nabla_{\lambda}V_{\mu} \equiv \partial_{\lambda}V_{\mu} - \Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda}V_{\beta} \tag{1.7.5.a}$$

A equação (1.7.5.a) é a definição de derivada covariante do vetor V_{μ}. O termo $\Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda}$ é designado conexão. Na operação matemática de derivação covariante do vetor V_{μ}, a conexão $\Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda}$ desempenha o papel mantenedor de seu caráter tensorial.

Como já foi mencionado, neste trabalho, iremos utilizar a vírgula {,} para representar uma derivada simples. Utilizaremos também o ponto e vírgula {;} para representar uma derivada covariante. Obedecendo tais convenções, a equação (1.7.5.a) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$V_{\mu\,;\,\lambda} \equiv V_{\mu,\lambda} - \Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda}V_{\beta} \tag{1.7.5.b}$$

O sinal que acompanha a conexão (negativo ou positivo) está relacionado com a natureza do vetor. Ao executarmos uma derivação covariante de um vetor covariante V_{μ}, o sinal que acompanha a conexão é negativo. No entanto, ao efetuarmos a mesma operação de derivação covariante sobre um vetor contravariante V^{μ}, o sinal que acompanha a sua conexão é positivo, como segue

$$V^{\mu}{}_{;\lambda} \equiv V^{\mu}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\lambda}V^{\beta} \tag{1.7.6}$$

Sendo o vetor V_{μ} um tensor de 1ª ordem, a operação matemática de derivada covariante pode ser generalizada para tensores de ordem maior. Vejamos a definição de tal operação para um tensor covariante de 2ª ordem $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu\,;\,\lambda} \equiv T_{\mu\nu\,,\lambda} - \Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda}T_{\beta\nu} - \Gamma^{\gamma}{}_{\nu\lambda}T_{\mu\gamma} \qquad (1.7.7)$$

Enquanto que a derivada covariante de um tensor contravariante de 2ª ordem $T^{\mu\nu}$ é:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\lambda} \equiv T^{\mu\nu}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\lambda}T^{\beta\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\gamma\lambda}T^{\mu\gamma} \qquad (1.7.8)$$

Vale destacar que, a quantidade de conexões que aparecem na derivação covariante de um certo tensor depende de sua ordem, ou seja: na derivação covariante de um tensor de 1ª ordem (vetor) aparece uma conexão; na derivação covariante de um tensor de 2ª ordem aparecem duas conexões; e assim por diante.

Vejamos agora a definição de derivada covariante para um tensor misto de 2ª ordem, ou seja, um tensor que possui um índice contravariante e um índice covariante:

$$T^{\mu}{}_{\nu\,;\lambda} \equiv T^{\mu}{}_{\nu\,,\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\lambda}T^{\beta}{}_{\nu} - \Gamma^{\gamma}{}_{\nu\lambda}T^{\mu}{}_{\gamma} \qquad (1.7.9)$$

Capítulo 2

2 RELATIVIDADE GERAL

Comprovadamente, na Natureza existem quatro tipos de interações fundamentais, são elas: Nuclear Forte, Nuclear Fraca, Eletromagnética e Gravitacional. Tais interações podem ser organizadas em dois subgrupos:

- Interações de curta distância:
  - Nuclear Forte → responsável por manter coeso o núcleo atômico da matéria bariônica;
  - Nuclear Fraca → responsável pelos processos de decaimento radioativo e “transmutação” da matéria bariônica.

- Interações de longa distância:
  - Eletromagnética → responsável pela troca de informações entre os campos elétricos e magnéticos;
  - Gravitacional → responsável pela troca de informações entre corpos (entidades) que possuem matéria-energia.

As interações de curta distância são relevantes para a microfísica, escala subnuclear, responsáveis pela coesão do núcleo atômico (Força Forte) e pelos processos radioativos (Força Fraca). As interações de longa distância exibem o comportamento de diminuírem de magnitude à medida que a distância aumenta.

Tais interações, além de exibirem comportamentos bastante distintos (duas interações de curta distância, e duas interações de longa distância), possuem intensidades também muito diferentes. Apenas para título de exemplificação, se considerarmos a interação Nuclear Forte assumindo um valor igual a 1(adimensional), teríamos a seguinte relação comparativa entre as intensidades das quatro interações fundamentais da Natureza, e suas ordens de alcance:

Tabela 3: Intensidade relativa das quatro interações fundamentais e seus alcances

Interação fundamental	Intensidade (a 10^{-13} cm)	Alcance [cm]
Nuclear Forte	1	10^{-13}
Eletromagnética	10^{-2}	∞
Nuclear Fraca	10^{-13}	10^{-16}
Gravitacional	10^{-38}	∞

Fonte: Adaptado de [16]

Embora a interação Gravitacional seja a mais tênue das interações fundamentais da Natureza, quando se objetiva o estudo de corpos e sistemas físicos macroscópicos, ela acaba se revelando como a mais relevante das quatro interações.

Até 1919, a teoria que melhor descrevia a interação Gravitacional era a Lei da Gravitação Universal de Newton. Isaac Newton (1642-1727) publicou sua teoria de gravitação em 1687, naquela que é considerada a sua obra prima: “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, também conhecida como “Principia”.

Embora houvessem alguns poucos fenômenos que apresentassem discrepâncias entre teoria e observação, dentre eles pode-se citar a Precessão do Periélio de Mercúrio, por mais de dois séculos a teoria newtoniana de gravitação foi muito bem sucedida, tendo ela possibilitado grandes feitos, dos quais pode-se mencionar a descoberta (a priori puramente teórica) do planeta Netuno.

No domínio dos fenômenos terrestres, bem como para a maioria dos fenômenos astronômicos conhecidos à época, a teoria newtoniana de gravitação foi bastante satisfatória ao longo de 232 anos, o que permitiu-lhe desfrutar de um status ímpar no rol das teorias científicas.

Em 1905, dentre os diversos trabalhos de grande impacto publicados por Albert Einstein (1879-1955), um deles foi o artigo cujo título era “Sobre a Eletrodinâmica dos corpos em movimento”, que posteriormente passou a ser conhecido como a Teoria da Relatividade Restrita (TRR).

Um dos postulados da TRR trata da velocidade da luz ($c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s}$) enquanto uma constante da Natureza, sendo ela o valor máximo de propagação de todo e qualquer tipo de informação. Contudo, para a teoria newtoniana da gravitação, a interação gravitacional era instantânea, ou seja, tinha velocidade de propagação infinita. Ao tentar conciliar a sua TRR com a gravitação newtoniana, Einstein percebeu que elas eram fundamentalmente incompatíveis.

Tal inconsistência entre as duas teorias não podia ser ignorada. Estando a TRR correta, fazia-se necessário a construção de uma nova teoria de gravitação. Para tal feito, nada simples e muitíssimo laborioso, Einstein dedicou dez anos de sua vida.

Sabe-se que Einstein contou com o auxílio de seu grande amigo, e antigo colega de graduação do ETHZ (Instituto Federal de Tecnologia de Zurique), Marcel Grossmann (1878-1936), quando este já era professor de Matemática em sua alma mater, para contornar os desafios matemáticos (essencialmente no que diz respeito à Geometria Diferencial) que tal formulação de uma nova teoria de gravitação manifestava. Também existem evidências documentadas de conversas, através de cartas, que Einstein manteve ao longo de anos com o matemático italiano Tullio Levi-Civita (1873-1941), sobre o Cálculo Tensorial.

Em 1915, após muito esforço, finalmente Einstein submete para publicação o artigo que trazia a formulação matemática final da sua Teoria da Relatividade Geral (TRG), o qual foi publicado no ano seguinte, em 1916. A TRG de Einstein foi capaz de explicar, com um bom grau de precisão, aquele que havia sido um incômodo para a Lei da Gravitação de Newton, o problema da Precessão do Periélio de Mercúrio. Além disso, Einstein apresentou novas previsões da sua teoria da TRG, tais como: a perda de energia por um fóton ao sair de um campo gravitacional (redshift gravitacional); e a deflexão da luz pela gravidade.

Einstein também indicou em qual situação seria possível observar experimentalmente um dos fenômenos previstos pela sua nova teoria de gravitação: o desvio da luz de uma estrela distante ao passar próximo de um campo gravitacional, como o do Sol, por exemplo. Tal fenômeno poderia ser observado durante a ocorrência de um eclipse solar total. Vale mencionar que mesmo antes da conclusão da formulação matemática da TRG, em 1915, Einstein já havia previsto que o desvio da luz por um campo gravitacional deveria ocorrer, em 1912. Algumas tentativas de observação da deflexão da luz pela gravidade foram feitas, por diversos grupos de astrônomos, e em várias regiões do mundo.

Mas foi apenas em 1919, no Eclipse Solar total do dia 29 de maio, que tal fenômeno pôde ser observado. Um grupo de astrônomos ingleses esteve na cidade de Sobral, no estado do Ceará-Brasil, para observação do fenômeno astronômico. Um outro grupo de astrônomos, também ingleses, esteve na Ilha do Príncipe (à época, uma colônia de Portugal), dentre eles, Arthur Stanley Eddington (1882-1944), também para a observação e registro (por meio de fotografias) do Eclipse Solar total de 29 de maio de 1919. As fotografias do eclipse tiradas pelo grupo de Sobral-CE, possuíam uma melhor qualidade (e uma maior quantidade de estrelas também, o que possibilitou fazer uma melhor estatística), do que as fotografias tiradas pelo grupo de Eddington, pois, para sua infelicidade, no momento e no local do eclipse total o céu da Ilha do Príncipe estava nublado [17].

Seis meses após o eclipse solar total de 29 de maio de 1919, alguns astrônomos retornaram à cidade de Sobral-CE, para tirarem novas fotografias das mesmas estrelas, só que desta vez, sem o Sol entre elas e a Terra, com o objetivo de depois comparar as suas posições com as posições registradas nas primeiras fotografias.

Einstein previu uma diferença de 1,75 segundo de arco devido ao desvio que a luz sofreria ao passar próximo do campo gravitacional do Sol. As medições obtidas com as fotografias de Sobral-CE indicavam uma diferença de 1,98 $\pm$ 0,30 segundo de arco, enquanto que as medições das fotografias tiradas na Ilha do Príncipe indicaram uma diferença de 1,61 $\pm$ 0,30 segundo de arco [17]. Ou seja, as medições que foram feitas neste eclipse corroboraram com as previsões da teoria da TRG.

Historicamente, as observações e fotografias feitas na cidade de Sobral-CE tiveram um papel crucial para a primeira comprovação "experimental" (para ser mais preciso, a primeira comprovação observacional) da TRG de Einstein. Foi, inclusive, a partir deste evento que Einstein acabou se tornando uma figura bastante popular fora da comunidade científica, pois, em grande parte dos principais jornais do mundo, ele teve o seu rosto estampado como o cientista que "desbancou" o grande Sir Isaac Newton.

Assim, a partir de 1919, a teoria que melhor descreve a gravitação passou a ser a Teoria da Relatividade Geral, também conhecida como a Teoria Relativística da Gravitação, ou Teoria Geométrica da Gravitação.

Neste capítulo, objetiva-se fazer uma descrição operacional dos principais entes matemáticos necessários para o estudo de tal teoria.

2.1 Tensor de Riemann

A Teoria da Relatividade Geral pode ser identificada como uma Teoria Geométrica da Gravitação, onde a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria-energia estão intimamente relacionadas. A geometria utilizada para a descrição geométrica dos efeitos gravitacionais, no contexto da TRG, é a geometria Riemanniana[7]. No contexto deste trabalho, tal geometria é identificada com uma variedade diferenciável $\mathcal{M}_4$, sendo ela a própria

[7] Para ser mais preciso, trata-se de uma geometria pseudoriemanniana, pois o tensor métrico (métrica) não é obrigatoriamente positivo definido. Tal geometria (riemanniana e pseudoriemanniana) é aplicada no estudo de espaços curvos.

representação do espaço-tempo, caracterizada pela sua métrica $g_{\mu\nu}$ (que é simétrica, ver seção 1.4) e pelos Símbolos de Christoffel, onde tais objetos matemáticos se relacionam a partir da equação (1.6.1.a).

A equação (1.6.1.a) é uma consequência da condição de metricidade de Riemann [18], que nos diz o seguinte[8]:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \tag{2.1.1}$$

A derivada covariante de um vetor V_α não comuta em espaços curvos [14]:

$$V_{\alpha;\mu\nu} \neq V_{\alpha;\nu\mu} \tag{2.1.2}$$

A partir dessa diferença, define-se o tensor de Riemann:

$$V_{\alpha;\mu\nu} - V_{\alpha;\nu\mu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} V^\beta \tag{2.1.3}$$

O tensor de Riemann $R^{\mu}{}_{\epsilon\alpha\beta}$, também conhecido como tensor de curvatura, é o objeto matemático que carrega as informações geométricas (curvatura intrínseca) do espaço-tempo em questão, podendo ele ser diretamente obtido a partir dos Símbolos de Christoffel:

$$R^{\mu}{}_{\epsilon\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\varepsilon\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\varepsilon\beta,\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\varepsilon\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\varepsilon} \tag{2.1.4}$$

Portanto, o tensor de Riemann pode ter as suas componentes calculadas a partir da métrica e de suas derivadas primeira e segunda [19].

Quando todas as componentes do tensor de Riemann são nulas[9] ($R^{\mu}{}_{\epsilon\alpha\beta} = 0$), a variedade pseudoriemanniana é caracterizada como uma variedade pseudoeuclidiana.

O tensor de curvatura da equação (2.1.4) é um tensor misto do tipo (1, 3), ou seja, possui um índice contravariante e três índices covariantes. Para obtermos um tensor de curvatura covariante basta aplicarmos a métrica:

---

[8] A derivada covariante do tensor métrico é sempre nula no caso das geometrias pseudoriemanniana.

[9] Condição suficiente e necessária para que um certo espaço-tempo seja caracterizado como plano [14].

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\varepsilon} R^{\varepsilon}{}_{\nu\alpha\beta} \quad (2.1.5)$$

2.1.1 Identidades do tensor de Riemann

O tensor de curvatura $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ atende a algumas identidades importantes:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.1.1.1)$$

A equação (2.1.1.1) nos diz que o tensor de Riemann, fixando-se um par (o primeiro $\mu\nu$, ou o segundo $\alpha\beta$) de seus índices, é antissimétrico se permutarmos os dois índices restantes; e nos diz também que ele é simétrico se permutarmos os dois pares de índices.

Ademais, pode-se demonstrar que, fixando-se um índice e permutando os três índices restantes, temos:

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} + R^{\mu}{}_{\alpha\beta\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\alpha} = 0 \quad (2.1.1.2)$$

A equação (2.1.1.2) é conhecida como a Primeira Identidade de Bianchi.

A Segunda Identidade de Bianchi nos diz que, fixando-se dois índices, as derivações covariantes nos índices restantes nos fornece a seguinte relação:

$$R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta;\lambda} + R^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha;\beta} + R^{\mu\nu}{}_{\beta\lambda;\alpha} = 0 \quad (2.1.1.3)$$

O tensor de Riemann é um tensor de 4ª ordem ($N = 4$, pois possui quatro índices), e, como foi apresentado na Tabela 2, um tensor de 4ª ordem, num espaço-tempo quadridimensional ($D = 4$), possui 256 componentes ($D^N \rightarrow 4^4 = 256$). Contudo, ao aplicarmos as identidades apresentadas nesta seção, obtém-se uma simplificação considerável, pois o número de componentes do tensor de Riemann cai para "apenas" 20 componentes não nulas e independentes.

2.2 Tensor de Ricci

Por meio do produto interno (contração), e utilizando-se da métrica $g_{\mu\nu}$ para formar combinações lineares do tensor de Riemann $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$, podemos construir outros tensores que possuem bastante relevância para o estudo da TRG.

Dessa forma, contraindo-se o tensor de Riemann, obtém-se o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{2.2.1}$$

O tensor de Ricci é simétrico:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \tag{2.2.2}$$

Suas componentes[10] podem ser obtidas a partir da seguinte relação:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\mu} \tag{2.2.3}$$

O tensor de Ricci é um tensor covariante do tipo (0, 2), e, por ser simétrico, em um espaço-tempo quadridimensional, possui 10 componentes independentes. Como o tensor de Riemann possui 20 componentes independentes e não nulas, tem-se que o tensor de Ricci nos fornece metade das informações obtidas com o tensor de curvatura.

2.3 Escalar de Ricci

Ao contrairmos (produto interno) o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ com a métrica $g^{\mu\nu}$, obtém-se o escalar de Ricci R (também conhecido como escalar de curvatura):

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R^{\beta}{}_{\mu\nu\beta} \tag{2.3.1}$$

O escalar de Ricci possui a seguinte propriedade [19]:

---

[10] "Em termos do sistema de coordenadas locais" [19].

$$R_{;\nu} = 2R^{\alpha}{}_{\nu;\alpha} \tag{2.3.2}$$

Onde

$$R^{\alpha}{}_{\nu;\alpha} = g^{\mu\alpha}R_{\mu\nu;\alpha} = g^{\beta\gamma}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu;\alpha} \tag{2.3.3}$$

2.4 Decomposição de Ricci

Como foi discutido no tópico 2.2, o tensor de Ricci, devido ao seu caráter simétrico, possui apenas 10 componentes independentes e não nulas, ou seja, ele nos traz apenas metade das informações fornecida pelo tensor de Riemann, que, por sua vez, possui 20 componentes independentes e não nulas.

Não obstante, pode-se decompor o tensor de Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ em suas partes irredutíveis [18], de forma tal que podemos obtê-lo a partir do tensor Ricci $R_{\mu\nu}$, do escalar de Ricci R (e da métrica $g_{\mu\nu}$), e de um terceiro objeto matemático conhecido como tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$.

O tensor de Weyl, também conhecido como tensor conforme, possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann, logo

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = -W_{\beta\alpha\mu\nu} \tag{2.4.1.a}$$

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = -W_{\alpha\beta\nu\mu} \tag{2.4.1.b}$$

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{2.4.1.c}$$

$$W^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + W^{\alpha}{}_{\nu\beta\mu} + W^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} = 0 \tag{2.4.1.d}$$

As duas primeiras equações (2.4.1.a e 2.4.1.b) nos dizem que, assim como o tensor de Riemann, o tensor de Weyl é antissimétrico ao fixarmos um par de índices, permutando-se os dois índices restantes. A terceira equação (2.4.1.c) nos diz que o tensor de Weyl é simétrico ao permutarmos os pares de índices. E a quarta equação (2.4.1.d) nos diz que o tensor de Weyl satisfaz à Primeira Identidade de Bianchi.

Entretanto, além de possuir todas as simetrias do tensor de Riemann, o tensor de Weyl apresenta a qualidade de não possuir traço. Vejamos alguns exemplos:

$$W^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} = 0 \tag{2.4.2.a}$$

$$W^{\alpha}{}_{\beta\mu\alpha} = 0 \tag{2.4.2.b}$$

$$W^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\beta}{}_{\nu} = 0 \tag{2.4.2.c}$$

$$W^{\alpha\beta}{}_{\alpha\nu} = 0 \tag{2.4.2.d}$$

Embora o tensor de Weyl seja um objeto matemático com 4 índices, devido a todas as suas simetrias, e ao fato dele não possuir traço, ele apresenta apenas 10 componentes não nulas e independentes.

Façamos a seguinte decomposição irredutível do tensor de Riemann:

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + A\delta^{[\alpha}{}_{[\mu}\, R^{\beta]}{}_{\nu]} + BR\delta^{[\alpha}{}_{\mu}\, \delta^{\beta]}{}_{\nu} \tag{2.4.3}$$

Onde A e B são constantes a serem determinadas.

Todavia, tratemos primeiramente do termo da segunda parcela da equação (2.4.3), que acompanha a constante A (a delta de Kronecker e o tensor de Ricci). De forma explícita, a antissimetria nos índices sobrescritos $[\alpha$ e $\beta]$ é dada por

$$\begin{aligned} \delta^{[\alpha}{}_{[\mu}\, R^{\beta]}{}_{\nu]} &= \delta^{\alpha}{}_{[\mu}\, R^{\beta}{}_{\nu]} - \delta^{\beta}{}_{[\mu}\, R^{\alpha}{}_{\nu]} \\ &= \delta^{\alpha}{}_{\mu}\, R^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\nu}\, R^{\beta}{}_{\mu} - \delta^{\beta}{}_{\mu}\, R^{\alpha}{}_{\nu} + \delta^{\beta}{}_{\nu}\, R^{\alpha}{}_{\mu} \end{aligned} \tag{2.4.3.a}$$

A segunda linha da expressão anterior apresenta, de forma explícita, as antissimetrias nos subíndices $[\mu$ e $\nu]$ de cada uma das parcelas da primeira linha (lado direito). Agora, tratemos do termo da terceira parcela da equação (2.4.3), que acompanha a constante B e o escalar de curvatura R. As duas deltas de Kronecker são antissimétricas nos índices sobrescritos $[\alpha$ e $\beta]$:

$$\delta^{[\alpha}{}_{\mu}\,\delta^{\beta]}{}_{\nu} = \delta^{\alpha}{}_{\mu}\,\delta^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\beta}{}_{\mu}\,\delta^{\alpha}{}_{\nu} \tag{2.4.3.b}$$

Como já foi discutido na seção 2.2, ao contrairmos o tensor de Riemann obtemos o tensor de Ricci $R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\nu} \equiv R^{\beta}{}_{\nu}$. E, como foi discutido nesta seção, o tensor de Weyl não possui traço (todas as suas possíveis contrações são nulas). Determinemos, então, os valores das constantes A e B. Reescrevendo a equação (2.4.3) com todos os termos explícitos, temos:

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} &= W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + A\delta^{[\alpha}{}_{[\mu}\,R^{\beta]}{}_{\nu]} + BR\delta^{[\alpha}{}_{\mu}\,\delta^{\beta]}{}_{\nu} \\ &= W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + A\left\{\delta^{\alpha}{}_{\mu}\,R^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\nu}\,R^{\beta}{}_{\mu} - \delta^{\beta}{}_{\mu}\,R^{\alpha}{}_{\nu} + \delta^{\beta}{}_{\nu}\,R^{\alpha}{}_{\mu}\right\} + \\ &\qquad + BR\left\{\delta^{\alpha}{}_{\mu}\,\delta^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\beta}{}_{\mu}\,\delta^{\alpha}{}_{\nu}\right\} \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Tirando o traço da expressão anterior

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\nu} \equiv R^{\beta}{}_{\nu} &= \overbrace{W^{\alpha\beta}{}_{\alpha\nu}}^{0} + A\delta^{[\alpha}{}_{[\mu}\,R^{\beta]}{}_{\nu]}\delta^{\mu}{}_{\alpha} + BR\delta^{[\alpha}{}_{\mu}\,\delta^{\beta]}{}_{\nu}\,\delta^{\mu}{}_{\alpha} \\ &= 0 + A\left\{\delta^{\alpha}{}_{\mu}\,R^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\nu}\,R^{\beta}{}_{\mu} - \delta^{\beta}{}_{\mu}\,R^{\alpha}{}_{\nu} + \delta^{\beta}{}_{\nu}\,R^{\alpha}{}_{\mu}\right\}\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \\ &\quad + BR\left\{\delta^{\alpha}{}_{\mu}\,\delta^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\beta}{}_{\mu}\,\delta^{\alpha}{}_{\nu}\right\}\delta^{\mu}{}_{\alpha} \\ &= A\left\{4R^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\mu}{}_{\nu}\,R^{\beta}{}_{\mu} - \delta^{\beta}{}_{\alpha}\,R^{\alpha}{}_{\nu} + \delta^{\beta}{}_{\nu}\,R^{\mu}{}_{\mu}\right\} + \\ &\quad + BR\left\{4\delta^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\beta}{}_{\mu}\,\delta^{\mu}{}_{\nu}\right\} \\ &= A\left\{4R^{\beta}{}_{\nu} - R^{\beta}{}_{\nu} - R^{\beta}{}_{\nu} + \delta^{\beta}{}_{\nu}R\right\} + BR\left\{4\delta^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\beta}{}_{\nu}\right\} \\ &= A\left\{4R^{\beta}{}_{\nu} - 2R^{\beta}{}_{\nu} + \delta^{\beta}{}_{\nu}R\right\} + BR\left\{3\delta^{\beta}{}_{\nu}\right\} \\ &= A\left\{2R^{\beta}{}_{\nu} + \delta^{\beta}{}_{\nu}R\right\} + BR\left\{3\delta^{\beta}{}_{\nu}\right\} \\ &= 2AR^{\beta}{}_{\nu} + AR\delta^{\beta}{}_{\nu} + 3BR\delta^{\beta}{}_{\nu} \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

O que implica que a constante $A = \frac{1}{2}$. Assim, temos:

$$A = \frac{1}{2} \tag{2.4.5.a}$$

$$A + 3B = 0 \rightarrow \frac{1}{2} + 3B = 0 \rightarrow 3B = -\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$B = -\frac{1}{6} \tag{2.4.5.b}$$

De posse dos valores das constantes A e B, podemos reescrever a equação (2.4.3) da seguinte forma:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = W^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta^{[\alpha}{}_{[\mu}\, R^{\beta]}{}_{\nu]} - \frac{1}{6}R\delta^{[\alpha}{}_{\mu}\, \delta^{\beta]}{}_{\nu} \tag{2.4.6}$$

A equação (2.4.6) é uma decomposição irredutível do tensor de Riemann, onde tal ente matemático é expresso em termos do tensor de Weyl $W^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$(10 componentes independentes), do tensor de Ricci $R^{\beta}{}_{\nu}$ (10 componentes independentes), e do escalar de Ricci, totalizando, assim, as 20 componentes não nulas e independentes do tensor de Riemann.

2.5 Tensor de Einstein

De posse da métrica e dos tensores anteriormente estabelecidos (Tensor de Ricci e Escalar de curvatura), e utilizando-se da Segunda Identidade de Bianchi (2.1.1.3), chega-se a seguinte relação:

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)_{;\mu} = 0 \tag{2.5.1}$$

Onde o termo entre parênteses é definido como o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2.5.2}$$

O tensor de Einstein é um tensor covariante do tipo (0, 2), e, por depender do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e da métrica $g_{\mu\nu}$, ambos simétricos, ele acaba herdando tal propriedade. Portanto, em um espaço-tempo quadridimensional, o tensor de Einstein, por ser simétrico, também possui 10 componentes independentes.

A equação (2.5.1) nos diz que o tensor de Einstein possui derivada covariante nula, o que pode ser verificado da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
G^{\alpha}{}_{\nu;\alpha} &= \left\{g^{\mu\alpha}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\right\}_{;\alpha} \\
&= R^{\alpha}{}_{\nu;\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}{}_{\nu}R_{;\alpha} \\
&= R^{\alpha}{}_{\nu;\alpha} - \frac{1}{2}R_{;\nu}
\end{aligned} \tag{2.5.3}
$$

Utilizando a equação (2.3.2), obtém-se

$$
G^{\alpha}{}_{\nu;\alpha} = R^{\alpha}{}_{\nu;\alpha} - \frac{1}{2}\left(2R^{\alpha}{}_{\nu;\alpha}\right) \tag{2.5.4}
$$

Logo,

$$
G^{\alpha}{}_{\nu;\alpha} = 0 \tag{2.5.5}
$$

A expressão (2.5.5) nos diz que que o tensor de Einstein se submete a uma equação de conservação, um desfecho de natureza geométrica, proveniente das Identidades de Bianchi.

2.6 Equações de Campo de Einstein

Como fruto do trabalho árduo de toda uma década, e bastante guiado por uma forte intuição física, Albert Einstein apresenta à Academia Prussiana das Ciências de Berlim, no dia 25/11/1915, a sua formulação final da TRG, num artigo intitulado "Die Feldgleichungen der Gravitation", que pode ser traduzido como "As equações de Campo da Gravitação" [2].

A intuição física que guiou Einstein no caminho para a construção de sua TRG pode ser exemplificada pelo chamado Princípio da Equivalência (PE)[11]. Apresentando o PE de uma forma bastante superficial, pode-se dizer que ele assume uma equivalência entre campos gravitacionais e referenciais não-inerciais.

[11] Esse princípio só é válido localmente. Em situações mais generalistas, existem maneiras de se diferenciar um campo gravitacional de um sistema não-inercial.

Com o tempo, as equações apresentadas por Einstein no seu artigo de 1915 passaram a ser conhecidas como as Equações de Campo de Einstein (ECE), e são expressas como[12]:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{2.6.1}$$

Como foi discutido na seção anterior 2.5, o tensor de Einstein é definido em termos do tensor de Ricci, da métrica, e do escalar de Ricci. Assim sendo, podemos apresentar as ECE da seguinte maneira[13]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{2.6.1*}$$

Do lado esquerdo da equação anterior temos apenas objetos geométricos, enquanto que do lado direito temos o tensor momento-energia[14] $T_{\mu\nu}$, objeto que trata das fontes de campos gravitacionais (densidades de matéria-energia).

De uma forma qualitativa, as ECE apresentam uma relação de proporcionalidade entre geometria e distribuições de matéria-energia no espaço-tempo.

Em 1917, Einstein aplicou as suas equações de campo à totalidade do Universo[15] [5], inaugurando assim Cosmologia Moderna[16]. Historicamente, a Cosmologia[17] enfrentou muita resistência da comunidade científica para ser aceita como uma Ciência "Exata". A TRG contribuiu imensamente para o estabelecimento da Cosmologia enquanto a Ciência da totalidade.

---

[12] Posteriormente, por questões de praticidade, consideraremos a constante de acoplamento $\kappa = 1$, de forma tal que ela não mais aparecerá nas passagens algébricas.
[13] Neste momento, estamos apresentando as Equações de Campo de Einstein como foram concebidas originalmente no seu artigo de 1916, ou seja, sem a Constante Cosmológica Λ.
[14] Mais a frente, o tensor momento-energia será discutido com um pouco mais de detalhes.
[15] Trataremos desse assunto com mais detalhes no Capítulo 4, na seção 4.2 O Universo de Einstein.
[16] No capítulo 6, trataremos desse assunto com maior propriedade.
[17] Por séculos, a Cosmologia (neste momento, talvez fosse mais preciso chamar de Cosmogonia) foi considerada uma área apenas da Filosofia, sem muitas relações formais com ciências como a Física e a Astronomia.

Capítulo 3

3 CONGRUÊNCIAS EM RELATIVIDADE GERAL

Uma congruência é uma família (conjunto) de curvas em uma região aberta $\mathcal{O}$ contida em uma variedade diferenciável $\mathcal{M}_4$, onde cada ponto nessa região é interceptado por uma única curva desta família [20]. Um exemplo particular de congruência é aquela constituída apenas por geodésicas. Geodésicas são curvas, arbitrariamente parametrizadas, que indicam a menor distância entre dois pontos. Para título de exemplificação, temos que, numa geometria euclidiana (plana), a geodésica coincide com um segmento de reta. Contudo, em geometrias não-euclidianas, como a superfície de uma esfera, a geodésica, naturalmente, não é um segmento de reta.

Dito de forma mais categórica, se $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}_4$ é um aberto, uma congruência em $\mathcal{O}$ é um conjunto de curvas de forma tal que através de cada $p \in \mathcal{O}$, passa exclusivamente uma única curva deste conjunto [20].

Uma característica relevante que uma congruência pode assumir é a de ser classificada como uma ‘congruência suave’. Caracteriza-se uma congruência como suave quando os vetores de campo correspondentes dos vetores tangentes são suaves [20].

Pode-se tentar imaginar, numa primeira aproximação, uma congruência como um “amontoado” de curvas. Os vetores tangentes a esta congruência geram um campo vetorial no aberto $\mathcal{O}$, e a congruência é caracterizada como suave se o campo vetorial gerado por tais curvas também o for [20, 21].

Uma outra forma de se tentar visualizar uma congruência é pensar no seguinte: imaginemos uma carga elétrica positiva, a forma como representamos o campo elétrico gerado por essa carga é por meio de um conjunto de curvas (vetores) saindo da mesma. Tais curvas geram um campo vetorial, que pode ser caracterizado como uma congruência.

3.1 Congruências tipo-tempo

Consideremos uma congruência suave de geodésicas do tipo-tempo, ou seja, $g^{\mu\nu}V_\mu V_\nu > 0$, parametrizadas com o próprio tempo próprio s, de forma tal que o campo vetorial V^μ de vetores tangentes às geodésicas possa ser normalizado como [22]:

$$g^{\mu\nu}V_\mu V_\nu = 1 \tag{3.1.1}$$

3.2 Tensor de projeção

A partir do campo vetorial V^μ , pode-se definir o tensor de projeção $h_{\mu\nu}$ no triespaço $\mathcal{H}$, como [22]:

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu \tag{3.2.1}$$

Este tensor possui a qualidade de projetar objetos geométricos na variedade diferenciável $\mathcal{M}_4$.
O tensor de projeção atende às características de um tensor:

(i) $h^2 = h$

Substituindo a sua definição e fazendo as devidas operações, observa-se:

$$h_{\alpha\beta}h^{\beta}{}_{\nu} = (g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta)\,(g^{\beta}{}_{\nu} - V^\beta V_\nu) = g_{\alpha\nu} - V_\alpha V_\nu = h_{\alpha\nu} \tag{3.2.2}$$

(ii) h é perpendicular a V^μ. Vejamos:

$$h_{\alpha\beta}V^\beta = g_{\alpha\beta}V^\beta - V_\alpha V_\beta V^\beta = 0 \tag{3.2.3}$$

O tensor de projeção também possui a qualidade de ser simétrico, ou seja:

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} \tag{3.2.4}$$

O tensor projetor pode ser identificado com a métrica no triespaço $\mathcal{H}$. Um determinado observador, com velocidade V^μ, localizado em um certo ponto P da variedade $\mathcal{M}_4$, cujas coordenadas são $x^\alpha(P)$, mensura a sua distância a um ponto Q na sua vizinhança, tendo como coordenadas $x^\alpha(P) + \Delta x^\alpha$, por meio da seguinte expressão [22]:

$$ds^2(\overline{PQ}) = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \left(V_\mu dx^\mu\right)^2 \tag{3.2.5}$$

Observa-se que o elemento de linha que mede a distância $\overline{PQ}$ está escrito em termos de uma parte puramente espacial $dl = \left(h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\right)^{\frac{1}{2}}$ e um outro termo que mede os intervalos de tempo $dt = V_\mu dx^\mu$ [22].

3.3 Parâmetros cinemáticos

Objetivando-se fazer uma descrição da matéria existente no Universo faz-se necessária a escolha de um referencial. Por questões de simplicidade e conveniência, o referencial que se desloca juntamente com o fluido cosmológico revela-se uma boa escolha [23].

Utilizando-se do teorema de decomposição de tensores em partes irredutíveis, a derivada covariante do tensor V^μ nos fornece quantidades que são capazes de caracterizar completamente o comportamento do fluido cosmológico, a dizer: o fator de expansão θ, o tensor de cisalhamento $\sigma_{\alpha\beta}$ (shear), e o tensor de vorticidade $\omega_{\alpha\beta}$ (rotação) [23].

A velocidade de afastamento entre dois pontos localizados no triespaço $\mathcal{H}$ é dada por [22]:

$$V^\alpha_{(rel)} = Q_{\alpha\mu}\eta^\mu \tag{3.3.1}$$

O tensor η^μ é chamado de vetor conexão. Ele liga duas curvas da congruência Γ com o mesmo valor de s. Utilizando-se do tensor projetor h, a partir do vetor conexão podemos construir (definir) um vetor perpendicular $\eta^\mu_\perp$ ao triespaço $\mathcal{H}$. Dessa forma, define-se:

$$\eta^\mu_\perp \equiv h^\mu{}_\lambda\, \eta^\lambda \tag{3.3.2}$$

O tensor $Q_{\alpha\mu}$ em (3.3.1) é definido como

$$Q^\alpha{}_\mu \equiv h^\alpha{}_\beta\, h_\mu{}^\lambda\, V^\beta{}_{;\lambda} \tag{3.3.3}$$

Tal tensor contém a informação da variação da distância (no triespaço $\mathcal{H}$) entre dois pontos na congruência Γ.

Utilizando-se do teorema de decomposição de tensores em partes irredutíveis, podemos expressá-lo como [23]:

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} \tag{3.3.4}$$

O primeiro termo θ da equação anterior é o fator de expansão. O segundo termo $\sigma_{\alpha\beta}$ da mesma equação é o tensor de cisalhamento, também conhecido na literatura como shear [24]. Este tensor possui traço nulo, e detém a qualidade de ser simétrico, ou seja:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha} = \sigma_{(\alpha\beta)} \tag{3.3.4.a}$$

O terceiro termo $\omega_{\alpha\beta}$ da equação (3.3.4) é o tensor de vorticidade (ou tensor de rotação), e detém a qualidade de ser antissimétrico, portanto:

$$\omega_{\alpha\beta} = -\, \omega_{\beta\alpha} = \omega_{[\alpha\beta]} \tag{3.3.4.b}$$

Os três termos: o fator de expansão θ, o tensor de cisalhamento $\sigma_{\alpha\beta}$, e o tensor de vorticidade $\omega_{\alpha\beta}$, podem ser expressos em termos da derivada covariante do campo vetorial V^{μ}. Dessa forma, define-se tais objetos como segue:

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(Q_{\alpha\beta} - Q_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}\, h_{[\alpha}{}^{\mu}\, h_{\beta]}{}^{\lambda}\, V_{\mu;\lambda} \tag{3.3.5}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, h^{\mu}{}_{(\alpha}\, h_{\beta)}{}^{\lambda}\, V_{\mu;\lambda} - \frac{1}{3}\,\theta\, h_{\alpha\beta} \tag{3.3.6}$$

$$\theta = h^{\alpha\lambda}\, V_{\alpha;\lambda} = V^{\alpha}{}_{;\alpha} \tag{3.3.7}$$

O tensor de cisalhamento $\sigma_{\alpha\beta}$ e o tensor de vorticidade $\omega_{\alpha\beta}$ pertencem ao triespaço $\mathcal{H}$. Partindo-se de suas definições, conclui-se que:

$$\sigma_{\mu\nu}\, V^{\mu} = 0 \tag{3.3.8}$$

$$\omega_{\mu\nu} V^{\mu} = 0 \tag{3.3.9}$$

Reescrevendo a equação (3.3.3), temos:

$$Q_{\beta\lambda} \equiv h^{\alpha}{}_{\beta}\, h^{\mu}{}_{\lambda}\, V_{\alpha;\mu} = \frac{\theta}{3}\, h_{\beta\lambda} + \sigma_{\beta\lambda} + \omega_{\beta\lambda} \tag{3.3.10}$$

Substituindo a definição do tensor projeção h no lado esquerdo da última equação, obtém-se:

$$\begin{aligned}
(\delta^{\alpha}{}_{\beta} - V^{\alpha}V_{\beta})(\delta^{\mu}{}_{\lambda} - V^{\mu}V_{\lambda})V_{\alpha;\mu} &= (\delta^{\alpha}_{\beta}\, \delta^{\mu}{}_{\lambda} - \delta^{\alpha}_{\beta} V^{\mu}V_{\lambda} - V^{\alpha}V_{\beta}\, \delta^{\mu}{}_{\lambda} + \\
&\quad + V^{\alpha}V^{\mu}\, V_{\beta}V_{\lambda})V_{\alpha;\mu} \\
&= V_{\beta;\lambda} - V_{\beta;\mu}\, V^{\mu}V_{\lambda} - V_{\alpha;\lambda}V^{\alpha}V_{\beta} + \\
&\quad + V_{\alpha;\mu}V^{\mu}V^{\alpha}V_{\beta}V_{\lambda} \\
&= V_{\beta;\lambda} - \dot{V}_{\beta}V_{\lambda} - V_{\alpha;\lambda}V^{\alpha}V_{\beta} + \dot{V}_{\alpha}V^{\alpha}V_{\beta}V_{\lambda}
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Neste trabalho, iremos trabalhar com a convenção (definição) onde o ponto {.} sobre[18] um determinado tensor significará sua derivada numa determinada direção, ou seja, o ponto representará uma derivada direcional. Dessa forma, na expressão (3.3.11) os dois primeiros termos da segunda parcela, e os dois primeiros termos da quarta parcela, serão definidos como:

$$V_{\beta;\mu}V^{\mu} \equiv \dot{V}_{\beta} \tag{3.3.11.a}$$

$$V_{\alpha;\mu}V^{\mu} \equiv \dot{V}_{\alpha} \tag{3.3.11.b}$$

O que nos permite reescrever a expressão (3.3.11) como:

$$\begin{aligned}
(\delta^{\alpha}{}_{\beta} - V^{\alpha}V_{\beta})(\delta^{\mu}{}_{\lambda} - V^{\mu}V_{\lambda})V_{\alpha;\mu} &= V_{\beta;\lambda} - \overbrace{V_{\beta;\mu}\, V^{\mu}}^{\dot{V}_{\beta}}\, V_{\lambda} - V_{\alpha;\lambda}V^{\alpha}V_{\beta} + \\
&\quad + \overbrace{V_{\alpha;\mu}V^{\mu}}^{\dot{V}_{\alpha}}\, V^{\alpha}V_{\beta}V_{\lambda} \\
&= V_{\beta;\lambda} - \dot{V}_{\beta}V_{\lambda} - V_{\alpha;\lambda}V^{\alpha}V_{\beta} + \dot{V}_{\alpha}V^{\alpha}V_{\beta}V_{\lambda}
\end{aligned} \tag{3.3.11*}$$

---

[18] Em casos onde a derivada direcional for aplicada em um objeto composto por mais de um termo, iremos representar tal operação (derivada direcional) com um ponto na parte superior à direita. Tal convenção é adotada nas referências [18], [22] e [23], e optamos por seguir a mesma convenção.

Considerando-se que

$$V_{\alpha;\lambda}V^{\alpha} = 0 \tag{3.3.12}$$

E o fato de o campo vetorial V^{μ} estar normalizado implicar em:

$$V_{\alpha}V^{\alpha} = 1 \rightarrow \dot{V}_{\alpha}V^{\alpha} = 0 \tag{3.3.13}$$

Obtém-se, finalmente,

$$h^{\alpha}{}_{\beta}\, h^{\mu}{}_{\lambda}\, V_{\alpha;\mu} = V_{\beta;\lambda} - \dot{V}_{\beta}V_{\lambda} - \overbrace{V_{\alpha;\lambda}V^{\alpha}V_{\beta}}^{0} + \overbrace{\dot{V}_{\alpha}V^{\alpha}V_{\beta}V_{\lambda}}^{0}$$
$$Q_{\beta\lambda} = V_{\beta;\lambda} - \dot{V}_{\beta}V_{\lambda} \tag{3.3.14}$$

Isolando o termo $V_{\beta;\lambda}$ (derivada covariante do campo vetorial) na expressão (3.3.14) [18]:

$$V_{\beta;\lambda} = Q_{\beta\lambda} + \dot{V}_{\beta}V_{\lambda} \tag{3.3.15}$$

Substituindo a definição do tensor $Q_{\beta\lambda}$, obtemos:

$$V_{\beta;\lambda} = \frac{\theta}{3}\, h_{\beta\lambda} + \sigma_{\beta\lambda} + \omega_{\beta\lambda} + \dot{V}_{\beta}V_{\lambda} \tag{3.3.16}$$

Identifica-se que a derivada direcional do campo vetorial $\dot{V}_{\beta}$ é a aceleração a_{β}:

$$\dot{V}_{\beta} = V_{\beta;\mu}V^{\mu} = a_{\beta} \tag{3.3.17}$$

O que nos permite reescrever a expressão (3.3.16) como [18]:

$$V_{\beta;\lambda} = \frac{\theta}{3}\, h_{\beta\lambda} + \sigma_{\beta\lambda} + \omega_{\beta\lambda} + a_{\beta}V_{\lambda} \tag{3.3.18}$$

3.4 Propagação das quantidades cinemáticas

Como vimos na seção 2.1, o fato da derivada covariante de um vetor V^{μ} não comutar, permite-nos definir o tensor de Riemann, ou tensor de curvatura:

$$V_{\alpha;\mu;\nu} - V_{\alpha;\nu;\mu} = R_{\alpha\beta\mu\nu}V^{\beta}$$

Multiplicando a definição do tensor de Riemann por V^{ν}, obtemos:

$$V_{\alpha;\mu;\nu}V^{\nu} - V_{\alpha;\nu;\mu}V^{\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu}V^{\beta}V^{\nu} \tag{3.4.1}$$

Define-se o lado direito da equação (3.4.1) como sendo a parte elétrica do tensor de Riemann $\mathcal{E}_{\alpha\mu}$:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}V^{\beta}V^{\nu} \equiv \mathcal{E}_{\alpha\mu} \tag{3.4.2}$$

Do lado esquerdo da mesma equação, a primeira parcela é identificada como sendo a derivada direcional do campo vetorial $V_{\alpha;\mu}$ ao longo de V^{ν}, que será representada por um ponto $\{\bullet\}$. Assim,

$$\left(V_{\alpha;\mu}\right)_{;\nu}V^{\nu} \equiv \left(V_{\alpha;\mu}\right)^{\bullet} \tag{3.4.3}$$

Reescrevendo a equação (3.4.1) como:

$$\left(V_{\alpha;\mu}\right)^{\bullet} - V_{\alpha;\nu;\mu}V^{\nu} = \mathcal{E}_{\alpha\mu} \tag{3.4.4}$$

Trabalhando com a segunda parcela do lado esquerdo da equação anterior, obtemos, por meio da regra da cadeia:

$$\left(V_{\alpha;\nu}\right)_{;\mu}V^{\nu} = \left(\overbrace{V_{\alpha;\nu}V^{\nu}}^{\dot{V}_{\alpha}}\right)_{;\mu} - \overbrace{\left(V_{\alpha;\nu}\right)}^{a_{\alpha}V_{\nu}+Q_{\alpha\nu}}\left(V^{\nu}{}_{;\mu}\right) \tag{3.4.5}$$

Como já vimos na seção anterior, o termo entre parênteses da primeira parcela da equação (3.4.5) é a aceleração ($a_\alpha = \dot{V}_\alpha = V_{\alpha;\nu}V^\nu$). Substituindo o primeiro termo da segunda parcela pela equação (3.3.16), temos:

$$\left(V_{\alpha;\nu}\right)_{;\mu}V^\nu = a_{\alpha;\mu} - \left(a_\alpha V_\nu + Q_{\alpha\nu}\right)\left(V^\nu{}_{;\mu}\right) \tag{3.4.5.a}$$

Trabalhando apenas com a segunda parcela da equação (3.4.5.a), encontramos:

$$\left(a_\alpha V_\nu + Q_{\alpha\nu}\right)\left(V^\nu{}_{;\mu}\right) = Q_{\alpha\nu}a^\nu V_\mu + Q_{\alpha\nu}Q^\nu{}_\mu \tag{3.4.5.b}$$

Dessa forma, podemos reescrever a equação (3.4.5) do seguinte modo:

$$\left(V_{\alpha;\nu}\right)_{;\mu}V^\nu = a_{\alpha;\mu} - Q_{\alpha\nu}a^\nu V_\mu - Q_{\alpha\nu}Q^\nu{}_\mu \tag{3.4.6}$$

Substituindo a equação (3.4.6) em (3.4.4), obtemos:

$$\left(V_{\alpha;\mu}\right)^{\bullet} = a_{\alpha;\mu} - Q_{\alpha\nu}a^\nu V_\mu - Q_{\alpha\nu}Q^\nu{}_\mu + \mathcal{E}_{\alpha\mu} \tag{3.4.7}$$

Agora, vamos projetar a equação (3.4.7) no triespaço $\mathcal{H}$, como segue:

$$\left[\left(V_{\mu;\nu}\right)^{\bullet} - a_{\mu;\nu} + Q_{\mu\gamma}a^\gamma V_\nu + Q_{\mu\gamma}Q^\gamma{}_\nu = \mathcal{E}_{\mu\nu}\right]h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta \tag{3.4.8}$$

Trabalharemos cada um dos termos da equação anterior de forma separada, para depois reunir as conclusões obtidas. A primeira parcela do lado esquerdo da equação (3.4.8) nos dá:

$$\begin{aligned} h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta\left(V_{\mu;\nu}\right)^{\bullet} &= h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta\left(a_\mu V_\nu + Q_{\mu\nu}\right)^{\bullet} \\ &= h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta\left(\dot{a}_\mu V_\nu + a_\mu \overbrace{\dot{V}_\nu}^{a_\nu} + \dot{Q}_{\mu\nu}\right) \\ &= \overbrace{h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta\,\dot{a}_\mu V_\nu}^{0} + \overbrace{h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta\,a_\mu a_\nu}^{a_\alpha a_\beta} + h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta\,\dot{Q}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\left(V_{\mu;\nu}\right)^{\bullet} = a_{\alpha}a_{\beta} + h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{Q}_{\mu\nu} \qquad (3.4.8.a)$$

A segunda parcela da equação (3.4.8) é:

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,a_{\mu;\nu} \qquad (3.4.8.b)$$

A terceira parcela da equação (3.4.8) é nula, pois o campo vetorial V^{ν} é ortogonal ao triespaço $\mathcal{H}$, assim,

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,Q_{\mu\gamma}a^{\gamma}V_{\nu} = 0 \qquad (3.4.8.c)$$

A quarta parcela da equação (3.4.8) não sofre alteração ao ser projetada, pois o tensor $Q_{\mu\nu}$ pertence ao triespaço $\mathcal{H}$, assim como o tensor projetor $h^{\mu}{}_{\nu}$. Logo,

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,Q_{\mu\gamma}Q^{\gamma}{}_{\nu} = Q_{\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta} \qquad (3.4.8.d)$$

Do lado direito da equação (3.4.8), temos,

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\mathcal{E}_{\mu\nu} = \mathcal{E}_{\alpha\beta} \qquad (3.4.8.e)$$

Reunindo todos os resultados que obtemos nas equações (3.4.8.a – 3.4.8.e), escreve-se:

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{Q}_{\mu\nu} + a_{\alpha}a_{\beta} - h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,a_{\mu;\nu} + Q_{\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta} = \mathcal{E}_{\alpha\beta} \qquad (3.4.9)$$

Tal equação contém toda informação necessária para obter as equações de evolução dos parâmetros cinemáticos: fator de expansão θ, tensor de cisalhamento $\sigma_{\alpha\beta}$, e tensor de vorticidade $\omega_{\alpha\beta}$. Por esse motivo, a partir de agora chamaremos a equação (3.4.9) de Equação Fundamental de Evolução (EFE).

3.5 Equações de evolução

Do lado direito da EFE temos a parte elétrica do tensor de Riemann, que é um tensor simétrico. Fazendo uma decomposição de Toeplitz com este tensor, temos:

$$\frac{1}{2}M_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2}M_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2}\overbrace{\mathcal{E}_{[\alpha\beta]}}^{0} \tag{3.4.10}$$

Igualando os termos semelhantes,

$$\frac{1}{2}M_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{(\alpha\beta)} \tag{3.4.10.a}$$

$$\frac{1}{2}M_{[\alpha\beta]} = 0 \tag{3.4.10.b}$$

Revisitando a Equação Fundamental de Evolução,

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{Q}_{\mu\nu} + a_{\alpha}a_{\beta} - h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,a_{\mu;\nu} + Q_{\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta} = \mathcal{E}_{\alpha\beta}$$

Com o intuito de identificar todos os termos simétricos e antissimétricos da EFE, trabalharemos com cada uma de suas parcelas separadamente.

Consideremos a primeira parcela da EFE. Substituindo a definição do tensor $Q_{\mu\nu}$, como segue:

$$\begin{aligned} h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{Q}_{\mu\nu} &= h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\left(\frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\right)^{\bullet} \\ &= h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\left[\frac{1}{3}\left(\dot{\theta}h_{\mu\nu} + \theta\,\overbrace{\dot{h}_{\mu\nu}}^{(i)}\right) + \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \dot{\omega}_{\mu\nu}\right] \end{aligned} \tag{3.4.11.a}$$

Aplicando a derivada direcional no tensor projetor $h_{\mu\nu}$,

$$(i) \rightarrow \dot{h}_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} + V_{\mu}V_{\nu}\right)^{\bullet} = \overbrace{\dot{g}_{\mu\nu}}^{0} - \left(\dot{V}_{\mu}V_{\nu} + V_{\mu}\dot{V}_{\nu}\right) \rightarrow \dot{h}_{\mu\nu} = \left(\dot{V}_{\mu}V_{\nu} + V_{\mu}\dot{V}_{\nu}\right)$$

Uma vez que os termos não nulos de (i) são proporcionais a V^{μ}, podemos descarta-los na expressão (3.4.11.a). Voltando para a mesma expressão,

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{Q}_{\mu\nu} = \frac{1}{3}h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{\theta}h_{\mu\nu} + h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{\sigma}_{\mu\nu} + h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\dot{\omega}_{\mu\nu}$$
$$= \frac{1}{3}\,\dot{\theta}h_{\alpha\beta} + h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{\sigma}_{\mu\nu} + h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{\omega}_{\mu\nu} \qquad (3.4.11.a^{*})$$

O que nos permite reescrever a EFE como:

$$\frac{1}{3}\,\dot{\theta}h_{\alpha\beta} + h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{\sigma}_{\mu\nu} + h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{\omega}_{\mu\nu} + a_{\alpha}a_{\beta} - h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,a_{\mu;\nu} + Q_{\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta} = \mathcal{E}_{\alpha\beta} \qquad (3.4.12)$$

Agora, vamos reescrever a quinta parcela da equação (3.4.12) em termos de suas partes simétrica e antissimétrica nos índices α e β, como segue:

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,a_{\mu;\nu} = \frac{1}{2}h^{\mu}{}_{(\alpha}h^{\nu}{}_{\beta)}\,a_{\mu;\nu} + \frac{1}{2}h^{\mu}{}_{[\alpha}h^{\nu}{}_{\beta]}\,a_{\mu;\nu} \qquad (3.4.13.a)$$

Efetuando o mesmo procedimento com a sexta parcela da equação (3.4.12), o termo quadrático, temos:

$$Q_{\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta} = \frac{1}{2}Q_{(\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta)} + \frac{1}{2}Q_{[\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta]} \qquad (3.4.13.b)$$

Inserindo os resultados das equações (3.4.13.a) e (3.4.13.b) em (3.4.12), tem-se

$$\frac{1}{3}\,\dot{\theta}h_{\alpha\beta} + h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{\sigma}_{\mu\nu} + h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{\omega}_{\mu\nu} + a_{\alpha}a_{\beta} - \frac{1}{2}h^{\mu}{}_{(\alpha}h^{\nu}{}_{\beta)}\,a_{\mu;\nu} - \frac{1}{2}h^{\mu}{}_{[\alpha}h^{\nu}{}_{\beta]}\,a_{\mu;\nu}$$
$$+\frac{1}{2}Q_{(\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta)} + \frac{1}{2}Q_{[\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta]} = \mathcal{E}_{\alpha\beta} \qquad (3.4.14)$$

Trataremos agora do termo quadrático $Q_{\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta}$, para identificar quais são as suas partes simétricas e antissimétricas. Substituindo a própria definição do tensor Q, tem-se:

$$Q_{\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta} = \left(\frac{1}{3}\theta h_{\alpha\gamma} + \sigma_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\gamma}\right)\left(\frac{1}{3}\theta h^{\gamma}{}_{\beta} + \sigma^{\gamma}{}_{\beta} + \omega^{\gamma}{}_{\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\theta^2 h_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta\omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma^{\gamma}{}_{\beta} + \sigma_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta} +$$

$$+ \frac{1}{3}\theta\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\gamma}\sigma^{\gamma}{}_{\beta} + \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta}$$

$$= \frac{\theta^2}{9}h_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\theta\omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma^{\gamma}{}_{\beta} + \sigma_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta} + \omega_{\alpha\gamma}\sigma^{\gamma}{}_{\beta} + \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta} \quad (3.4.14.a)$$

Identificando a parte simétrica do termo quadrático, temos:

$$\frac{1}{2}Q_{(\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta)} = \frac{\theta^2}{9}h_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma^{\gamma}{}_{\beta} + \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta} \quad (3.4.14.b)$$

E identificando a parte antissimétrica do termo quadrático,

$$\frac{1}{2}Q_{[\alpha\gamma}Q^{\gamma}{}_{\beta]} = \frac{2}{3}\theta\omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta} + \omega_{\alpha\gamma}\sigma^{\gamma}{}_{\beta} \quad (3.4.14.c)$$

De posse de todas essas informações, podemos escrever de forma completa a parte simétrica da EFE, como

$$\frac{1}{3}\dot{\theta}h_{\alpha\beta} + h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{\sigma}_{\mu\nu} + a_{\alpha}a_{\beta} - \frac{1}{2}h^{\mu}{}_{(\alpha}h^{\nu}{}_{\beta)}\,a_{\mu;\nu} + \frac{\theta^2}{9}h_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma^{\gamma}{}_{\beta} +$$

$$+\omega_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta} = \mathcal{E}_{\alpha\beta} \quad (3.4.15)$$

Do mesmo modo, podemos escrever a parte antissimétrica da EFE como

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\,\dot{\omega}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^{\mu}{}_{[\alpha}h^{\nu}{}_{\beta]}\,a_{\mu;\nu} + \frac{2}{3}\theta\omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta} + \omega_{\alpha\gamma}\sigma^{\gamma}{}_{\beta} = 0 \quad (3.4.16)$$

A equação (3.4.15) nos fornece todas as informações sobre a evolução dos parâmetros cinemáticos: fator de expansão θ e o tensor de cisalhamento $\sigma_{\alpha\beta}$. O traço de tal equação (3.4.15) nos fornece uma equação bastante relevante em Cosmologia, a equação de Raychaudhuri [23, 28]. Enquanto que a equação (3.4.16) nos fornece todas as informações sobre o parâmetro cinemático tensor de vorticidade $\omega_{\alpha\beta}$.

Vale mencionar que existem grupos de relações entre os parâmetros cinemáticos tratados nesta secção, chamadas de equações de vínculo[19]. Contudo, neste trabalho não iremos abordar tais equações. Para o/a leitor (a) interessado no tema, consultar as referências [18 e 22].

No próximo capítulo, trataremos de forma ‘qualitativa’ da interpretação física dos parâmetros cinemáticos no âmbito da Cosmologia, mais precisamente, no contexto dos Modelos Cosmológicos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

3.6 Decomposição do tensor momento-energia

Consideremos o campo vetorial V^{μ} do tipo-tempo, que representa o vetor velocidade, normalizado [23]:

$$V^{\mu}V^{\nu}g_{\mu\nu} = 1 \tag{3.6.1}$$

A distribuição de momento-energia de um fluido, medida por um observador com velocidade V^{μ}, pode ser totalmente caracterizada por um tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. Tal tensor possui a qualidade de ser simétrico, logo

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \tag{3.6.2}$$

Utilizando o teorema de decomposição de tensores em partes irredutíveis, podemos escrever o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ da seguinte maneira:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu}V_{\nu} - ph_{\mu\nu} + q_{(\mu}V_{\nu)} + \pi_{\mu\nu} \tag{3.6.3}$$

Identificando cada elemento das parcelas do tensor momento-energia$T_{\mu\nu}$, temos:

- ρ → densidade de energia total do fluido;
- p → pressão isotrópica;
- q^{μ} → propagação de calor;
- $\pi_{\mu\nu}$ → pressão anisotrópica.

---

[19] Para a descrição das equações de vínculo, a parte magnética do tensor de Riemann revela-se importante.

Os tensores propagação de calor q^μ e pressão anisotrópica $\pi_{\mu\nu}$, ambos pertencentes ao triespaço $\mathcal{H}$, cumprem os seguintes vínculos:

$$q_\mu V^\mu = 0 \tag{3.6.4.a}$$

$$\pi_{\mu\nu} V^\mu = 0 \tag{3.6.4.b}$$

$$\pi_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0 \tag{3.6.4.c}$$

$$\pi_{\mu\nu} = \pi_{\nu\mu} \tag{3.6.4.d}$$

As duas primeiras expressões (3.6.4.a) e (3.6.4.b) são consequências direta do fato dos tensores q^μ e $\pi_{\mu\nu}$ pertencerem ao triespaço $\mathcal{H}$; a terceira expressão (3.6.4.c) é pelo fato do tensor $\pi_{\mu\nu}$ ter traço nulo; e a quarta expressão (3.6.4.d) nos diz que o tensor pressão anisotrópica $\pi_{\mu\nu}$ é simétrico.

Recordando a secção 2.6, onde apresentamos as Equações de Campo de Einstein (ECE) como $G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$, tem-se uma identificação do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ com o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. Na secção 2.5, mostramos que o tensor de Einstein se submete a uma equação de conservação, expressa como $G^\alpha{}_{\nu;\alpha} = 0$. O que implica que o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ também se submete a uma equação de conservação (local) de energia,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\overbrace{\kappa}^{1} T_{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu} &= -T_{\mu\nu} \\ G^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= -T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \\ T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= 0 \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Como o índice ν está contraído, tem-se que (3.6.5) é uma equação vetorial. Multiplicando $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ pela velocidade V^μ, obtemos:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} V_\mu = 0 \tag{3.6.6}$$

Substituindo as partes irredutíveis do tensor momento-energia que apresentamos na equação (3.6.3) na expressão anterior, temos:

$$[\rho V^{\mu}V^{\nu}]_{;\nu}V_{\mu} - [ph^{\mu\nu}]_{;\nu}V_{\mu} + [q^{\mu}V^{\nu} + q^{\nu}V^{\mu}]_{;\nu}V_{\mu} + \pi^{\mu\nu}{}_{;\nu}V_{\mu} = 0 \qquad (3.6.7)$$

Trabalhando algebricamente com a primeira parcela da equação (3.6.7),

$$[\rho V^{\mu}V^{\nu}]_{;\nu}V_{\mu} = \left[\rho_{;\nu}V^{\mu}V^{\nu} + \rho\,\overbrace{V^{\mu}{}_{;\nu}V^{\nu}}^{a^{\mu}} + \rho V^{\mu}\,\overbrace{V^{\nu}{}_{;\nu}}^{\theta}\right]V_{\mu}$$

$$= \overbrace{\rho_{;\nu}V^{\nu}}^{\dot{\rho}}\,\overbrace{V^{\mu}V_{\mu}}^{1} + \rho\,\overbrace{a^{\mu}V_{\mu}}^{0} + \rho\theta\,\overbrace{V^{\mu}V_{\mu}}^{1}$$

$$[\rho V^{\mu}V^{\nu}]_{;\nu}V_{\mu} = \dot{\rho} + \rho\theta \qquad (3.6.7.a)$$

Trabalhando algebricamente agora com a segunda parcela da mesma equação,

$$[ph^{\mu\nu}]_{;\nu}V_{\mu} = \left[p_{;\nu}h^{\mu\nu} + ph^{\mu\nu}_{;\nu}\right]V_{\mu}$$

$$= p_{;\nu}\,\overbrace{h^{\mu\nu}V_{\mu}}^{0} - p(-g^{\mu\nu} + V^{\mu}V^{\nu})_{;\nu}V_{\mu}$$

$$= -p\left(-\overbrace{g^{\mu\nu}_{\;;\nu}}^{0} + \overbrace{V^{\mu}_{;\nu}V^{\nu}}^{a^{\mu}} + V^{\mu}\,\overbrace{V^{\nu}_{;\nu}}^{\theta}\right)V_{\mu}$$

$$= -p\left(\overbrace{a^{\mu}V_{\mu}}^{0} + \theta\,\overbrace{V^{\mu}V_{\mu}}^{1}\right)$$

$$= -p\theta \qquad (3.6.7.b)$$

Tratando da terceira parcela da mesma equação,

$$[q^{\mu}V^{\nu} + q^{\nu}V^{\mu}]_{;\nu}V_{\mu} = \left[\overbrace{q^{\mu}{}_{;\nu}V^{\nu}}^{\dot{q}^{\mu}} + q^{\mu}\,\overbrace{V^{\nu}_{;\nu}}^{\theta} + q^{\nu}{}_{;\nu}V^{\mu} + q^{\nu}V^{\mu}_{;\nu}\right]V_{\mu}$$

$$= \dot{q}^{\mu}V_{\mu} + \overbrace{q^{\mu}V_{\mu}}^{0}\theta + q^{\nu}{}_{;\nu}\,\overbrace{V^{\mu}V_{\mu}}^{1} + \overbrace{q^{\nu}V_{\mu}V^{\mu}_{;\nu}}^{0}$$

$$= \dot{q}^{\mu}V_{\mu} + q^{\nu}{}_{;\nu} \qquad (3.6.7.c)$$

Por fim, temos que a quarta parcela da equação (3.6.7) é

$$
\begin{aligned}
\pi^{\mu\nu}{}_{;\nu}V_{\mu} &= \left(\overbrace{\pi^{\mu\nu}V_{\mu}}^{0}\right)_{;\nu} - V_{\mu;\nu}\pi^{\mu\nu} \\
&= -\left(a_{\mu}V_{\nu} + Q_{\mu\nu}\right)\pi^{\mu\nu} \\
&= -a_{\mu}\,\overbrace{\pi^{\mu\nu}V_{\nu}}^{0} - Q_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} \\
&= -\,\overbrace{Q_{\mu\nu}}^{(i)}\,\pi^{\mu\nu}
\end{aligned}
\qquad (3.6.7.d)
$$

Lembrando da definição do tensor $Q_{\mu\nu}$, e considerando apenas a sua parte simétrica, pois o tensor pressão anisotrópica $\pi_{\mu\nu}$ é simétrico, temos:

$$
(i) \rightarrow \qquad Q_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \overbrace{\omega_{\mu\nu}}^{0}
$$

$$
Q_{(\mu\nu)} = \frac{\theta}{3}h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}
$$

$$
Q_{(\mu\nu)} \equiv \theta_{\mu\nu}
$$

Onde a parte simétrica do tensor $Q_{(\mu\nu)}$ é definida como tensor distorção $\theta_{\mu\nu}$.

Dessa forma, podemos reescrever a equação (3.6.7.d) como:

$$
\pi^{\mu\nu}{}_{;\nu}V_{\mu} = -\theta_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} \qquad (3.6.7.d^{*})
$$

Reunindo todos os resultados obtidos para cada uma das quatro parcelas (3.6.7.a $-$ 3.6.7.d*), podemos, finalmente, reescrever a equação (3.6.7) como:

$$
\dot{\rho} + \rho\theta + p\theta + \dot{q}^{\mu}V_{\mu} + q^{\nu}{}_{;\nu} - \theta_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} = 0
$$

$$
\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + \dot{q}^{\mu}V_{\mu} + q^{\mu}{}_{;\mu} - \theta_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} = 0 \qquad (3.6.8)
$$

Portanto, ao projetarmos a equação vetorial (3.6.5), paralela e ortogonalmente ao vetor V^{μ}, obtemos a equação de conservação de energia do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ (3.6.8).

Agora, iremos projetar a mesma equação vetorial (3.6.5) no triespaço $\mathcal{H}$, que é ortogonal ao campo vetorial V^{μ}, como segue:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}\, h_{\mu\alpha} = 0 \tag{3.6.9}$$

A última expressão pode ser escrita como

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}\, h_{\mu\alpha} = \overbrace{\left(T^{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\mu}\right)_{;\nu}}^{1^{\underline{a}}\ \text{parcela}} - \overbrace{T^{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\mu;\nu}}^{2^{\underline{a}}\ \text{parcela}} = 0 \tag{3.6.10}$$

Substituindo as partes irredutíveis do tensor momento-energia que apresentamos na equação (3.6.3) na 1ª parcela da equação (3.6.10), e efetuando algumas simplificações, tem-se:

$$\begin{aligned}\left(T^{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\mu}\right)_{;\nu} &= \left[\rho V^{\nu}\,\overbrace{V^{\mu}h^{\alpha}{}_{\mu}}^{0} - p h^{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\mu} + q^{\mu}V^{\nu}h^{\alpha}{}_{\mu} + q^{\nu}\,\overbrace{V^{\mu}h^{\alpha}{}_{\mu}}^{0} + \pi^{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\mu}\right]_{;\nu} \\ &= \left[-p h^{\alpha\nu} + q^{\alpha}V^{\nu} + \pi^{\alpha\nu}\right]_{;\nu}\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

Neste momento, iremos tomar a derivada covariante de cada uma das parcelas da equação (3.6.11). Para a primeira parcela, temos:

$$\begin{aligned}\left[-p h^{\alpha\nu}\right]_{;\nu} &= -p_{;\nu}h^{\alpha\nu} - p h^{\alpha\nu}{}_{;\nu} \\ &= -p_{;\nu}h^{\alpha\nu} - p\left(g^{\alpha\nu} - V^{\alpha}V^{\nu}\right)_{;\nu} \\ &= -p_{;\nu}h^{\alpha\nu} - p\left(\overbrace{g^{\alpha\nu}{}_{;\nu}}^{0} - \overbrace{V^{\alpha}{}_{;\nu}V^{\nu}}^{a^{\alpha}} - V^{\alpha}\,\overbrace{V^{\nu}{}_{;\nu}}^{\theta}\right) \\ &= -p_{;\nu}h^{\alpha\nu} + p a^{\alpha} + p\theta V^{\alpha}\end{aligned} \tag{3.6.11.a}$$

Trabalhando de forma análoga com a segunda parcela da mesma equação,

$$\begin{aligned}\left[q^{\alpha}V^{\nu}\right]_{;\nu} &= \overbrace{q^{\alpha}{}_{;\nu}V^{\nu}}^{\dot{q}^{\alpha}} + q^{\alpha}\,\overbrace{V^{\nu}{}_{;\nu}}^{\theta} \\ &= \dot{q}^{\alpha} + q^{\alpha}\theta\end{aligned} \tag{3.6.11.b}$$

E para a terceira parcela da equação (3.6.11),

$$\left[\pi^{\alpha\nu}\right]_{;\nu} = \pi^{\alpha\nu}{}_{;\nu} \tag{3.6.11.c}$$

Reunindo todos os resultados obtidos em (3.6.11.a – 3.6.11.c), podemos reescrever a equação (3.6.11) como:

$$\left(T^{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\mu}\right)_{;\nu} = -p_{;\nu}h^{\alpha\nu} + pa^{\alpha} + p\theta V^{\alpha} + \dot{q}^{\alpha} + q^{\alpha}\theta + \pi^{\alpha\nu}{}_{;\nu} \qquad (3.6.12)$$

Trabalhando algebricamente com a 2ª parcela da equação (3.6.10), temos:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\mu;\nu} &= T^{\mu\nu}\left(g^{\alpha}{}_{\mu} - V^{\alpha}V_{\mu}\right)_{;\nu} \\ &= T^{\mu\nu}\left(\overbrace{g^{\alpha}{}_{\mu;\nu}}^{0} - V^{\alpha}_{;\nu}V_{\mu} - V^{\alpha}V_{\mu;\nu}\right) \\ &= -T^{\mu\nu}\left(V^{\alpha}_{;\nu}V_{\mu} + V^{\alpha}V_{\mu;\nu}\right) \qquad (3.6.13) \end{aligned}$$

Substituindo as partes irredutíveis do tensor momento-energia na equação (3.6.13), escrevemos:

$$\begin{aligned} &T^{\mu\nu}\left(V^{\alpha}_{;\nu}V_{\mu} + V^{\alpha}V_{\mu;\nu}\right) = \\ &\quad = \left[\rho V^{\mu}V^{\nu} - ph^{\mu\nu} + q^{\mu}V^{\nu} + q^{\nu}V^{\mu} + \pi^{\mu\nu}\right]\left(V^{\alpha}_{;\nu}V_{\mu} + V^{\alpha}V_{\mu;\nu}\right) \qquad (3.6.14) \end{aligned}$$

Tratando por partes, tem-se que o produto da primeira parcela entre colchetes pelos termos entre parênteses, resulta em:

$$\begin{aligned} \left[\rho V^{\mu}V^{\nu}\right]\left(V^{\alpha}_{;\nu}V_{\mu} + V^{\alpha}V_{\mu;\nu}\right) &= \rho\,\overbrace{V^{\alpha}_{;\nu}V^{\nu}}^{a^{\alpha}}\,\overbrace{V^{\mu}V_{\mu}}^{1} + \rho\,\overbrace{V_{\mu;\nu}V^{\nu}}^{a_{\mu}}\,V^{\mu}V^{\alpha} \\ &= \rho a^{\alpha} + \rho\,\overbrace{a_{\mu}V^{\mu}}^{0}\,V^{\alpha} \\ &= \rho a^{\alpha} \qquad (3.6.14.a) \end{aligned}$$

O produto da segunda parcela entre colchetes pelos termos entre parênteses em (3.6.14) é:

$$\begin{aligned} \left[-ph^{\mu\nu}\right]\left(V^{\alpha}_{;\nu}V_{\mu} + V^{\alpha}V_{\mu;\nu}\right) &= -pV^{\alpha}_{;\nu}\,\overbrace{V_{\mu}h^{\mu\nu}}^{0} - pV^{\alpha}V_{\mu;\nu}h^{\mu\nu} \\ &= -pV^{\alpha}\,\overbrace{V^{\nu}{}_{;\nu}}^{\theta} \\ &= -p\theta V^{\alpha} \qquad (3.6.14.b) \end{aligned}$$

Continuando, temos que o produto da terceira parcela entre colchetes pelos termos entre parênteses da equação (3.6.14) é:

$$
\begin{aligned}
[q^{\mu}V^{\nu}]\left(V^{\alpha}_{;\nu}V_{\mu} + V^{\alpha}V_{\mu;\nu}\right) &= q^{\mu}\,\overbrace{V^{\alpha}_{;\nu}V^{\nu}}^{a^{\alpha}}\,V_{\mu} + q^{\mu}\,\overbrace{V_{\mu;\nu}V^{\nu}}^{a_{\mu}}\,V^{\alpha} \\
&= \overbrace{q^{\mu}a^{\alpha}V_{\mu}}^{0} + q^{\mu}a_{\mu}V^{\alpha} \\
&= q^{\mu}a_{\mu}V^{\alpha} \qquad (3.6.14.c)
\end{aligned}
$$

Tratemos agora do produto da quarta parcela entre colchetes pelos termos entre parênteses da mesma equação,

$$
\begin{aligned}
[q^{\nu}V^{\mu}]\left(V^{\alpha}_{;\nu}V_{\mu} + V^{\alpha}V_{\mu;\nu}\right) &= q^{\nu}V^{\alpha}_{;\nu}\,\overbrace{V^{\mu}V_{\mu}}^{1} + q^{\nu}V^{\alpha}\,\overbrace{V_{\mu;\nu}V^{\mu}}^{0} \\
&= q^{\nu}V^{\alpha}_{;\nu} \\
&= q^{\nu}(Q^{\alpha}_{\ \nu} + a^{\alpha}V_{\nu}) \\
&= q^{\nu}(\overbrace{\frac{\theta}{3}h^{\alpha}_{\ \nu} + \sigma^{\alpha}_{\ \nu}}^{\theta^{\alpha}_{\ \nu}} + \omega^{\alpha}_{\ \nu} + a^{\alpha}V_{\nu}) \\
&= q^{\nu}\theta^{\alpha}_{\ \nu} + q^{\nu}\omega^{\alpha}_{\ \nu} + a^{\alpha}\,\overbrace{q^{\nu}V_{\nu}}^{0} \\
&= q^{\nu}\theta^{\alpha}_{\ \nu} + q^{\nu}\omega^{\alpha}_{\ \nu} \qquad (3.6.14.d)
\end{aligned}
$$

Por último, o produto da quinta parcela entre colchetes pelos termos entre parênteses da equação (3.6.14) é:

$$
\begin{aligned}
[\pi^{\mu\nu}]\left(V^{\alpha}_{;\nu}V_{\mu} + V^{\alpha}V_{\mu;\nu}\right) &= \overbrace{\pi^{\mu\nu}V_{\mu}}^{0}\,V^{\alpha}_{;\nu} + \pi^{\mu\nu}V^{\alpha}V_{\mu;\nu} \\
&= \pi^{\mu\nu}V_{\mu;\nu}V^{\alpha} \\
&= \pi^{\mu\nu}\left(Q_{\mu\nu} + a_{\mu}V_{\nu}\right)V^{\alpha} \\
&= \pi^{\mu\nu}\left(\frac{\theta}{3}h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + a_{\mu}V_{\nu}\right)V^{\alpha} \\
&= \overbrace{\pi^{\mu\nu}\frac{\theta}{3}h_{\mu\nu}V^{\alpha}}^{0} + \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}V^{\alpha} + \overbrace{\pi^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}V^{\alpha}}^{0} + \overbrace{\pi^{\mu\nu}a_{\mu}V_{\nu}V^{\alpha}}^{0} \\
&= \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}V^{\alpha} \qquad (3.6.14.e)
\end{aligned}
$$

Reunindo todos os resultados obtidos nas equações (3.6.14.a – 3.6.14.e), podemos expressar a equação (3.6.13) como:

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}{h^{\alpha}}_{\mu;\nu} &= -T^{\mu\nu}\left(V^{\alpha}_{;\nu}V_{\mu} + V^{\alpha}V_{\mu;\nu}\right) \\
&= -\left[\rho a^{\alpha} - p\theta V^{\alpha} + q^{\mu}a_{\mu}V^{\alpha} + q^{\nu}{\theta^{\alpha}}_{\nu} + q^{\nu}\omega^{\alpha}_{\nu} + \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}V^{\alpha}\right] \qquad (3.6.15)
\end{aligned}
$$

Finalmente, substituindo as equações (3.6.12) e (3.6.15) na equação (3.6.10), obtemos:

$$
\begin{aligned}
&-p_{;\nu}h^{\alpha}_{\nu} + pa^{\alpha} + p\theta V^{\alpha} + \dot{q}^{\alpha} + q^{\alpha}\theta + \pi^{\alpha\nu}_{;\nu} - \\
&\qquad -\left\{-\left[\rho a^{\alpha} - p\theta V^{\alpha} + q^{\mu}a_{\mu}V^{\alpha} + q^{\nu}{\theta^{\alpha}}_{\nu} + q^{\nu}\omega^{\alpha}_{\nu} + \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}V^{\alpha}\right]\right\} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-p_{;\nu}h^{\alpha}_{\nu} + pa^{\alpha} + \rho a^{\alpha} + \overbrace{p\theta V^{\alpha} - p\theta V^{\alpha}}^{0} + \dot{q}^{\alpha} + q^{\alpha}\theta + \pi^{\alpha\nu}_{;\nu} + q^{\mu}a_{\mu}V^{\alpha} + \\
&\qquad + q^{\nu}{\theta^{\alpha}}_{\nu} + q^{\nu}\omega^{\alpha}_{\nu} + \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}V^{\alpha} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\rho + p)a^{\alpha} - p_{;\nu}h^{\alpha\nu} + \dot{q}^{\alpha} + q^{\alpha}\theta + q^{\mu}a_{\mu}V^{\alpha} + q^{\nu}{\theta^{\alpha}}_{\nu} + q^{\nu}\omega^{\alpha}_{\nu} + \pi^{\alpha\nu}_{;\nu} + \\
&\qquad + \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}V^{\alpha} = 0 \qquad (3.6.16)
\end{aligned}
$$

A equação (3.6.16) é a equação de conservação do momento do tensor de momento-energia $T_{\mu\nu}$.

Capítulo 4

4 MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

4.1 Breve histórico

A Cosmologia pode ser identificada como a Ciência da totalidade, o empreendimento humano cujo principal objetivo é a compreensão de tudo o que existe. Talvez, em um primeiro contato, tal empreitada possa parecer demasiadamente ambiciosa, abrindo-se espaço para questões do tipo:

Pode a espécie humana, limitada por natureza, compreender a totalidade das leis naturais?

Deixemos tais indagações para os/as nossos (as) colegas filósofos (as).

Ao longo de séculos a nossa espécie foi desenvolvendo, adquirindo, acumulando, e transmitindo diversos conhecimentos a respeito dos fenômenos naturais. Tais conhecimentos nos possibilitaram avanços variados, tanto de natureza teórica, para uma melhor compreensão do Universo e das leis naturais que o descreve, quanto técnica, para manipular recursos variados de forma a atender interesses específicos.

Munidos de tais conhecimentos, passamos a revisitar questões inquietantes e genuínas de nossa espécie, que, de acordo com os registros históricos e arqueológicos, nos acompanham desde as primeiras civilizações.

4.2 O Universo de Einstein

Toda teoria de gravitação tem, como uma consequência natural e necessária, um modelo de Universo correspondente, ou seja, uma determinada Cosmologia.

Assim como a teoria da Gravitação Universal de Newton deu origem a uma Cosmologia Newtoniana, a Teoria da Relatividade Geral de Einstein possibilitou o desenvolvimento formal de uma[20] Cosmologia Relativista.

---

[20] Para ser mais preciso, a TRG possibilita o desenvolvimento formal de vários modelos de Cosmologias Relativistas, tais como: o próprio modelo de Einstein; os modelos de FRLW; o modelo de Kasner; o modelo de Godel; dentre outros. Neste trabalho, trataremos especificamente dos modelos de FRLW.

A primeira pessoa a aplicar a TRG ao Universo como um todo foi o próprio Einstein, em 1917, inaugurando, assim, a Cosmologia Relativista. Esse trabalho foi apresentado em um artigo cujo título pode ser traduzido como "Considerações Cosmológicas da Teoria da Relatividade Geral" [3]. Chamaremos, a partir de agora, o modelo cosmológico obtido por Einstein ao aplicar a sua TRG à totalidade do cosmos de: Universo de Einstein.

No início[21] do século XX, a concepção consensual da comunidade científica sobre o cosmos era de um Universo estático (pois, até então, não existia nenhum indício de que assim não fosse), e que o Universo estivesse limitado[22] às dimensões espaciais da nossa galáxia, ou seja, à época, o Universo era concebido como do tamanho da Via Láctea.

Portanto, foi nesse contexto que Einstein aplicou a sua TRG ao cosmos, visando obter como resultado um modelo cosmológico que estivesse de acordo com a concepções de mundo da época, ou seja, de um Universo estático.

Para desenvolver o seu modelo cosmológico, Einstein precisou assumir algumas hipóteses de trabalho fundamentais: Homogeneidade e Isotropia do Universo[23]; e um Universo com simetria espacial esférica.

Ao postular que o Universo é Homogêneo, Einstein estava assumindo que o seu modelo tratava de um sistema que possuía a mesma densidade em todos os pontos, e ao postular que o Universo é Isotrópico, ele estava assumindo que o seu modelo tratava de um sistema que possuía as mesmas propriedades físicas em todas as direções [25]. Juntas, essas duas hipóteses de trabalho, Homogeneidade e Isotropia do Universo, constituem o que se conhece como Princípio Cosmológico (PC).

Um modelo de Universo identificado com uma simetria esférica, logo com uma curvatura espacial positiva, define um modelo fechado, ou seja, finito [25]. Tal característica, a finitude do cosmos, evita complicações como a divergência de grandezas físicas nas condições de contorno.

De posse do PC, de uma simetria espacial esférica, e aplicando a TRG à totalidade do cosmos, Einstein obteve como resultado um Universo não estático, posto que a natureza apenas atrativa da gravidade, causada pela deformação do tecido do espaço-tempo por corpos que possuem matéria-energia, não resulta em um modelo parado. Diante de tal obstáculo, Einstein introduziu uma constante, representada pela letra grega maiúscula Lambda Λ, às suas Equações

[21] Pelo menos até o final da década de 20, do século passado.
[22] O Universo era considerado como sendo limitado ao tamanho da Via Láctea, logo, finito.
[23] Tais propriedade serão melhor discutidas na seção 5.1 Princípio Cosmológico.

de Campo. Tal constante Λ recebeu o nome de Constante Cosmológica, e desempenhava o papel nas ECE de contrabalancear os efeitos atrativos da gravitação.

Tendo a gravidade a característica de ser apenas atrativa, a Constante Cosmológica Λ deve ser, necessariamente, de natureza apenas repulsiva.

As ECE com a Constante Cosmológica Λ podem ser expressas da seguinte maneira:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{4.2.1}$$

onde a Constante Cosmológica Λ possui dimensões de $\left[\frac{1}{(\text{comprimento})^2}\right]$. Ela não altera o formalismo das ECE, e o seu módulo deve ser tal que "anule" os efeitos atrativos da gravitação, possibilitando, assim, um modelo cosmológico estático.

Ao introduzir Λ às suas Equações de Campo, Einstein obtém, assim, um Universo Estático. Em suma, podemos identificar o Universo de Einstein com as seguintes características:

- Homogêneo e Isotrópico;
- Com simetria espacial esférica; $\rightarrow \begin{cases} \text{fechado;} \\ \text{curvatura espacial positiva;} \\ \text{finito;} \\ \text{ilimitado.} \end{cases}$
- Estático.

4.3 O "Grande Debate"

Ao longo de alguns séculos, certos objetos astronômicos, as nebulosas[24], chamaram a atenção de diversos astrônomos, que se perguntavam se tais objetos faziam parte da nossa galáxia, a Via Láctea, ou se estavam fora dela. Portanto, esses astrônomos estavam tratando de uma questão fundamental para a Cosmologia: o tamanho do Universo.

No início do século XX, questões sobre o tamanho do Universo ainda eram bastante controversas. Haviam pesquisadores que defendiam que a totalidade do cosmos estava limitada à nossa galáxia, a Via Láctea.

[24] As Nebulosas eram objetos difusos que os astrônomos observavam em determinadas regiões do céu noturno. Posteriormente, descobriu-se que tais objetos eram, na realidade, outras galáxias.

A divergência de ideias quanto à natureza das nebulosas e ao tamanho do Universo costuma ser retratada como o "Grande Debate", travado em 1920. Duas figuras importantes, ambos astrônomos estadunidenses, assumiram um papel representativo de defensores de duas ideias antagônicas: a primeira, defendida por Harlow Shapley (1885-1972), era que Universo possuía o tamanho da nossa Via Láctea, logo, as nebulosas deveriam fazer parte da nossa galáxia; a segunda, defendida por Heber Curtis (1872-1942), era que as Nebulosas estavam fora da Via Láctea, logo, o Universo deveria ser muito maior que a nossa galáxia.

No ano de 1923, o astrônomo estadunidense Edwin Hubble (1889-1953), baseando-se no trabalho da astrônoma de mesma nacionalidade, Henrietta Leavitt (1868-1921), sobre as estrelas Cefeidas[25], foi capaz de mostrar que uma determinada nebulosa, chamada de M31[26], estava fora da Via Láctea. Assim, pode-se dizer que esse trabalho de Edwin Hubble (de 1923) colocou um ponto final no "Grande Debate", ao demonstrar que o Universo é maior do que a Via Láctea.

4.4 O Universo em expansão

Em 1929, Edwin Hubble e colegas de trabalho fazem mais uma importante contribuição para uma mudança drástica na concepção de "Mundo": em 1923, ele já havia demonstrado que o Universo era muito maior do que a nossa galáxia; e no final da década de 20 do século XX, foi capaz de demonstrar também que o Universo está se expandindo.

Utilizando-se de um procedimento que mensura, de forma indireta, as velocidades das galáxias pelo desvio da luz que elas apresentam em seu espectro (onde um desvio para o vermelho, também conhecido como redshift, indica que a galáxia em questão está se afastando, e um desvio para o azul, também chamado de blueshift, indica que a galáxia em questão está se aproximando), ao analisar o comportamento de pouco mais de duas dezenas de galáxias, Edwin Hubble constatou que a maior parte delas estavam se afastando da nossa galáxia.

Além de constatar que a maior parte das galáxias observadas estavam se afastando da Via Láctea, Hubble constatou que quanto mais distante a galáxia estava da nossa galáxia, maior era a sua velocidade de afastamento. Os dados obtidos por Hubble indicavam uma lei linear, que pode ser expressa da seguinte maneira:

---

[25] Estrelas Cefeidas são estrelas gigantes, ou supergigantes, cuja luminosidade oscila com um período bem definido. Tais objetos astrofísicos foram utilizados como uma espécie de "vela padrão", possibilitando, assim, a medição de grandes distâncias em Astronomia, o que contribuiu fortemente para a origem e desenvolvimento da Astrofísica Extragaláctica.

[26] Atualmente, M31 é mais conhecida como a galáxia de Andrômeda, a galáxia espiral mais próxima da Via Láctea.

$$v = Hd \tag{4.4.1}$$

Atualmente, a equação (4.4.1) é conhecida como Lei de Hubble[27], onde v é a velocidade de afastamento[28] (medida pelo redshift) de uma certa galáxia, cuja unidade de medida é $[\mathrm{Km/s}]$, localizada a uma distância d, cuja unidade de medida é $[\mathrm{Mpc}]$. A constante de proporcionalidade H é chamada de Constante de Hubble[29], e tem como unidade de medida $[\mathrm{Km/s\,/Mpc}]$.

Tal descoberta foi bastante impactante, pois, devido aos efeitos apenas atrativos da gravitação, a expansão do Universo revelou-se como um comportamento, no mínimo, “contraintuitivo”.

4.5 O maior “erro” da vida de Einstein

Após tomar conhecimento do trabalho observacional de Edwin Hubble de 1929, que demonstrou que o Universo é dinâmico, ou seja, está se expandindo, Einstein acabou se arrependendo de ter introduzido a Constante Cosmológica Λ às suas Equações de Campo, que desempenhava o papel de tornar o seu modelo cosmológico estático.

Entretanto, mesmo com a Constante Cosmológica, o Universo de Einstein era altamente instável, ou seja, ao sofrer qualquer tipo perturbação o seu modelo de Universo sai do equilíbrio, tornando-se dinâmico. A instabilidade do Universo de Einstein foi demonstrada de forma rigorosa pelo astrônomo inglês Arthur Eddington (1882–1944), no ano de 1930 [26].

Certos pesquisadores argumentam que a introdução da Constante Cosmológica Λ às ECE não configura necessariamente um erro de Einstein. Muito pelo contrário. Pois, mantendo-se o formalismo da TRG, a introdução de Λ possibilitou o desenvolvimento formal de diversos modelos cosmológicos, posteriores ao Universo de Einstein.

---

[27] Fazendo-se uma espécie de reparação histórica, vale mencionar que o matemático, físico e padre belga Georges Lemaître (1894-1966) já havia publicado, em 1927, um artigo que trazia, basicamente, as mesmas conclusões que o trabalho de 1929 de Edwin Hubble, portando, dois anos antes. Entretanto, Lemaître publicou o seu artigo em francês, e, por esse motivo, não teve o seu trabalho difundido em outros países. Dessa forma, atualmente não é incomum encontrar a expressão Lei de Hubble-Lemaître para se referir ao trabalho que demonstrou que o Universo se encontra numa fase de expansão. Por esse motivo, a constante de proporcionalidade H da mesma lei passou a ser chamada de Constante de Hubble-Lemaître.

[28] Ou de aproximação (blueshift), para casos bem específicos.

[29] Atualmente, sabe-se que a Constante de Hubble H não é precisamente uma constante, pois ela assume valores distintos em diferentes estágios da evolução do Universo. Para representar o valor que a Constante de Hubble possui na atual fase de evolução do Universo utiliza-se: H_0.

É possível que o seu erro esteja mais ligado ao fato dele ter proposto um modelo de Universo altamente instável.

4.6 O Universo em expansão acelerada

Ao final do século passado, em 1998, a comunidade científica foi surpreendida com dados observacionais que indicavam o seguinte: o Universo não apenas se encontra em uma fase de expansão, mas de expansão acelerada. Tal evidência observacional revelou-se como um grande desafio para o Modelo Cosmológico Padrão.

Nesse contexto, a Constante Cosmológica Λ sofreu um resgate histórico. Com o intuito de tentar explicar o comportamento acelerado da expansão do Universo[30], Λ foi reintroduzida nas ECE. Ironicamente, Λ foi inicialmente introduzida pelo próprio Einstein, em 1917, nas suas Equações de Campo, para tornar o Universo estático. Com o trabalho de 1929 de Hubble, ela foi descartada. E, 81 anos depois, Λ foi resgatada para, desta vez, desempenhar um papel completamente distinto nas ECE, ou seja, para tornar o Universo dinâmico. A Constante Cosmológica reaparece para tentar explicar um modelo de Universo com expansão acelerada.

[30] Diversas hipóteses de trabalho foram levantadas para tentar explicar o caráter acelerado da expansão do Universo, dentre as quais pode-se mencionar: energia escura, k-essência, eletromagnetismo não-linear, campos escalares exóticos, dentre outras.

Capítulo 5

5 OS MODELOS COSMOLÓGICOS DE FLRW

Neste capítulo, trataremos dos modelos cosmológicos oriundos dos trabalhos de:

- Alexander Friedmann (1888–1925) → físico, matemático, meteorologista e cosmólogo russo;
- Georges Lemaître (1894–1966) → matemático, físico, cosmólogo e padre católico belga;
- Howard Percy Robertson (1903–1961) → matemático e físico estadunidense;
- Arthur Geoffrey Walker (1909–2001) → matemático e físico britânico.

Em 1917, Einstein foi o primeiro a apresentar um modelo cosmológico relativista, que possuía as seguintes características: um Universo estático, homogêneo, isotrópico, finito, e com simetria espacial esférica. Em 1922, Alexander Friedmann deu uma grande contribuição para o desenvolvimento da Cosmologia, publicando um artigo intitulado “Sobre a curvatura do espaço” [27], onde ele apresenta um segundo modelo cosmológico relativista. O modelo cosmológico de Friedmann tinha muitas características em comum com o modelo cosmológico de Einstein, ou seja, também era homogêneo, isotrópico, finito e com curvatura espacial positiva (esférico). Entretanto, o modelo cosmológico de Friedmann possuía a qualidade de ser dinâmico, com possibilidades de fases de expansão, ou de contração.

5.1 Princípio Cosmológico

Como já foi discutido em seções anteriores, tanto Einstein quanto Friedmann utilizaram como hipótese de trabalho que o nosso Universo pudesse ser caracterizado com os seguintes atributos: homogêneo e isotrópico. Tais caraterísticas, homogeneidade e isotropia do Universo, quando consideradas simultaneamente, passaram a ser chamadas de Princípio Cosmológico (PC).

Ao caracterizarmos o triespaço $\mathcal{H}$ como homogêneo, estamos lhe atribuindo a qualidade de ser invariante frente às translações. E, ao caracterizarmos o triespaço $\mathcal{H}$ como isotrópico, estamos lhe atribuindo a qualidade de ser invariante frente às rotações.

Desse modo, assumir que o triespaço $\mathcal{H}$ é homogêneo significa dizer que o nosso Universo possui as mesmas propriedades em toda parte, ou seja, que o nosso Universo possui densidade uniforme. Em grandes escalas ($\geq$ 200 Mpc), diferentes regiões do Universo são bastante semelhantes.

Ao passo que, assumir que o triespaço $\mathcal{H}$ é isotrópico significa dizer que o nosso Universo não possui direção preferencial. Em outras palavras, em qualquer direção que se observa, o Universo possui as mesmas propriedades.

Um triespaço com tais qualidades, homogeneidade e isotropia, possui um número máximo de simetrias, ou seja, podemos caracterizá-lo como um triespaço maximamente simétrico. Devito a essa propriedade, o tensor de curvatura $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, em tal triespaço $\mathcal{H}$, é drasticamente simplificado.

5.2 Geometrias Homogêneas e Isotrópicas

Consideremos um sistema de coordenadas comóveis (gaussiano),

$$x^{\mu} = (t, x^{i}), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5.2.1}$$

O elemento de linha pode ser escrito como:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)d\sigma^2 \tag{5.2.2}$$

onde o termo $d\sigma^2$ é:

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}dx^{i}dx^{j} \tag{5.2.3}$$

Tem-se que a métrica γ_{ij} só depende de x^1, x^2, x^3, ou seja, trata-se de uma métrica "puramente" espacial.

Vale mencionar que tanto o termo dt^2 (lembremos que este termo é multiplicado pela velocidade da luz ao quadrado, porém, estamos assumindo $c \equiv 1$), quanto o termo $A^2(t)$ possuem unidade de medida $[\text{comprimento}]^2$. Enquanto que o termo $d\sigma^2$ é, naturalmente, adimensional.

O termo $d\sigma^2$, identificado com a geometria espacial, possui assinatura $(+,+,+)$, e pode ser obtido por meio do teorema para um espaço maximamente simétrico.

Nesse contexto, podemos escrever o tensor de curvatura como:

$$R_{ijkl} = K\left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}\right) \tag{5.2.4}$$

onde K é uma constante.

Contraindo (5.2.4) com a métrica γ^{jl}, obtemos o tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{ik} &= \gamma^{jl}R_{ijkl} \\ &= K\,\gamma^{jl}\left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}\right) \\ &= K\left(\gamma_{ik}\,\overbrace{\gamma^{jl}\gamma_{jl}}^{3} - \gamma^{jl}\gamma_{il}\gamma_{jk}\right) \\ &= K\left(3\gamma_{ik} - \gamma_i^{\,j}\gamma_{jk}\right) \\ &= K(3\gamma_{ik} - \gamma_{ik}) \\ &= 2K\gamma_{ik} \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Agora, contraindo (5.2.5) com a métrica γ^{ik}, obtemos o escalar de Ricci:

$$\begin{aligned} R &= \gamma^{ik}R_{ik} \\ &= \gamma^{ik}2K\gamma_{ik} \\ &= 2K\,\overbrace{\gamma^{ik}\gamma_{ik}}^{3} \\ &= 6K \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Considerando que o elemento de linha ds^2 está escrito no sistema de coordenadas esféricas (χ, θ, ϕ), obtemos como resultado apenas três possibilidades para a geometria do triespaço $\mathcal{H}$:

- $K = 0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow$ triespaço plano (euclidiano):

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2 \tag{5.2.7}$$

- $K = +1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow$ triespaço fechado (esférico):

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \mathrm{sen}^2(\chi)d\Omega^2 \tag{5.2.8}$$

- $K = -1 \rightarrow \mathbb{H}^3 \rightarrow$ triespaço aberto (hiperbólico):

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \mathrm{senh}^2(\chi)d\Omega^2 \tag{5.2.9}$$

Onde $d\Omega^2$ é o elemento de ângulo sólido, definido como:

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \mathrm{sen}^2(\theta)d\phi^2 \tag{5.2.10}$$

Neste momento, façamos a seguinte mudança de coordenadas: $(\chi, \theta, \phi) \rightarrow (\bar{r}, \theta, \phi)$, onde as coordenadas χ e $\bar{r}$ se relacionam por meio da seguinte expressão:

$$d\chi = \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - K\bar{r}^2}} \tag{5.2.11}$$

Portanto,

$$\chi(\bar{r}) = \int \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - K\bar{r}^2}} \tag{5.2.12}$$

O que nos permite reescrever $d\sigma^2$ como:

$$d\sigma^2 = \frac{d\bar{r}^2}{1 - K\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \, , K = 0, \pm 1. \tag{5.2.13}$$

Finalmente, podemos reescrever (5.2.2) da seguinte maneira:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)\left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - K\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2\right] \tag{5.2.14}$$

- Para o caso de $K = 0$, temos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2] \tag{5.2.14.a}$$

A expressão (5.2.14.a) representa um espaço-tempo euclidiano, ou seja, plano.

- Para o caso $K = +1$, temos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)\left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2\right] \tag{5.2.14.b}$$

A expressão (5.2.14.b) representa um espaço-tempo fechado, ou seja, com simetria espacial esférica.

- E para o caso de $K = -1$, temos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)\left[\frac{d\bar{r}^2}{1 + \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2\right] \tag{5.2.14.c}$$

A expressão (5.2.14.c) representa um espaço-tempo aberto, ou seja, com simetria espacial hiperbólica.

A equação (5.2.14) é um conjunto de três equações que representam as três possibilidades para a geometria do espaço-tempo em Universo homogêneo e isotrópico, e recebe o nome de métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

Agora, tratemos com um pouco mais de detalhes do termo $A(t)$. Definindo:

$$a(t) \equiv \frac{A(t)}{A_0} \tag{5.2.15}$$

$$r \equiv A_0 \bar{r} \tag{5.2.16}$$

$$\kappa \equiv \frac{K}{A_0^2} \tag{5.2.17}$$

onde A_0 possui dimensão de $[\text{comprimento}]$. Tais definições permitem-nos reescrever a equação (5.2.14) como:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2 d\Omega^2\right] \tag{5.2.18}$$

Onde o objeto adimensional $a(t)$ é conhecido na literatura como fator de escala. Nota-se que na expressão (5.2.18) apenas o fator de escala $a(t)$ e a constante κ são indeterminadas. Mais adiante, veremos que as ECE fornecem os valores precisos para tais objetos.

5.3 Métricas de FLRW para uma congruência do tipo-tempo

Consideremos um observador comóvel (gaussiano):

$$V^{\mu} = \delta^{\mu}{}_{0} = (1, 0, 0, 0) \tag{5.3.1}$$

Tem-se que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para as métricas de FLRW é diagonal, e, escrita de forma matricial,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-a^2}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \mathrm{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{5.3.2}$$

E, para um observador comóvel, a métrica é:

$$V_{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\nu} = g_{\mu\nu}\delta^{\nu}{}_{0} = g_{\mu 0} = g_{0\mu} \rightarrow$$

$$V_{\mu} = g_{\mu 0} \tag{5.3.3}$$

O tensor projetor $h_{\mu\nu}$, identificado com o triespaço $\mathcal{H}$, para as métricas de FLRW também é diagonal, e, matricialmente, é representado como:

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-a^2}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\mathrm{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{5.3.4}$$

Recordando que $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu$, podemos representar o segundo termo, na forma matricial,

$$V_\mu V_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.5}$$

O que nos permite identificar os elementos do tensor projetor $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu 0} = h_{0\mu} = 0 \tag{5.3.6.a}$$

$$h_{ij} = g_{ij} \tag{5.3.6.b}$$

Para um tensor projetor misto $h^{\mu}{}_{\nu}$, temos:

$$\begin{aligned} h^{\mu}{}_{\nu} &= \delta^{\mu}{}_{\nu} - \overbrace{V^{\mu}}^{\delta^{\mu}_{0}} V_\nu \\ &= \delta^{\mu}{}_{\nu} - \delta^{\mu}_{0} V_\nu \\ h^{\mu}{}_{0} &= \delta^{\mu}{}_{0} - \delta^{\mu}_{0} V_0 \\ &= \delta^{\mu}{}_{0}\left(1 - \overbrace{V_0}^{1}\right) \\ &= \delta^{\mu}{}_{0}(0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.3.7.a}$$

E identificamos também que

$$h^i{}_j = \delta^i{}_j - \overbrace{V^i V_j}^{0}$$
$$= \delta^i{}_j \qquad (5.3.7.b)$$

5.3.1 Parâmetros cinemáticos para um observador comóvel

Recordando a derivada covariante para um campo vetorial V^μ, e efetuando algumas passagens algébricas, temos:

$$V_{\mu;\nu} = \overbrace{V_{\mu}}^{\delta^0_\mu}{}_{,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\overbrace{V_\lambda}^{\delta^0_\lambda}$$
$$= \overbrace{\delta^0{}_{\mu,\nu}}^{0} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,\delta^0_\lambda$$
$$= -\Gamma^0{}_{\mu\nu} \qquad (5.3.1.1)$$

Dessa forma, faz-se necessário calcular os símbolos de Christoffel para um observador comóvel. Recordando,

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}\right)$$

Para um observador gaussiano, eles valem:

$$\Gamma^0{}_{0\nu} = \frac{1}{2}\overbrace{g^{00}}^{1}\left(\overbrace{g_{00,\nu}}^{0} + \overbrace{g_{0\nu,0}}^{0} - \overbrace{g_{0\nu,0}}^{0}\right) = 0$$
$$\Gamma^0{}_{0\mu} = \Gamma^0{}_{\mu 0} = 0 \qquad (5.3.1.2)$$

A expressão (5.3.1.2) nos diz que, matricialmente, todos os elementos da primeira linha e da primeira coluna são nulos. Continuando,

$$\Gamma^0{}_{ij} = \frac{1}{2}\overbrace{g^{00}}^{1}\left(\overbrace{g_{0i,j}}^{0} + \overbrace{g_{0j,i}}^{0} - g_{ij,0}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}g_{ij,0} \qquad (5.3.1.3)$$

Dessa forma, conclui-se que os símbolos de Christoffel para um observador comóvel é igual, a menos de uma constante $-1/2$, a derivada da métrica em relação ao tempo ($\mu = 0$).

De posse desses resultados, podemos representar $V_{\mu;\nu}$ de forma matricial como:

$$V_{\mu;\nu} = -\Gamma^0_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\Gamma^0{}_{00} & -\Gamma^0{}_{01} & -\Gamma^0{}_{02} & -\Gamma^0{}_{03} \\ -\Gamma^0{}_{10} & -\Gamma^0{}_{11} & -\Gamma^0{}_{12} & -\Gamma^0{}_{13} \\ -\Gamma^0{}_{20} & -\Gamma^0{}_{21} & -\Gamma^0{}_{22} & -\Gamma^0{}_{23} \\ -\Gamma^0{}_{30} & -\Gamma^0{}_{31} & -\Gamma^0{}_{32} & -\Gamma^0{}_{33} \end{bmatrix}$$

$$V_{\mu;\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-)-\frac{1}{2}g_{11,0} & (-)-\frac{1}{2}g_{12,0} & (-)-\frac{1}{2}g_{13,0} \\ 0 & (-)-\frac{1}{2}g_{21,0} & (-)-\frac{1}{2}g_{22,0} & (-)-\frac{1}{2}g_{23,0} \\ 0 & (-)-\frac{1}{2}g_{31,0} & (-)-\frac{1}{2}g_{32,0} & (-)-\frac{1}{2}g_{33,0} \end{bmatrix}$$

$$V_{\mu;\nu} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11,0} & g_{12,0} & g_{13,0} \\ 0 & g_{21,0} & g_{22,0} & g_{23,0} \\ 0 & g_{31,0} & g_{32,0} & g_{33,0} \end{bmatrix} \qquad (5.3.1.4)$$

Para um observador comóvel, a métrica g_{ij} é diagonal:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \dfrac{-a^2}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 \mathrm{sen}^2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$g_{ij} = a^2 \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \mathrm{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{5.3.1.5}$$

Derivando a métrica g_{ij} em relação ao tempo ($\mu = 0$), temos

$$g_{ij,0} = 2\,a\,\dot{a} \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \mathrm{sen}^2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$g_{ij,0} = 2\frac{\dot{a}}{a} \overbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{-a^2}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 \mathrm{sen}^2(\theta) \end{bmatrix}}^{g_{ij}}$$

$$g_{ij,0} = 2\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \tag{5.3.1.6}$$

O que nos permite reescrever (5.3.1.1) da seguinte maneira:

$$V_{\mu;\nu} = -\Gamma^{0}_{\mu\nu} = (-) - \frac{1}{2} g_{ij,0}$$

$$V_{\mu;\nu} = +\frac{1}{2}\left(\frac{2\dot{a}}{a} g_{ij}\right)$$

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\dot{a}}{a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \tag{5.3.1.7}$$

Lembrando que $V^{\mu} = \delta^{\mu}{}_{0} = (1, 0, 0, 0)$, tem-se que para um observador comóvel a aceleração vale:

$$\begin{aligned} a_{\mu} &= V_{\mu;\nu}V^{\nu} \\ &= \overbrace{\delta^{0}{}_{\mu;\nu}}^{0} V^{\nu} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.3.1.8}$$

Ou seja, este observador comóvel é também um observador geodésico.

Neste momento, vamos calcular o fator de expansão θ para um observador comóvel. Recordando,

$$\theta = h^{\alpha\lambda}V_{\alpha;\lambda} = V^{\lambda}{}_{;\lambda} = V^{\alpha}{}_{;\alpha}$$

O que nos permite escrever:

$$\begin{aligned} \theta &= g^{\mu\nu}V_{\mu;\nu} \\ &= g^{ij}V_{i;j} = \overbrace{g^{ij}g_{ij}}^{3}\frac{\dot{a}}{a} \\ &= 3\frac{\dot{a}}{a} \end{aligned} \tag{5.3.1.9}$$

Agora, vamos calcular o tensor de cisalhamento $\sigma_{\mu\nu}$ para um observador comóvel. Recordando,

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h^{\alpha}{}_{(\mu}h^{\beta}{}_{\nu)}V_{\alpha;\beta} - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}$$

O que nos permite escrever:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{1}{2}\delta^{k}{}_{(i}\delta^{l}{}_{j)}V_{k;l} - \frac{1}{3}\overbrace{\theta}^{3\frac{\dot{a}}{a}}\overbrace{h_{ij}}^{g_{ij}} \\
&= \frac{1}{2}\delta^{k}{}_{(i}\delta^{l}{}_{j)}\frac{\dot{a}}{a}g_{kl} - \left(\frac{1}{3}\times\frac{3\dot{a}}{a}g_{ij}\right) \\
&= g_{il}\delta^{l}{}_{j}\frac{\dot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}g_{ij}\right) \\
&= \left(g_{ij}\frac{\dot{a}}{a}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}g_{ij}\right) \\
\sigma_{ij} &= 0
\end{aligned}
\qquad (5.3.1.10)
$$

Finalmente, vamos calcular o tensor de vorticidade $\omega_{\mu\nu}$ para um observador comóvel. Lembrando,

$$
\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(Q_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu}\right) = \frac{1}{2}h^{\alpha}{}_{[\mu}h^{\lambda}{}_{\nu]}V_{\alpha;\lambda}
$$

O que nos permite escrever:

$$
\begin{aligned}
\omega_{ij} &= \frac{1}{2}\delta^{k}{}_{[i}\delta^{l}{}_{j]}V_{k;l} \\
&= \frac{1}{2}\delta^{k}{}_{[i}\delta^{l}{}_{j]}\frac{\dot{a}}{a}g_{kl} \\
&= 0
\end{aligned}
\qquad (5.3.1.11)
$$

Na expressão anterior, como g_{kl} é um objeto simétrico, ao multiplicarmos por um objeto antissimetrizado, os termos se anulam.

Recordando a seção 3.4, tem-se que o traço da parte simétrica da EFE nos fornece a equação de Raychaudhuri [28], que, para um observador comóvel, é escrita como:

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + \overbrace{2\sigma^2}^{0} - \overbrace{2\omega^2}^{0} - \overbrace{a^{\mu}{}_{;\mu}}^{0} &= R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} \\
\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} &= R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}
\end{aligned}
\qquad (5.3.1.12)
$$

Na seção 3.4 apresentamos a expressão (3.4.2), que é a parte elétrica do tensor de Riemann $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$, definida como:

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\mu\beta\nu} V^{\mu} V^{\nu}$$

O traço da parte elétrica do tensor de Riemann é:

$$g^{\alpha\beta}\mathcal{E}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} V^{\mu} V^{\nu}$$
$$\mathcal{E}^{\alpha}{}_{\alpha} = R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} V^{\mu} V^{\nu}$$
$$\mathcal{E}^{\alpha}{}_{\alpha} = R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} \tag{5.3.1.13}$$

Utilizando (5.3.1.13) em (5.3.1.12), escreve-se:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = \mathcal{E}^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{5.3.1.14}$$

Como $\theta = 3\,\dot{a}/a$, trabalhando o lado esquerdo da expressão (5.3.1.14), tem-se que o primeiro termo vale:

$$\dot{\theta} = 3(\dot{a}.a^{-1})^{\bullet} = 3(\ddot{a}.a^{-1} + (-1)a^{-2}\,\dot{a}.\dot{a})$$
$$= 3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \tag{5.3.1.14.a}$$

Enquanto que o segundo termo de (5.3.1.14) é:

$$\frac{\theta^2}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{9\dot{a}^2}{a^2}\right)$$
$$\frac{\theta^2}{3} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \tag{5.3.1.14.b}$$

Juntando (5.3.1.14.a) com (5.3.1.14.b):

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \overbrace{-3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}}^{0}$$

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{5.3.1.14.c}$$

O que nos permite reescrever (5.3.1.14) como:

$$\mathcal{E}^{\alpha}{}_{\alpha} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{5.3.1.15}$$

5.4 Solução das ECE para um observador comóvel

Tem-se que as Equações de Campo de Einstein (ECE) são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\,T_{\mu\nu}$$

Contraindo as ECE com a métrica $g^{\mu\nu}$, obtemos:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overbrace{g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}}^{4}R = -\,g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

$$R^{\nu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}4R = -T^{\nu}_{\nu}$$

$$R - 2R = -T$$

$$-R = -T\;(-1)$$

$$R = T \tag{5.4.1}$$

Substituindo (5.4.1) nas ECE,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T = -\,T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T - \,T_{\mu\nu} \tag{5.4.2}$$

Multiplicando (5.4.2) por $V^{\mu}V^{\nu}$, temos:

$$R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}T - T_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} \tag{5.4.3}$$

O termo do lado esquerdo de (5.4.3) foi definido na seção anterior como $\mathcal{E}^{\alpha}{}_{\alpha}$, assim,

$$\mathcal{E}^{\alpha}{}_{\alpha} = \frac{1}{2}\overbrace{V_{\nu}V^{\nu}}^{1}\,T - T_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}$$

$$\mathcal{E}^{\alpha}{}_{\alpha} = \frac{1}{2}T - T_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} \tag{5.4.4}$$

Um fluido cósmico perfeito pode ter seu tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ totalmente caracterizado, por um observador V^{μ}, pela densidade de energia total do fluido (ρ), e pela pressão isotrópica (p) desse mesmo fluido. Tais características do fluido cósmico nos permite escrever [18]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)V_{\mu}V_{\nu} - pg_{\mu\nu} \tag{5.4.5}$$

Contraindo (5.4.5) com a métrica $g^{\mu\nu}$, obtemos

$$g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = (\rho + p)g^{\mu\nu}V_{\mu}V_{\nu} - p\,\overbrace{g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}}^{4}$$

$$T^{\nu}{}_{\nu} = (\rho + p)\,\overbrace{V^{\nu}V_{\nu}}^{1} - 4p$$

$$T = \rho + p - 4p$$

$$T = \rho - 3p \tag{5.4.6}$$

Utilizando o resultado de (5.4.6) em (5.4.4), escrevemos:

$$\mathcal{E}^{\alpha}{}_{\alpha} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \tag{5.4.7}$$

O que nos permite igualar as expressões (5.3.1.15) e (5.4.7),

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p)$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) \tag{5.4.8}$$

Como vimos na seção (3.6), a equação de conservação de energia do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ para um observador V^{μ} é

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + \dot{q}^{\mu}V_{\mu} + q^{\mu}{}_{;\mu} - \theta_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} = 0$$

Como estamos tratando de um fluido cósmico perfeito em um triespaço homogêneo e isotrópico, tem-se que a propagação de calor é nula ($q^{\mu} = 0$), e, naturalmente, não existe pressão anisotrópica ($\pi^{\mu\nu} = 0$). Tais considerações nos permite escrever a equação de conservação de energia para o tensor $T_{\mu\nu}$ como:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + \overbrace{\dot{q}^{\mu}V_{\mu}}^{0} + \overbrace{q^{\mu}{}_{;\mu}}^{0} - \overbrace{\theta_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu}}^{0} = 0$$
$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0 \tag{5.4.9}$$

Como o fator de expansão vale $\theta = 3\,\dot{a}/a$, reescrevemos (5.4.9),

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \tag{5.4.10}$$

Utilizando a equação (5.4.8), podemos isolar a pressão isotrópica (p):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p)$$
$$6\frac{\ddot{a}}{a} = -\rho - 3p$$
$$-3p = 6\frac{\ddot{a}}{a} + \rho$$
$$-p = \frac{6}{3}\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{3}\rho\,(-1)$$
$$p = -2\,\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3}\rho \tag{5.4.11}$$

Utilizando (5.4.11) em (5.4.10), obtemos:

$$\dot{\rho} + 3\left[\rho + \left(-2\,\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3}\rho\right)\right]\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

$$\dot{\rho} + \left[3\rho - 6\,\frac{\ddot{a}}{a} - \rho\right]\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

$$\dot{\rho} + \left[2\rho - 6\,\frac{\ddot{a}}{a}\right]\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

$$\left[\dot{\rho} + 2\rho\frac{\dot{a}}{a} - 6\,\frac{\ddot{a}}{a}\frac{\dot{a}}{a} = 0\right](\times\, a^2)$$

$$\dot{\rho}a^2 + 2\rho\frac{\dot{a}}{a}a^2 - 6\,\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2}a^2 = 0$$

$$\overbrace{\dot{\rho}a^2 + 2\rho\dot{a}a}^{(\rho a^2)^{\bullet}} - \overbrace{6\ddot{a}\dot{a}}^{-3(\dot{a}^2)^{\bullet}} = 0$$

$$(\rho a^2)^{\bullet} = 3(\dot{a}^2)^{\bullet} \tag{5.4.12}$$

Por meio de uma integral primeira da expressão (5.4.12), obtemos

$$\int (\rho a^2)^{\bullet} = 3\int (\dot{a}^2)^{\bullet}$$

$$\rho a^2 = 3\dot{a}^2 + \text{const} \tag{5.4.12.a}$$

Manipulando a expressão (5.4.12.a),

$$\rho a^2 = 3\dot{a}^2 + \text{const}$$

$$\rho = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\text{const}}{a^2}$$

$$\rho - \frac{\text{const}}{a^2} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}$$

$$\frac{\rho}{3} - \frac{1}{a^2}\frac{\overbrace{\text{const}}^{\mathrm{K}}}{3} = \frac{\dot{a}^2}{a^2}$$

$$\frac{\rho}{3} - \frac{\mathrm{K}}{a^2} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \tag{5.4.12.b}$$

Definindo o objeto que se conhece como “parâmetro de Hubble” H:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \qquad (5.4.12.c)$$

Escreve-se

$$H^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{K}{a^2} \qquad (5.4.13)$$

A expressão (5.4.13) são as Equações de Friedmann. Tais equações relacionam dois parâmetros passíveis de serem mensurados, ou seja, a partir das Equações de Friedmann pode-se confrontar alguns modelos cosmológicos com dados astrofísicos, e de cosmologia observacional, tais como a densidade atual de matéria-energia (ρ) do Universo, e a taxa de expansão do Universo.

5.5 Recuperando as unidades de medida

Por questões de conveniência, ao longo de todo o trabalho, utilizamos o Sistema de Unidades Naturais, onde define-se a velocidade da luz e a constante de acoplamento das Equações de Campo de Einstein (ECE) como:

$$c = 8\pi G \equiv 1 \qquad (5.5.1)$$

onde G é a constante da Gravitação Universal de Newton.

Tal convenção revela-se bastante útil quando estamos efetuando diversas passagens e manipulações algébricas que carregam tais constantes. No entanto, após a realização de todas as contas, é interessante recuperarmos as unidades de medidas das expressões mais importantes, o que possibilita uma análise qualitativa mais rica dessas expressões chaves.

Tratemos das seguintes expressões:

(i) $$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) \qquad (5.4.8)$$

(ii) $$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \qquad (5.4.10)$$

(iii)
$$H^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{K}{a^2} \tag{5.4.13}$$

Para recuperarmos as suas unidades de medida, deve-se proceder da seguinte maneira:

- onde tiver o termo $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$, multiplicamos por $\frac{1}{c}$;
- onde tiver o termo ρ, multiplicamos por c^2;
- e o lado da expressão que for referente ao conteúdo de matéria-energia deve ser multiplicado pela constante de acoplamento das ECE $\rightarrow \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Assim, para a expressão (i), temos:

(i)
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p)$$
$$\frac{\ddot{a}}{a}\frac{1}{c}\frac{1}{c} = -\frac{1}{6}\frac{8\pi G}{c^4}(\rho c^2 + 3p)$$
$$\frac{\ddot{a}}{a}\frac{1}{c^2} = -\frac{4}{3}\frac{\pi G}{c^4}(\rho c^2 + 3p)$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\frac{\pi G c^2}{c^4}(\rho c^2 + 3p)$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\frac{\pi G}{c^2}(\rho c^2 + 3p)$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

Para a expressão (ii),

(ii)
$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$
$$\dot{\rho} + 3(\rho c^2 + p)\frac{\dot{a}}{a}\frac{1}{c} = 0$$
$$\dot{\rho} + 3\left(\rho c + \frac{p}{c}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

E para a expressão (iii),

(iii) $$H^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{K}{a^2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \frac{1}{c^2} = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{\rho c^2}{3} - \frac{K}{a^2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = c^2\left(\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\rho c^2}{3} - \frac{Kc^2}{a^2}\right)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{\rho c^4}{3} - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{Kc^2}{a^2}$$

5.6 Equações de estado das eras cosmológicas

Diversos dados de Cosmologia Observacional, dentre os quais vale mencionar a Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas (RCFM)[31], indicam que o nosso Universo passou por fases muito mais densas e quentes que a fase atual.

Em um determinado estágio de evolução, dependendo da densidade de energia total do Universo, ele pode ser categorizado por uma era específica, como veremos a seguir.

Os modelos convencionais da Cosmologia adotam, para o fluido cósmico, uma equação de estado onde a pressão isotrópica p e a densidade total do fluido ρ se relacionam linearmente da seguinte maneira [18]:

$$p = \lambda\rho \quad , \qquad \lambda = \text{const} \tag{5.6.1}$$

Onde os valores de λ estão limitados pelo intervalo $0 \leq \lambda \leq 1$.

Utilizando a expressão (5.6.1) em (5.4.10),

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

$$\dot{\rho} + 3(\rho + \lambda\rho)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

[31] Trata-se de uma radiação eletromagnética, oriunda de uma fase onde o Universo encontrava-se muito mais quente e denso que atualmente, localizada na faixa do espectro que identificamos como micro-ondas, com temperatura média de 2,7 K. Foi prevista teoricamente em 1948, pelos físicos: George Gamov, Hans Bethe e Ralph Alpher. O artigo que apresentou tal previsão ficou popularmente conhecido como: artigo alfa-beta-gama ($\alpha\beta\gamma$), devido aos sobrenomes dos autores. A sua descoberta observacional foi feita em 1965, de forma "acidental", posto que os "descobridores" da RCFM não faziam ideia do que estavam observando.

$$\dot{\rho} = -3\rho(1+\lambda)\frac{\dot{a}}{a}$$

$$\frac{\overbrace{\dot{\rho}}^{(\ln\rho)^{\bullet}}}{\rho} = -3(1+\lambda)\ \frac{\overbrace{\dot{a}}^{(\ln a)^{\bullet}}}{a}$$

$$(\ln\rho)^{\bullet} = [-3(1+\lambda)](\ln a)^{\bullet}$$

$$(\ln\rho)^{\bullet} = \left(\ln a^{-3(1+\lambda)}\right)^{\bullet}$$

$$\ln\rho = \ln a^{-3(1+\lambda)}$$

$$e^{\ln\rho} = e^{\ln a^{-3(1+\lambda)}}$$

$$\rho = a^{-3(1+\lambda)} \qquad (5.6.2)$$

Acabamos de encontrar uma expressão (5.6.2) que relaciona a densidade de energia total do Universo (ρ) com a sua taxa de expansão (fator de escala (a)). Por meio de tal expressão, para valores específicos de λ, obtém-se as equações de estado do fluido cósmico para diferentes estágios da evolução do Universo:

- $\lambda = -1$ → Constante Cosmológica:

$$\rho = a^{-3(1-1)}$$

$$\rho = a^{-3(0)}$$

$$\rho = a^{0}$$

$$\rho = 1 \qquad (5.6.3)$$

- $\lambda = 0$ → Poeira:

$$\rho = a^{-3(1+0)}$$

$$\rho = a^{-3}$$

$$\rho = \frac{1}{a^{3}} \qquad (5.6.4)$$

- $\lambda = \frac{1}{3}$ → Radiação:

$$\rho = a^{-3\left(1+\frac{1}{3}\right)}$$

$$\rho = a^{-3\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$\rho = a^{-4}$$

$$\rho = \frac{1}{a^4} \tag{5.6.5}$$

- $\lambda = 1 \rightarrow$ Matéria "dura":

$$\rho = a^{-3(1+1)}$$

$$\rho = a^{-3(2)}$$

$$\rho = a^{-6}$$

$$\rho = \frac{1}{a^6} \tag{5.6.6}$$

Capítulo 6

6 CONCLUSÃO

Considerando os registros históricos que primeiro relatam o anseio de nossa espécie por tentar compreender a origem das coisas (vivas e inanimadas), a sua própria origem, e a origem do Mundo[32] , percebe-se que as questões das quais tratam a Cosmologia Moderna são indagações genuínas da espécie humana. São questões tão antigas quanto a nossa capacidade de indagar. Questionamentos como:

- De onde viemos?
- Para onde vamos?
- Do que tudo é feito?
- Quando surgimos enquanto espécie?
- Quando surgiu o Mundo?
- Terá o Mundo um fim, no espaço, e no tempo?
- Por que existe algo, ao invés de nada?
- Etc.

São comuns em todas as civilizações, independentemente de posição geográfica (espacial), ou temporal.

Incialmente, de acordo com os registros históricos, recorreu-se aos mitos como uma primeira tentativa de se compreender o Mundo e seus princípios. Estórias riquíssimas de criatividade e erudição foram criadas com o propósito de responder algumas dessas indagações genuínas.

O próximo passo em tal empreitada foi dado por meio das religiões. Diversos deuses e deusas foram criados para desempenharem o papel de senhores e senhoras dos fenômenos naturais. Criou-se deuses (as) para praticamente tudo: para o Sol, para o mar, para os raios, para o tempo, etc.

---

[32] A palavra “Mundo” com a inicial maiúscula, neste contexto, está sendo utilizada como sinônimo das palavras: Universo, Cosmos, ou seja, tudo o que existe.

Séculos mais tarde, alguns (as) filósofos (as)[33] buscaram, desta vez, exclusivamente por meio da razão, explicar a origem de todas as coisas. Alguns elementos, à época tidos como fundamentais, serviram de inspiração e de substrato para o desenvolvimento das primeiras cosmogonias (visões de mundo baseadas em um pensamento racional, lógico). Tiveram àqueles que se amparam no fogo, enquanto substrato do mundo. Distintos pensadores se basearam na água, outros na terra, e tantos outros no ar. Eis os ditos quatro elementos fundamentais da antiguidade: terra, fogo, água e ar. Também se criou modelos cosmogônicos onde os quatro elementos foram considerados em conjunto, cada um desempenhando um papel específico na estrutura lógica do modelo.

No entanto, pensava-se que a composição do ser humano e de seu mundo (o planeta Terra), fosse completamente distinta da composição de tudo o que o cerca, ou seja, diferente da composição dos céus, e dos astros. O substrato do "firmamento" foi chamado de éter.

Entretanto, não apenas a composição mundana era considerada distinta da composição celestial, mas também as regras que determinavam os fenômenos no mundo sublunar[34] deveriam ser distintas das regras dos fenômenos celestiais.

O mundo sublunar era tido como mutável e imperfeito, composto pelos quatro elementos fundamentais: terra, água, fogo e ar. Enquanto que o mundo supralunar, o mundo celestial, era tido como imutável e perfeito, composto exclusivamente pelo éter, o substrato do "firmamento".

Em resumo, por muitos séculos, as questões inquietantes e instigantes, aqui chamadas de "indagações genuínas", passaram por diversas abordagens, a dizer: míticas, fantasiosas, e religiosas, até caírem no colo da Filosofia. A Filosofia, devido ao seu compromisso com a razão e com a lógica, foi capaz de investigar tais questões com bastante profundidade, abrindo e pavimentando caminhos posteriormente percorridos pelos filósofos naturais[35].

Por muitos anos, as questões genuínas de nossa espécie ficaram apartadas do debate científico. O trabalho de vários filósofos naturais contribuiu substancialmente para que a Ciência pudesse fazer parte da empreitada de se buscar respostas, ainda que aproximadas, para tais indagações.

---

[33] Pensadores (as) de diversas civilizações, de diferentes regiões, e de diferentes épocas.

[34] Na antiguidade, acreditava-se que tudo o que estava acima da órbita da nossa Lua era imutável, perfeito. Inclusive a nossa Lua, de acordo com essa visão de Mundo, deveria ser perfeita e imutável.

[35] Diversos filósofos naturais podem ser considerados como os precursores dos físicos e físicas. Podendo até ser considerados como os fundadores da própria Física, enquanto Ciência Moderna.

Diversos filósofos naturais desempenharam importante papel para que as questões sobre o funcionamento do Mundo pudessem ser apreciadas pela Ciência Moderna. Simbolicamente[36], podemos citar:

- Nicolau Copérnico (1473–1543) → por suas contribuições para a mudança de paradigma do modelo geocêntrico (Terra como o centro do Universo) para o modelo heliocêntrico (Sol no centro do Sistema Solar);
- Johannes Kepler (1571–1630) → pela elaboração de leis fundamentais (Leis de Kepler), aplicáveis ao movimento dos planetas do Sistema Solar;
- Galileu Galilei (1564–1642) → por suas importantes contribuições para o desenvolvimento do método científico, pelo estudo metódico do movimento dos corpos, e por suas observações astronômicas (imprescindíveis para a consolidação do modelo heliocêntrico);
- Isaac Newton (1642–1727)[37] → pela elaboração das leis fundamentais da mecânica (Leis de Newton), e pela elaboração da sua Teoria da Gravitação Universal.

Dentre as contribuições mencionadas, vale destacar o fato de Galileu Galilei ter feito as seguintes observações e constatações: manchas e crateras na nossa Lua, fases no planeta Vênus, e as quatro maiores luas de Júpiter, orbitando-o. Tais constatações foi um golpe sem chances de recuperação para o modelo geocêntrico, bem como derrubou a ideia de que a Lua, e todos os objetos acima da órbita lunar, deveriam ser imutáveis e perfeitos.

Isaac Newton, ao desenvolver a sua mecânica, demonstrou que tanto os corpos mundanos (sublunar, terrenos) quanto os corpos celestiais (a Lua, os planetas, os satélites naturais de outros planetas, cometas, etc.) obedecem às mesmas leis. Portanto, àquela ideia de que deveriam existir leis específicas para descrever os fenômenos mundanos, e que seriam completamente distintas das leis que descrevem os fenômenos do "firmamento", não poderia mais ser mantida. Galileu mostrou que o "firmamento" era dinâmico (mutável), e Newton apresentou as leis que regem tal dinamismo.

Nos próximos séculos, a Mecânica Newtoniana revelou-se uma teoria robusta, precisa, bastante satisfatória para as necessidades do nosso dia a dia, e suficientemente capaz de

---

[36] Naturalmente, houveram muitas pessoas que contribuíram para esse processo. Por questão de espaço e objetividade, escolheu-se apenas alguns indivíduos chaves para representarem, simbolicamente, essa empreitada. E ainda vale destacar que, mesmo os indivíduos que tiveram as suas principais contribuições citadas, fizeram muito mais do que foi brevemente mencionado.

[37] De acordo com o calendário juliano, Isaac Newton nasceu no dia 25 de dezembro de 1642. Contudo, no calendário gregoriano, ele nasceu no dia 04 de janeiro de 1643.

descrever a maioria dos fenômenos do Sistema Solar[38]. Tal robustez e precisão fez com que a maior parte da comunidade de físicos (as) fizesse uma (grande) aposta: a de que as leis físicas são as mesmas não apenas na Terra, na sua vizinhança, e no Sistema Solar, mas que as leis físicas são as mesmas em todo o Universo.

Tal aposta possibilitou a elaboração de uma Cosmologia Newtoniana.

Séculos após o desenvolvimento da Teoria da Gravitação Universal de Newton (TGUN), na metade da segunda década do século passado, uma nova teoria de gravitação foi formulada: a Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein.

O próprio Einstein fez uma grande aposta na sua TRG, e a aplicou na totalidade do Universo, inaugurando a era da Cosmologia Relativista. Einstein foi o primeiro, mas não foi o único, tão pouco o último, a aplicar a sua TRG ao Cosmos.

No contexto da Cosmologia Relativista, a "afirmação" de que as leis físicas são universais constitui uma hipótese de trabalho fundamental, por vezes, necessária, para que se possa construir uma estratégia de investigação.

Diferentemente de outras áreas da Física, cujo objeto de estudo pode ser criado e recriado, controlado minuciosamente em laboratórios, o objeto de estudo da Cosmologia é a totalidade do Universo. Não podemos recriá-lo em laboratórios, muito menos controlá-lo. Podemos apenas observá-lo[39], e compararmos as suas características com as previsões dos modelos criados pelos (as) cosmólogos (as).

Com a participação da Ciência, ou seja, da Cosmologia Moderna, na empreitada de tentar entender o Mundo, o debate passou do nível simplesmente qualitativo, para o nível quantitativo. A Cosmologia Relativista foi capaz de elaborar modelos cosmológicos que apresentavam previsões sobre características físicas do Cosmos, tais como: sua dinâmica, sua densidade, sua idade, dentre outras.

Profusos cosmólogos desenvolveram diversos modelos de Mundo, que apresentam diferentes tipos de limitações, bem como possibilidades de avanços, tanto práticos quanto teóricos.

O presente trabalho consistiu em se refazer parte do caminho criado e traçado por alguns desses cosmólogos, representados pelas figuras de: Alexander Friedmann, George Lemaître, Howard Robertson e Arthur Walker, cujos trabalhos deram origem aos Modelos FLRW.

---

[38] Como foi mencionado no Capítulo 2, a TGUN enfrentou alguns obstáculos intransponíveis, apenas superados com o desenvolvimento da TRG.

[39] E ainda assim tal atividade é surpreendente!

A estratégia aqui escolhida foi, por meio das chamadas congruências tipo-tempo, obter-se as Métricas de Friedmann, cujo centenário do seu primeiro trabalho de 1922 é justamente neste ano.

Os Modelos FLRW constituem a base teórica do Modelo Cosmológico Padrão (MCP), também conhecido como modelo Λ-CDM (Λ-Cold Dark Matter). Ao passo que o estudo de tais modelos pode atuar como um laboratório matemático para se adquirir maturidade para estudos futuros em temas de pesquisa em Gravitação e Cosmologia.

O MCP usufrui de considerável prestígio na comunidade científica, posto que se trata de um modelo que descreve de forma bastante coerente diversas características do Universo Observável[40]. No entanto, muitos desafios se apresentam para o MCP, tais como: o problema da previsão de uma singularidade inicial; causa (e natureza) da expansão acelerada do Universo; natureza da matéria e energia escura (se de fato existirem); o problema da formação de grandes estruturas em um Universo onde o Princípio Cosmológico (homogeneidade e isotropia) é válido; a chamada Tensão de Hubble; dentre outros desafios.

Ainda existem muitos pontos a serem melhor formulados e trabalhados no MCP, tanto do ponto de vista teórico, quanto observacional e fenomenológico. O autor pretende, futuramente[41], poder fazer parte da empreitada de se tentar contornar alguns dos desafios mencionados.

Algumas das principais referências[42] utilizadas para o desenvolvimento do presente trabalho são obras de um desses cosmólogos, o professor Mário Novello, que constroem e trilham caminhos para colegas contemporâneos e para a posteridade seguirem. A pesquisa sistemática em Cosmologia, no Brasil, consolidou-se, em grande parte, devido aos esforços, talento e competência do professor Novello. O autor deste trabalho registra, aqui, a sua profunda gratidão e admiração.

[40] Tais como: a Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas (RCFM); taxa de formação dos elementos químicos mais leves (Hidrogênio e Hélio), chamada de Nucleossíntese Primordial; um razoável acordo entre a previsão da Idade do Universo com a idade dos objetos mais antigos já observados; dentre outras.

[41] Em um doutorado.

[42] [18, 22, 23].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] A. Einstein, “Die Feldgleichungen der Gravitation”, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, pp. 844-847, 25.11.1915.

[2] I. Brito, “As Equações de Campo da Gravitação”, Boletim da SPM 73, 100 Anos de Relatividade Geral, pp. 127-144, 2015.

[3] D. Soares, Tópicos em cosmologia relativista, Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

[4] R.E. de Souza, Introdução à Cosmologia, EDUSP, São Paulo, 2004.

[5] A. Einstein, “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie", Sitzungsberichte Berl. Akad, 1917.

[6] A. M. V. Toribio, F. T. Falciano, H. Velten, J. C. Fabris, J. D. Toniato, Universo em expansão: centenário do modelo cosmológico de Friedmann, Cosmo-UFES, PPGCosmo, Cadernos de Astronomia, vol. 3, nº 1, 2022.

[7] H. C. Ohanian and R. Ruffini, Gravitation and spacetime, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[8] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, Gravitation, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.

[9] B. Schutz, A first course in general relativity, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[10] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley, New York, 1972.

[11] S. W. Hawking, and G.F.R. Ellis, The Large Scale Structure of Space Time, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[12] L. M. G. Furtado *et al*, “Introdução à Álgebra Tensorial” (notas de curso), CBPF, Disponível em: <

http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/mo00298.2011_02_09_15_40_48.pdf >, Acesso em: 24 de maio de 2022.

[13] R. Gaelzer, “Física-Matemática” (apostila), IF-UFRGS, Porto Alegre, Disponível em: < https://professor.ufrgs.br/rgaelzer/files/fismat_complete-aluno.pdf >, Acesso em: 24 de maio de 2022.

[14] M. R. Pelicer, “Cálculo Tensorial e Relatividade Geral” (TCC), Centro de Ciências Exatas-Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, p. 74, 2016.

[15] I. Terek, “Um mini-curso sobre tensores” (notas de aula), IME-USP, Disponível em: < https://www.ime.usp.br/~terek/textos/tensores.pdf >, Acesso em: 24 de maio de 2022.

[16] H. Garotti, “As quatro forças fundamentais da natureza” (site), IF-UFRGS, Métodos Computacionais para Licenciatura (FIS01043), Disponível em: < http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20032/Humberto/ >, Acesso em: 24 de maio de 2022.

[17] C. L. Sales, I. C. Moreira, C. A. B. Diógenes, Centenário do eclipse de Sobral: 1919-2019, Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência-SBPC, São Paulo, 2021.

[18] M. Novello, Cosmologia, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.

[19] N. F. Delben, “Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos” (dissertação), Instituto de Geociências e Ciências Exatas-IGCE, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”-Unesp, Rio Claro, p.140, 2010.

[20] J. M. Armaleo, “Teoremas de singularidades para geodésicas causales y gravedad de Gauss-Bonnet” (TCC), Faculdad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, p. 102, 2017.

[21] C. S. Santos, “Condições de Energia de Hawking e Ellis e a Equação de Raychaudhuri” (dissertação), Centro de Ciência Exatas e da Terra, Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, p. 97, 2011.

[22] M. Novello, Cosmologia Relativista, livro da II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF, 1980.

[23] M, Novello, N. P. Neto, S. E. P. Bergliaffa, Programa Mínimo de Cosmologia, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2010.

[24] G. F. R. Ellis, “Relativistic cosmology” (republication), Gen Relativ Gravit, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, pp. 581–660, 2009.

[25] D. Soares, “O Universo estático de Einstein”, Revista Brasileira de Ensino de Física, Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, vol. 34, nº 1, Belo Horizonte, 2012.

[26] D. Soares, Ensaios de Cosmologia Moderna, Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021.

[27] A. Friedmann, “Über die Krümmung des Raumes”, Zeitschrift für Physik 10, 377, 1922.

[28] A. Raychaudhuri, “Relativistic cosmology. I”, Phys. Rev., Theoretical Physics Department, Indian Association for the Cultivation of Science, Jadavpur, Calcutta, India, vol. 98, nº 4, 1955.